



## **O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática**

Ana Carolina Ferreira Cordeiro

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelos Profs. Me. Henrique Marins de Carvalho e Dr<sup>a</sup> Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni.

IFSP  
São Paulo  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Cordeiro, Ana Carolina Ferreira.

O que é a Curva Ciclóide: Ideias Centrais no Ensino da  
Matemática / Ana Carolina Ferreira Cordeiro. - São Paulo: IFSP, 2013.  
88f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de  
São Paulo

Orientadores: Henrique Marins de Carvalho e Mariana Pelissari  
Monteiro Aguiar Baroni

1. Cicloide. 2. Tautócrona. 3. Braquistócrona. 4. Ensino da  
Matemática. 5. Interdisciplinaridade I. Título do trabalho.

---

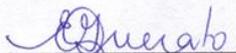
**ANA CAROLINA FERREIRA CORDEIRO**

**O QUE É A CURVA CICLOIDE: IDEIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciada em Matemática.

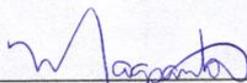
**APROVADA EM 19/06/2013**

**CONCEITO: 10,0**



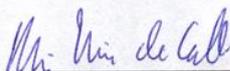
---

Prof. Me. Elisabete Teresinha Guerato  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia  
Membro da Banca



---

Prof. Me. Marco Aurélio Granero Santos  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia  
Membro da Banca



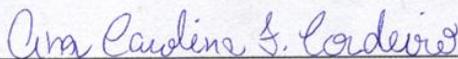
---

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia  
Orientador



---

Prof. Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia  
Orientadora



---

Aluna: Ana Carolina Ferreira Cordeiro



*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”*

*Galileu Galilei*



*Aos meus Pais e às minhas irmãs*



## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me dar a grande oportunidade de aprender sobre o mundo.

Agradeço à minha mãe, Adriana, pois sem ela jamais teria o conhecimento da Régua Mágica, e nunca teria chegado a este tema; ao meu pai, Luis, e minhas irmãs Ana Luisa e Ana Julia que sempre me deram grande apoio;

Ao meu namorado, Marcos, que me ajudou com diversas sugestões e foi muito compreensivo com a minha dedicação ao trabalho.

Aos meus colegas do IFSP, pelo apoio no dia a dia, sempre tentando ajudar uns aos outros: Alberto, Elígio, Cideni, Ana Olívia, Anderson (Bigafour), Anderson (Perucão), Fernando Pavan, Filipe, Diogo (Paçoca), Oscar, Gisele. Em especial, Denys e Douglas, que desde o início do curso me ajudaram nas mais diversas situações.

Aos diversos professores que me proporcionaram o conhecimento que tenho hoje, desde o ensino básico até o superior. Em especial: Ms Elisabete Guerato por ter orientado minha iniciação científica e por ter contribuído nesses momentos iniciais da pesquisa; ao Prof. Ms Henrique Marins de Carvalho que foi o primeiro a sugerir este assunto como tema do trabalho e pela paciência e dedicação das orientações; à Profa. Dra. Mariana P. M. A. Baroni, pela grande colaboração e empenho às orientações, inclusive na elaboração de uma das seções; ao professor Ramsés Buffa, por disponibilizar um material muito importante ao trabalho; à Profa. Dra. Cristina Lopomo Defendi; e, por fim, todo o corpo docente de Licenciatura em Matemática do IFSP.



## RESUMO

Tendo em vista a riqueza de temas contemplados pela Curva Cicloide, este trabalho resgata o estudo da curva, tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior. Timidamente ela surgiu na História da Ciência e se tornou uma chave para o desenvolvimento do Cálculo Variacional (ramo da Matemática Aplicada), envolvendo desde ciência moderna até estudos econômicos. Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a importância do estudo da Cicloide, mostrando sua interdisciplinaridade latente e sua relevância entre os mais diversos campos da Ciência. A partir de pesquisa bibliográfica, tendo como principais autores Bustillos e Sassine (2011) e Coelho (2008), mostraremos como se deu a história da Curva desde seus primórdios até os dias de hoje. Também é apresentada a demonstração das equações paramétricas da Curva Ciclóide através de Geometria Analítica, com vetores. Por fim, são propostas três atividades aos professores dos Ensinos Fundamental II, Médio e Superior.

**Palavras-chaves:** Cicloide, Tautócrona, Braquistócrona, Ensino da Matemática, Interdisciplinaridade.



## WHAT IS THE CYCLOID: MAIN IDEAS IN THE STUDY OF MATHEMATICS

### ABSTRACT

Taking into consideration the wide variety of themes covered by the Cycloid curve, this analysis revisits the curve's study in the Fundamental and Higher Education. This curve rose in the Science's History quite shyly and became a key reference for development for Variational Calculus (branch of Applied Mathematics), passing through modern science until economic studies. The main objective of this study is to show how important the Cycloid's study is, demonstrating its interdisciplinary latent and its relevance between the most diverse fields of Science. From biography research and considering the main authors Bustillos and Sassine (2011) and Coelho (2008), we will present how was the story of the Curve from its beginnings to the contemporary days. Still, it will be demonstrated the parametric equations of the cycloid curve through Analytic Geometry using vectors. Finally, it has been proposed three activities for teachers of Elementary, High school and College.

**Keywords:** Cicloide; Tautócrona; Braquistócrona; Ensino da Matemática; Interdisciplinaridade.



## LISTA DE FIGURAS

**Pág.**

Figura 1 - A Curva Cicloide criada pela roda de um carro que gira ao longo de uma rua lisa.....	21
Figura 2 – Dois Skatistas deslizam por rampas diferentes, uma reta e a outra curva. Qual chegará primeiro ? .....	22
Figura 3 – Das infinitas curvas possíveis de descida de um skatista, entre os pontos A e B, e sob o efeito da gravidade, qual delas será a mais rápida? .....	23
Figura 4 – Qual dos Skatistas chegará primeiro ao ponto C? O que está no ponto A ou o que está no ponto B? .....	23
Figura 5 - Galileu Galilei.....	27
Figura 6 - A Curva Cicloide criada pela roda de uma charrete que gira ao longo de uma reta. ....	28
Figura 7 - Curva Tautócrona. ....	30
Figura 8 - Cristhian Huygens.....	31
Figura 9 – Relógio Cicloidal.....	32
Figura 10 – Movimento da Cicloide. ....	35
Figura 11 – “Passo 2”: Vetores.....	36
Figura 12 – Construção da Curva Cicloide utilizando conceitos de Desenho Geométrico.....	39
Figura 13 – Início da construção Geométrica da Curva Cicloide.....	40
Figura 14 – Construção Geométrica da Curva Cicloide. ....	42
Figura 15 – Epicicloide e Hipocicloide.....	43
Figura 16 – Régua Mágica e curvas criadas com sua utilização.....	43
.....	44
Figura 17 – Espirograf.....	44
Figura 18 – Verso da tampa do Espirograf: instruções de utilização.....	44
Figura 19 – Movimento da Terra e da Lua no Espaço. ....	45
Figura 20 – Esquema explicativo do fenômeno de formação das fases da Lua. ....	46
Figura 21 – Movimento da Translação da Lua. ....	46
Figura 22 – Curvas utilizadas na Atividade 3 para o cálculo do problema a Braquistócrona. ....	48



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
PREFÁCIO .....	19
1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA .....	21
1.1. Afinal, o que é uma Cicloide? .....	21
1.2. Mas, para que serve a Curva Cicloide? .....	21
2 CONTEXTO HISTÓRICO .....	27
2.1. Cicloide.....	27
2.2. Tautócrona .....	29
2.3. Braquistócrona .....	32
3 PARAMETRIZAÇÃO DA CURVA CICLOIDE .....	35
4 APLICAÇÕES DIDÁTICAS.....	39
4.1. Construção da Curva Cicloide utilizando Desenho Geométrico .....	39
4.2. Comparação da Hipocicloide gerada pela Régua Espirógrafo com a Translação da Lua.....	42
4.2.1. Curvas Derivadas da Curva Cicloide: Epicycloide e Hipocicloide .....	42
4.2.2. Régua Espirógrafo .....	43
4.2.3. Fases da Lua e Translação da Lua em Relação ao Sol.....	45
4.3. O problema da Braquistócrona.....	47
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
REFERÊNCIAS.....	51
ANEXO A – APÊNDICE SOBRE A CICLOIDE NA OBRA DE TORRICELLI, <i>DE PARABOLE</i> .....	55
ANEXO B – DEMONSTRAÇÃO DA TAUTÓCRONA, RETIRADA DE COELHO (2008).....	57
ANEXO C – LINHAS DE COMANDO DO MAPLE UTILIZADAS PARA RESOLVER O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA .....	83



## PREFÁCIO

Tudo começou com meu encantamento pelas curvas geradas pela régua Espirógrafo. Até então, era pequena e achava simplesmente bonito. Mas, em meio a uma pesquisa na Internet, verifiquei que as curvas de que sempre gostei não eram meras curvas, e sim curvas matemáticas denominadas Cicloides (do grego *kujloidês* = circular).

No final do meu 5º Semestre em Licenciatura em Matemática, procurei professores que gostariam de estudar essa curva e apresentei os dados que já havia pesquisado sobre ela. Com sorte, comecei uma Iniciação Científica com a professora Elisabete Guerato e pude dar continuidade a essa curiosidade que me despertou a Curva Cicloide.

As Cicloides são curvas que aparecem de diversas formas em nosso dia-a-dia. A partir de pesquisas e leituras, verifiquei que essa curva é pouco conhecida, mesmo entre os matemáticos. Ainda que tenha tantas aplicações, poucas são as referências encontradas na literatura sobre sua história e seu desenvolvimento.

Comecei a me questionar o porquê de uma curva tão aplicável não ser estudada em nenhum momento pelos graduandos em Matemática, ou ainda nem ser mencionado algo tão interessante no Ensino Básico.

Este trabalho pretende apresentar a curva cicloide e suas diversas aplicações, inclusive no Ensino Básico.



## 1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Para melhor compreensão do leitor neste trabalho, é necessário entender o que é uma *Curva Cicloide*, visto que a mesma é desconhecida entre muitos matemáticos. Neste capítulo faremos considerações importantes para dar continuidade ao tema sem que haja dúvidas sobre os termos utilizados.

### 1.1. Afinal, o que é uma Cicloide?

Vamos pensar em uma roda de carro que apresenta um ponto fixo para observação. Agora, pensando nessa roda em movimento, sobre uma rua lisa, vamos observar a trajetória desse ponto fixo. A curva descrita por esse ponto é a curva Cicloide (Figura 1).

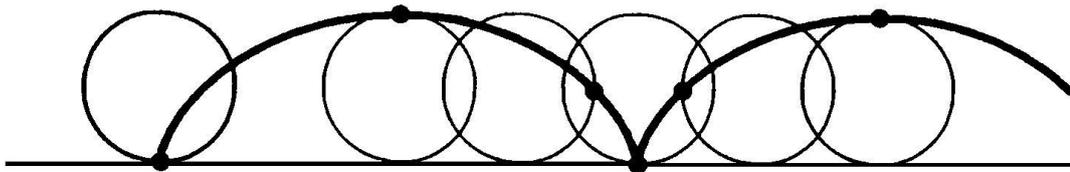


Figura 1 - A Curva Cicloide criada pela roda de um carro que gira ao longo de uma rua lisa.  
Fonte: Retirado de Reginaldo (2012)

Essa Curva foi observada por Galileu enquanto olhava pela janela uma charrete passando na rua. Intrigado com a curva que enxergou quando a roda da charrete fazia um movimento completo, resolveu estudá-la, utilizando conceitos da Física, e a nomeou de “Cicloide” (BUSTILLOS E SASSINE, 2011).

Uma formalização da definição de cicloide foi feita por Coelho (2008, p. 12), que diz “é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola sobre uma reta sem deslizar”.

### 1.2. Mas, para que serve a Curva Cicloide?

A Curva Cicloide é a representação gráfica das resoluções dos problemas chamados “Braquistócrona” e “Tautócrona”. Para entender os problemas da

Braquistócrona e da Tautócrona, vamos começar realizando alguns questionamentos e representações gráficas, tal como fizeram Bustillos e Sassine (2011):

**1ª Questão:** “Na Figura 2 apresenta-se o desenho de dois skatistas descendo por curvas radicais, um desce por um plano inclinado e outro por uma curva. Supondo que os dois skatistas tenham o mesmo peso e que sob o efeito da gravidade os dois partem simultaneamente do ponto superior A até o ponto inferior B. A pergunta é a seguinte: qual deles atingirá o ponto B em primeiro lugar, isto é, qual deles será o mais rápido, quem percorre o plano inclinado ou quem percorre a curva?” (p. 16).

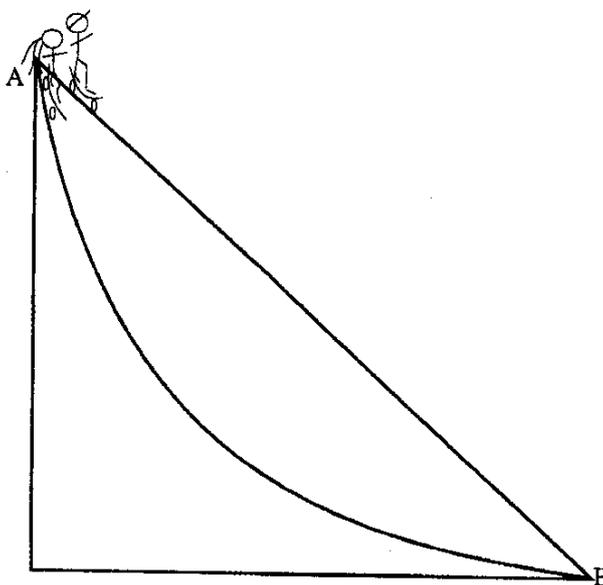


Figura 2 – Dois Skatistas deslizam por rampas diferentes, uma reta e a outra curva. Qual chegará primeiro ?

Fonte: Retirado de Bustillos e Sassine (2011, p. 16).

**2ª Questão:** “Segundo o enunciado do problema anterior, entre as infinitas curvas possíveis de descida de um skatista, desde o ponto A até o B (ver Figura 3), e sob o efeito da gravidade, qual das curvas será a mais rápida?” (p. 17).

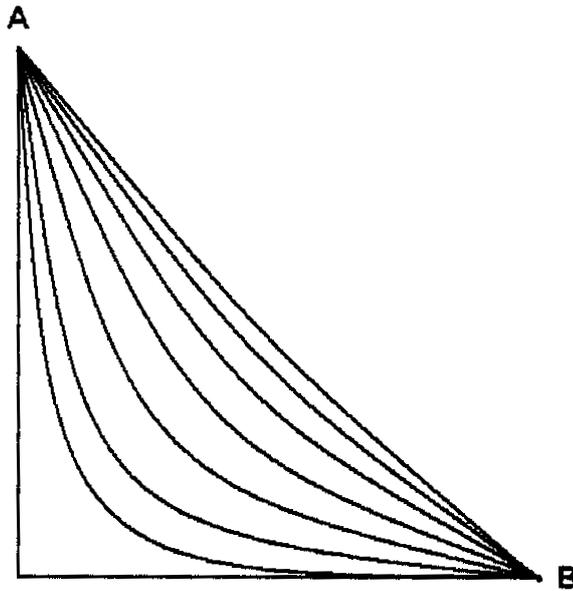


Figura 3 – Das infinitas curvas possíveis de descida de um skatista, entre os pontos A e B, e sob o efeito da gravidade, qual delas será a mais rápida?

Fonte: Retirado de Bustillos e Sassine (2011, p. 17).

**3ª Questão:** “*Numa pista de skate, conhecida como “half”, cujo formato descreve uma curva cicloide invertida, representada na Figura 4, dois skatistas treinam manobras radicais sob o efeito da gravidade. A Cúspide, isto é, o ponto mais alto, é denotado por A. Um ponto intermediário qualquer é denominado por B e o ponto mais baixo, no nível do chão, é denotado por C. Se um dos skatistas parte da cúspide A e a outro parte do ponto intermediário B, simultaneamente, qual dos dois chega primeiro ao ponto C, isto é, ao chão?*” (p. 17).

