Uma justificativa para se ensinar Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da Contagem

Seiji Niwa

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Ms. Amari Goulart.

IFSP
São Paulo
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Niwa, Seiji.
Ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio baseado no Princípio Fundamental da Contagem / Seiji Niwa - São Paulo: IFSP, 2011.
32p.;

Ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio baseado no Princípio Fundamental da Contagem - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2011.
Orientador: Amari Goulart.

1. Análise Combinatória. 2.Princípio Fundamental da Contagem. 3.Teoria Antropológica do Didático. 4. Ensino-aprendizagem. 5. Princípio Multiplicativo
I. Ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio baseado no Princípio Fundamental da Contagem.

SEIJI NIWA

Uma justificativa para se ensinar Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da Contagem

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 30/11/2011 **CONCEITO:** 9,0

Profª Drª Iracema Hiroko Iramina Arashiro
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Ms. Amari Goulart
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Aluno: Seiji Niwa

“Vejo a sorte no futuro, não o fim do mundo
Nada é pra sempre muito menos por acaso.
Se nem sempre o planejado sai como esperado,
É só uma chance pra enxergar o outro lado.”

Forfun

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Antes de iniciar os agradecimentos, é necessário ressaltar que não foi realizado por ordem de importância e relevância.

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo apoio e compreensão em todo desenvolvimento deste trabalho. Em especial ao meu irmão que auxiliou de maneira essencial na realização do abstract.

Às colegas de classe pelo companheirismo e constante ajuda principalmente nessa “reta final”. Amizade que nunca imaginaria que se tornaria tão intensa nos últimos anos.

À minha namorada, Denise Tieko, que faço questão de citar o nome, que compreendeu e aceitou minha dedicação quase que exclusiva a este trabalho, sempre me incentivando e até mesmo me obrigando a terminá-lo a tempo.

Aos amigos que fiz durante toda minha vida e que mantenho contato até os dias de hoje. Os quais não citarei nomes, pois cada um deles estão cientes do quanto são importantes e o quanto colaboraram com o que podiam.

Ao Colégio CERMAC, por auxiliar em minha formação com os estágios supervisionados. Em especial aos professores Anderson e Douglas, professores com quem aprendi muito nesta convivência de um ano.

À professora Vania do Instituto Federal e Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, que também fez parte de minha formação com uma enorme ajuda com o cumprimento do estágio supervisionado.

Aos professores que tive em toda minha vida, desde a educação infantil até os da graduação, que colaboraram com qualquer tipo de conhecimento acadêmico que obtive. Principalmente por nunca desistirem da profissão que eu nunca imaginaria que escolheria para minha vida e que desenvolvi tamanha dedicação e admiração.

Em especial, Profa. Dra. Carla Souto, que me auxiliou principalmente na questão da língua, e à Profa. Dra. Mariana Baroni, que também auxiliou na orientação, desde os pequenos detalhes da formatação até os conselhos na apresentação.

Ao Prof. Ms. Amari Goulart por me orientar desde o início do desenvolvimento, fornecendo materiais e um pouco de seu conhecimento para que o trabalho se desenvolvesse e fosse entregue em tempo.

Aos membros da banca examinadora Profa. Dra. Iracema H. I. Arashiro e Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho, que colaboraram com correções e sugestões para tornar este trabalho o melhor possível.

RESUMO

Acreditando que existam algumas falhas no ensino básico a respeito do tema de Análise Combinatória, buscamos com este trabalho justificar que o ensino deste tópico seja pautado no Princípio Fundamental da Contagem. Inicialmente apresentamos a demonstração das fórmulas de arranjos, permutações e combinações com a intenção de evidenciar que todas as fórmulas são demonstradas a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Fazendo uso da Teoria Antropológica do Didático, analisamos alguns possíveis exercícios que poderão ser utilizados durante as aulas. Nesta análise, apresentamos duas possíveis formas de resolução e concluímos que ambas são baseadas no Princípio Fundamental da Contagem.

