O ESTUDO DE UMA NOVA CONCEITUAÇÃO PARA OS NÚMEROS REAIS

Fernando Pavan Guido

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

IFSP
São Paulo
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Guido, Fernando Pavan.
O Estudo de uma Nova Conceituação para os Números Reais/ Fernando Pavan Guido - São Paulo: IFSP, 2013.
51f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca.

1. Número. 2. Filosofia da Matemática. 3. Complementaridade. 4. Números Reais. 5. Fundamentos da Matemática I. Título do trabalho.

FERNANDO PAVAN GUIDO

O ESTUDO DE UMA NOVA CONCEITUAÇÃO PARA OS NÚMEROS REAIS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 21/06/2013

CONCEITO: 10,0 (Dez)

FGVMarcondes

Profa. Me. Fabiane Guimarães Vieira Marcondes
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Aluno: Fernando Pavan Guido

“A Matemática quando a compreendemos bem possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza” Bertrand Russell

A Cantor,

por seu infinito... e além

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Bolsa de iniciação científica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, sem o qual teria sido muito difícil realizar esse trabalho.

Agradeço à minha noiva por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis e compreender as várias vezes em que deixamos de sair para eu estudar.

A todos os colegas que começaram comigo (infelizmente restaram poucos) e aos que fiz durante o curso, em especial Ana Olivia, Anderson (Biga four), Arnaldo, Cideni, Douglas, Everton, Felipe Araujo (agente duplo), Felipe Marcos, Fil, Jéssica, Laura, Orlando, Paçoca, Perucão, Rafa, Renata, Silviene, Thaís, Thalita, Mestre Toninho e Will que contribuíram para tornar essa caminhada menos dolorosa.

Ao prof. Dr. Armando Traldi por acreditar em nós nesses semestres como coordenador, ao prof. Me. Amari Goulart pela força, conselhos e as melhores “conversas filosóficas de boteco” que tive, à prof. Dra. Delacir Poloni por fazer as coisas acontecerem, à prof. Dra. Mariana Baroni e à prof. Dra. Cristina Lopomo Defendi pela ajuda e inestimáveis conselhos nesta reta final, à prof. Ma. Fabiane Marcondes por me ouvir e discordar de mim (mesmo quando concordava) apenas para enriquecer nossas discussões, ao prof. Me. César Adriano e ao prof. Me. Eduardo Curvello pelas maravilhosas aulas, por sempre sanar (com extrema paciência) todas as minhas dúvidas (e foram muitas) e ainda permitir que eu dividisse um pouco dos meus problemas quando precisei.

Em especial ao prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca não apenas por contribuir para a minha formação com suas ótimas aulas, mas por me orientar de modo magistral na elaboração deste trabalho e por preciosos conselhos que levarei para vida toda.

E, por fim, a dois professores que me marcaram não apenas pelo conhecimento dividido, mas pelas horas que se colocaram no papel de amigo, por vezes até psicólogo me guiando, aconselhando ou simplesmente me ouvindo, muito obrigado Granero – muito obrigado Henrique.

Obrigado a todos.

RESUMO

Neste trabalho abordamos o conceito de número, fundamental para diversas áreas da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Real. Por meio de um levantamento histórico e filosófico, compreendemos como as três principais escolas filosóficas conceituavam o número bem como suas potencialidades e falhas. Tal estudo vai buscar a conceituação do número na noção de complementaridade, utilizada pelo físico teórico Niels Bohr, para descrever fenômenos quânticos, e posteriormente, por matemáticos como Michael F. Otte, para analisar aspectos filosóficos, epistemológicos e cognitivos relacionados a conceitos matemáticos. Por fim, apresentamos uma construção informal dos números baseada na proposta do matemático inglês John Horton Conway que, ao relacionar tal construção à representação por meio de uma classe de jogos, satisfaz do ponto de vista filosófico a noção de complementaridade.

Palavras-chave: Número; Filosofia da Matemática; Complementaridade; Fundamentos da Matemática; Análise Matemática.

STUDY OF A NEW CONCEPT FOR THE REAL NUMBERS

ABSTRACT

In this paper we approach the concept of number, fundamental to many areas of math, such as the Differential and Integral Calculus and Real Analysis. Through a historical and philosophical analysis comprising how the three main schools of philosophy conceived the number as well as their strengths and flaws. This study will seek the conceptualization of the notion of complementarity number, used by theoretical physicist Niels Bohr, to describe quantum phenomena, and then by mathematicians like Michael F. Otte, to analyze philosophical, epistemological and cognitive aspects related to mathematical concepts. Finally, we present an informal construction of figures based on the proposal of the British mathematician John Horton Conway that relate to such construction through the representation of a class of games, satisfying both the philosophical point of view the notion of complementarity.

Keywords: Number; Philosophy of Mathematics; Complementarity; Foundations of Mathematics; Mathematical Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho abordou os números reais pela sua importância frente ao seu papel fundamental em várias áreas da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral.

Entre os propósitos deste estudo, busca-se explorar uma nova conceituação de número real estabelecendo a relação desta nova teoria com as abordagens clássicas, quais sejam, cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais e a abordagem axiomática. Como produto final deste trabalho de conclusão de curso, apresentei uma nova construção para o conjunto real baseada na teoria do matemático inglês John H. Conway[1].

O tema do trabalho foi escolhido pelo fato de perceber de forma empírica a existência de uma dificuldade de entendimento em várias das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Tal dificuldade se apresenta pela não compreensão dos números reais que, além de outras, é a base do conceito de Limite que, por sua vez, é a ferramenta essencial para se compreender a derivada e a integral.

Comprovando essa afirmação, encontramos no artigo escrito por Igliori (2001) respostas evasivas e até mesmo erradas, inclusive de alunos do último ano de licenciatura em matemática. O artigo apresenta testes que foram aplicados em alunos de ensino médio e de licenciatura em matemática e consistiram em perguntas relacionadas às principais propriedades dos números reais entre elas densidade e completude.

Como sabemos, os objetos matemáticos possuem uma natureza dual, tanto lhe cabem uma teoria axiomática, como podem ser complementados por aplicações, ou seja, modelos apoiados no mundo real que traduzem seus processos lógicos. Frente a isso, buscaremos no conceito de complementaridade o quanto as teorias clássicas dão conta da intensionalidade (axiomática) e da extensionalidade (aplicação ao mundo real) e qual a potencialidade de uma nova construção frente a esse conceito (complementaridade). Vale ressaltar que esse conceito foi cunhado pelo físico

[1] “John Horton Conway nasceu em Liverpool no dia 26 de dezembro de 1937. Estudou em Cambridge, realizando seu doutorado em 1964. Fez importantes contribuições em Teoria dos Números, Teoria dos Grupos e Teoria dos Jogos Combinatórios. Atualmente é professor da Universidade de Princeton” (FONSECA , 2010, p. 11).

teórico Niels Bohr e posteriormente utilizado por matemáticos como Michael F. Otte para abordar aspectos epistemológicos e cognitivos de assuntos matemáticos.

A teoria de Conway (2001) será a base da pesquisa. Sua abordagem referente aos números reais possibilitará o desenvolvimento de uma nova construção. A comparação dessa teoria com as teorias clássicas mostrará o resultado referente à abordagem de uma das problematizações propostas para a pesquisa, a de que a primeira traz uma melhor contribuição frente à complementaridade.

Algumas questões que motivaram nossa pesquisa são:

- Como se desenvolveram e evoluíram as fundamentações para a matemática existente hoje?
- Quais teorias fundamentam a construção dos números reais?
- Do ponto de vista da complementaridade, as teorias clássicas dão conta de toda problemática que concerne aos números reais?
- As teorias clássicas possuem o aspecto extensional e intensional?
- Frente a questões históricas e filosóficas acerca da natureza dos numerais, seja no campo computacional ou teórico, como podemos responder à questão: O que é número?

Foram utilizadas obras voltadas ao ensino de Análise Real, obras que abordam os Fundamentos e a Filosofia da Matemática e os trabalhos (dissertação e tese) do professor e pesquisador do IFSP e PUC-SP Rogério Ferreira da Fonseca, entre outras obras que julgamos necessário.

No tópico 2 vemos como se deu o desenvolvimento histórico das teorias clássicas que dão contas dos reais e apresentamos brevemente cada uma delas. No tópico seguinte buscamos nas principais escolas filosóficas surgidas no final do século XIX como era compreendido o conceito de número e a natureza de sua existência. No tópico 4 discorremos sobre a complementaridade como conceito filosófico e epistemológico, bem como os conceitos de extensionalidade e intensionalidade na Matemática. No tópico 5 apresentamos ideias introdutórias de uma nova abordagem para a construção dos números baseado na teoria de Conway e, por fim, no tópico 6, expomos algumas reflexões à guisa de conclusão.