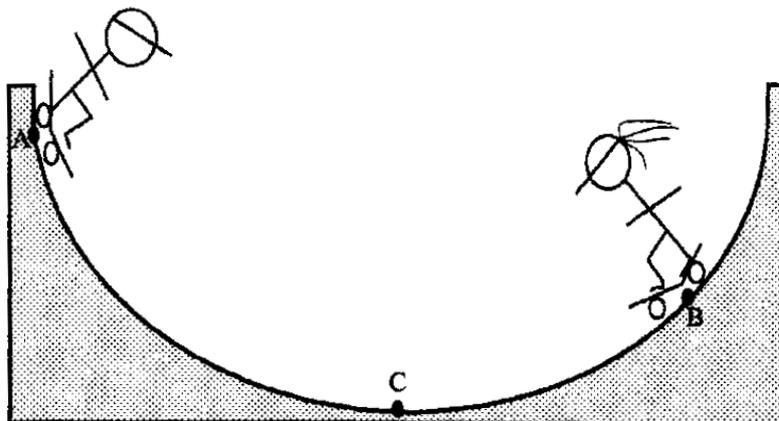


Figura 4 – Qual dos Skatistas chegará primeiro ao ponto C? O que está no ponto A ou o que está no ponto B?

Fonte: Retirado de Bustillos e Sassine (2011, p. 17).

Para respondermos à primeira questão, basta realizar um estudo vetorial e decompor as forças que estão envolvidas na descida dos skatistas. É fácil perceber que o que desce pela curva terá maior aceleração, devido à maior inclinação em relação ao que desce pela reta.

A segunda e terceira questões não são triviais, e os cálculos envolvidos não são simples. Porém, vamos enunciar suas propriedades:

- a segunda questão é uma generalização da primeira, que é conhecido como o problema da *Braquistócrona* (do grego *brachisto* = mais curto e *chronos* = tempo). De todas as infinitas curvas que passam por pontos A e B, considerando o efeito da gravidade, a Braquistócrona é a curva que permite o tempo menor de descida. E,
- a terceira questão apresenta o problema conhecido como *Tautócrona* (do grego *tauto* = no mesmo e *chronos* = tempo). Independentemente da altura dos skatistas, os dois chegarão sempre ao mesmo tempo no ponto C.

Para todas essas questões, temos como solução a *Curva Cicloide*, cujas equações paramétricas são:

$$\begin{aligned}x &= a(\theta - \text{sen}\theta) \\y &= a(1 - \text{cos}\theta)\end{aligned}$$

em que  $a$  é o raio da circunferência.

Nos próximos capítulos, veremos como deduzir as equações paramétricas da Curva Cicloide, e mostraremos a importância do estudo dessa curva – ela está presente entre as mais diversas áreas do conhecimento. Além disso, agora que o leitor já está familiarizado com as propriedades de cada curva, vamos apresentar no Capítulo 2 onde e como cada uma delas foi estudada ao longo da história.

O objetivo deste trabalho é apresentar a curva cicloide, a partir de um estudo histórico e aplicações dessa curva. Pretendemos discutir, também, a importância dessa curva como conceito essencial, tanto no Ensino Básico como de Ensino Superior. Vale ressaltar que a relação com os conceitos da Física é muito forte quando falamos em Cicloide. Especificamente, iremos tentar “seduzir” o aluno, fazendo uma ponte entre a realidade e a Matemática, utilizando a Curva Cicloide em

relação ao Desenho Geométrico, à Geometria Analítica, ao Espirógrafo, e por meio de Softwares.

Dessa forma, este trabalho se divide em:

- Capítulo 2: apresenta um levantamento histórico sobre o assunto, desde os primeiros trabalhos que utilizam a cicloide;
- Capítulo 3: apresenta a demonstração da Curva Cicloide, por meio de Geometria Analítica;
- Capítulo 4: apresenta algumas aplicações didáticas utilizando a Curva Cicloide como sugestões de atividades aos alunos do Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Ensino Superior;
- Capítulo 5: nossas considerações finais e perspectivas.



## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

Aqui apresentamos como, pela primeira vez, a Curva Cicloide surgiu na história da Ciência, quem a nomeou assim e como se desenvolveu seu estudo no decorrer dos anos.

### 2.1. Cicloide

Muito antes de receber esse nome, a Curva começou a ser estudada por Nicholas Cusa (1471 – 1464) e pelo teólogo matemático francês, Charles Bouvalles (1471 – 1553). O estudo de Cusa e Bouvalles ainda não tratava da Cicloide em si, mas algo muito próximo a ela: a quadratura da circunferência<sup>1</sup>.

Em 1564, nasce o italiano Galileu Galilei (Figura 5), cientista, artista, com uma genialidade eminente (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

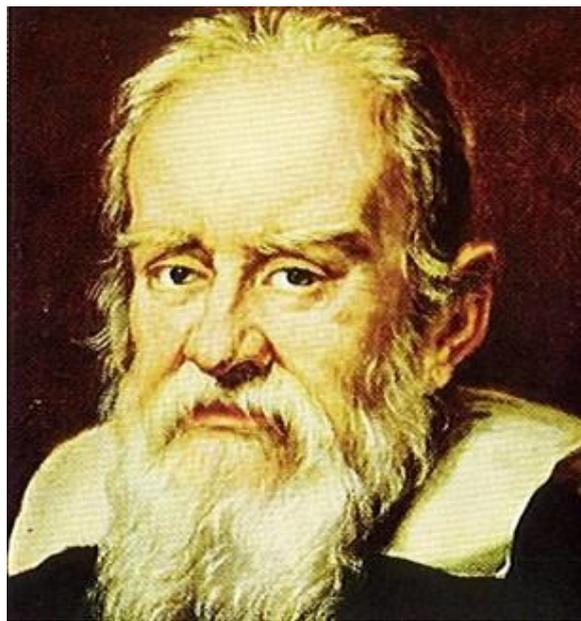


Figura 5 - Galileu Galilei.

Fonte: Retirado de Cremonezi (2013).

---

<sup>1</sup> O Problema da Quadratura da circunferência trata-se de construir um quadrado cuja área é igual a um círculo dado. Esse problema é muito antigo; desde 400 a. C, os gregos já o estudavam (BOYER, 1996).

Como já dito anteriormente, Galileu um dia estava na janela, apenas observando o ambiente, quando começou a reparar no movimento da roda de uma charrete que passava (Figura 6).

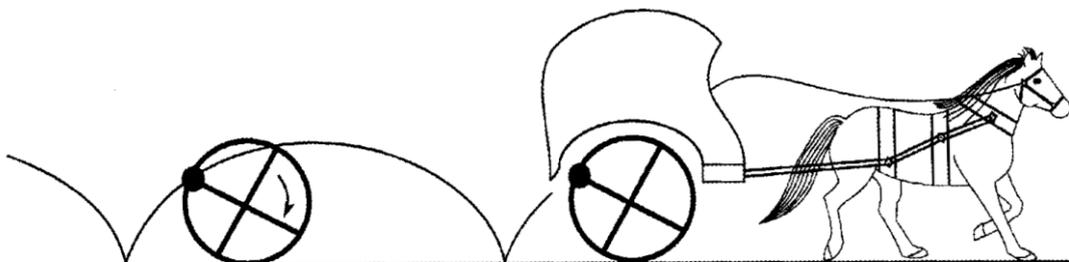


Figura 6 - A Curva Cicloide criada pela roda de uma charrete que gira ao longo de uma reta.

Fonte: Retirado de Bustillos e Sassine (2011, p. 22).

Interessado em descobrir que curva esse movimento podia gerar, Galileu utilizou, primeiramente, chapas metálicas para demonstra-la. Sem muito sucesso (BOYER, 1996) Galileu sugeriu que a curva poderia formar um belo arco de uma ponte. Ele também chegou a uma hipótese que a área do arco da cicloide é exatamente três vezes a área do círculo que a gera. De fato, ele estava correto, o que foi demonstrado, posteriormente, por Roberval<sup>2</sup> (1602 - 1675). Foi Galileu quem batizou a curva como Cicloide.

A “Helena da matemática” e o “Pomo da discórdia” foram nomes que representaram a Curva Cicloide no século XVI, tamanha era a discussão que ela gerou na época. O frade Marin Mersenne (1588 – 1688), colega de René Descartes, que é conhecido pela sua famosa fórmula “primos de Mersenne”, também participou dessa história. Por intermédio de um colega da igreja em que trabalhou, conheceu os trabalhos de Galileu e em 1630 propôs um desafio para Descartes, Fermat, Roberval e outros matemáticos da época: sugeriu que a cicloide fosse a curva utilizada para os diferentes testes infinitesimais<sup>3</sup>, gerando assim discussões sobre a curva.

<sup>2</sup> Roberval foi professor de Matemática no *Royal College Francês* e publicou os trabalhos *Traité de mécanique des poids soutenus par des puissances sur des plans inclinés à l'horizontale* em 1636, e *Le système du monde d'après Aristarque de Samos* em 1644 (O'CONNOR e ROBERTSON, 2008).

<sup>3</sup> É uma expressão usada para denotar objetos que são tão pequenos que não há maneiras de vê-los ou medi-los, porém são maiores do que zero.

Roberval demonstrou corretamente o que Galileu havia proposto e chegou, inclusive, a outras propriedades da curva, porém, não publicou seu trabalho. (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Independentemente de Roberval, Evangelista Torricelli (1608 – 1647) interessou-se pela cicloide, por sugestão de Mersenne ou Galileu, os quais admirava grandemente (EVES, 2011). Em 1644, Torricelli publicou sua obra intitulada *De parabolis*, na qual inclui tanto a quadratura da cicloide quanto à construção da tangente (Anexo A) Roberval, que até então não havia publicado seu trabalho, acusou Torricelli de plágio, o que não é verdade (BUSTILLOS e SASSINE, 2011) visto que seus trabalhos foram independentes, embora Roberval o tenha feito primeiro.

No ano de 1658, Blaise Pascal (1623-1662), sentiu uma dor de dente fortíssima e não estava conseguindo dormir por isso. Ao meio da dor, resolveu se distrair estudando a Curva Cicloide, e para seu espanto, a dor sumiu. Tomou isso como um sinal de Deus, mostrando que estudar a matemática não lhe desagradava (BOYER, 1996). Pascal então propôs alguns problemas sobre a resolução da Cicloide, propondo premiações (que não aconteceram) aos participantes (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Após esse período a Cicloide só voltou a ser discutida quando apareceram os problemas da Tautócrona e da Braquistócrona.

## **2.2. Tautócrona**

O problema da Curva Tautócrona intrigou vários matemáticos no século XVII (BUSTILLOS e SASSINE, 2011). A Tautócrona é a curva que, independentemente do ponto inicial de um determinado objeto, este sempre levará o mesmo tempo para chegar ao ponto mais baixo. Ou seja, se tivermos dois objetos ou mais sobre a Tautócrona, em pontos diferentes (um mais alto e outro mais baixo), todos chegarão ao mesmo tempo no ponto mais baixo (Figura 7):

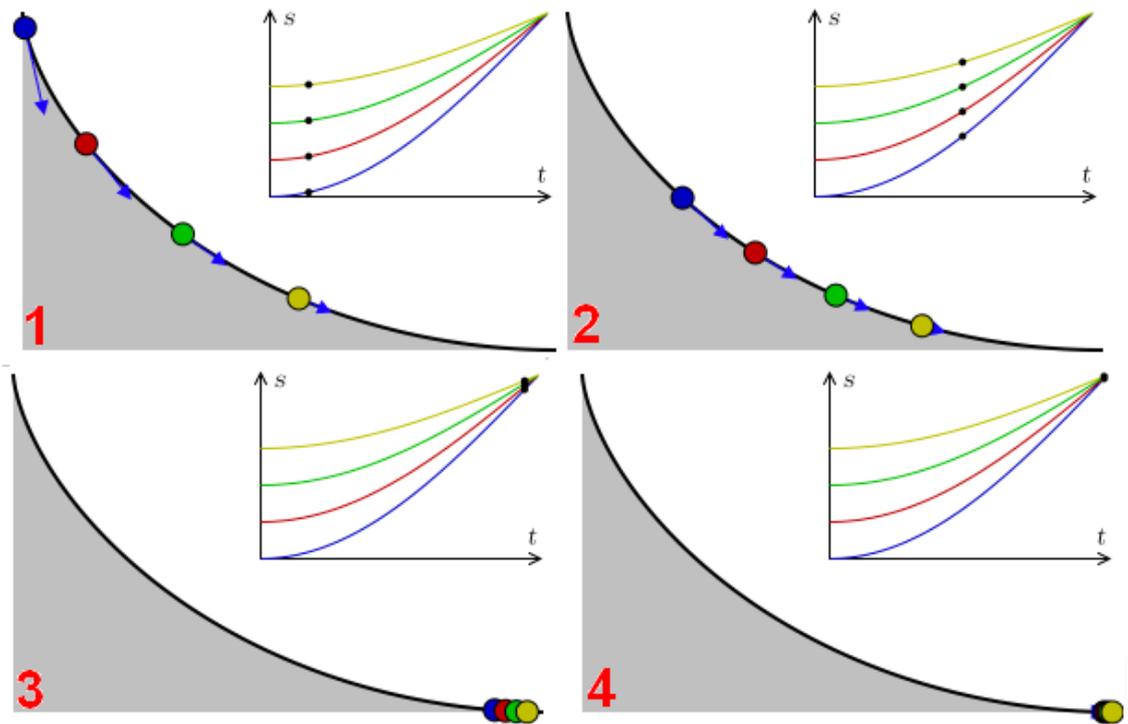


Figura 7 - Curva Tautócrona.

Fonte: Adaptado de Wikipedia: A Enciclopédia Livre (2009).

Quem solucionou esse problema foi o holandês Cristhian Huygens (1629-1695). Nascido em Haia, Huygens (Figura 8) e seu irmão descobriram uma nova técnica de polir lentes, o que ajudou Huygens a observar vários elementos da natureza, e inclusive a descobrir os Anéis de Saturno (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Cientista renomado, foi homenageado pela NASA (Agência Espacial Americana) que batizou uma das naves exploratórias que pousou em Saturno, dia 13 de janeiro de 2006, com o nome de Huygens (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Além de ser conhecido como um grande físico de seu tempo, devido à sua teoria ondulatória da luz, a seu estudo sobre o pêndulo, à invenção do relógio de pêndulo e às leis de quedas de corpos, Huygens mostrou a importância do cálculo e trouxe contribuições para geometria (COELHO, 2008).



Figura 8 - Cristhian Huygens.  
Fonte: Retirado de *History of the Magic Lantern* (2013).

A partir de seus estudos sobre o pêndulo, Huygens provou geometricamente que a Tautócrona é uma Curva Cicloide (sua demonstração segue no Anexo B). Além disso, também provou que a evoluta<sup>4</sup> da Cicloide é a própria Cicloide.

Sabendo da propriedade da Tautócrona, Huygens ainda construiu um relógio de maior precisão, o que contribuiu para as navegações - na localização dos navios nas longitudes (COELHO, 2008). Patenteou então o relógio como criação sua, embora o relógio de pêndulo convencional tenha sido criado por Galileu (EVES, 2011).

---

<sup>4</sup> Evoluta é o local dos centros da curvatura (da curva) no plano das curvas normais. (WEISSTEIN, 2013)

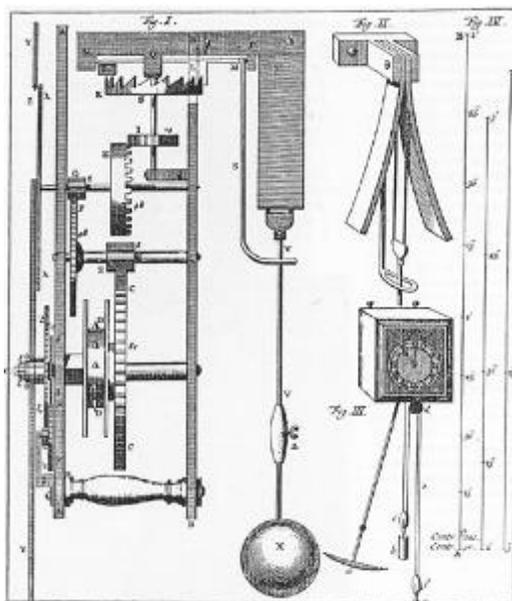


Figura 9 – Relógio Cicloidal.

Fonte: Retirado de Doerfler (2007).

### 2.3. Braquistócrona

“A cicloide tem tantas propriedades bonitas e interessantes e gerou tantas controvérsias que foi chamada ‘a Helena da geometria’ ou ‘o pomo da discórdia’ (EVES, 2011)”. Essas controvérsias surgiram com o problema da Braquistócrona. Tudo começou quando Johan Bernoulli<sup>5</sup> em 1696 propôs na *Acta Eruditorum*<sup>6</sup> o seguinte problema:

”Dados um plano vertical e dois pontos A e B sobre o plano, com A mais alto do que B, e um ponto móvel M, determinar uma curva ao longo da qual uma partícula material desliza no menor tempo possível de A até B, considerando apenas a ação da gravidade, sem atrito.” (BARON, 1985 *apud* COELHO, 2008, p. 22).