Palavras-chaves: Análise combinatória; Princípio Fundamental da Contagem; Teoria Antropológica do Didático; Ensino-aprendizagem; Princípio Multiplicativo

Combinatorics teaching in high school based on the Fundamental Principle of Couting

ABSTRACT

Trusting there are some failures on the basic teaching regarding the Combinatory Analysis, with this paper we try to justify why the teaching of this subject should be based on the Fundamental Principle of Counting. Initially we present the demonstration of the formula of the arrangement, the permutation and the combination with the purpose of to evidence which all the formulas are demonstrated from the Fundamental Principle of Counting. Using the Anthropological Theory of Teaching, we have analysed the possible exercises which will can be used during these classes. On this analyse, we present two possibles ways of resolution and we conclude both are based on the Fundamental Principle of Counting.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics; Fundamental Principle of Counting; Teaching-learnig; Multiplicative Principle.

LISTA DE TABELAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem do ensino de Análise Combinatória na Educação Básica sustentada pelo Princípio Fundamental da Contagem. O tema é muito amplo e, em geral, os professores da educação básica o julgam como difícil de trabalhar. Além disso, os livros didáticos e as apostilas dos sistemas de ensino procuram em seu material propor metodologias de ensino que normalmente se apoiam apenas nas definições e fórmulas que, às vezes, facilitam muito a resolução dos exercícios, entretanto, não levam os alunos a raciocinar sobre o que estão fazendo. Portanto, nota-se um ensino restrito às aplicações das fórmulas e das definições. De acordo com Batanero et al. :

> […] o ensino de análise combinatória, usualmente, está centrado na aprendizagem de definições e fórmulas, a fim de resolver exercícios que envolvem cálculos. Além disso, os autores afirmam que os professores consideram o ensino desse tema difícil e, em muitas situações, preferem não abordá-lo. (BATANERO et al, 1996 *apud* SABO, 2010, p.21)

Por isto, este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem para que o ensino da Análise Combinatória seja feito de maneira mais significativa para os alunos. A proposta é fazer com que eles, diante do problema, consigam identificar o que o enunciado pede e tirem conclusões de como resolvê-lo, sem que seja necessário o uso de fórmulas.

Por exemplo, podemos propor um problema de extrações sucessivas de cartas de um baralho, de um jogo de cara ou coroa, de formação de números com uma quantidade de algarismo limitada, das possibilidades de combinar blusas e calças, entre outros, fazendo com que o discente pense em como fazer a contagem de maneira mais prática e rápida. Depois, propor problemas cada vez mais elaborados. A ideia é sempre se preocupar com o entendimento dos alunos e pontuando assim a aula.

Após apresentar o problema a ser resolvido, deve-se explorar ao máximo qual o entendimento dos estudantes a respeito do assunto. Feito isto, começar a resolução do problema de maneira intuitiva, fazendo com que a iniciativa seja dos discentes.

Durante a resolução, deve-se evitar ao máximo o uso das fórmulas, pois elas podem confundir o raciocínio dos alunos nos próximos exercícios. Por isso, a nossa proposta é que as resoluções sejam baseadas somente no Princípio Fundamental da Contagem.

Acreditamos que a utilização das fórmulas de permutações, arranjos e combinações, no primeiro momento, pode se tornar confusa e talvez até assustadora. Quando mostramos as fórmulas, os alunos ficam maravilhados pela facilidade que tal instrumento leva a eles, o que faz com que tentem apenas decorá-las, sem uma elaboração de aprendizagem mais sofisticada. Com isso, quando os discentes tentam resolver os exercícios sozinhos, ficam se indagando: "Uso a fórmula de arranjo?", "a de permutação?", “ou a de combinação?”.

Isso acontece porque eles tentam resolver o problema sem interpretá-lo. Eles acreditam que seja suficiente apenas aplicar a fórmula ao problema dado. Pensamos que isto possa ser um dos motivos que leva grande parte dos alunos a resolver problemas de arranjos como se fossem combinações e problemas de combinações como se fossem arranjos, conforme apontam as pesquisas de Batanero at al. (1996).

Portanto, sugerimos que a abordagem dos arranjos, permutações e combinações simples seja feita a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Propomos que este princípio seja trabalhado de maneira intuitiva, fazendo com que o discente desenvolva ainda mais o seu raciocínio lógico-dedutivo.