2 ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE

No século XIX a Matemática já havia se desenvolvido de maneira surpreendente, já havia passado por um período que pode ser chamado "Idade Áurea da Matemática" por apontar muitas ideias novas e revolucionárias. Gauss (1777 – 1855) já havia dado suas contribuições para as mais distintas áreas da Matemática, Física e Astronomia e nomes como Abel (1802 - 1829) e Galois (1811 - 1832) foram responsáveis pela origem do que ficou conhecido como Teoria dos Grupos e da chamada Álgebra Moderna.

Nesse período, mais precisamente em 1829[2], também foi apresentada a geometria não euclidiana por Lobachevsky e Bolyai, mostrando a construção de novas geometrias, indo além da famosa Geometria Euclidiana, tida até então como o maior triunfo da racionalidade humana e base para muitas descobertas matemáticas. Um acontecimento que veio corroborar com toda essa evolução e possibilitar a consolidação de novas ideias foi o movimento de retorno aos fundamentos da Matemática. Um dos motivadores desse fato ancorou-se na necessidade de colocar sobre bases rigorosas algumas noções do Cálculo Diferencial e Integral, como os números reais, limites, e a própria noção de infinito.

Uma das primeiras sugestões para tal veio de Jean-le-Rond D'Alembert "ao observar muito corretamente, em 1754, que era necessária uma teoria dos limites" (EVES. 2011, p.610) que possibilitasse fundamentar alguns conceitos essenciais para o cálculo diferencial e integral, entre eles, uma teoria para os limites. "O mais antigo matemático de primeiro plano a efetivamente tentar uma rigorização do cálculo foi o ítalo-francês Joseph Louis Lagrange" (EVES, 2011, p.610) em 1797. Bolzano, em 1817, apresentou alguns resultados importantes, mas seu trabalho ainda continha muito da intuição geométrica o que colocou em xeque várias de suas ideias. Grandes matemáticos como Gauss também contribuíram para amadurecer as discussões a respeito dos fundamentos. Sob o impulso de matemáticos como Cauchy e Weierstrass iniciou-se o movimento de retorno aos fundamentos da Matemática, conhecido como Aritmetização da Análise ou ainda redução dos princípios da Análise ao conceito de número real.

[2]Howard Eves cita que em 1829 Lobachevsky apresentou, "mas devido as barreiras da língua e a lentidão com que as informações de novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa ocidental por vários anos (2011, p.542).

Esse movimento “Aritmetização da Análise” tinha a intenção de eliminar algumas noções intuitivas sobre conceitos extremamente importantes para o cálculo, como os infinitésimos, e dessa maneira solidificar os alicerces que o sustentam. Cauchy, em 1821, formalizou conceitos como limite, diferenciabilidade, continuidade e integral, porém essa teoria dos limites foi construída sobre uma noção intuitiva ou ingênua do sistema de números reais, ainda no século XIX, como afirma Eves (2011, p. 611) Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema de números reais fosse colocado à prova, tornando-o rigoroso e dessa forma tudo que decorresse dele estaria bem fundamentado. Tinha-se então a Análise Matemática e, consequentemente, toda a Matemática repousando sobre bases mais rigorosas.

Mas como o espírito humano não se aquietou, surgiram outras questões, por exemplo, será que o máximo rigor tinha sido atingido? No final do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind e Georg Cantor, novas construções para os números reais foram propostas, reafirmando o movimento de Aritmetização da Análise.

Dessa forma, produziram-se duas grandes teorias “clássicas” que dão conta de fundamentar o campo dos números reais, quais sejam Cortes de Dedekind e Classes de Equivalência de Sequências Convergentes de Cauchy (de números racionais), além de uma terceira teoria axiomática que será citada posteriormente.

Corte de Dedekind, ou simplesmente corte, é todo par (E,D) de conjuntos não vazios de números racionais, cuja união seja Q, tais que todo elemento de E seja menor que todo elemento de D (ÁVILA. 2006, p.58). É importante ressaltar a existência de cortes que não possuirão um racional como elemento separador, de sorte que temos aí caracterizada a descontinuidade do conjunto Q, sendo necessário acrescentar novos elementos para "preencher" as lacunas deixadas na reta aceita como representante geométrico de R. A partir dessa definição e uma série de proposições munidas de duas operações, conseguimos construir os números reais como um corpo ordenado e completo, tendo como ponto forte o teorema que diz: todo corte de números reais possui um número real como elemento separador.

A teoria conhecida como Critério de convergência de Cauchy afirma: Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência a_n seja convergente é que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que n, m > N → $|a_n - a_m| < \varepsilon$ (ÁVILA, 2006, p.97). De sorte que, dentre tais sequências, existem as convergentes, mas também existe uma infinidade de sequências que não convergirão para um racional e é justamente desse fato que postulamos a existência dos números irracionais. Cantor,assim como Dedekind, também parte do conjunto dos números racionais e de suas propriedades.

A abordagem axiomática se baseia em aspectos estruturais da Matemática, apresentando uma série de fatos tidos como elementares (os axiomas), e duas operações (adição e multiplicação), para conceber a partir de processos puramente lógicos o conjunto dos números reais como um Corpo. A partir daí é possível demonstrar que tal conjunto é um Corpo Ordenado e Completo e, a menos de um isomorfismo, é único.

Uma vez que toda a teoria dos números reais podia ser reduzida aos números naturais, o próximo passo foi reduzir os próprios números naturais ao menor número de termos não definidos e premissas dos quais se pudessem derivar. Esse trabalho foi realizado em 1889 por G. Peano através de um sistema axiomático.

No princípio do século XX, o sistema de números naturais foi definido em termos de conceitos da teoria dos conjuntos por especialistas em Lógica, como Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Bertrand Russel e Alfred North Withehead, que se empenharam em aprofundar ainda mais os fundamentos com base na teoria dos conjuntos e em noções de Lógica. Esse movimento ficou conhecido como logicismo, que acabou por atrair tantos adeptos quanto opositores, gerando discussões acaloradas entre três grandes escolas filosóficas: os logicistas, como citado acima, os formalistas liderados por David Hilbert e os intuicionistas que tem como principal defensor o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

2.1. Peano e sua Axiomática

Giuseppe Peano (1858 – 1932) foi um matemático italiano, tido como um dos fundadores da Lógica simbólica e figura de extrema importância no já citado movimento de Aritmetização da Análise. Sua obra influenciou Russel e Whitehead. Publicou pela primeira vez em 1889 seus famosos axiomas, conhecidos como axiomas de Peano que tomaram forma definitiva em 1898 e, a partir deles, podem-se conceber os números naturais e suas propriedades. Os axiomas contêm três termos não definidos, quais sejam, “zero”, “sucessor” e “número natural”.

Peano não tinha interesse algum em esclarecer o que é um número, pois segundo ele, os axiomas são suficientes para deduzir todas as propriedades para tais números, existindo ainda uma infinidade de outros sistemas que também se verificariam por meio deles, sendo, portanto, número natural o que se obtiver por abstração desse sistema axiomático. Acreditava também que por um ponto de vista pragmático, não existe a necessidade de definir número, pois tal ideia já aparece clara em demasia para todos, podendo alguma definição confundir ou ainda obscurecer os pontos mais importantes em voga. Desse modo, além da total consciência de que seus axiomas não respondem a questão “o que é um número?”, também evitava qualquer definição para eles, afirmando que:

> O conceito de número é distinguido de muitos outros conceitos dos cursos da escola por sua primariedade. Isto significa que na maioria esmagadora das formas na qual matemática pode ser desenvolvida como um sistema lógico, a ideia de número pertence ao conjunto daqueles conceitos que não são definidos em termos de outros conceitos, mas junto com os axiomas participam da listagem do dado inicial. Isto significa que a matemática não contém com ela mesma uma resposta para a questão ‘o que é um número?’ – uma resposta, que é pela qual poderia consistir de uma definição deste conceito em termos de conceitos que tem sido introduzido um estágio prévio; a matemática dá uma resposta numa forma diferente, por listar as propriedades de um número como axioma. (PEANO, *apud* KENNEDY, 2002, p.64).[3]

Acredita que não se deve definir o que servirá de definição, pois existe o perigo de, ao fazer isso por meio de ideias aparentemente mais simples, cair em um círculo vicioso, na qual se usa termos para definir outros e por meio dessa tentativa de simplificação, torna-se tudo mais complexo. E, ao ser questionado, deixa claro o porquê de sua escolha,

[3]The concept of number is distinguished from many other concepts of the school course by its primarity. This means that in the overwhelming majority of ways in which mathematics can be developed as a logical system, the idea of number belongs to the set of those concepts which are not defined in terms of other concepts, but together with the axioms enter into the ranks of the initial data. It means that mathematics does not contain within itself an answer to the question ‘what is a number?’ – an answer, that is, which would consist of a definition of this concept in terms of concepts that had been introduced at an earlier stage; mathematics gives this answer in a different form, by listing the properties of a number as axioms.