Esse problema foi o que apresentamos no Capítulo 2, para despertar no leitor curiosidade sobre esse questionamento (veja Figura 3).

Diversas foram as soluções dadas, dentre elas estão as soluções de Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, G.F.A. L'Hospital, E.W. Von Tschirnhaus e pelo irmão de Johan Bernoulli, Jakob Bernoulli (BUSTILLOS e SASSINE, 2011)

<sup>5</sup> Foi professor de Matemática em Gröningen, Holanda.

<sup>6</sup> *Acta Eruditorum* foi a primeira revista científica alemã, criada e editada por Leibniz Otto Mencke, fundada em 1682. (EVES, 2011)

Newton apresentou sua resposta como autor anônimo, porém, quando Johan Bernoulli leu sua solução, disse “... pelas pegadas se reconhece a fera” (BUSTILLOS E SASSINE, 2011). Já quanto à resolução de L’Hospital, temos um problema de controvérsia histórica. L’Hospital contratou Johan Bernoulli para ser seu professor de matemática e, em troca, Johan poderia morar em seu castelo, além de receber comida e dinheiro. Porém, tudo que fizesse de novo em Matemática, ficaria com o nome do Marquês de L’Hospital. Inclusive, foi feito um documento assinado por ambos comprovando o acordo. Isto ocorreu com a famosa regra de L’Hospital, conhecida por todo aluno de cálculo.

Tanto que após a morte do Marquês, em 1704, Johan tentou reverter a situação, falando que a ele pertencia essa descoberta. Sem sucesso, somente após 228 anos foi descoberto quem realmente foi o responsável por essa regra, quando um historiador em 1922 encontrou o contrato que firmaram na época (BOYER, 1996, p. 310).

A família Bernoulli teve grandes problemas em relação a essa curva. Os irmãos Johan e Jakob levaram a disputa pelo encontro da solução da Braquistócrona tão a sério que a comunicação entre ambos foi interrompida. A resolução de Johan é muito interessante e diz-se que foi feita “utilizando o princípio da difusão de um raio luminoso através da densidade variada, isto é, calculando a curvatura de um raio em meio não uniforme” (BUSTILLOS E SASSINE 2011). Em contrapartida, Jakob Bernoulli resolveu de forma mais genérica, utilizando como ferramenta os Máximos e Mínimos<sup>7</sup>.

Graças à resolução do problema da Braquistócrona, surge o *Cálculo Variacional*<sup>8</sup>, o qual revolucionou a matemática e depois a óptica, devido aos trabalhos de Euler e Lagrange. (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

No Capítulo 4, seção 3, iremos mostrar o problema da Braquistócrona utilizando como ferramenta o MAPLE®.

---

<sup>7</sup> São ferramentas do Cálculo Diferencial Integral para resolver problemas de otimização, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa (STEWART, 2010).

<sup>8</sup> “O Cálculo Variacional visa fundamentalmente investigar os máximos e mínimos dos funcionais e se assemelha bastante à investigação de máximos e mínimos de funções” (SOUZA JÚNIOR, 2010).



### 3 PARAMETRIZAÇÃO DA CURVA CICLOIDE

Tomando como referência Stewart (2011) e Bianchini (2011), faremos aqui a demonstração da Curva Cicloide usando decomposição de vetores. Para isso, utilizamos o Software Geogebra© como ferramenta para verificar o movimento da Cicloide com maior clareza.

O parâmetro é  $\theta$ , variando entre  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , e  $a$  o raio da circunferência. Olhando para o “Passo 2” da Figura 10, podemos identificar os vetores:

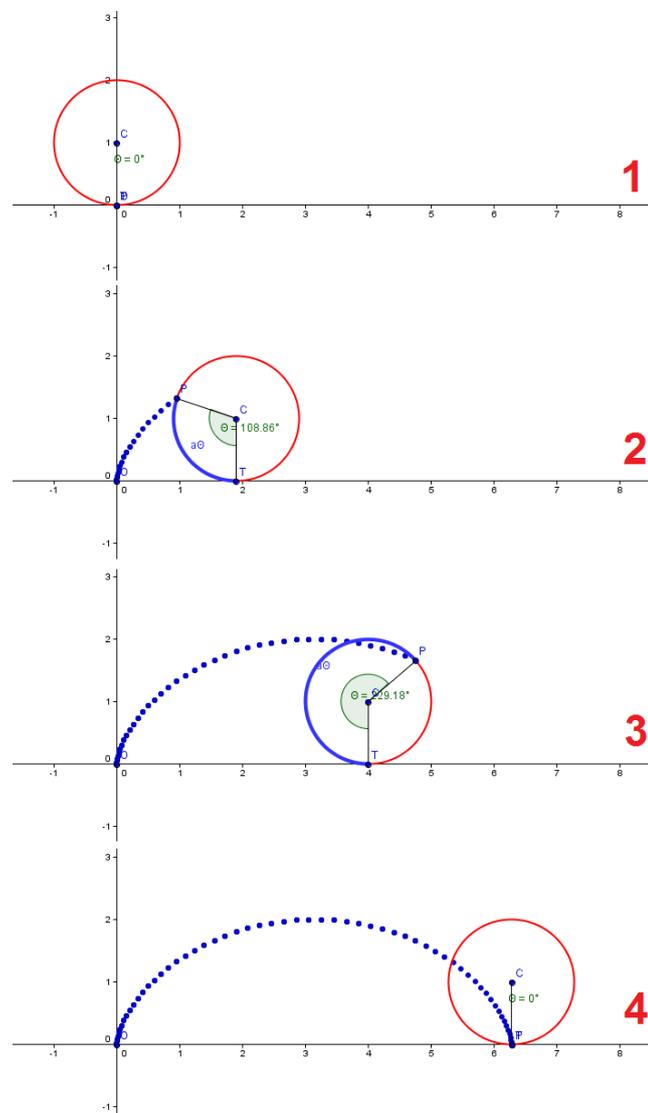


Figura 10 – Movimento da Cicloide.

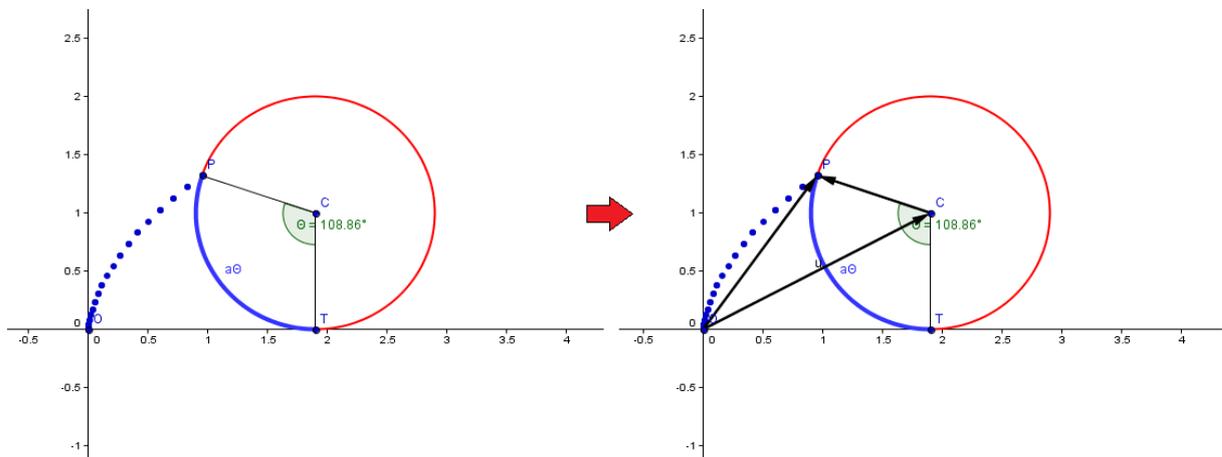


Figura 11 – “Passo 2”: Vetores.

Podemos escrever o vetor  $\overrightarrow{OP}$  como:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}.$$

Observando a Figura 11, verificamos que quando a circunferência gira um certo ângulo  $\theta$ , o comprimento do segmento  $OT$  é igual ao arco  $\widehat{PT}$ , que nada mais é do que  $a\theta$ , isto é:

$$|OT| = \text{Arco } \widehat{PT} = a\theta$$

Assim, os vetores  $\overrightarrow{OC}$  e  $\overrightarrow{CP}$  são:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} \\ \overrightarrow{OC} &= (a\theta, 0) + (0, a)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OC} = (a\theta, a) \quad \text{(I)}$$

Então  $\overrightarrow{CP}$ , é

$$\overrightarrow{CP} = (a \operatorname{sen}\theta, -a \operatorname{cos}\theta) \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos que:

$$\overrightarrow{OP} = a(\theta - \operatorname{sen}\theta, 1 - \operatorname{cos}\theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da Cicloide são:

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$y(\theta) = a(1 - \operatorname{cos}\theta)$$

Agora que conhecemos a curva Cicloide e os problemas principais que a envolvem, vejamos como podemos aplica-la em sala de aula ao ensinar matemática.



## 4 APLICAÇÕES DIDÁTICAS

Neste capítulo, iremos apresentar três propostas de atividades para o Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Ensino superior usando a Curva Cicloide.

### 4.1. Construção da Curva Cicloide utilizando Desenho Geométrico

A primeira delas é a construção da Curva Cicloide usando o Desenho Geométrico. Essa construção foi baseada a partir dos autores Marmo e Marmo (2008), e Carvalho (1958).

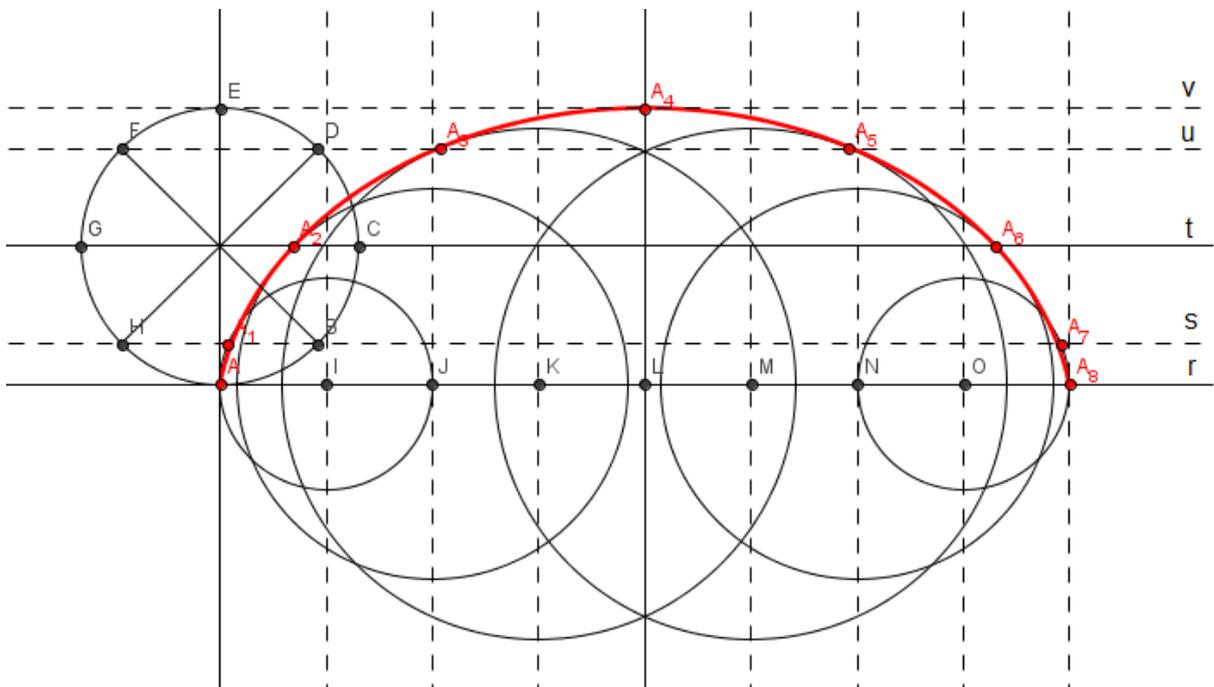


Figura 12 – Construção da Curva Cicloide utilizando conceitos de Desenho Geométrico.

A Construção da Curva Cicloide será descrita pelo seguinte roteiro abaixo:

- Sobre uma *reta r*, desenha uma *circunferência* tangenciando a *reta r* com um certo raio *a*;
- Divida a *circunferência* em 8 (oito) partes, e nomeie cada ponto de intersecção como *A, B, C, D, E, F, G e H*;

- Agora, usando o compasso, meça o comprimento  $AB$ . Coloque a ponta seca no ponto  $A$  e faça a intersecção com a *reta*  $r$ . Chame o novo ponto de  $I$ ;
- Faça o passo anterior 7 (sete) vezes sucessivamente, criando os pontos  $J, K, L, M, N, O$  e  $P$ ;
- Faça retas paralelas ao segmento  $AE$  pelos pontos  $I, J, K, L, M, N, O$  e  $P$ ;
- Agora, trace a *reta*  $s$  passando pelos pontos  $H$  e  $B$ ; a *reta*  $t$  passando pelos pontos  $G$  e  $C$ ; a *reta*  $u$ , passando pelos pontos  $F$  e  $D$ ; e a *reta*  $v$ , paralela à *reta*  $r$ , passando pelo ponto  $E$ . Note que as retas  $r, s, t, u$  e  $v$  serão paralelas.

Ao final, seu desenho será como apresenta a Figura 13.

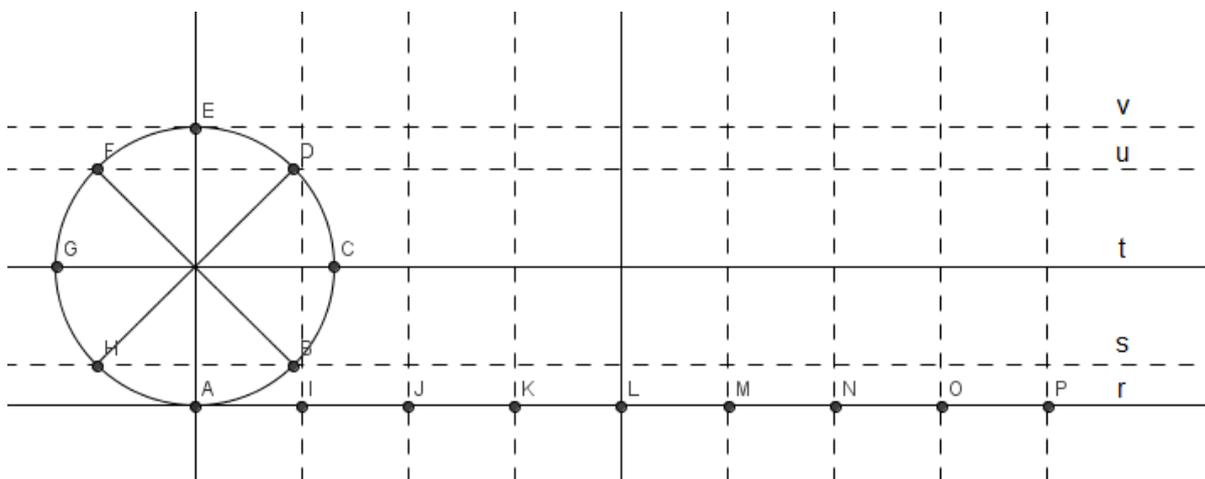


Figura 13 – Início da construção Geométrica da Curva Cicloide.

Queremos desenhar a Curva Cicloide, que é descrita quando a *circunferência* rola sobre a *reta*  $r$ , sem escorregar (no caso, estamos construindo no sentido horário): “Note que quando a roda rolar sobre a *reta*  $r$ , o ponto  $B$  cairá sobre o ponto  $I$ , o ponto  $C$ , sobre o ponto  $J$  e assim por diante” (MARMO e MARMO, 2008).