Com vistas a esse objetivo, este trabalho está dividido em,

No capítulo 2, traremos as demonstrações das fórmulas de arranjo, permutação e combinação; e apresentaremos também a dedução do Principio Fundamental da Contagem de forma intuitiva e a partir do Principio de Indução Finita.

No capítulo 3, traremos a Teoria Antropológica do Didático, que neste trabalho será utilizada por trazer subsídios teóricos que auxiliam e modelam a prática docente.

No capitulo 4, faremos a análise de 6 exercícios, sendo dois sobre arranjos, dois sobre permutações e dois sobre combinações. Na análise, usaremos a Teoria Antropológica do Didático, pela qual buscaremos investigar a tarefa proposta, os possíveis meios de se solucionar a tarefa e qual a teoria que justifica tal resolução.

2 DESENVOLVIMENTO DAS FÓRMULAS

Neste capítulo vamos trazer as demonstrações das fórmulas de arranjos, permutações e combinações. As demonstrações são baseadas no Princípio Fundamental da Contagem.

O foco será centrado no Princípio Fundamental da Contagem, pois acreditamos que se bem trabalhado durante a abordagem do tema, a compreensão de arranjos, permutações e combinações se torna mais clara ao aluno. Assim, durante a resolução dos problemas, o discente trabalha de forma intuitiva, sem a necessidade da utilização de fórmulas prontas, fazendo uso apenas do Princípio Fundamental da Contagem.

2.1. Princípio Multiplicativo

"Se um acontecimento *A* pode ocorrer de *m* maneiras diferentes e se, para cada uma das *m* maneiras possíveis de ocorrências de *A*, um segundo acontecimento *B* pode ocorrer de *n* maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento *A* seguido do acontecimento *B* é $m \cdot n$".

<u>Demonstração</u>:

Sendo:

$a_1, a_2, \dots, a_m$ as *m* maneiras de ocorrências de *A*

$b_1, b_2, \dots, b_n$ as *n* maneiras de ocorrências de *B*

Pensaremos da seguinte forma. Considerando cada possibilidade um par ordenado (a_i, b_j). Onde a_i representa as maneiras de ocorrer *A* e b_j as maneiras de ocorrer *B*.

Lembrando que $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Agora, fixemos o primeiro termo do par, sendo ele o a_1 e vamos variar o segundo de b_1 até o b_n. E repetiremos este processo para cada a_i.

A seguir, apresentam-se os pares ordenados formados.

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n) & \rightarrow \text{ n pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n) & \rightarrow \text{ n pares} \\ \ldots & \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n) & \rightarrow \text{ n pares} \end{cases}$$

Se somarmos todas as possibilidades, temos que a cada linha, gera n pares diferentes. Como temos m linhas, ficaremos com:

$$n + n + \ldots + n = m \cdot n$$

O que prova a hipótese inicial.

Outra maneira para se provar o princípio, é a que será apresentada a seguir.

A ideia central é a mesma, porém há uma diferença no raciocínio final que utilizamos.

Após definir as possibilidades como um par ordenado (a_i, b_j), colocaremos em uma tabela para ilustrá-las.

Tabela 2.1 – Esquematização do número de pares ordenados formados a partir dos acontecimentos A e B.

B / A	b_1	b_2	...	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	...	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	...	(a_2, b_n)
...	...	...	...	...
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	...	(a_m, b_n)

Com isso, basta contarmos cada par ordenado formado. O que nos leva a:

$$n + n + \ldots + n = m \cdot n$$

A extensão desse princípio demonstrado anteriormente, nos leva a outro princípio, o Princípio Fundamental da Contagem.

2.2. Princípio Fundamental da Contagem (parte A)

Assim como foi feito em alguns livros didáticos, optamos pela separação de tal princípio em duas partes. Sendo que primeira é uma extensão do Princípio Multiplicativo e a segunda nos encaminhará para as fórmulas que desejamos demonstrar, isto é, arranjos, permutações e combinações.

Vamos estender o Princípio Multiplicativo agora para r conjuntos e não somente dois. Sendo assim, temos:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n1}\}$ maneiras de ocorrer $A = n_1$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n2}\}$ maneiras de ocorrer $B = n_2$

…

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{nr}\}$ maneiras de ocorrer $Z = n_r$

Temos que o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo $(a_i, b_j, \dots, z_p)$ onde $a_i \in A$, $b_j \in B$, … , $z_p \in Z$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

<u>Demonstração</u>: a demonstração é feita baseada no Princípio da Indução Finita.