> Para esta questão podem ser dadas diferentes respostas por vários autores, pois a simplicidade pode ser entendida diversamente. Da minha parte, a resposta é que número (inteiro positivo) não pode ser definido (vendo que as ideias de ordem, sucessão, agregado, etc., são tão complexas quanto os números). (PEANO *apud* KENNEDY, 2002, p.10).[4]

Apesar de estar entre os fundadores da Lógica simbólica, não é possível enquadrar sua visão dentre as principais correntes filosóficas logicistas, uma vez que via a Lógica como uma ferramenta para a Matemática e acreditava que as ideias matemáticas derivavam de nossas experiências com o mundo real não sendo um mero jogo especulativo, entretanto necessitando de uma recursão lógica. Pensava também na Lógica como mediadora entre o real e o formal, uma vez que as ciências possuem os objetos de estudos não formais e a Lógica não necessita de tais objetos, porém é formal. Pensamento esse que contraria a posição tomada por Russel quanto à redução puramente lógica da matemática:

> A matemática tem lugar entre a lógica e as ciências experimentais. Ela é lógica pura; todas suas proposições são da forma: 'Se se supõe A, então B é verdadeiro'. Mas estas construções lógicas não devem ser feitas para mero prazer de raciocinar sobre elas. O objeto estudado por elas é dado pelas ciências experimentais; elas devem ter um objetivo prático. (PEANO, *apud* KENNEDY, 2002, p.64).[5]

2.2. Critica à Axiomática de Peano

Para Russel, a obra de Peano é de extrema importância uma vez que fundamenta os números a partir de uma recursão lógica, porém está muito longe de concordar com todas as suas ideias. Para Russel, no que tange a essa abordagem (axiomática), não existe qualquer descrição, interpretação ou aplicação para o objeto matemático, importando apenas as relações entre os objetos. Acrescenta que se "suponhamos que '0' significa o número um e que 'número' significa o conjunto 1, 1/2, 1/4, 1/8,... e suponhamos que 'sucessor' significa 'metade'. Nesse caso, todos os cinco axiomas de Peano se aplicarão a esse conjunto" (Russell, 2007, p.24).

---

[4]To this question one can give different answers from various authors, seeing that simplicity can be understood differently. For my part, the answer is that number (positive integer) cannot be defined (seeing that the ideas of order, succession, aggregate, etc., are as complex as that of number).

[5]Mathematics has a place between logic and the experimental sciences. It is pure logic; all its propositions are of the form: 'If one supposes A, then B is true.' But these logical constructions must not be made for the mere pleasure of reasoning about them. The object studied by them is given by the experimental sciences; they must have a practical goal.

É um ponto extremamente delicado, o fato de que apenas olhando para os axiomas não podermos dizer o que é “0”, “número” e ”sucessor”. Devemos compreendê-los de forma independente, pois assevera Russel que não é interessante que os números em questão apenas verifiquem fórmulas matemáticas, como em um jogo, mas também que possam ser aplicados a objetos comuns em nosso dia-a-dia.

Entretanto devemos ressaltar que o principal esforço de Peano foi propor uma axiomatização que permitisse fundamentar os números naturais e não responder à questão “O que é número?”. Em outras palavras, entendemos que Peano busca fundamentar as principais propriedades dos números. Por este motivo, é possível afirmar que, enquanto Peano buscava mais o aspecto intensional do conceito de número, Russell pretendia explorar mais o aspecto extensional, ou seja, enquanto o primeiro observava mais os aspectos estruturais e as relações entre os objetos matemáticos, o segundo focava possíveis interpretações, aplicações ou modelos para os números. Mais adiante, no capítulo 4, abordaremos os significados das palavras intensional e extensional com base na noção de complementaridade. Por enquanto, vamos ver como as principais escolas filosóficas tratavam da questão do que é o número.

3 A NATUREZA DO NÚMERO: CORRENTES FILOSÓFICAS

As teorias matemáticas no final do século XIX confrontavam-se com questões filosóficas sobre a existência e a natureza dos conceitos matemáticos, como podemos observar nas obras de Frege e Russell. Dentre as questões fundamentais, inclui-se saber se o conhecimento matemático é empírico ou *a priori*, assim como questões que envolvem atributos ou referências para o conceito de número (aspectos intensional ou extensional do conceito de número Cap. 4).

Diversos filósofos e matemáticos buscaram responder à pergunta “O que é número?”. De fato, as respostas apresentadas foram insuficientes do ponto de vista da complementaridade. Na tentativa de conseguir respostas, foram considerados apenas aspectos intensionais ou somente extensionais do conceito de número, e não a complementaridade entre eles.

Discorremos agora sobre algumas das respostas apresentadas pelas principais correntes filosóficas para as questões que envolvem a natureza do número. Faremos uma apresentação sucinta das ideias centrais acerca do conceito de número e de concepções de alguns matemáticos que se dedicaram aos fundamentos da Matemática e, posteriormente, trataremos da questão da complementaridade.

3.1. Nominalismo

Para os Nominalistas não existem entidades abstratas que se identifiquem aos números (existência de objetos matemáticos no sentido platônico), “o número, enquanto tal existe em sua representação ou em ato mental de natureza unicamente psicológica, nasce e morre como ato do pensamento” (FONSECA, 2010, p.105). De fato para essa escola a existência concreta ou a verdade física não importam, contanto que o objeto em estudo seja consistente, e por consistente devemos entender como não existindo contradições dentro desse sistema. No campo matemático, podemos citar John Stuart Mill,[6] que foi um grande defensor dessa

[6]John Stuart Mill nasceu em Londres em 1806 e morreu na mesma cidade em 1873. Suas contribuições abrangem diversas áreas do conhecimento como a Lógica, a Psicologia, o Direito, a Economia e a Política. Publicou diversas obras, entre elas *A System of Logic*, composta por dois volumes, publicada em 1843. Suas principais contribuições encontram-se no campo da Economia.

corrente, segundo a qual os números são fruto da abstração realizada a partir da realidade empírica.

Uma das lacunas apontadas por Barker (1969) refere-se aos números naturais, como 0 ou 1. Tais números são únicos conceitualmente. Quando dizemos “zero” ou “um”, entendemos e queremos indicar o mesmo objeto mental. Se, ao contrário, o número fosse simples representação de realidades empíricas, como defendido pelos nominalistas, não nos compreenderíamos, pois cada pessoa poderia atribuir realidades diferentes ao número.

Há números que abarcam entidades às quais não se pode fazer corresponder uma realidade fora do pensamento; é o caso do número zero, dos números transfinitos[7] ou ainda de números não computáveis[8]. Se aos números devessem corresponder necessariamente a entidades concretas, se tivéssemos que indicar realidade concreta correspondente a cada número, grande parte da Matemática se tornaria impossível.

Sendo assim, podemos chegar à conclusão de que a concepção segundo a qual os números são exclusivamente meras representações mentais de entidades concretas não fornece uma interpretação adequada da Matemática, nem torna possível a formulação de grande parte dos seus axiomas e teoremas.

O nominalismo, entendido como teoria que nega o valor ideal e autônomo da Matemática, reduzindo à interpretação ou tradução mental de realidades e relações concretamente existentes, é insuficiente para justificar a natureza e a existência de conceitos matemáticos. Além do exposto, a tese nominalista foi derrubada pelo trabalho de Kurt Gödel (1906-1978) em 1931. Empregando uma engenhosa cadeia de raciocínios metamatemáticos, Gödel demonstrou que a consistência é incompatível com a completude. Tais sistemas, se consistentes, devem, necessariamente, ser incompletos, derrubando por completo a ideia de que as verdades matemáticas poderiam ser identificadas unicamente nos processos de dedução a partir de axiomas e, por conseguinte, não sendo capaz de se interpretar toda a teoria dos números através dela.

---

[7]São números que representam a cardinalidade de conjuntos infinitos.
[8]São números reais que não podem ser obtidos através de um algoritmo finito.

3.2. Conceitualismo e Intuicionismo

Segundo Barker (1969), o conceitualismo é a doutrina segundo a qual os conceitos só existem como ideias em nosso espírito, não possuindo nada que lhes corresponda na realidade. Em outras palavras, doutrina segundo a qual as ideias gerais que servem para organizar nosso conhecimento são instrumentos intelectuais criados por nosso espírito, mas sem nenhuma existência fora dele.

A visão de que objetos matemáticos, como números, são entidades abstratas nascidas do pensar parece bastante atraente a muitas pessoas. Entretanto, conforme alerta Barker (1969, p. 98), uma forma extremada de conceitualismo sustentaria que o espírito está dotado de poderes para criar os números e as entidades matemáticas que desejasse.