Para simular a roda rolar, siga o seguinte roteiro:

- Usando o compasso, meça o comprimento  $AB$ . Coloque a ponta seca no ponto  $I$  e faça uma *circunferência* com raio  $AB$  e centro em  $I$ . Obtenha o ponto  $A_1$  no encontro da *circunferência*  $(I, AB)$  com a *reta*  $s$ ; à esquerda de  $I$ ;

- Usando o compasso, meça o comprimento  $AC$ . Coloque a ponta seca no ponto  $J$  e faça uma *circunferência* com raio  $AC$  e centro em  $J$ . Obtenha o ponto  $A_2$  no encontro da *circunferência*  $(J, AC)$  com a reta  $t$ , à esquerda de  $J$ ;
- Usando o compasso, meça o comprimento  $AD$ . Coloque a ponta seca no ponto  $K$  e faça uma *circunferência* com raio  $AD$  e centro em  $K$ . Obtenha o ponto  $A_3$  no encontro da *circunferência*  $(K, AD)$  com a reta  $u$ , à esquerda de  $K$ ;
- Obtenha o ponto  $A_4$  no encontro da perpendicular à *reta*  $r$  por  $L$  com a *reta*  $v$ ;
- Usando o compasso, meça o comprimento  $AF$ . Coloque a ponta seca no ponto  $M$  e faça uma *circunferência* com raio  $AF$  e centro em  $M$ . Obtenha o ponto  $A_5$  no encontro da *circunferência*  $(M, AF)$  com a *reta*  $u$ , à direita de  $M$ ;
- Usando o compasso, meça o comprimento  $AG$ . Coloque a ponta seca no ponto  $N$  e faça uma *circunferência* com raio  $AG$  e centro em  $N$ . Obtenha o ponto  $A_6$  no encontro da *circunferência*  $(N, AC)$  com a *reta*  $t$ , à direita de  $N$ ;
- Usando o compasso, meça o comprimento  $AH$ . Coloque a ponta seca no ponto  $O$  e faça uma *circunferência* com raio  $AH$  e centro em  $O$ . Obtenha o ponto  $A_7$  no encontro da *circunferência*  $(O, AH)$  com a *reta*  $s$ , à direita de  $O$ ;
- O ponto  $A_8$  coincide com o ponto  $P$ .

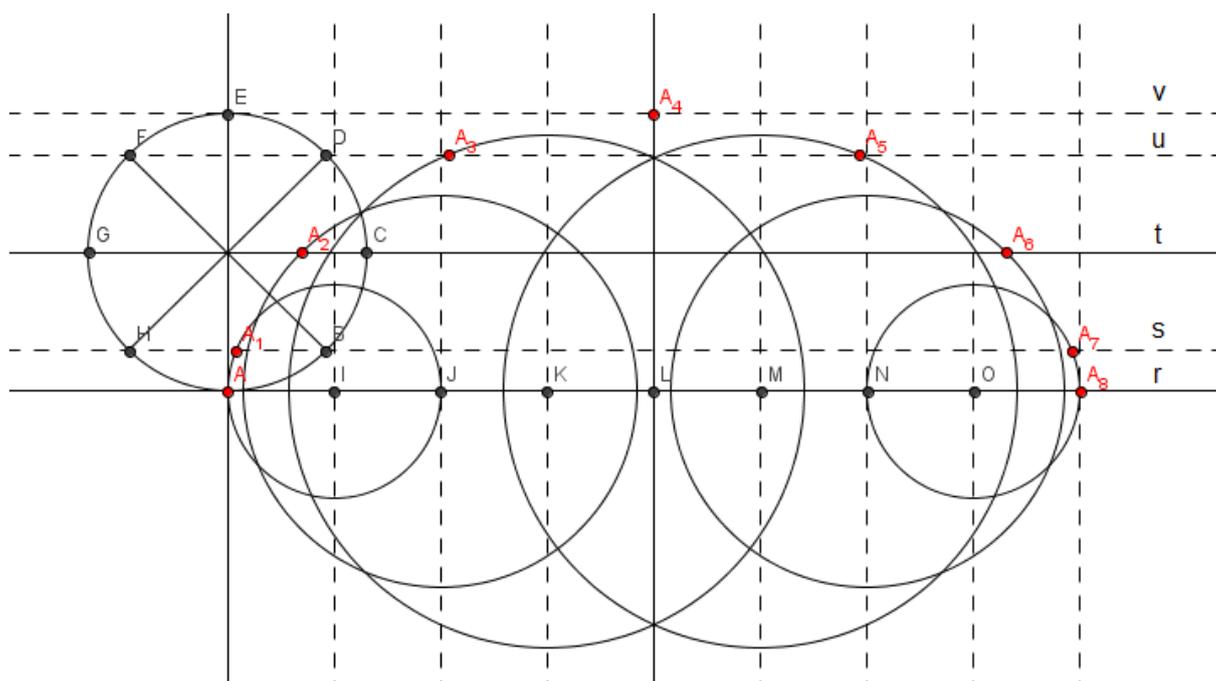


Figura 14 – Construção Geométrica da Curva Cicloide.

Ligando os pontos  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_7$  e  $A_8$  de forma “caprichosa” à mão livre, obtemos a Curva Cicloide, como temos na Figura 12.

## 4.2. Comparação da Hipocicloide gerada pela Régua Espirógrafo com a Translação da Lua

A segunda atividade é uma proposta de interdisciplinaridade entre os conteúdos de Matemática, Ciências, Geografia e Educação Artística. Para compreensão do leitor, iremos apresentar os diversos conceitos que serão reunidos na atividade: as curvas derivadas da Curva Cicloide, a régua Espirógrafo e conceitos sobre as fases da Lua.

### 4.2.1. Curvas Derivadas da Curva Cicloide: Epicicloide e Hipocicloide

A Curva Cicloide que vimos até agora sempre foi descrita girando sobre uma reta, sem deslizar. Se pensarmos em uma circunferência girando ao redor de outra, obtemos a *Epicicloide*; e se pensarmos em uma circunferência girando dentro de outra, obtemos a *Hipocicloide* (Figura 15).

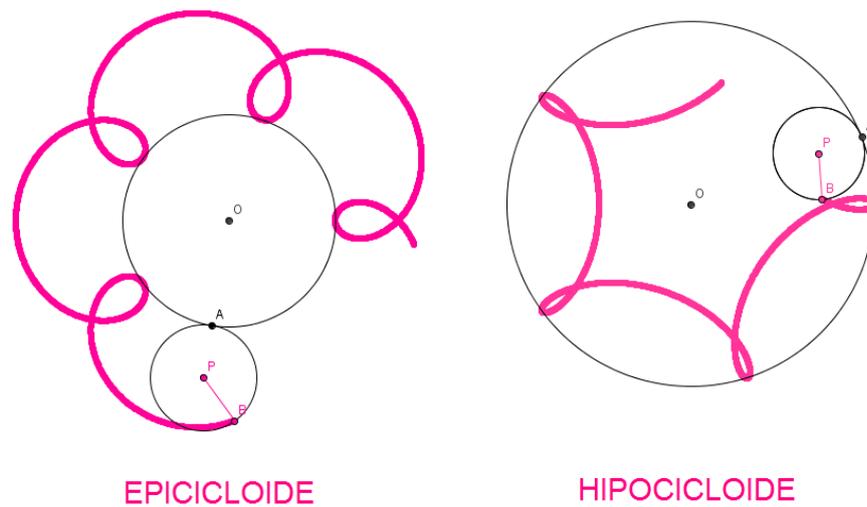


Figura 15 – Epicicloide e Hipocicloide.

#### 4.2.2. Régua Espirógrafo

Curiosamente, a régua Espirógrafo (ou Régua Mágica, como é mais conhecida no Brasil) gera Hipocicloides. Esta régua é um brinquedo para crianças, que chama atenção pela beleza das curvas que se podem criar.



Figura 16 – Régua Mágica e curvas criadas com sua utilização  
Fonte: Adaptado de Leonor (2011).

Na década de 70, o Espirógrafo foi vendido pela *Estrela* no Brasil, com o título de “Espiograf” (Figura 17). Na caixa, vinham diversos tamanhos de circunferências e, em sua base posterior, havia instruções de uso de cada peça (Figura 18).



Figura 17 – Espirograf.

Fonte: Retirado de Blog Fantomas (2013).

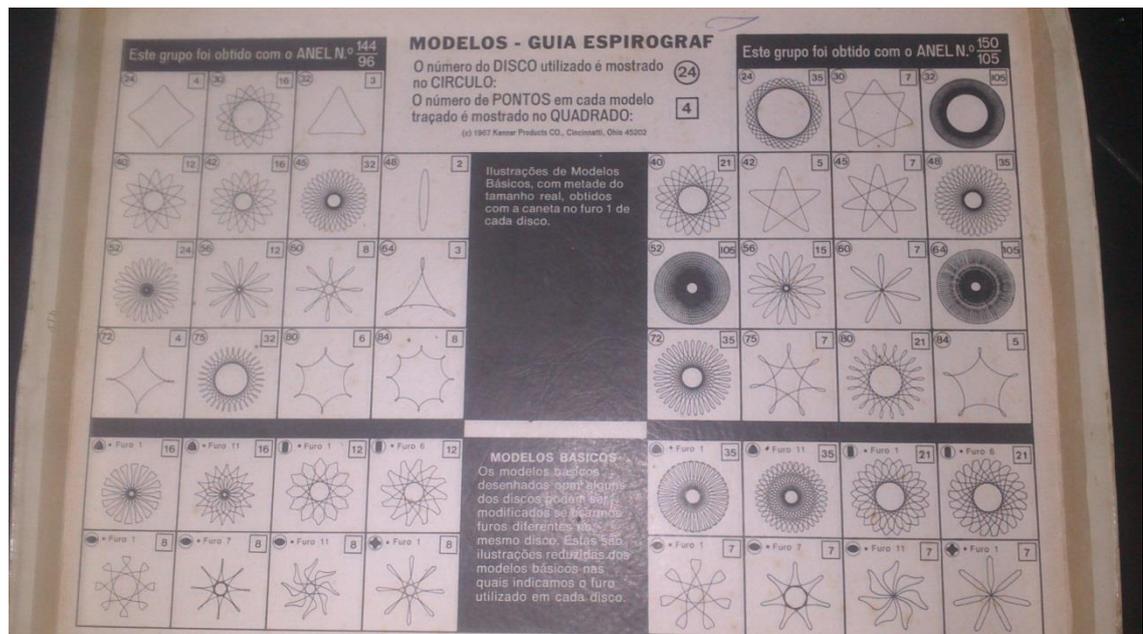


Figura 17 – Verso da tampa do Espirograf: instruções de utilização.

Com a introdução da Régua Espirógrafo, as crianças descobrem que podem criar coisas bonitas e interessantes, seguindo apenas instruções e até mesmo desconhecendo que aplicavam regras matemáticas. A conexão entre a arte e a Matemática é perceptível com o Espirógrafo, ajudando a ensinar a lógica de padrões e regras (MADISON, 2013).

### 4.2.3. Fases da Lua e Translação da Lua em Relação ao Sol

“O único satélite natural da Terra é a Lua. Ela é o corpo celeste que está mais próximo de nós, a uma distância média de 384 400 quilômetros” (LUCCI e BRANCO, 2010, p.44). Lembrando dos movimentos de translação e rotação da Terra (Figura 19), podemos observar que o sentido do movimento de translação da Lua ao redor da Terra é coincidente ao sentido do movimento de rotação da Terra (IACHEL, LANGHI e SCALVI, 2008).

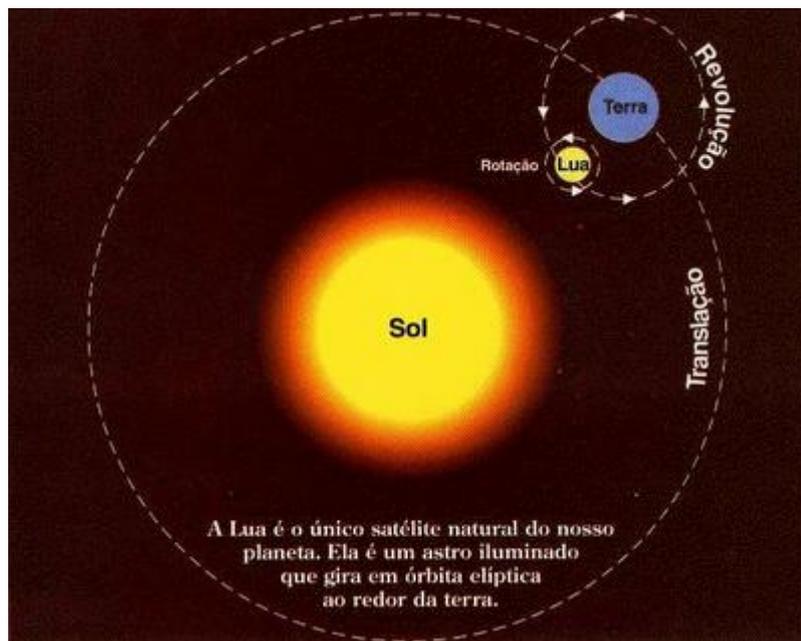


Figura 189 – Movimento da Terra e da Lua no Espaço.  
Fonte: Retirado de Elouise, Karina e Bianca (2010).

A Lua possui quatro fases (Figura 20). O período entre duas fases da lua iguais e consecutivas é chamado de período sinódico (ou Lunação) e dura aproximadamente 29,5 dias terrestres (IACHEL, LANGHI e SCALVI, 2008).

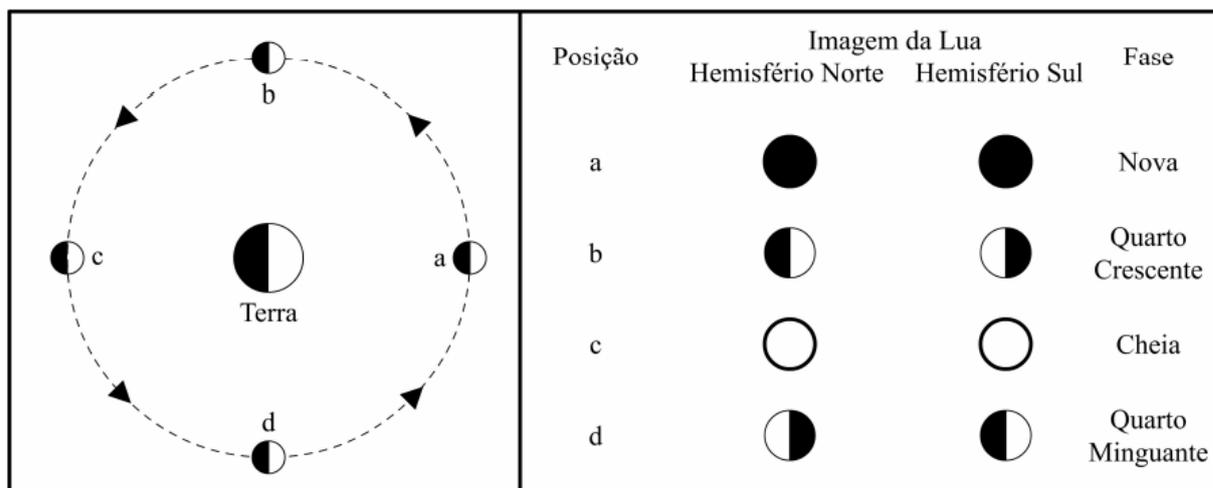


Figura 2019 – Esquema explicativo do fenômeno de formação das fases da Lua.  
 Fonte: Retirado de Iachel, Langhi e Scalvi (2008, p. 27).

Dessa forma, podemos falar que 12 (doze) períodos sinódicos seriam aproximadamente equivalentes a um ano terrestre. Na Figura 21, utilizando como apoio o Software Geogebra®, construímos o movimento de Translação aproximado da Lua.

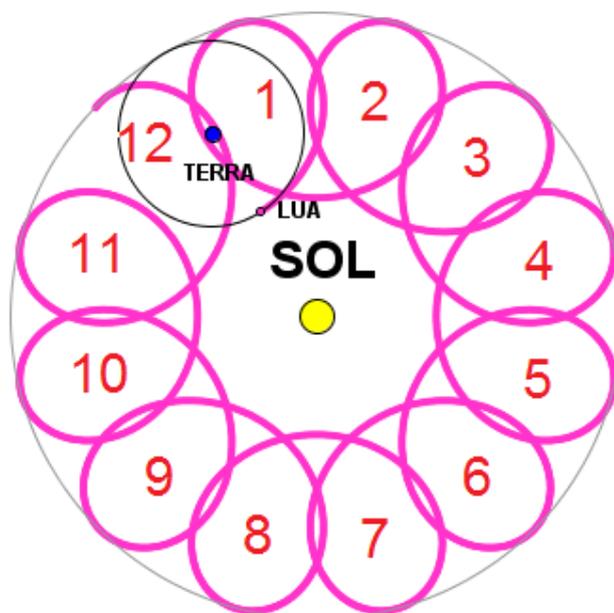


Figura 201 – Movimento da Translação da Lua.

Vale ressaltar que a rota da Lua é elíptica, assim como a rota da Terra. A Figura 21 foi construída baseada em circunferências propositalmente: note que a figura que se

formou é uma derivada da Cicloide, a Hipocicloide. Como o Espirógrafo gera Hipocicloides, então, usando a régua, podemos dar uma noção *concreta* aproximada aos alunos do Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio de como nosso Sistema Solar funciona.