Ele consiste em mostrar que a fórmula é válida para o primeiro termo que ela pode admitir. Depois é preciso supor que ela é válida para um número inteiro qualquer e finalmente mostrar que é válida para o seu sucessor também.

Para o primeiro termo, temos que r = 2, pois caso r seja 1, não formaríamos pares ordenados, então o número de possibilidades seria dado apenas pela contagem dos termos. E para r = 2, caímos nos Princípio Multiplicativo, deduzido anteriormente.

Supondo agora que ela é válida para o inteiro (r – 1). Neste caso, tomemos as sequências de (r – 1) elementos $(a_i, b_j, \dots, w_k)$.

Pela hipótese de indução, existem:

$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes a Z.

Cada sequência (a_i, b_j, … , w_k, z_p) consiste de uma sequência (a_i, b_j, … , w_k) e um elemento $z_p \in$ Z. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, o número de sequências do tipo

(a_i, b_j, … , w_k, z_p)

é

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita, provamos a validade do Princípio Fundamental da Contagem (parte A).

2.3. Princípio Fundamental da Contagem (parte B)

Consideremos um conjunto A com m (maior ou igual a 2) elementos. Então o número de r-uplas ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de A é

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]$$

Ou seja, se A = {a_1, a_2, , a_m} o número de sequências do tipo

(a_i, … , a_j, … , a_k)

com

$$\begin{cases} a_i \in A \quad \forall i \in \{1,2,\cdots,m\} \\ a_i \neq a_p \quad para \quad i \neq p \end{cases}$$

é

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]$$

A demonstração é feita da mesma maneira que a anterior, utilizando-se o Princípio da Indução Finita.

Observação: acreditamos que a demonstração feita com base no Princípio da Indução Finita não seja necessária para os alunos da educação básica, já que podemos trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem de forma intuitiva, que consideramos que seja o ideal nesta fase de escolarização, além disso, o estudo do PIF não faz parte dos conteúdos curriculares.

2.4. Arranjos

Definição: "Seja M um conjunto com m elementos distintos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos arranjo, toda r-upla ordenada formada com elementos de M todos distintos."

Fórmula: $A_{m,r} = \dfrac{m!}{(m-r)!}, \quad r \leq m$

Dedução: Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Indicamos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r.

Cada arranjo é uma sequência de r elementos, onde cada elemento pertence a M, e são todos distintos. Podemos representar a sequência da seguinte maneira:

$$\underbrace{(\_\,,\_\,,\cdots,\_\,)}_{\text{r elementos}}$$

Adotaremos o seguinte procedimento:

Acontecimento	Número de possibilidades
Posicionar o 1º elemento na primeira posição	m
Posicionar o 2º elemento na segunda posição	m - 1
Posicionar o 3º elemento na terceira posição	m - 2
...	...
Posicionar o r º elemento na r-ésima posição	m - (r - 1)

Sendo $A_{m,r}$ o número de arranjos que procuramos, temos a partir do Princípio Fundamental da Contagem, em que

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)].$$

Para melhorarmos a apresentação da fórmula, multiplicaremos e dividiremos por $(m-r)!$, chegando à seguinte fórmula

$$A_{m,r} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)] \cdot (m-r)!}{(m-r)!} = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

2.5. Permutações

<u>Definição</u>: “Seja M um conjunto com m elementos, isto é, M = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos permutação dos m elementos, todo arranjo em que r = m.”

<u>Fórmula</u>: $P_m = m!$

<u>Dedução</u>: Pela definição, adotemos r = m, para a fórmula de arranjos. Então:

$$A_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(m-1)] = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Portanto, temos que:

$$P_m = m \cdot (m\text{-}1) \cdot (m\text{-}2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!.$$

2.6. Combinações

<u>Definição</u>: “Seja M um conjunto com m elementos, isto é, M = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.”

Fórmula: $C_{m,r} = \dfrac{m!}{r!(m-r)!}$.