Ainda segundo Barker (1969), o filósofo Kant é um dos mais ilustres representantes do conceitualismo matemático, sustentando que as leis dos números, como as da Geometria Euclidiana, eram ao mesmo tempo *a priori* e sintéticas. Sustenta ainda que,

> Embora Kant não tenha deixado tão explícitas as suas ideias sobre a filosofia dos números quanto deixou explícitas as suas impressões a propósito da filosofia do espaço, disse o bastante para fixar, em seus leitores, a noção de que, para ele, nosso conhecimento dos números se assenta numa consciência do tempo, entendida como "forma de intuição pura", e numa consciência que o espírito possui de sua própria capacidade de repetir, seguidamente, o ato de contar (BARKER, 1969, p. 99).

Um grupo de matemáticos nominalistas acreditava que a pura intuição da contagem seria o ponto de partida para a justificativa do conceito de número. A Filosofia desse grupo recebeu o nome de intuicionismo, e entre eles estavam matemáticos como Brouwer[9] e Kronecker[10].

---

[9]Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) nasceu em Overschie (Holanda) e realizou doutoramento na Universidade de Amsterdam. Relizou célebres trabalhos em topologia algébrica. Toda a sua carreira foi consagrada ao desenvolvimento das matemáticas intuicionistas.

[10]Leopold Kronecker (1823-1891) nasceu em Liegnitz (Alemanha) e estudou em Berlim, Bona e Breslau. Realizou o doutoramento em 1845 na Universidade de Berlim. Conforme afirma Jean Dieudonné, seus textos de álgebra, de teoria dos números e de análise são de uma profundidade notável.

Partindo da visão intuicionista os números são conceituados da seguinte forma, a partir de um primeiro elemento e uma lei de formação que soma uma unidade a um dado elemento a fim de se obter o seguinte, repetimos o processo tantas vezes quanto queiramos, muito embora nunca se alcance uma totalidade. Obtemos então uma sequência de elemento o qual o conjunto 1,2,3,4,… é totalmente conveniente. Dessa forma a possibilidade de repetição indefinidamente em um ato semelhante ao ato da criação leva-nos ao conceito de número natural. De fato não apenas os números, mas para os intuicionistas “o matemático não descobre as entidades matemáticas; é o próprio matemático quem cria as entidades que estuda” (COSTA, 2008, p.36).

Do ponto de vista dos intuicionistas, deve-se dispor de uma demonstração construtiva, de qualquer enunciado matemático a propósito dos números, antes de admitir a verdade sobre o enunciado considerado. Se o enunciado afirma a existência de pelo menos um número de tal espécie, devemos saber como construir ou computar esse número, usando apenas um número finito de fases.

Lembramos nesse ponto que para Kronecker, um dos defensores da escola Intuicionista, não é possível conceber um infinito acabado concebido por objetos já existentes.Desse modo os números reais em sua conceituação clássica é desprezada, e disso decorre sua célebre frase: “Deus nos deu os números naturais, o resto é obra dos homens” (EVES. 2011, p.616).

Entretanto, tal noção entra em conflito com a teoria dos números transfinitos de Cantor de 1874, bem como com as noções de infinito atual[11] e potencial[12], que são consistentes do ponto de vista matemático. Assim, o conceitualismo também não conseguiu fornecer definitivamente uma resposta às questões relacionadas à natureza dos números.

“O intuicionismo, uma das mais influentes formas de filosofia conceitualista, mutila, assim, de modo considerável, a Matemática clássica, rejeitando alguns de seus métodos e abandonando alguns de seus axiomas” (Barker, 1969, p. 104).

[11]Infinito atual faz menção a uma entidade já existente com um número infinito de elementos. Como exemplo podemos tomar o segmento de reta de tamanho um, apesar de podemos até desenhá-lo e visualizar seu início e fim, possui infinitos pontos.
[12]Algo que pode ser aumentado indefinidamente, tanto quanto necessário.

Pelo exposto, conclui-se que a doutrina segundo a qual os números nascem da pura intuição do processo de contagem é muito vaga e discutível, especialmente se interpretada literalmente.

3.3. Realismo e a tese Logicista

Diferentemente do conceitualismo, o realismo não aceita que as entidades abstratas estejam limitadas pela capacidade de criação da mente humana. Para eles objetos matemáticos existem em si e por si, não dependendo de construções da mente. O realista acredita que existem (sem a necessidade de aplicações ou modelos) quaisquer entidades citadas nos axiomas e teoremas da teoria dos números.

Segundo essa corrente filosófica, não há justificativa para rejeitar demonstrações não construtivas na Matemática. Se os números e os demais conceitos matemáticos têm realidade independente de nós, os critérios da filosofia dos conceitualistas não fazem qualquer sentido.

Dessa forma, ao contrário dos intuicionistas não existem motivos para se rejeitar demonstrações não construtivas como, por exemplo, a demonstração da não enumerabilidade do conjunto dos números reais, proposta por Cantor.

Ainda dentro da corrente realista, temos a que ficou conhecida como *tese logicista.* Essa tese, como defende o matemático, lógico e filósofo alemão Frege sustenta que é possível reduzir os números e todas as suas regras da Lógica. Posteriormente, Russell e Whitehead irão além sustentando que não apenas os números, mas toda a Matemática pode ser reduzida à Lógica, afirmando ainda que da mesma forma que a Geometria se relaciona com seus axiomas, a Aritmética e todo o resto da Matemática dos números se relacionam às leis da Lógica.

Barker (1969) afirma que não foi por acaso o fato de a tese logicista ter sido desenvolvida pelos adeptos do realismo, pois tais concepções caminham juntas.

Com o avanço da tese, vários problemas começaram a ser percebidos, dentre eles muitos paradoxos que foram corrigidos enunciando-se o axioma da redutibilidade e o axioma do infinito[13] que acabaram por levantar tantos opositores quanto

[13]Existe um conjunto que tem o conjunto vazio como elemento e o sucessor de todo elemento seu.

simpatizantes. Temos também a teoria dos tipos formulada para superar as críticas ao axioma da redutibilidade[14] e que por sua vez também levantou dúvidas quanto ao sistema.

Desse modo é possível concluir que a tese realista não deu conta do proposto (reduzir a matemática à lógica) e consequentemente não tornou possível a fundamentação dos números criando paradoxos que a cada tentativa de sanar, dava à luz novos problemas.

[14]Para toda propriedade de ordem maior que zero existe uma propriedade de ordem zero que lhe é equivalente.

4 A NOÇÃO DE COMPLEMENTARIDADE NA MATEMÁTICA

Conceitos opostos que se corrigem mutuamente são conhecidos por complementares e ainda que dicotômicos integram-se para descrever um fenômeno. A partir desse princípio o físico dinamarquês Niels Bohr (1885 - 1962), explicita o conceito dual de onda e corpúsculo nos fenômenos ópticos da mecânica quântica moderna que se complementam ao invés de se confrontarem. Filósofos e matemáticos, como Kuyk (1977) e Otte (2003) utilizaram a complementaridade para explicar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos.

De acordo com Otte (2003), a complementaridade é concebida segundo noção dual de extensão e intensão. Em seu artigo intitulado *Complementary, Sets and Numbers* ele utiliza a noção de complementaridade para explicar e analisar o desenvolvimento de conceitos matemáticos, em especial a noção de número e conjuntos. Para ele os aspectos intensionais e extensionais relacionados à noção de número não devem ser encarados apenas como uma dualidade, mas sim como complementares.

Entendemos por “complementares dois conceitos opostos que, porém se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno” (ABBAGNANO, 1982, p. 144).

A visão intensional compreende estruturas teóricas, descrições axiomáticas e as relações entre classes de objetos matemáticos. A abordagem axiomática da aritmética, por exemplo, não trata de objetos concretos, mas apenas de relações lógicas e objetos ideais.

Por outro lado temos a visão extensional de objetos matemáticos que se caracteriza por fornecer a descrição dos objetos, por meio de aplicações, interpretações ou modelos matemáticos. Para Thorn (1972 *apud* Otte, 2003b, p. 203) o verdadeiro problema pelo qual é confrontado o ensino da matemática não é o rigor, mas sim um problema de desenvolver um significado para a interpretação a partir de objetos existentes no mundo real.

Como podemos observar os objetos matemáticos possuem uma natureza dual, tanto lhe cabe uma teoria axiomática, como podem ser complementados por aplicações, ou seja, modelos apoiados no mundo real que traduzem seus processos lógicos.

A matemática não é uma teoria vazia, um matemático não monta simplesmente um quebra-cabeça livre de contradições, existe a necessidade de interpretação de sua teoria. Por outro lado, não é possível encontrarmos todas as possíveis aplicações de um conceito matemático. Dessa forma “existe a necessidade de uma complementaridade entre o caráter intensional e extensional de conceitos matemáticos” (Fonseca, 2005, p. 19).

4.1. Complementaridade na teoria de Conway

A teoria do matemático britânico John Horton Conway, pode fornecer uma resposta mais completa à questão. Conway (2001) afirmou que número é um “jogo”. Certamente devemos considerar que ele não estava buscando responder a pergunta “O que é número?” do ponto de vista filosófico, mas sua teoria pode ser usada para apresentar uma resposta a essa questão, visto que garante a complementaridade na conceituação de número.