Fica como sugestão ao professor de Ciências e Geografia essa atividade utilizando a Régua Mágica e, a partir da régua, desenvolver o conteúdo com os alunos.

### 4.3. O problema da Braquistócrona

A terceira atividade é uma proposta de interdisciplinaridade entre a informática, física e a matemática, a ser aplicada no Ensino Superior. Essa atividade baseia-se no estudo realizado por Sousa Júnior (2010).

Nessa atividade é utilizado o software Maple para calcular o comprimento e o tempo gasto por uma partícula para percorrer a trajetória do ponto (0,0) ao ponto ( $\pi$ , -2) ao longo de quatro curvas, sendo uma delas, a cicloide.

Para calcular o comprimento da curva e o tempo gasto no percurso, o aluno deverá analisar as seguintes integrais, respectivamente,

$$c(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + y'(t)^2)} dt \quad \text{e} \quad t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{(1 + y'(t)^2)}{y(t)} dt.$$

Nesta atividade, o aluno poderá analisar os resultados avaliando o cálculo das integrais realizado com o auxílio do Maple. O Anexo C apresenta as linhas de comando do Maple<sup>9</sup> e os resultados obtidos.

Foram utilizadas as seguintes funções (Figura 22):  $r(t) = \frac{-2}{\pi}t$ ,  $rq(t) = -2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ ,  $rc(t) = -2\sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}$  e a Cicloide dada por  $xc(t) = t - \text{sen}(t)$  e  $yc(t) = -1 + \text{cos}(t)$ .

---

<sup>9</sup> Neste trabalho foi utilizado o Maple 16.

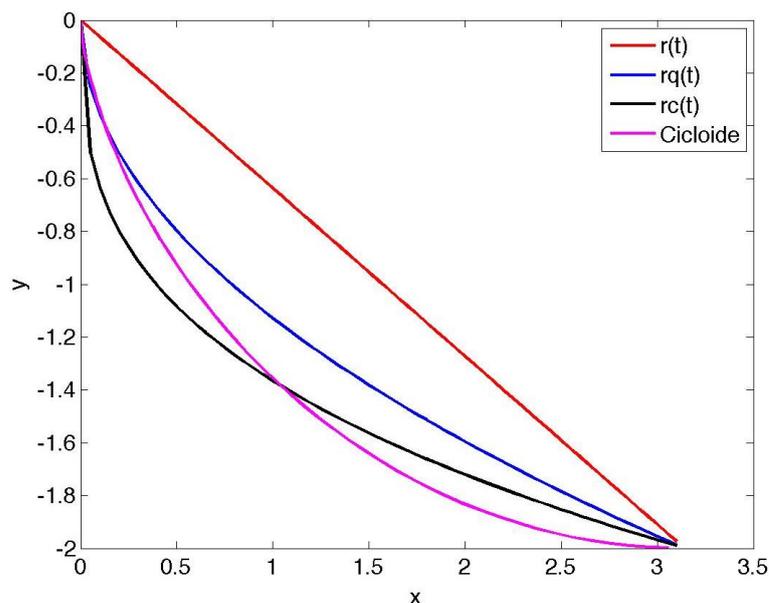


Figura 22 – Curvas utilizadas na Atividade 3 para o cálculo do problema a Braquistócrona.

Analisando os resultados é possível construir o quadro a seguir com o resumo dos resultados.

	<b>Comprimento da curva</b>	<b>Tempo gasto</b>
$r(t) = \frac{-2}{\pi}t,$	3,724191779	1,189649425
$r(q)(t) = -2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	3,889695455	1,013381894
$rc(t) = -2\sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}$	4,068652587	1,016500042
$xc(t) = t - \text{sen}(t)$ e $yc(t) = -1 + \text{cos}(t).$	4,0	1,003544961

Olhando o quadro, vemos que apesar da Cicloide ser a curva com um alto valor de comprimento, é aquela que apresenta o menor tempo gasto para a trajetória; enquanto a reta, que apresenta o menor valor de comprimento, é aquela cuja a trajetória demora mais tempo para ser concluída.

Aos professores universitários das áreas de Tecnologia, Matemática e Física, fica como sugestão a aplicação dessa atividade.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Curva Cicloide possui uma história rica, uma matemática elaborada e aplicações diretas com a Física. Suas curvas derivadas chamam atenção pela beleza que criam, inclusive, chegando a influenciar o mundo da moda (BRAGGS, 2010). Na Ciência, cada vez mais trabalhos têm aparecido envolvendo a Cicloide, sendo ela sempre “solução” dos problemas.

O arco de um violino (MOTTOLA, 2011), as rachaduras das ruas (GHATAK e MAHADEVAN, 2003), as ondas do micro-ondas (RAIO, 2012), o espectrômetro de massas, a simulação da gravidade zero em aerodinâmica (BUSTILLOS e SASSINE, 2011), entre várias outras aplicações são fortes exemplos.

Segundo Eves (2011, p. 366):

“Essa curva, que é muito rica em propriedades matemáticas e físicas, desempenhou um papel importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo [...] Essas descobertas levaram os matemáticos a considerar questões relativas a superfícies e volumes de revolução obtidos girando-se um arco de cicloide em torno de diversos eixos”.

Podemos então verificar que “a partir de um problema proposto como desafio aos matemáticos da época, iniciou-se uma busca por métodos de solução o que culminou no que hoje conhecemos como Cálculo Variacional” (SOUZA JÚNIOR, 2010).

O Cálculo Variacional é um dos estudos que gerou maior ramificação da matemática aplicada, desde estudos de economia até a mecânica quântica (BUSTILLOS e SASSINE, 2011).

Pela análise empreendida, podemos afirmar que a Cicloide aparece como tema isolado em alguns materiais didáticos, sendo apresentada com sua construção geométrica em materiais didáticos do Ensino Fundamental II e através de breves contextos históricos apresentando as equações paramétricas, no Ensino Superior. Ela nunca é tratada como assunto foco, sempre como complemento.

A Cicloide pode ser uma ferramenta de interdisciplinaridade muito grande entre diversas disciplinas e dessa forma atrair o aluno ao Ensino da Matemática, mostrando que Matemática não é apenas fazer “continhas” e sim envolver o mundo em novos conceitos e soluções dos problemas presentes no dia a dia.

Assim como Bustillos e Sassine, também “concluimos que a curva cicloide pode ser denominada como curva mágica para os seres humanos que perceberem a sua importância no desenvolvimento da filosofia da ciência” (BUSTILLOS e SASSINE, p. 191).

Ainda há muito que pesquisar e entender sobre o mundo, e a Curva Cicloide pode ser a chave para várias perguntas da evolução da Ciência. Fica a sugestão, como sequência a esta pesquisa, aplicar as atividades didáticas propostas, e estudo do tema, tendo em vista tamanha riqueza que a Cicloide contempla.

## REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Waldecir. **Parametrização da cicloide**. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/interativo/vetores/cicloide.html>>. Acesso em: 11 maio 2013.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRAGGS, Steven. **Spirograph**. Disponível em: <[http://www.retrowow.co.uk/retro\\_collectibles/60s/spirograph.php](http://www.retrowow.co.uk/retro_collectibles/60s/spirograph.php)>. Acesso em: 06 abr. 2013.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona**. São Paulo: Scor Tecci, 2011. 252 p.

CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1958.

COELHO, Rejeane Alexandre. **A História dos Problemas da Tautócrona e da Braquistócrona**. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2008.

CREMONEZI, Gabriel Oliveira. **Cesima: Centro Simão Mathias de Estudos em História da Ciência**. Disponível em: <<http://www4.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/gabrielcremonezi/galileu/>>. Acesso em: 12 abr. 2013.

DOERFLER, Ron. **The (Not So) Simple Pendulum**. Disponível em: <<http://myreckonings.com/wordpress/2007/11/19/the-not-so-simple-pendulum/>>. Acesso em: 12 abr. 2013.

ELOUISE; KARINA; BIANCA. **Nosso espaço na Geografia**. Disponível em: <<http://nossoespaconageografia.blogspot.com.br/2010/05/os-movimentos-da-lua.html>>. Acesso em: 15 maio 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GHATAK, A.; MAHADEVAN, L.. Crack Street: The Cycloidal Wake of a Cylinder Tearing through a Thin Sheet. **Physical Review Letters**, Reino Unido, p. 1-4. 21 nov. 2003.

IACHEL, Gustavo; LANGHI, Rodolfo; SCALVI, Rosa Maria Fernandes. Concepções alternativas de alunos do ensino médio sobre o fenômeno de formação das fases da lua. **Revista Latino-americana de Educação em Astronomia - RELEA**, Bauru, n.5, p.25-37, 2008.

LEONOR. **Loucuras com régua mágica (ou espirógrafo)**! Disponível em: <<http://leonorfco.blogspot.com.br/2011/07/semana-passada-o-filho-da-minha-chefe.html>>. Acesso em: 22 set. 2012.

LUCCI, Elian Alabi; BRANCO, Ansemo Lazaro. **GEOGRAFIA: homem & espaço**. 22. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

MADISON, Annie. **The History of the Spirograph**. Disponível em: <[http://www.ehow.com/about\\_5376057\\_history-spirograph.html](http://www.ehow.com/about_5376057_history-spirograph.html)>. Acesso em: 11 maio 2013.

MARMO, Alexandre; MARMO, Carlinhos. **Desenho Geométrico**: 7º ano (9 anos). 6º série (8 anos): ensino fundamental. São Paulo: Anglo, 2008 (Coleção Anglo ensino fundamental).

MARQUES, Danilo A.; OLIVEIRA, Rafael H. A. de; JAFELICE, Rosana S. M. Modelagem Matemática das Pistas de Skate. **Famat**, Uberlândia, 10 abr. 2008.

MOTTOLA, R. M.. Comparison of Arching Profiles of Golden Age Cremonese Violins and Some Mathematically Generated Curves. **Savart Journal**, United States, p. 1-18. 15 jun. 2011.

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, E F. **Evangelista Torricelli**. 2002. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Torricelli.html>>. Acesso em: 30 maio 2013

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, E F. **Gilles Personne de Roberval**. 2008. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Roberval.html>>. Acesso em: 14 maio 2013.

RAIO, R. S.. **Microwave Engineering**. Nova Délhi: Phi, 2012.

REGINALDO. **Física - Investigando o Universo**. Disponível em: <[www.fisicarevelada.blogspot.com](http://www.fisicarevelada.blogspot.com)>. Acesso em: 10 abr. 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. (Volumes 1 e 2).

SOUSA JÚNIOR, José Ribamar Alves de. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona**. 44 f. Dissertação (Mestrado) - Unesp, Rio Claro, Sp, 2010.

WEISSTEIN, Eric W. **Evolute**. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Evolute.html>>. Acesso em: 14 maio 2013.

\_\_\_\_\_ **A History Of The Magic Lantern**. Disponível em: <<http://www.magiclantern.org.uk/history/history1.html>>. Acesso em: 22 mar. 2013.

\_\_\_\_\_ **Curva Tautócrona**. Wikipedia: A Enciclopédia Livre. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva\\_tautocr%C3%B4nica](http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_tautocr%C3%B4nica)>. Acesso em: 22 mar. 2013.

\_\_\_\_\_ **Espirograf**. Blog Fantomas Disponível em: <<http://seriesedesenhos.com/index.php/lembrancas/item/1029-espirograf>>. Acesso em: 14 maio 2013.







## ANEXO B – DEMONSTRAÇÃO DA TAUTÓCRONA, RETIRADA DE COELHO (2008)

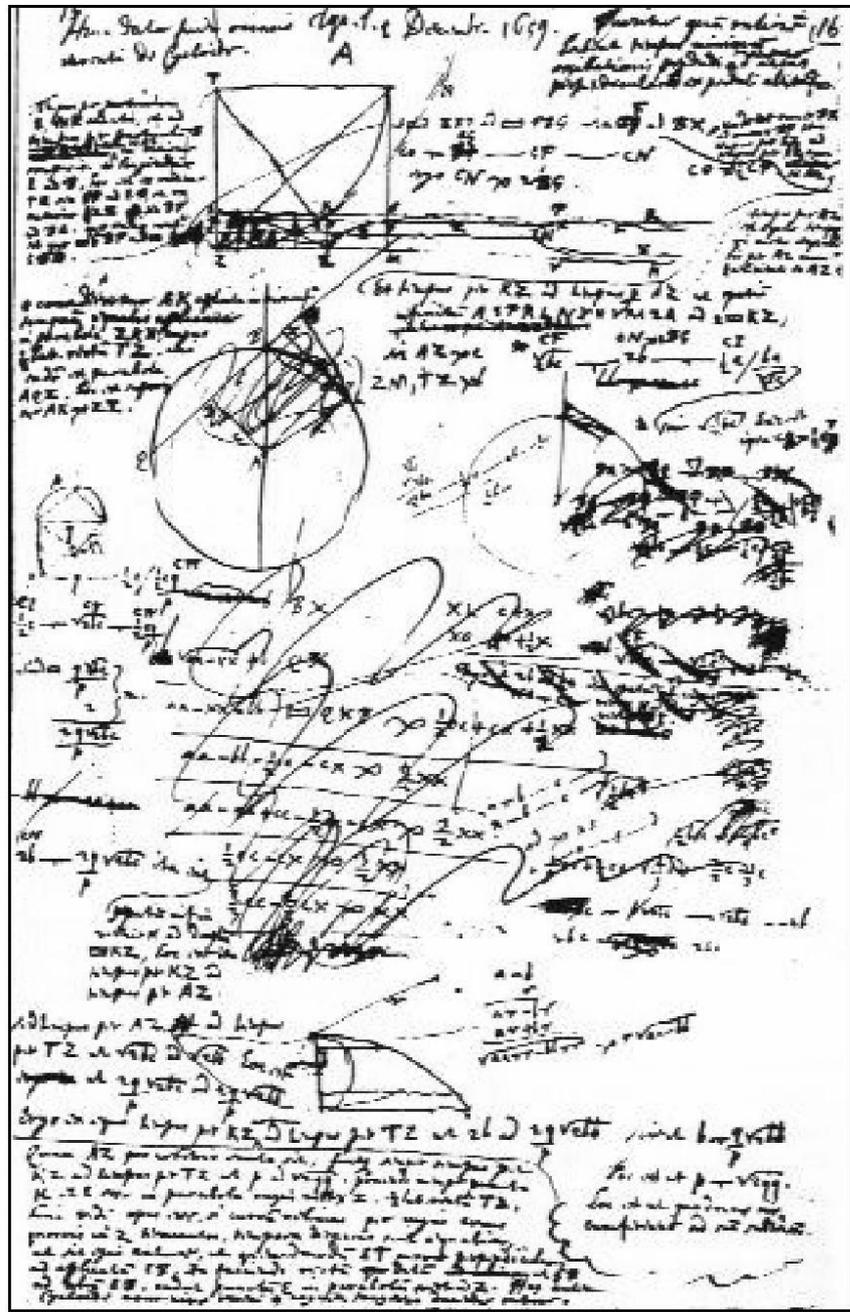
### O Problema do Isocronismo do Pêndulo

No século XVII a medição do tempo era de extrema importância para a navegação devido à necessidade de determinar de modo preciso as longitudes, durante as viagens (BURROWES e FARINA, 2005). Nessa época os governantes de vários países europeus ofereciam excelente remuneração por esses estudos.

O estudo do pêndulo, como ferramenta para medição do tempo inicia-se com Galileu, que percebeu que o pêndulo simples é não isócrono e por essa razão a posição na qual o pêndulo é “solto” é importante para a determinação do tempo de oscilação do pêndulo. Assim, considerando um arco mínimo de oscilação, por meio do qual o círculo é aproximadamente uma isócrona, Huygens teve possibilidade de determinar uma relação entre a queda livre independente do comprimento do arco.

Além disso, com seu contumaz talento como geômetra, foi capaz de estender sua solução para a cicloide, sem a restrição para uma mínima oscilação, e o resultado para sua nova investigação foi sua descoberta do isocronismo da cicloide (YODER, 1998, p.50, tradução nossa).