A teoria formulada por Conway para a construção dos números reais satisfaz o caráter intensional ao elaborar uma tese consistente baseada em axiomas e definições da Teoria dos Conjuntos, e também satisfaz o caráter extensional já que tal construção é possível também por meio de uma classe de jogos.

Dessa forma concomitantemente à construção por meio de conjuntos, podemos ver o jogo como um modelo empírico que favorecerá a criatividade quanto às conjecturas e propriedades estudadas, ou seja, existe a possibilidade de se construir os números de maneira informal por meio do jogo ou formal por meio da teoria dos conjuntos.

Outro ponto de extrema importância em sua teoria reside no fato de contrariamente às teorias clássicas que necessitam de uma ruptura no processo, Conway faz a construção por um caminho linear e com os mesmos objetos desde os naturais até os reais, indo além, construindo diversos tipos de números (como complexos e transfinitos). Assim, não necessita abandonar as operações com pares ordenados e passar a utilizar novos métodos como cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy. Por fim, possibilita responder à questão que há muito faz parte de discussões tanto matemáticas quanto filosóficas. O que é número?

5 TEORIA DE CONWAY

Vamos apresentar de modo informal como Conway utiliza a noção de Cortes de Dedekind para conceituar os chamados Números Surreais. Antes saliento que ao contrário de Dedekind que parte dos racionais como conjunto formado e daí erige sua teoria, Conway inicia pelo vazio e do que podemos chamar de Cortes generalizados e constrói todos os conjuntos numéricos existentes, incluindo os transfinitos e os infinitesimais. Posteriormente à apresentação de cada conjunto, faremos a associação dele à sua representação pelo jogo Hackembush, que é uma classe de jogos derivada do jogo NIN. Esses jogos são caracterizados por: (1) admite apenas um ganhador; (2) não possui informação escondida; (3) tem uma quantidade finita de jogadas; (4) não envolve fator de sorte. Esta pesquisa não apresenta maiores detalhes do jogo, apenas mostra sua existência e sua relação com os Conjuntos. Para um conhecimento mais aprofundado do jogo, sugiro FONSECA (2010), que trata de forma muito didática e detalhada do assunto.

5.1. Números Surreais[15]

Um número x é o conjunto formado pelas classes $X_E \, e \, X_D$ representado como x = $(X_E|X_D)$ em que essas classes são conjuntos de números previamente construídos e que se verifica a propriedade que chamamos:

(I) para qualquer $x_E \in X_E$ e $x_D \in X_D$, temos que $x_E \ngeq x_D$.

A partir do conjunto vazio é construído o primeiro número: 0 = (∅|∅).

Para provar que zero é realmente um número, precisamos mostrar que X_E não é maior ou igual a X_D por (I): 0 = (∅|∅) → ∅$\ngeq$∅

Uma vez que mostramos ser 0 = (∅|∅), realmente um número, o utilizamos em cada uma das duas classes $X_E \, e \, X_D$ a fim de se obter dois novos números, como mostramos a seguir:

[15] “Número surreal é todo número que pode ser criado a partir da teoria de Conway, com a qual também é possível criar números reais e transfinitos. Esses números podem ser representados por conjuntos ou por configurações de uma classe de jogos. Por volta de 1974, o matemático Donald E. Knuth chamou os números de Conway de números surreais; posteriormente o próprio Conway começou a utilizar essa designação” (FONSECA, 2010, p.18).

$$-1 = (\emptyset|\{0\}) \text{ e } 1 = (\{0\}|\emptyset)$$

que por (I) obtemos:

$$-1 = (\emptyset|\{0\}) \rightarrow \emptyset \ngeq 0 \text{ e}$$

$$1 = (\{0\}|\emptyset) \rightarrow 0 \ngeq \emptyset$$

Tomando agora os números obtidos e substituindo-os em cada uma das duas classes, conseguimos mais dois novos:

$$-2 = (\emptyset|\{-1\}) \text{ e } 2 = (\{1\}|\emptyset)$$

E novamente por (I) mostramos que são números de Conway:

$$-2 = (\emptyset|\{-1\}) \rightarrow \emptyset \ngeq 1$$

$$2 = (\{1\}|\emptyset) \rightarrow 1 \ngeq \emptyset$$

Repetindo esse processo, encontraremos sempre dois novos números do qual todo número n é da forma n = ({n-1}|∅) e respectivamente os números negativos são da forma -n = (∅|{-(n-1)}).

A partir do observado, vamos generalizar o seguinte resultado;

Para qualquer x = $(X_E|X_D)$ temos que -x = $(-X_D|-X_E)$.

Representação dos inteiros por meio do jogo

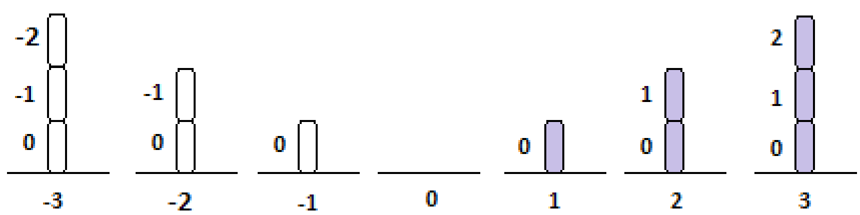

Figura 1 – Representação dos inteiros por meio do jogo.

Agora que obtemos vários números é pertinente estabelecer uma relação entre eles, a qual chamaremos (II) e diz que $x \leq y \rightarrow X_E \ngeq y$ e $x \ngeq Y_D$.

Vamos fazer uma análise dos três primeiros números obtidos:

<u>Prova 1: $0 \nleq -1$</u>

Supomos por absurdo que $0 \leq -1$, teríamos então $(\emptyset|\emptyset) \leq (\emptyset|\{0\})$ e por (II):

$$0 \leq -1 \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$$\rightarrow \emptyset \ngeq -1 \text{ e } 0 \ngeq 0$$

Ora obtemos aí um absurdo, pois sabemos que $0 \geq 0$, dessa forma abandonamos nossa hipótese inicial e concluímos então ser $0 \nleq -1$■

<u>Prova 2: $1 \nleq 0$</u>

Supomos por absurdo que $1 \leq 0$, teríamos então $(\{0\}|\emptyset) \leq (\emptyset|\emptyset)$ e por (II):

$$1 \leq 0 \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$$\rightarrow 0 \ngeq 0 \text{ e } 1 \ngeq \emptyset$$

Ora obtemos aí um absurdo, pois sabemos que $0 \geq 0$, dessa forma abandonamos nossa hipótese inicial e concluímos então ser $1 \nleq 0$■

<u>Prova 3: $1 \nleq -1$</u>

Supomos por absurdo que $1 \leq -1$, teríamos então $(\{0\}|\emptyset) \leq (\emptyset|\{0\})$ e por (II):

$$1 \leq -1 \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$$\rightarrow 0 \ngeq -1 \text{ e } 1 \ngeq 0$$

Ora obtemos dois absurdos, pois sabemos que $0 \geq -1$ e também que $1 \geq 0$, dessa forma concluímos então ser $1 \nleq -1$ ■

É interessante ressaltar nesse ponto que apesar de parecer óbvio do ponto de vista comum, não podemos afirmar que $-1<1$ apenas provando que $-1<0$ e que $0<1$.

Com isso a prova três se faz realmente necessária.

Vamos generalizar a propriedade acima:

<u>Teorema:</u> Sejam X e Y conjuntos de números com $x = (\emptyset|X)$ e $y = (Y|\emptyset)$ então sempre teremos $x \leq y$.