Segundo Yoder (1998), em 1º de dezembro de 1659, Huygens propôs a si mesmo um problema sobre o isocronismo do pêndulo. Ele confiou que o resolveria imediatamente e escreveu a questão nos cantos de uma página já desordenada com outro trabalho e com um pequeno espaço para um extensivo cálculo. (Veja figura a seguir)



Fonte: YODER, G. J. Unrolling Time – Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p. 49

O problema proposto por Huygens é o seguinte:

*“Quæritur quam rationem habeat tempus minimæ oscillationis penduli ad tempus casus pendularis ex penduli altitudine”.*<sup>50</sup>

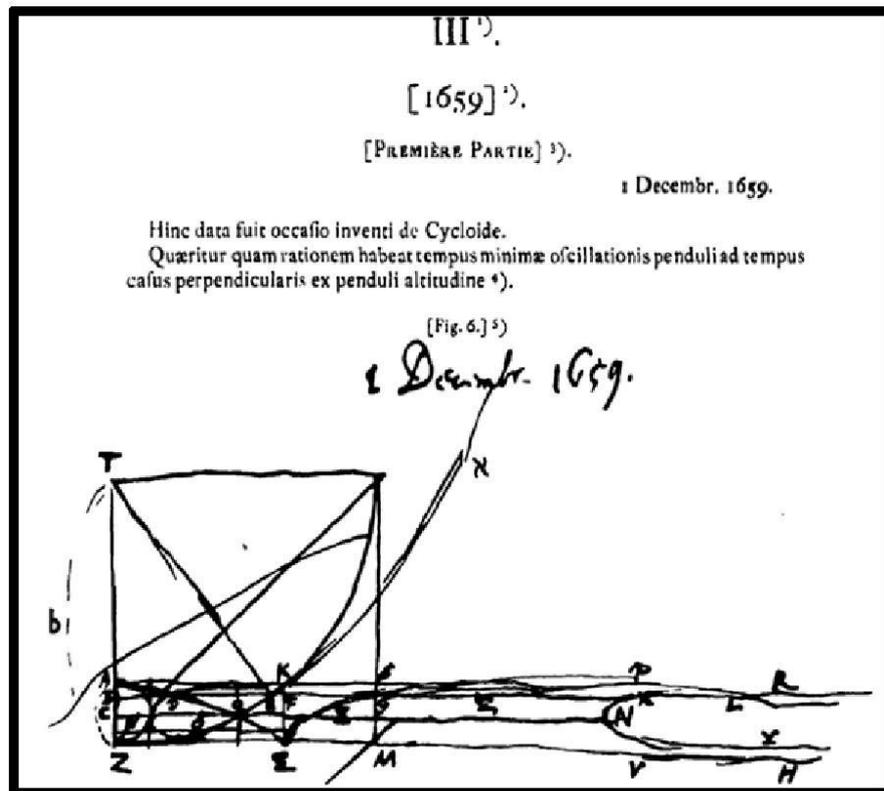


Ilustração 1<sup>51</sup> – Fonte: Tomo XVI

No tomo XVI, membros da SHC fizeram anotações e são nelas que esta parte do trabalho se pauta. Não terá como na primeira parte uma tradução do original em

<sup>50</sup> Qual a razão entre o tempo de uma oscilação mínima de um pêndulo e o tempo da queda livre perpendicular à altura do pêndulo. (tradução nossa)

<sup>51</sup> Esta ilustração e todas as que aparecem nesse capítulo são do Tomo XVI, publicado pela Sociedade Holandesa de Ciências, 1929.

latim, uma tradução e interpretação dos cálculos e conclusões da comissão responsável por esta publicação.

Esse problema proposto por Huygens, considera o período de oscilação de acordo com uma *particulam*<sup>52</sup> de arco de círculo que conduziu às investigações das quais saiu a descoberta do tautocronismo<sup>53</sup> da queda de acordo com arcos cicloidais.

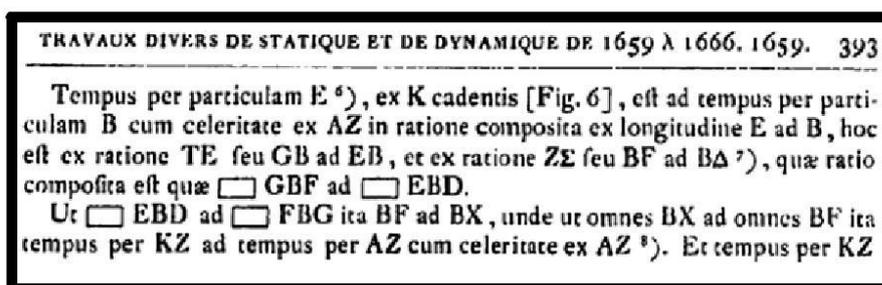


Ilustração 2

Huygens inicia sua demonstração fazendo algumas construções, explicadas nos comentários da Sociedade Holandesa de Ciências. Ele considera um ponto T, como sendo o centro de um quarto de circunferência de raio TZ, um ponto K qualquer, onde o arco KZ da circunferência coincide com o arco KZ de uma parábola. Os dois arcos interceptam-se em K. KZ $\chi$  com extremo em Z e intercepta o “*latus rectum*”<sup>54</sup> TZ. Constrói QZ de tal forma, que é uma parábola congruente a parábola KZ $\chi$  tendo como extremo o ponto A.

<sup>52</sup> **Particulam** neste trabalho será considerado como parte ínfima ou infinitesimal.

<sup>53</sup> Segundo a Sociedade Holandesa de Ciências, esse problema trata do tautocronismo da cicloide que se encontra nas páginas 72-74 da obra “Chartæ Mechanicæ” (a numeração das folhas desta obra data de 1928) e as páginas 187-188 do Manuscrito A. (Tomo XVI, p. 396, tradução nossa)

<sup>54</sup> *Latus rectum* foi traduzido aqui como lado ortogonal TZ em relação à ZM.

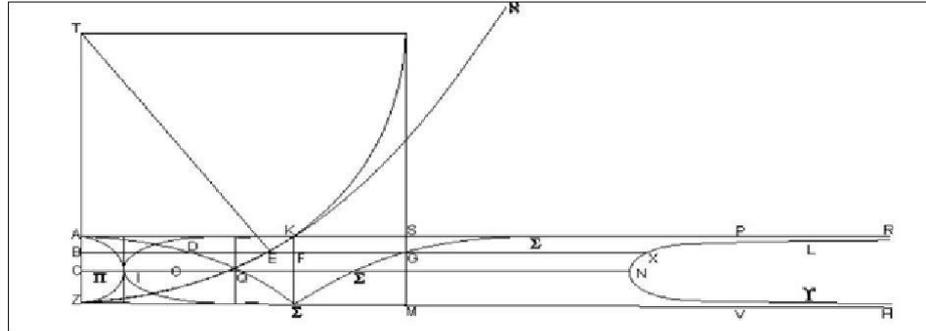


Figura 1

Sendo assim, **E** é uma parte ínfima pertencente ao arco **KZ** e **B** é a projeção ortogonal na reta **AZ**. Huygens, então, compara o tempo de queda ( $t_1$ ) ao longo de **E**, quando o móvel parte de **K** com uma velocidade nula e sob efeito da aceleração da gravidade, com o tempo ( $t_2$ ) correspondente a um movimento uniforme de queda de ao longo de **B** com velocidade igual a que o móvel teria em **Z**, ao partir em queda livre de **A** com velocidade nula, sob a ação da força de gravidade. Esta última velocidade será denotada por  $v_z$ . (fig. 2)

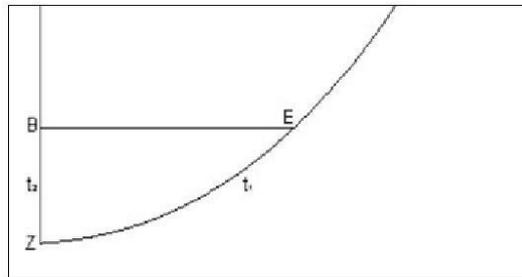


Figura 2

Considerando a ordenada **BX** medindo o tempo  $t_1$ , tal que **F** é uma projeção ortogonal do ponto **K** na reta **BX**. (Fig. 3), temos a seguinte razão:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{BX}{BF}$$

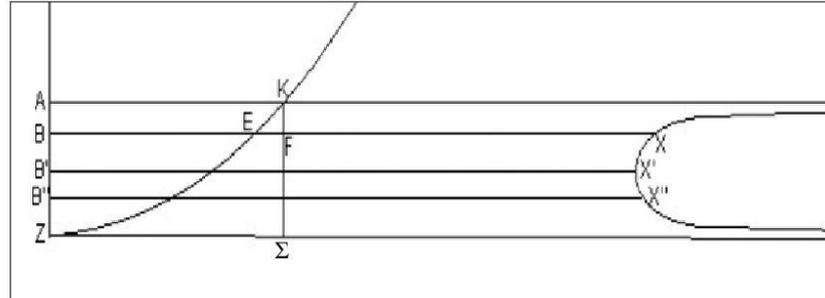


Figura 3

O tempo de queda através do arco KZ é considerado como a soma de todos os tempos  $t_1$ , isso corresponde à superfície ASPR ... NY ... HVZA (Fig. 4), considerada como a soma de todas as ordenadas BX

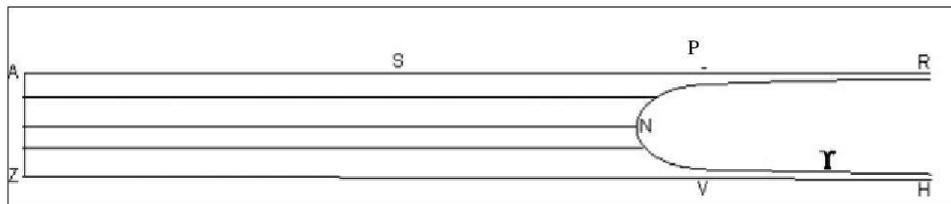


Figura 4 – superfície

Portanto,

$$\frac{\text{tempo de queda } KZ}{t_2(v_z)} = \frac{\sum BX}{BF} \quad (1)$$

$$\frac{\text{tempo de queda } AZ(v_z)}{t_2(v_z)} = \frac{\sum BF}{BF} \quad (2)$$

fazendo a razão entre (1) e (2), tem-se<sup>55</sup>

$$\frac{\text{tempo de queda } KZ}{\text{tempo de queda } AZ(v_z)} = \frac{\sum BX}{\sum BF} = \frac{ASPR...NY...HVZA}{[ ]KZ} \quad 56$$

<sup>55</sup>  $v_z$  significa o tempo de percurso de um elemento determinado B com velocidade  $v_z$ .

<sup>56</sup> [ ] KZ significa o retângulo AKΣZ

Huygens utilizando o Teorema da Velocidade Média, de Galileu, que reza que “o tempo de queda AZ de um corpo em movimento com velocidade uniforme é a metade do tempo da queda AZ com aceleração gravitacional”, concluí que

$$\frac{\text{tempo de queda } AZ(v_z)}{\text{tempo de queda } AZ \text{ de um corpo partindo de } A} = \frac{1}{2} \left( \frac{ASPR...NY...HVZA}{[ ]KZ} \right)$$

$$2[\text{tempo de queda } AZ(v_z)] = [\text{tempo de queda } AZ \text{ de um corpo partindo de } A]$$

Que é a afirmação que Huygens faz no final da página 393 e início da 394 de seu trabalho: *Et tempus per KZ ad tempus per AZ ut spatium infinitum ASPRLNYHVMZA ad 2 [ ] KZ*, ou seja<sup>57</sup>

$$\frac{t_{KZ}}{t_{AZ}} = \frac{ASPR...NY...HVZA}{2 [ ] KZ}$$

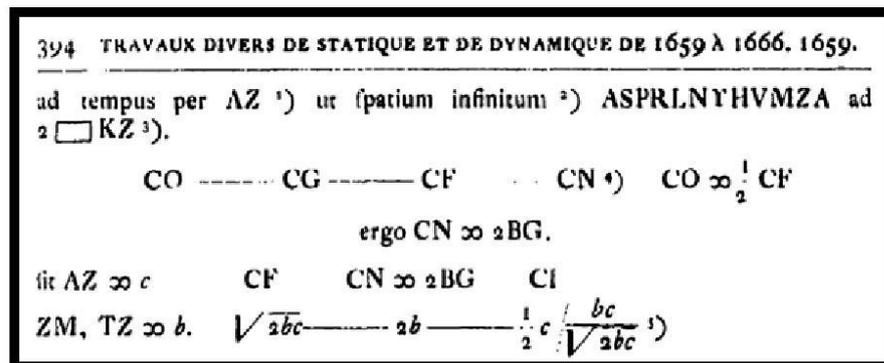


Ilustração 3 - parte da superior da p.394

Considerando F e G pontos de intersecção da reta CN com as KΣ e SM, respectivamente<sup>58</sup>. A definição de BX, aplicada no ponto C, muito próximo de B, tem-se que:

$$\frac{CQ.CQ}{CF.CG} = \frac{CF}{CN}$$

<sup>57</sup> SE TZ = b; AZ = c então CN = 2 TZ, ou seja, CN = 2b

<sup>58</sup> F e G são utilizados tanto para a reta B quanto para a C (na horizontal).

$$\frac{CQ^2}{CG} = \frac{CF^2}{CN}$$

Ou

$$CQ^2 = \frac{1}{2}K\Sigma^2 = \frac{1}{2}CF^2$$

Sendo assim,

$$CQ^2 = \frac{1}{2}CF^2 \Rightarrow 2CQ^2 = CF^2$$

E como

$$\frac{CQ^2}{CF.CG} = \frac{CF}{CN}$$

Tem-se

$$\frac{CQ^2}{CG} = \frac{CF^2}{CN} \Rightarrow \frac{CQ^2}{CG} = \frac{2CQ^2}{CN}$$

onde se conclui que

$$CN = 2CG$$

A partir daí, Huygens constrói uma reta CO como a terceira proporcional à CF e à CQ, ou seja CO é tal que

$$\frac{CF}{CQ} = \frac{CQ}{CO}$$

ou

$$CO.CF = CQ^2$$

como

$$\frac{CQ^2}{CF^2} = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$CO = \frac{1}{2}CF,$$

sive  $\sqrt{\frac{1}{2}bc}$  hæc est ipsa  $CO \propto \frac{1}{2}CF$ .

confideratur AK applicata in circumferentia tanquam æqualis applicatæ in parabola ZKN, cujus  $\frac{1}{2}$  lat. rectum TZ, cui eadem est parabola AQΣ. hoc est (supponitur  $AK \propto Z\Sigma^e$ ).

Ilustração 4 – parte central da p.394

Verifica-se, então, no original acima, que Huygens retoma a suposição de que a circunferência de raio TZ tangencia a parábola ZKx no ponto Z.

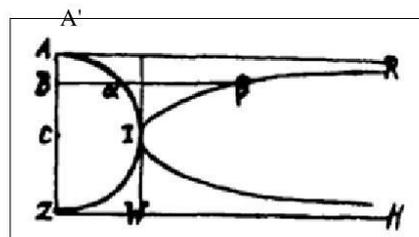


Ilustração 5

Huygens constrói uma ordenada Bα qualquer da semicircunferência AIZ, determinando Bβ de tal modo que

$$\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}$$

A proposição citada afirma que a superfície compreendida entre a curva assim construída, as assíntotas AR, ZH e a reta AZ está para aquela do retângulo AW numa razão igual àquela da semicircunferência p para o diâmetro q.