Vamos dividir essa prova nos seguintes casos:

CASO 1: $X = Y = \emptyset$, teremos $x = (\emptyset|\emptyset)$ e $y = (\emptyset|\emptyset)$:

$$x \leq y \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$$\rightarrow \emptyset \ngeq 0 \text{ e } 0 \ngeq \emptyset$$

CASO 2: $X = \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, teremos $x = (\emptyset|\emptyset)$ e $y = (Y|\emptyset)$:

$$x \leq y \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$$\rightarrow \emptyset \ngeq y \text{ e } 0 \ngeq \emptyset$$

CASO 3: $X \neq \emptyset$ e $Y = \emptyset$, teremos $x = (\emptyset|X)$ e $y = (\emptyset|\emptyset)$:

$$x \leq y \rightarrow X_E \ngeq y \text{ e } x \ngeq Y_D$$

$\rightarrow \emptyset \ngeq 0$ e $x \ngeq \emptyset$

CASO 4: $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, teremos $x = (\emptyset|X)$ e $y = (Y|\emptyset)$:

$x \leq y \rightarrow X_E \ngeq y$ e $x \ngeq Y_D$

$\rightarrow \emptyset \ngeq y$ e $x \ngeq \emptyset$ ■

Propriedade transitiva

Sejam x, y, z três números então vale a propriedade transitiva, ou seja;

(III) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Para provar tal asserção, supomos por absurdo que existam três números x,y,z tais que:

$x \leq y$ e $y \leq z \rightarrow x \nleq z$ o qual chamaremos $(*)$

Temos então por $x \nleq z$

(i)$X_E \geq z$ ou (ii) $x \geq Y_D$

Então se (x,y,z) são três números que verificam $(*)$ e supondo sem perda de generalidade que ocorra (i), temos então:

$y \leq z$ e $z \leq X_E$ e ainda por $x \leq y \rightarrow y \nleq X_E$, ou seja, encontramos um novo "arranjo" para $(*)$

Temos agora por $y \nleq X_E$

(i) $Y_E \geq x_E$ ou (ii) $y \geq X_{ED}$

Então se (y,z,x_E) são três números que verificam $(*)$, e supondo novamente sem perda de generalidade que ocorra (i), temos então:

z $\leq x_E$ e $x_E \leq y_E$ e ainda por y $\leq$ z $\rightarrow$ z $\nleq y_E$ um outro “arranjo” para $(*)$

Temos aqui por z $\nleq y_E$ (i)$z_E \geq y_E$ ou (ii) z $\geq y_{ED}$

Esse processo se estenderia infinitamente, mas devemos observar que cada nova terna de números satisfazendo $(*)$ é composta por um número que faz parte de conjuntos E ou D de outros números, ou seja, foi criado antes que o número representado. De modo que se definirmos uma função d(x) tal que para um número x, ela indica o passo em que foi construído (sendo zero construído no passo 1, menos um e um, construídos no passo 2 e assim por diante), teremos para a terna (x,y,z) inicial d(x) + d(y) + d(z) = n. Aplicando a função para os casos posteriores obtidos, obtemos novas ternas com somas menores. Podemos prosseguir assim infinitamente o que é um absurdo, pois não pode existir qualquer terna com soma inferior a 3.

De onde somos levados a concluir que para números x,y,z, temos:

Se x $\leq$ y e y $\leq$ z então x $\leq$ z.

(IV): Seja x = $(X_E|X_D)$ um número, teremos:

x $\leq$ x o que significa que $X_E \ngeq$ x e x $\ngeq X_D$.

Suponha por absurdo que exista um x tal que:

x $\leq$ x $\rightarrow X_E \geq$ x ou x $\geq X_D$

Por $X_E \geq$ x temos que existe um $x_E \in X_E$ tal que x $\leq x_E$ por (II) $x_E \ngtr x_E$ o que é um absurdo.

Por x $\geq X_D$ temos que existe um $x_D \in X_D$ tal que $x_D \leq$ x por (II) $x_D \ngtr x_D$ o que é um absurdo. Logo x $\leq$ x.

(V) Seja x = $(X_E|X_D)$ temos que $X_E \leq$ x e x $\leq X_D$.

Suponha por absurdo que exista um $x_E \in X_E$ tal que $x_E \nleq$ x , temos então:

Existe $x_{EE} \in X_{EE}$ tal que $x_{EE} \geq$ x

ou

Existe $x_D \in X_D$ tal que $x_D \leq x_E$, o que é um absurdo por (I).

Vejamos (i):

Como $x_{EE} \in X_E$ temos que $x_{EE} \leq x_E$ e por (i) x $\leq x_{EE}$ do qual concluímos pela transitiva x $\leq x_E$ ou ainda $X_E \ngeq x_E$ e como $x_E \in X_E \rightarrow x_E \nleq x_E$, o que por (IV) é um absurdo. Logo $x_E \leq$ x $\rightarrow X_E \leq$ x .

Para x $\leq X_D$ a demonstração é análoga portanto:

para x = (X_E ,X_D) temos que $X_E \leq$ x e x $\leq X_D$. ■

Agora podemos provar que para dois números x e y , não teremos x $\nleq$y e y $\nleq$ x

Tomando x $\nleq$y → $X_E \geq$ y ou x $\geq Y_D$.

Sabemos que x $\geq X_E$ → x $\geq$ y ↔ y $\leq$ x.

Também sabemos que $Y_D \geq$ y → x $\geq$ y ↔ y $\leq$ x.

Para y $\nleq$ x o desenvolvimento é análogo.

(VI) Logo concluímos que se x $\nleq$ y então y $\leq$ x.

Igualdade entre dois números de Conway

(VII) Sejam x = ($X_E|X_D$) e y = ($Y_E|Y_D$) dois números de Conway;

Temos que se x = y então $X_E \ngeq$y e x $\ngeq Y_D$ e $Y_E \ngeq$x e y $\ngeq X_D$.

Soma para os números de Conway

Agora que temos uma série de números inclusive números negativos e também já definimos o que é a igualdade para os números de Conway, vamos definir a soma entre eles:

Sejam dois números de Conway x = $(X_E|X_D)$ e y = $(Y_E|Y_D)$, definimos a soma:

$$x + y = ((X_E + y)\cup(x + Y_E) | (X_D + y)\cup(x + Y_D))$$

Abaixo temos alguns exemplos importantes da operação, bem como seu procedimento:

$$0 + 0 = (\emptyset|\emptyset) + (\emptyset|\emptyset) = ((X_E + y)\cup(x + Y_E)|(X_D + y)\cup(x + Y_D)) =$$

$$= ((\emptyset + 0)\cup(0 + \emptyset)|(\emptyset + 0)\cup(0 + \emptyset)) = ((\emptyset)\cup(\emptyset)|(\emptyset)\cup(\emptyset)) = (\emptyset|\emptyset) = 0$$

$$0 + 1 = (\emptyset|\emptyset) + (\{0\}|\emptyset) = ((X_E + y)\cup(x + Y_E)|(X_D + y)\cup(x + Y_D)) =$$

$$= ((\emptyset + 1)\cup(0 + 0)|(\emptyset + 1)\cup(0 + \emptyset)) = ((\emptyset)\cup(0)|(\emptyset)\cup(\emptyset)) = (\{0\}|\emptyset)= 1$$

$$1 + 1 = (\{0\}|\emptyset) + (\{0\}|\emptyset) = ((X_E + y)\cup(x + Y_E)|(X_D + y)\cup(x + Y_D)) =$$

$$= ((0 + 1)\cup(1 + 0)|(\emptyset + 1)\cup(1 + \emptyset)) = ((1)\cup(1)|(\emptyset)\cup(\emptyset)) = (\{1\}|\emptyset)= 2$$

$$1 + (-1) = (\{0\}|\emptyset) + (\emptyset|\{0\}) = ((X_E + y)\cup(x + Y_E)|(X_D + y)\cup(x + Y_D)) =$$

$$= ((0 + (-1))\cup(1 + \emptyset)|(\emptyset+ (-1))\cup(1 + 0)) = ((-1)\cup(\emptyset)|(\emptyset)\cup(1)) =$$

$$= (\{-1\}|\{1\}) = ?$$

Obviamente esperávamos que a operação acima resultasse zero, entretanto não foi o que aconteceu, o resultado foi um número ainda não conhecido. Mas da mesma forma como devemos diferenciar a operação $0/1$ da representação $0/1$ para o numeral zero, podemos entender que o resultado obtido é a representação para o número $(\emptyset|\emptyset)$, o qual podemos mostrar utilizando a igualdade apresentada logo acima.

Se $(\{-1\}|\{1\}) = (\emptyset|\emptyset)$ então $-1 \ngeq 0$ e $x \ngeq \emptyset$ e $\emptyset \ngeq x$ e $0 \ngeq 1$.

Multiplicação para os números de Conway

A regra para a multiplicação estabelecida por Conway é a seguinte:

Sejam x = $(X_E|X_D)$ e y = $(Y_E|Y_D)$ dois números de Conway, então

$$xy = ((X_E y + xY_E - X_E Y_E) \cup (X_D y + xY_D - X_D Y_D) | (X_E y + xY_D - X_E Y_D) \cup (X_D y + xY_E - X_D Y_E))$$

Números Racionais diádicos

Observe agora o número $(\{0\}|\{1\})$, podemos mostrar que realmente se trata de um número de Conway por (I), pois $0 \not\geq 1$:

Sabemos também por (V) que $0 \leq (\{0\}|\{1\}) \leq 1$, vamos então descobrir se $(\{0\}|\{1\}) = 0$ ou $(\{0\}|\{1\}) = 1$.

Se $(\{0\}|\{1\}) = (\emptyset|\emptyset)$ então $0 \not\geq 0$ um absurdo logo $(\{0\}|\{1\}) \neq (\emptyset|\emptyset)$.

Se $(\{0\}|\{1\}) = (\{0\}|\emptyset)$ então $1 \not\geq 1$ um absurdo logo $(\{0\}|\{1\}) \neq (\{0\}|\emptyset)$.

Sabemos agora que $0 < (\{0\}|\{1\}) < 1$, mas não sabemos ainda de que número se trata. Nesse ponto o jogo Hackenbush propõe uma tarefa extremamente agradável e divertida, descobrir de que número se trata jogando.

Em nosso trabalho apresento, sem prova, uma regra para a construção dos chamados números racionais diádicos, ou seja, números da forma $\frac{m}{2^n}$:

Para um número x, na classe esquerda X_E colocamos a parte inteira do número e na classe direita X_D colocamos o $(2x - X_E)$.

Dessa forma podemos esperar que $(\{0\}|\{1\}) = \frac{1}{2}$ vamos confirmar isso mostrando que: $(\{0\}|\{1\}) + (\{0\}|\{1\}) = ((0 + \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} + 0) | (1 + \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} + 1)) = (\{\frac{1}{2}\}|\{\frac{3}{2}\})$ e por (VII)

concluímos que é igual a $(\{0\}|\emptyset)$.

Outros exemplos de números nessa forma (e respectivamente os opostos aditivos):

$$\frac{1}{4} = (\{0\}|\{\tfrac{1}{2}\}) \text{ e } \quad -\frac{1}{4} = (\left\{-\tfrac{1}{2}\right\}|\{0\})$$

$$\frac{1}{8} = (\{0\}|\{\tfrac{1}{4}\})\text{e} \quad -\frac{1}{8} = (\left\{-\tfrac{1}{4}\right\}|\{0\})$$

$$\frac{3}{2} = (\{1\}|\{2\})\text{e} \quad -\frac{3}{2} = (\{-2\}|\{-1\})$$

$$\frac{13}{4} = (\{3\}|\{\tfrac{7}{2}\}) \quad \text{e} \quad -\frac{13}{4} = (\{-\tfrac{7}{2}\}|\{-3\})$$

$$\frac{25}{8} = (\{3\}|\{\tfrac{13}{4}\}) \quad \text{e} \quad -\frac{25}{8} = (\left\{-\tfrac{13}{4}\right\}|\{-3\})$$

Representação dos racionais diádicos por meio do jogo

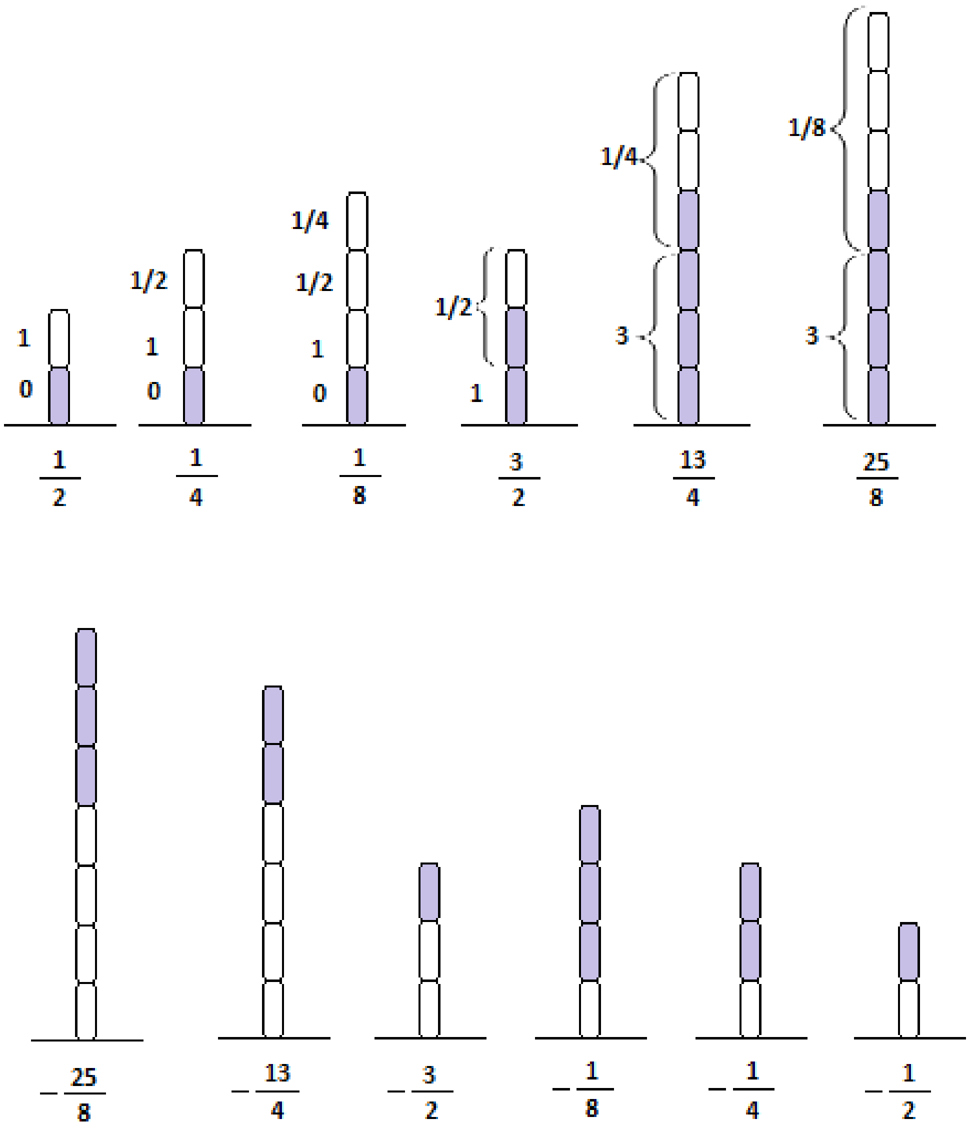

Figura 2 – Representação dos racionais diádicos pelo jogo.

Números Racionais não diádicos

Até agora, apresentamos apenas números racionais com sua representação finita, um dos principais motivos é a dificuldade em representar uma configuração infinita de peças. Problema esse que o matemático Elwyn Berlekamp[16] resolveu utilizando a representação binária desses números e, por conseguinte possibilitou também a representação de qualquer racional não diádico.

Colocando sua representação binária na classe esquerda X_E, interrompemos em algum algarismo "1" e para a classe direita X_D paramos em um algarismo "0" e somamos 1, garantindo dessa forma que as classes sejam respectivamente menor e maior que nosso número. O tanto de algarismos que vamos utilizar em cada uma das classes vai depender do quão preciso queiramos esse número.

Exemplos:

a) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ em notação binária é 0,010101..., por meio de conjuntos temos:

{0,01|0,1} ou {0,0101|0,011} ou {0,010101|0,01011} etc

b) $\frac{3}{5}$ em notação binária é 0,100100100..., por meio de conjuntos temos:

{0,1|0,11} ou {0,1001|0,101} ou {0,100100100|0,100100101} etc.

Representação de alguns racionais não diádicos pelo jogo

Para compreender a notação infinita, temos: As duas primeiras peças de cores diferentes olhando de baixo para cima, representarão a "vírgula binária", as peças escuras e claras são os dígitos 1 e 0, respectivamente que estão a direita da vírgula (lembrando, notação binária) e a parte inteira será o número de peças que se encontram antes do par que representa a vírgula.

[16]"Elwyn Berlekamp nasceu em Dover, Ohio, nos Estados Unidos, em 6 de setembro de 1940, é professor emérito de Matemática, de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação na Universidade da California, Berkeley, desde 1971. É conhecido por seus trabalhos na teoria de Informação e na Teoria dos Jogos Combinatórios. Com John Horton Conway e Richard K. Guy, escreveu a coletânea de livros *Winning Ways for Your Mathematical Plays"* (FONSECA, 2010, p. 36).

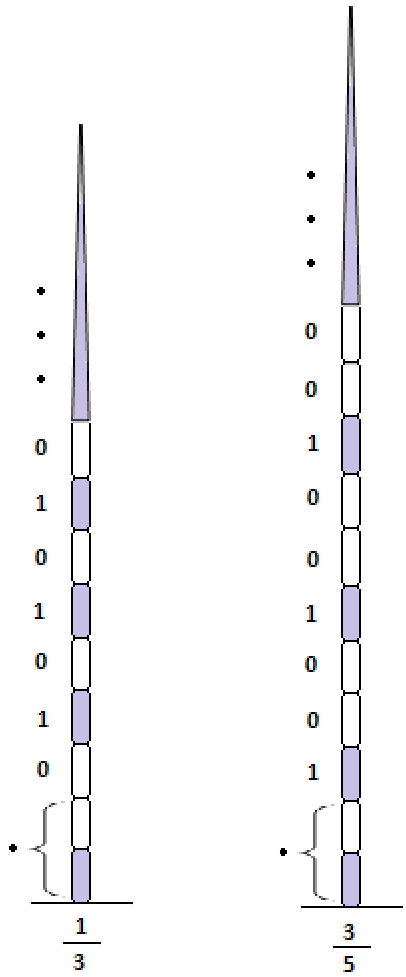

Figura 3 – Representação de $^1/_3$ e $^3/_5$ por meio do jogo

Alguns exemplos de números irracionais

Novamente para os números irracionais utilizamos a regra de Berlekamp, e também vamos destacar que o número de algarismos utilizados em cada uma das classes vai depender do quão preciso queiramos esse número, assim como fazemos com os irracionais em sua notação decimal. Uma vez dito isso, podemos apresentar os números que não possuem um período da seguinte maneira:

Exemplos:

π = 11,0010010000111111101101... será igual a:

{11,01|11,1} ou {11,001|11,01} ou {11,00100100001|11,0010010001} etc.