Chamando esta superfície de  $O_2$  e o espaço infinito  $AR...N...HZA$  de superfície, considerado anteriormente,  $O_1$ , temos que

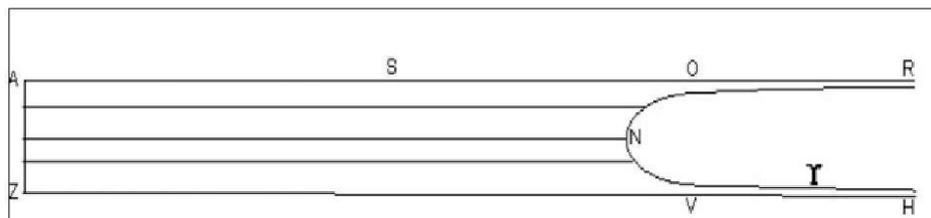


Figura 6

$$\frac{\text{tempo de queda } KZ}{\text{percurso } AZ \text{ de um móvel partindo de } A} = \frac{O_1}{2 [ ]KZ}$$

E, de acordo com a proposição anteriormente citada

$$\frac{O_2}{[ ]AW} = \frac{p}{q}$$

Temos também que

$$\frac{O_1}{2 [ ]KZ} = \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{[ ]AW} \cdot \frac{[ ]AW}{2 [ ]KZ}$$

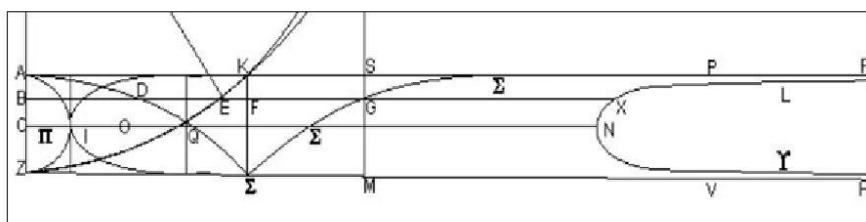


Figura 6

Pode-se notar que as ordenadas correspondentes  $BX$  e  $B\beta$  estão a uma razão constante igual àquela das superfícies  $O_1$  e  $O_2$ , tem-se a relação

$$\frac{BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$$

Substituindo-se o valor obtido de BE.BD da expressão acima em BX teremos

$$BX = \frac{BF^2 \cdot BG}{BE \cdot BD} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha}$$

Como

$$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}$$

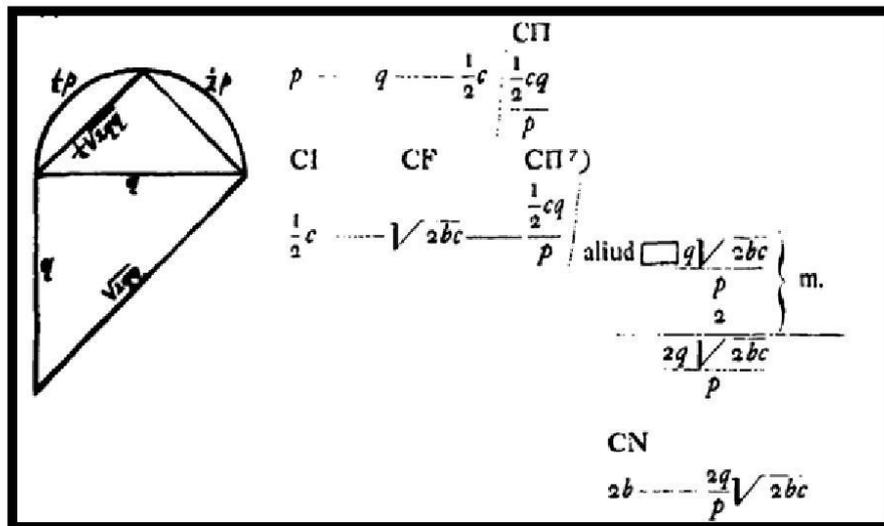


Ilustração 6 – última parte da p.394

Então na razão  $\frac{BX}{B\beta}$ , a única grandeza variável Bα desaparece. Para determinar essa razão constante, toma-se o ponto B em C, o que resulta em:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}$$

A equação

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} = \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{[\ ]AW} \cdot \frac{[\ ]AW}{2[\ ]KZ}$$

Resulta em

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} \cdot \frac{CN}{CI} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{CI}{2AK} = \frac{CN \cdot p}{q \cdot 2AK}$$

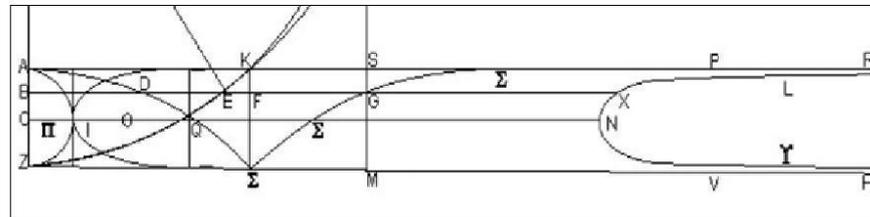


Figura 6

Considerando entre as ordenadas BX e Bβ uma razão constante igual a das superfícies O<sub>1</sub> e O<sub>2</sub>, tem-se a relação

$$\frac{BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$$

Multiplicando por BF<sup>2</sup> e BG, tem-se

$$\frac{BF^2 \cdot BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{BF^2 \cdot B\alpha}{CI}$$

$$\frac{BF^2 \cdot BG \cdot BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot B\alpha}{CI}$$

De tal forma que BX seja

$$BX = \frac{BF^2 \cdot BG}{BE \cdot BD} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha}$$

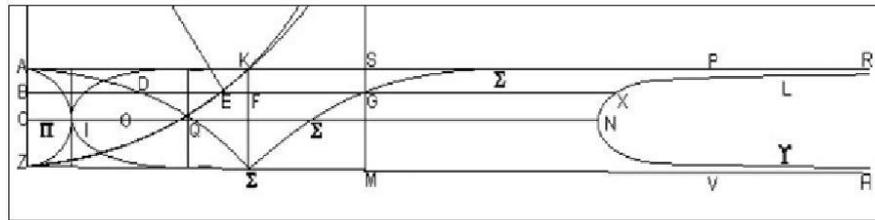


figura 6

E assim, concluir que

$$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}$$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{\frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha}}{\frac{CI^2}{B\alpha}}$$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha} \cdot \frac{B\alpha}{CI^2}$$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 \cdot BG}{CQ^2 \cdot B\alpha} \cdot \frac{B\alpha}{CI}$$

Como  $\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 \cdot BG}{CQ^2 \cdot B\alpha} \cdot \frac{CI}{B\beta}$$

$$BX = \frac{BF^2 \cdot BG}{BE \cdot BD} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha}$$

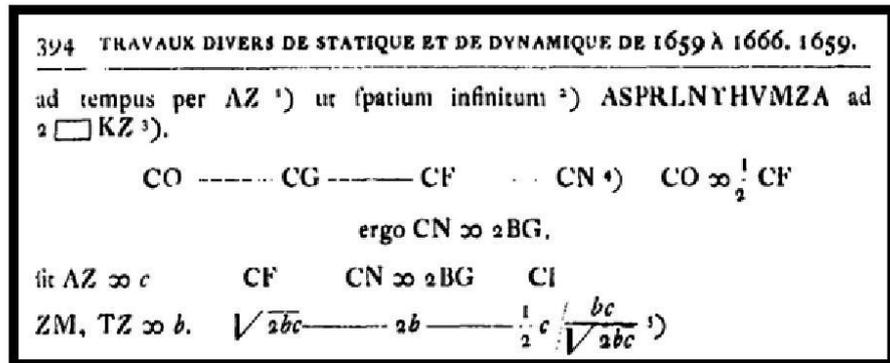


Ilustração 3 - parte da superior da p.394

E como  $TZ = b$  e  $AZ = c$ , então  $CN = 2TZ = 2b$

$$\frac{CN \cdot p}{q \cdot 2AK} = \frac{2b \cdot p}{q \cdot 2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p} \cdot AK}$$

considera-se  $AK$  como ordenada da parábola  $ZK\kappa$ . Logo

$$AK = \sqrt{AZ \cdot 2TZ}$$

Ou seja

$$\frac{CN \cdot P}{q \cdot 2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p} \sqrt{2bc}} = \frac{O_1}{2[ ]KZ},$$

Huygens se utiliza das Relações de Euclides e, de acordo com esta teoria pode-se concluir que:

$$\begin{cases} a : b = c : d \\ b : e = d : f \\ e : g = f : h \end{cases}$$

Logo,  $a:g=c:h$ .

Ou seja,

$$\begin{aligned} O_1 : O_2 &= CN : CI \\ O_2 : [ ]AW &= p : q \\ [ ]AW : [ ]KZ &= CI : CF \end{aligned}$$

Portanto,

$$O_1 : [ ]KZ = CN : CF$$

Fazendo uma transformação da segunda equação de tal forma que seu terceiro termo torne-se  $CI$  ou  $\frac{1}{2}c$ , tem-se

$$p : q = \frac{1}{2}c : CII,$$

logo

$$CII = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot q}{p}$$

Foi necessário a seguir transformar a terceira equação de tal maneira que seu terceiro termo torne-se  $CII$ .

$$CI : CF = CII : \frac{1}{4} \text{comprimento } CN$$

$$\frac{CI}{CF} = \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot q}{p}}{\frac{1}{4} CN}$$

$$\frac{Cl}{CF} = \frac{\frac{1}{2}c.q}{p} \cdot \frac{4}{CN}$$

$$\frac{CN}{CF} = \frac{2c.q}{p.Cl}$$

Como  $\frac{CN}{CF} = \frac{O_i}{[ ]KZ}$

$$\frac{O_i}{[ ]KZ} = \frac{2c.q}{p.Cl}$$

$$\frac{O_i}{2[ ]KZ} = \frac{c.q}{p.Cl}$$

$$\frac{O_i}{2[ ]KZ} = \frac{2b}{\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}}$$

Sabe-se que  $CN=2b$ , e assim tem-se a seguinte equação

$$\frac{CN}{\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}}$$

Sabendo que

$$\text{tempo } AZ = \sqrt{2bc}$$

e que

$$\text{tempo } TZ = \sqrt{2bb}$$

E como

$$\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso AZ } (v_z)} = \frac{O_1}{2 \text{ [ ] KZ}} = \frac{\text{APRXNHVZA}}{2 \text{ AZ} \cdot \text{Z}\Sigma} = \frac{pb}{q\sqrt{2bc}}$$

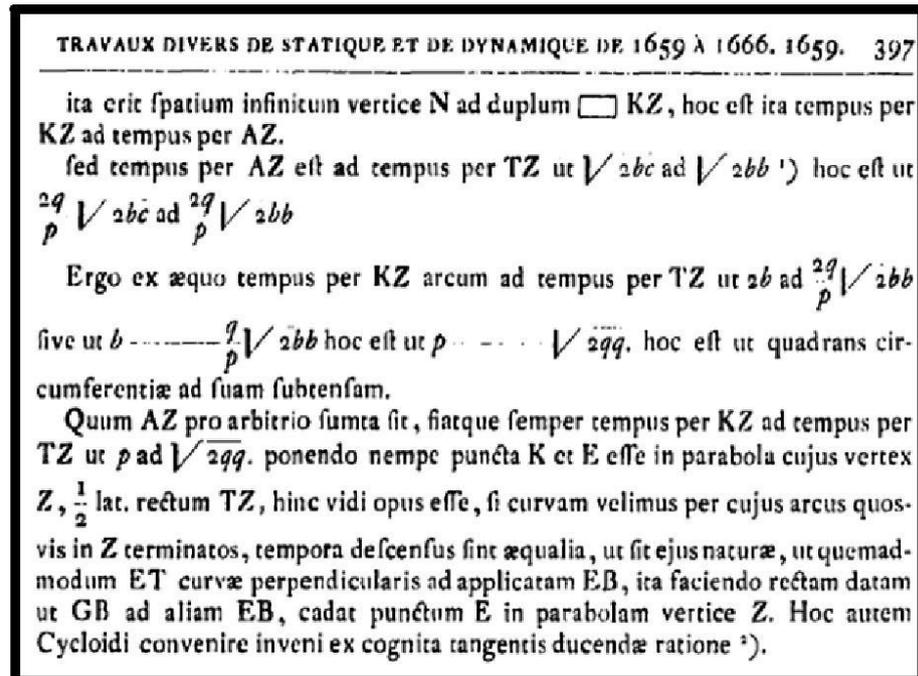


Ilustração 7

E

$$\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso TZ } (v_z)} = \frac{pb}{q\sqrt{2bb}}$$

Sabe-se que o tempo de queda livre é proporcional a raiz quadrada da distância (Galileu) e combinando as duas equações, temos

$$\frac{\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso AZ}(v_z)}}{\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso TZ}(v_z)}} = \frac{\frac{pb}{q\sqrt{2bc}}}{\frac{pb}{q\sqrt{2bb}}}$$

ou seja

$$\frac{\text{percurso AZ}(v_z)}{\text{percurso TZ}(v_z)} = \frac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{2bb}} = \frac{2bc}{2bb}$$

Então,

$$\frac{\text{percurso AZ}(v_z)}{\text{percurso TZ}(v_z)} = \frac{c}{b}$$

Esta última equação contém a descoberta do tautocronismo da queda cicloidal. O autor observa que o resultado obtido seria exato, se o ponto E se encontrasse sobre a parábola ZKx e não sobre a circunferência. Porém, durante a demonstração, E foi considerado uma única vez como ponto da circunferência, a relação entre os elementos E e B foi substituída por

$$\frac{TE}{BE} \text{ ou } \frac{GB}{BE'}$$

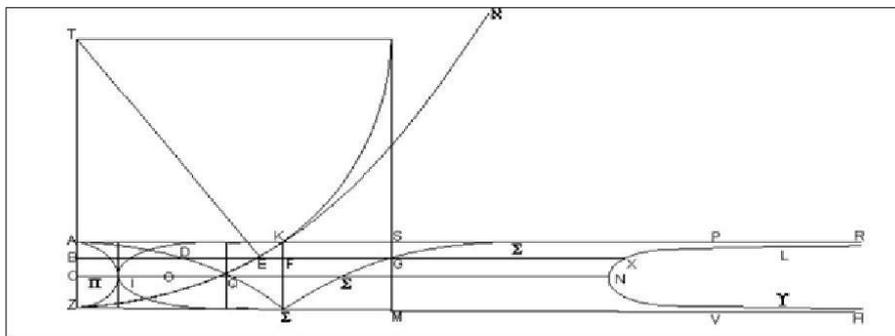


Figura 7

Assim foi substituída a circunferência por outra curva, de modo que TE

represente a normal em E, limitada pela vertical que passa por Z, não se tem mais a igualdade  $TE =$  comprimento de GB (constante).

Coloca-se  $\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$  (GB com comprimento constante dado) e E' é situado

exatamente sobre a parábola  $ZK\chi$ , o raciocínio do texto continua sendo inteiramente válido quando o tautocronismo encontrado advém de um tautocronismo exato.

Huygens observa que será assim, quando o ponto E encontra-se sobre uma cicloide e fará esta demonstração na segunda parte que se segue.

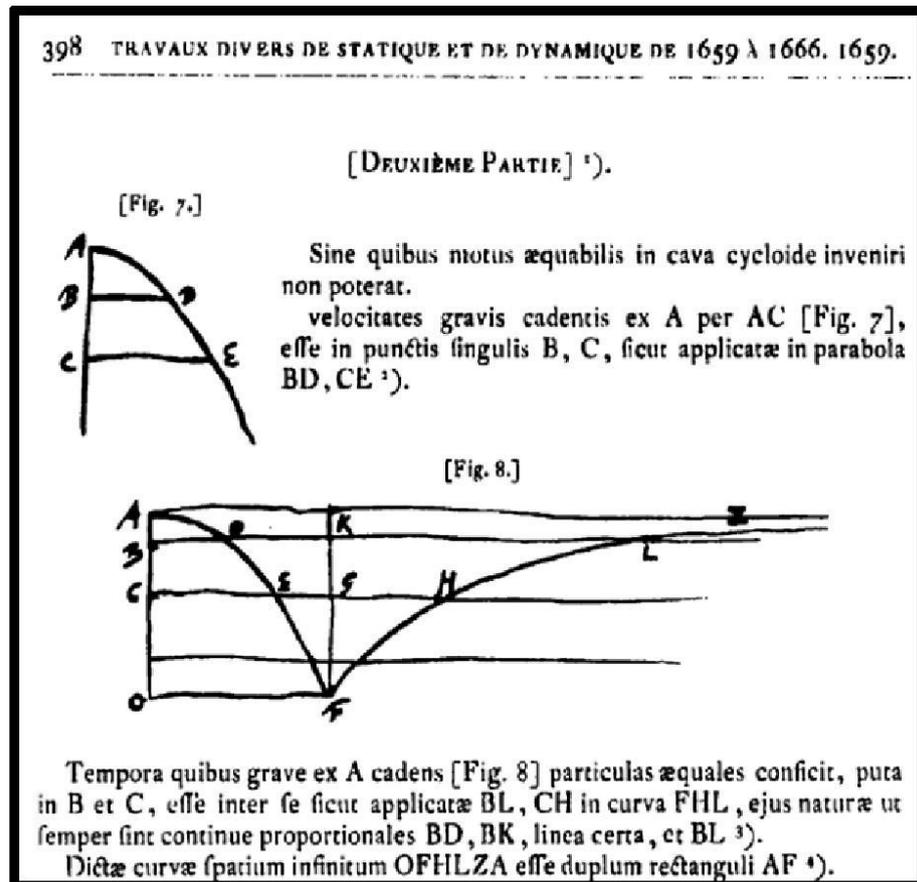


Ilustração 8

De uma parte da parábola as ordenadas são proporcionais aos quadrados das abscissas, as distâncias percorridas por um móvel que cai a partir do repouso são proporcionais aos quadrados dos tempos, por conseguinte também aos quadrados das velocidades.

Como BK é uma constante, a proposição diz que BL é inversamente proporcional à BD. Assim, dado que os tempos considerados são inversamente proporcionais às velocidades. Estão também nessa proporção em relação às ordenadas correspondentes da parábola, onde se tem que

$$BL \cdot BD = CH \cdot CE$$

Portanto, tem-se

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{tempo da queda AO de um móvel partindo do repouso}}{\text{tempo de percurso de AO com vel. constante } v_0 \text{ (vel. final queda AO)}} =$$

$$= \frac{\Sigma BL}{\Sigma OF} = \frac{\text{superfície OFHLZA}}{\text{superfície [ ] AF}}$$

Sendo assim,

$$\frac{FG \cdot FH}{KL \cdot KM} = \frac{\sqrt{AF \cdot FD}}{\sqrt{AK \cdot KD}} = \frac{NF}{OK}$$

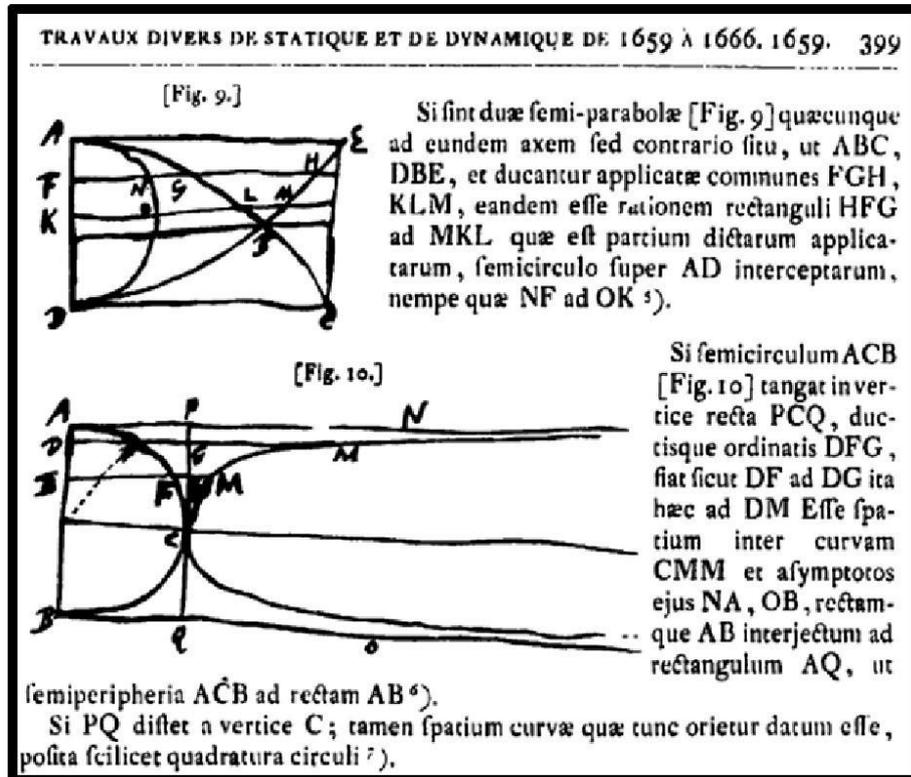


Ilustração 9

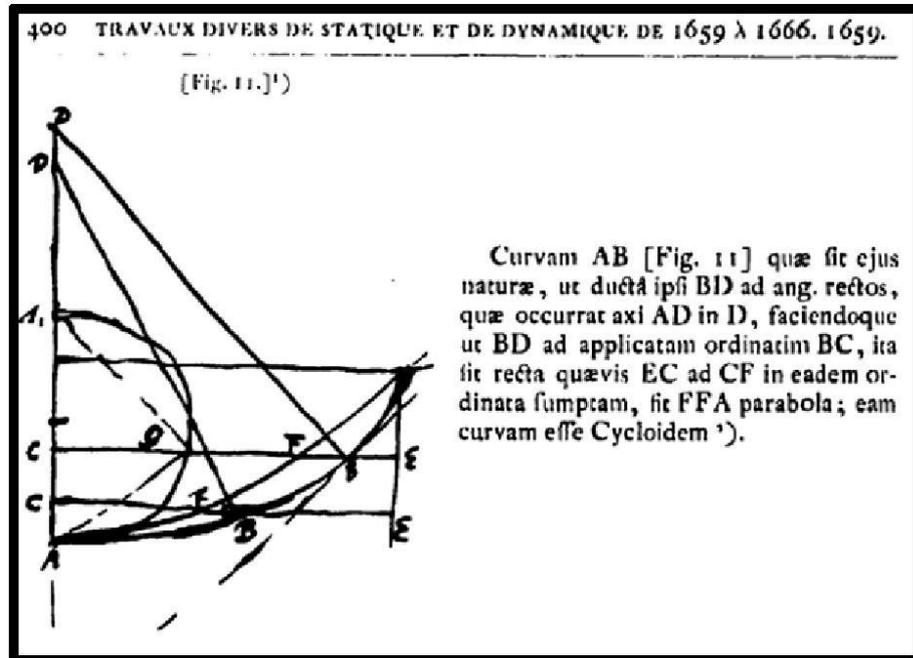
Huygens compara os tempos nos quais um móvel percorre por um lado a semicircunferência, por outro o diâmetro AB, com a mesma velocidade constante; estes tempos estarão entre si como p (semicircunferência) : q (diâmetro). Portanto, encontra-se outra expressão comparando um elemento F do arco AB com a sua projeção D sobre diâmetro AB e observa-se que

$$\frac{\text{tempo de percurso F}}{\text{tempo de percurso D}} = \frac{VF}{DF} = \frac{CV}{DF} = \frac{DM}{VC}$$

sendo V o centro da circunferência. E conclui que

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{tempo de percurso semi-circunferência AB}}{\text{tempo de percurso diâmetro AB}} = \frac{\sum DM}{\sum VC} = \frac{\text{superfície ANMCOQBA}}{\text{superfície [ ]AQ}}$$



Ilustração 10<sup>59</sup>

Assim, toma-se um F, tal que:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CF}$$

ou CE é um comprimento arbitrário constante, que resulta em

$$\frac{AG}{AC} = \frac{CE}{CF}$$

ou

$$CF^2 = \frac{AC^2 \cdot CE^2}{AG^2} = \frac{AC^2 \cdot CE^2}{AA_1 \cdot AC} = \frac{CE^2}{AA_1} \cdot AC,$$

do que se conclui que o lugar do ponto F é uma parábola.

<sup>59</sup> Os membros da Academia Holandesa de Ciências acrescentaram à figura acima os pontos A<sub>1</sub> e G.

Huygens continua sua demonstração do seguinte modo: admitiu que a curva considerada possuía o vértice A e o eixo de simetria AD.

O "*latus rectum*" da parábola que deve provir da construção p, toma um comprimento  $AA_1$  como  $CE^2 = p \cdot AA_1$ ; para que o círculo de diâmetro  $AA_1$  possa gerar o ciclóide rolando sobre uma perpendicular  $A_1$  ao eixo AD. A tangente ao ponto de intersecção do ciclóide com o prolongamento de CG é a paralela AG. Mas tangente à curva primitiva (lugar dos pontos B) é igualmente paralelo à AG: com efeito, tem-se que

$$\frac{CF^2}{CE^2} = \frac{AC}{AA_1},$$

por conseguinte

$$\frac{AC}{AA_1} = \frac{BC^2}{BD^2}$$

ou

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{BC}{BD}$$

ou

$$\frac{CG}{A_1G} = \frac{BC}{BD}$$

ou conclui-se que  $A_1G$  é paralelo à DB, por conseguinte AG paralelo à tangente de B

Do ponto A partem duas curvas que possuem tangentes paralelas entre elas os seus pontos de intersecção com uma ordenada qualquer perpendicular a AD.

Segundo os membros da SHC,

Huygens pode ter reconhecido intuitivamente que estas curvas devem ser idênticas, e teria dado, se fosse necessário, uma demonstração exata desta identidade de acordo com um método análogo à Prop.III da Parte II do *Horologium Oscillatorium* uma proposição do mesmo tipo para duas curvas que possuem normais comuns. (Tomo XVI, p.401, tradução nossa)

Daqui em diante o trabalho de Huygens tem mais 4 partes (p.400 a 413), porém todas se retratando ao trabalho *Chartae Mechanicae* que não será mostrado aqui, pois tais partes consistem em demonstrações análogas as que já foram apresentadas, nas quais o matemático demonstra o isocronismo da cicloide (tautócrona).

Como vimos, Huygens propõem a si próprio o problema do isocronismo do pêndulo, preocupado em melhorar o desempenho do relógio de pêndulo já existente. Ele resolve o problema com sucesso, porém um relógio de pêndulo, que ele acreditava ser realmente eficiente para a utilização em navegação, só seria construído em 1673.



## ANEXO C – LINHAS DE COMANDO DO MAPLE UTILIZADAS PARA RESOLVER O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

>  $g := 9.8; f1 := -2 * t / \text{Pi}; f2 := -\text{sqrt}(4 * t / \text{Pi}); f3 := -(8 * t / \text{Pi})^{1/3}; xc := (t - \sin(t)); yc := -1 + \cos(t);$

$$g := 9.8$$

$$f1 := -\frac{2t}{\pi}$$

$$f2 := -2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$f3 := -8^{1/3} \left( \frac{t}{\pi} \right)^{1/3}$$

$$xc := t - \sin(t)$$

$$yc := -1 + \cos(t)$$

>  $yyr := f1; dyyr := \text{sqrt}(1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t))); itr := \text{int}(dyyr, t = 0 .. \text{Pi}); comp\_reta = \text{evalf}(itr);$

$$yyr := -\frac{2t}{\pi}$$

$$dyyr := \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$$

$$itr := \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \pi$$

$$comp\_reta = 3.724191779$$

>  $ff := \text{sqrt}(- (1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t))) / yyr);$

$$ff1 := \text{int}(ff, t = 0 .. \text{Pi}); itr := \left( \frac{1}{\text{sqrt}(2 \cdot g)} \right) \cdot ff1; temporeta := \text{evalf}(itr);$$

$$ff := \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \pi}{t}}$$

$$ff1 := \sqrt{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

$$itr := 0.2258769757 \sqrt{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

$$temporeta := 1.189649425$$

>  $yyr := f2; dyyr := \text{sqrt}(1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t))); itr := \text{int}(dyyr, t = 0 .. \text{Pi}); \text{comp\_quad} := \text{evalf}(itr);$

$$yyr := -2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$dyyr := \sqrt{1 + \frac{1}{t \pi}}$$

$$itr := \frac{1}{4} \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{\pi(\pi^2 + 1)}} \left( 2 \sqrt{\pi(\pi^2 + 1)} \sqrt{\pi} \ln(2) + \sqrt{\pi(\pi^2 + 1)} \sqrt{\pi} \ln(\pi) \right.$$

$$+ 4 \sqrt{\pi^2 + 1} \pi^{3/2} \sqrt{\pi(\pi^2 + 1)} - 2 \sqrt{\pi^2 + 1} \pi \ln(2) + 2 \sqrt{\pi^2 + 1} \pi \ln(1 + 2 \pi^2$$

$$\left. + 2 \sqrt{\pi(\pi^2 + 1)} \sqrt{\pi} \right) - \sqrt{\pi^2 + 1} \pi \ln(\pi)$$

$$\text{comp\_quad} := 3.889695455$$

>  $ff := \text{sqrt}(- (1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t))) / yyr);$

$ff1 := \text{int}(ff, t = 0 .. \text{Pi}); itr := \left( \frac{1}{\text{sqrt}(2 \cdot g)} \right) \cdot ff1; \text{tempoquad} := \text{evalf}(itr);$

$$ff := \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{t \pi}}{\sqrt{\frac{t}{\pi}}}}$$

$$ffl := \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2} \pi \left( \text{hypergeom} \left( \left[ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right], \left[ \frac{1}{4} \right], -\frac{1}{\pi^2} \right) \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2 + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2}$$

$$itr := \frac{0.1505846505 \sqrt{2} \pi \left( \text{hypergeom} \left( \left[ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right], \left[ \frac{1}{4} \right], -\frac{1}{\pi^2} \right) \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2 + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2}$$

$$\text{tempoquad} := 1.013381894$$

>  $yyr := f3$ ;  $dyyr := \text{sqrt}(1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t)))$ ;  $itr := \text{int}(dyyr, t = 0..Pi)$ ;  $\text{comp\_cubica} = \text{evalf}(itr)$ ;

$$yyr := -8^{1/3} \left( \frac{t}{\pi} \right)^{1/3}$$

$$dyyr := \frac{1}{3} \sqrt{9 + \frac{8^{2/3}}{\left( \frac{t}{\pi} \right)^{4/3} \pi^2}}$$

$$\begin{aligned} itr := & \frac{1}{1080} \frac{1}{\pi^3 \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2} \left( 1080 \pi^4 \text{hypergeom} \left( \left[ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right], \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right], -\frac{64}{729 \pi^6} \right) \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right. \\ & + 15 \sqrt{2} \pi^4 \sec \left( \frac{5}{12} \pi \right) \csc \left( \frac{5}{12} \pi \right) \sec \left( \frac{1}{12} \pi \right) \csc \left( \frac{1}{12} \pi \right) \sqrt{3} - 720 \pi^2 \text{hypergeom} \left( \left[ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right], \right. \\ & \left. \left[ \frac{2}{3}, \frac{13}{12}, \frac{4}{3} \right], -\frac{64}{729 \pi^6} \right) \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2 + 16 \Gamma \left( \frac{3}{4} \right)^2 \text{hypergeom} \left( \left[ \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \right], \left[ \frac{4}{3}, \frac{17}{12}, \frac{5}{3} \right], -\frac{64}{729 \pi^6} \right) \end{aligned}$$

$$comp\_cubica = 4.068652587$$

>  $ff := \text{sqrt}(- (1 + (\text{diff}(yyr, t) \cdot \text{diff}(yyr, t))) / yyr);$

$ff1 := \text{int}(ff, t = 0 .. \text{Pi});$   $itr := \left( \frac{1}{\text{sqrt}(2 \cdot g)} \right) \cdot ff1;$   $tempocubica := \text{evalf}(itr);$

$$ff := \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{9} \frac{8^{2/3}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{4/3} \pi^2}\right) 8^{2/3}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/3}}}$$

$$ff1 := \frac{1}{5940} \frac{1}{\pi^3 \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} \left( \sqrt{2} \left( 3564 \pi^4 \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{5}{24}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{24}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right) \right. \right.$$

$$+ 99 \cdot 6^{1/4} \pi^{17/4} \sec\left(\frac{3}{8} \pi\right) \csc\left(\frac{3}{8} \pi\right) \sec\left(\frac{1}{24} \pi\right) \csc\left(\frac{1}{24} \pi\right) \Gamma\left(\frac{17}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right)$$

$$- 1320 \pi^2 \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)$$

$$\left. \left. + 40 \text{hypergeom}\left(\left[\frac{11}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{35}{24}, \frac{5}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right) \right) \right)$$

$$itr := \frac{1}{\pi^3 \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} \left( 0.00003802642689 \sqrt{2} \left( 3564 \pi^4 \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{5}{24}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{24}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 99 \cdot 6^{1/4} \cdot \pi^{17/4} \sec\left(\frac{3}{8} \pi\right) \csc\left(\frac{3}{8} \pi\right) \sec\left(\frac{1}{24} \pi\right) \csc\left(\frac{1}{24} \pi\right) \Gamma\left(\frac{17}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right) \\
& - 1320 \pi^2 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right) \\
& + 40 \operatorname{hypergeom}\left(\left[\frac{11}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{35}{24}, \frac{5}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right) \Big) \\
& \qquad \qquad \qquad \text{tempocubica} := 1.016500042
\end{aligned}$$

$\triangleright$   $X := \operatorname{diff}(xc, t);$   
 $Y := \operatorname{diff}(yc, t);$   
 $dY := Y/X;$   
 $ec := \operatorname{sqrt}(1 + dY \cdot dY) \cdot X;$   
 $iec := \operatorname{int}(ec, t = 0 .. \operatorname{Pi});$   
 $\operatorname{comp\_cicloide} := \operatorname{eval}(iec);$

$$\begin{aligned}
X &:= 1 - \cos(t) \\
Y &:= -\sin(t) \\
dY &:= -\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)} \\
ec &:= \sqrt{1 + \frac{\sin(t)^2}{(1 - \cos(t))^2}} (1 - \cos(t))
\end{aligned}$$

*iec := 4*

*comp\_cicloide := 4*

> *ff := sqrt((1 + dY·dY)/(-yc))·X;*

$$ff := \sqrt{\frac{1 + \frac{\sin(t)^2}{(1 - \cos(t))^2}}{-1 + \cos(t)}} (1 - \cos(t))$$

> *ffl := int(ff, t = 0..Pi);*

$$ffl := \pi \sqrt{2}$$

> *titci := (1/sqrt(2·g))·ffl; tempo\_cicloide := evalf(titci);*

$$titci := 0.2258769757 \pi \sqrt{2}$$

$$tempo_cicloide := 1.003544961$$