Da mesma forma podemos tratar o número irracional *e*, que possui notação binária 10, 101101..., e que por meio de conjuntos é:

e = {10,101|10,11} ou {10,1011|10,10111} e assim por diante.

Por fim, vamos apresentar um número muito importante para o desenvolvimento da matemática e conhecido desde a antiguidade, o número $\sqrt{2}$, cuja representação em notação binária é 1,01010001... e por meio de conjuntos temos:

$\sqrt{2}$ = {1,01|1,1} ou {1,0101|1,011} ou {1,01010001|1,0101001} etc.

Representação dos irracionais por meio do jogo

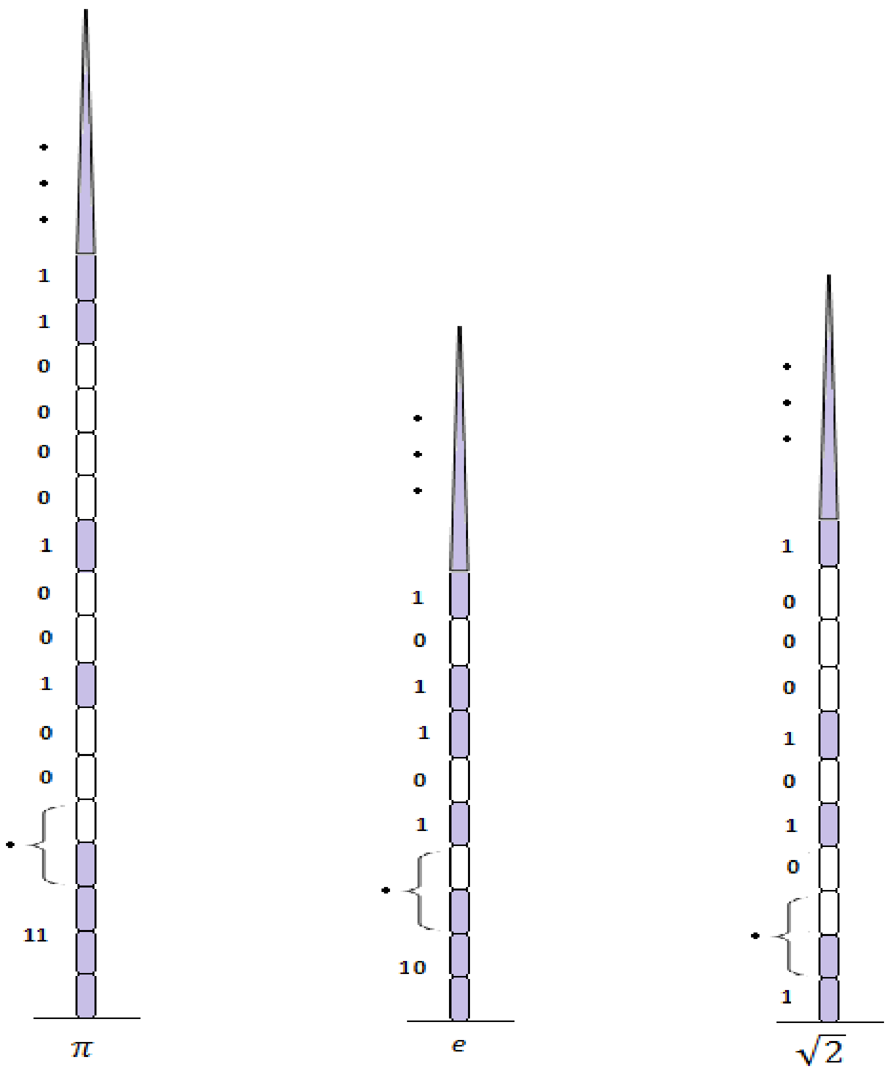

Figura 4 – Representação do π, e, $\sqrt{2}$ por meio do jogo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme o trabalho aqui apresentado, podemos dizer que o pensamento moderno em relação aos números pode ser descrito por três tendências, conforme descrevemos sucintamente a seguir.

De um lado, temos as abordagens axiomáticas, como a de Peano ou a abordagem axiomática clássica dos números reais, que podem ser classificadas como formalismo, que constrói o campo numérico em um campo de operações, com base em alguns axiomas singulares.

Por outro lado, temos as tendências que se baseiam na noção conjunto-teórica, como as de Dedekind e Cantor, que determinam os números em um caso particular de hierarquia de conjuntos. Nesse caso, o conceito de número faz um retorno ontológico, de modo que as grandes ideias são os axiomas clássicos da teoria dos conjuntos. Nesse contexto, “número” é um caso particular de predicado com certas propriedades distintivas.

Por fim, a proposta por Frege e apoiada por Russel (que pode ser chamada de logicismo) defende que a essência do conceito de número baseia-se apenas na consideração de algumas leis do próprio pensamento. Número de acordo com essa tendência é apenas uma consequência conceitual totalmente deduzida de alguns princípios originais.

A essência do conceito de número é múltipla, ou seja, possui aplicabilidade a todas as coisas e suas características estruturais. A conceituação de número deve ser concebida por meio da complementaridade entre aspectos intensional e extensional.

Acreditamos, à luz da complementaridade, que a perspectiva logicista deve ser abandonada por razões de consistência, já que não pode satisfazer as exigências do pensamento, especialmente do pensamento filosófico.

As perspectivas axiomáticas têm a tendência de socializar a tese de que os números circunscrevem apenas um projeto técnico, fornecendo para esse conceito apenas uma característica operacional ou estrutural, de modo que são exploradas exclusivamente as relações entre os objetos matemáticos, com ênfase no aspecto intensional do conceito de número.

A tese conjunto-teórica (cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências de Cauchy) não favorece a exploração do aspecto extensional do conceito de número, pois não fornecem um modelo ou interpretação às suas teorias.

Nenhuma dessas perspectivas oferece uma unificação do conceito de número. Para nós, uma abordagem que forneça um conceito unificado para tais objetos matemáticos deve ser considerada dentro de uma conjuntura que envolva a Filosofia e a Matemática.

Costumeiramente, falamos de número a respeito dos naturais, inteiros, racionais e reais. Também falamos dos números mais diretamente no sentido conjunto-teórico ao designar tipos de boa ordenação e quantidades, incluindo quantidades infinitas (cardinais). Parece plausível esperar que algum conceito de número fosse construto de todos esses casos, ou pelo menos dos “mais clássicos”, ou seja, dos números naturais (discreto) aos números reais (contínuo). Mas não é isso o que ocorre com as abordagens clássicas.

Como sabemos, “número” emerge com muitos sentidos. Mas qual desses sentidos pode constituir um conceito, permitindo que algo singular seja proposto ao pensamento sob este nome? Ou, dito de outra forma, o que é número?

Como se pode obter uma ideia única de número por meio de tal processo se todas as abordagens envolvendo as extensões dos conjuntos privilegiam apenas os aspectos operacionais do conceito de número, em outras palavras, podemos dizer que apenas o aspecto intensional do conceito de número é explorado e o aspecto extensional não é contemplado.

Diante desse contexto, apontamos para a potencialidade de uma “nova” abordagem: a proposta de J. H. Conway. Tal proposta possibilitou a construção dos números desde os naturais até os reais por um processo único, sem rupturas, permitindo também uma abordagem complementar entre os aspectos intensional e extensional do conceito de número fornecendo portanto uma possibilidade de resposta à questão “O que é número?”. Nesse caso, a resposta é “número é um jogo”.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução: Alfredo Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BARKER, S. F. F**ilosofia da Matemática**. Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1969.

COSTA, N. **Introdução aos Fundamentos da Matemática**. 4. São Paulo: Hucitec, 2008.

EVES, H. **Introdução à história da matemátic**a. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FONSECA, R. F. Da. **Número: o conceito a partir de jogos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP. São Paulo.

_________, R. F. da. **A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway.** 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC-SP. São Paulo.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Concepções dos alunos sobre os números reais**. In: LAUDARES, João Bosco (Org.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

KENNEDY, H. – **Twelve Articles on Giuseppe Peano**. Peremptory Publications: San Francisco, 2002.

OTTE, M. **Complementarity, Sets and Numbers**. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003. v. 53, p. 203-228.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática.** Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.