Dedução: Considerando r posições que os m elementos podem ocupar, obteremos o seguinte esquema:

$$\underset{r_1}{\_\_} \quad \underset{r_2}{\_\_} \quad \underset{\cdots}{\cdots} \quad \underset{r_{r-1}}{\_\_} \quad \underset{r_r}{\_\_}$$

Agora pensaremos em dois modos de dispor estes elementos neste novo conjunto.

1º modo:

Considerando os seguintes acontecimentos e o número de possibilidades existentes para cada um deles. No quadro a seguir, representamos cada acontecimento associado ao seu número de possibilidades de ocorrência.

Acontecimento	**Número de possibilidades**
Escolha de r objetos dos m objetos dados	$C_{m,r}$
Enfileiramento dos r objetos escolhidos nas r posições r_1, r_2, r_3, ... , r_{r-1}, r_r. Após ter ocorrido o primeiro acontecimento.	r!

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, as r posições podem ser ocupadas pelos m elementos de:

$$C_{m,r} \cdot r! \qquad \text{maneiras.} \qquad (1)$$

2º modo:

Agora, consideraremos os seguintes acontecimentos e suas respectivas maneiras de ocorrerem. No quadro a seguir, representamos cada acontecimento associado ao seu número de possibilidades de ocorrência.

Acontecimento	Número de possibilidades
Escolha de um elemento para a posição r_1	m
Escolha de um elemento para a posição r_2, após ter escolhido para a posição r_1	m - 1
Escolha de um elemento para a posição r_3, após ter escolhido para a posição r_1 e r_2	m - 2
...	...
Escolha de um elemento para a posição r_r, após ter escolhido para a posição r_1, r_2, r_3, ... , r_{n-1}	m – (r – 1) = m – r + 1

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que as r posições podem ser ocupadas de:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \quad \text{maneiras.} \quad (2)$$

De (1) e (2), temos

$$C_{m,r} \cdot r! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1)$$

e portanto,

$$C_{m,r} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1)}{r!}$$

Aplicando o mesmo processo utilizado com os arranjos, multiplicaremos e dividiremos por (m – r)!. Assim, obteremos:

$$C_{m,r} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \cdot (m-r)!}{r! \cdot (m-r)!}$$

Como

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \cdot (m-r)! = m!$$

temos

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r! \cdot (m-r)!}$$

3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard será utilizada neste trabalho com a finalidade de oferecer subsídios teóricos para analisar, compreender e modelar as atividades (tarefas) referentes ao ensino de arranjos, permutações e combinações. Isto será feito da seguinte maneira: diante de um problema matemático, definir quais são as tarefas envolvidas, quais as possíveis técnicas que poderão ser utilizadas e, por fim, em qual teoria/tecnologia elas estão fundamentadas. O conjunto tarefa-técnica-discurso térico tecnológico é denominado de organização praxeológica.

Inicialmente, em suas primeiras teorizações, Chevallard desenvolveu a noção da Teoria da Transposição Didática, que distinguia os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. A teoria mostrava que uma classe de objetos a ensinar era apenas uma consequência de uma história em particular. O descontentamento do próprio Chevallard o levou a criar uma nova teoria, a Teoria Antropológica do Didático, porque ele julgava ser insuficiente a análise dos objetos do saber. Assim, inseriu a didática no campo da antropologia.

Essa nova teoria, isto é, a TAD, estuda o homem diante de situações matemáticas e analisa o conhecimento através das inter-relações dos objetos, que seguem uma ordem hierárquica.

Segundo Chevallard (Apud: ALMOULOUD, 2007, p. 111), a TAD estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, diante de situações matemáticas. Usa-se o termo "antropológico", pois a TAD estuda as situações matemáticas em um conjunto de atividades humanas dentro de uma instituição, que no nosso caso é a escola.

3.1. Modelagem Antropológica da Matemática

A modelagem da prática docente, em particular, das atividades matemáticas, é feita a partir de três noções: tarefa, técnica e discurso teórico/tecnológico. Seguindo os três postulados citados por Almouloud (2007, p. 114), inicialmente iremos tratar dos dois primeiros e em seguida do terceiro.

O primeiro postulado afirma que:

1. *Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.*

E o segundo:

2. *O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.*

Segundo Almouloud, "As tarefas podem ser identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefas, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar, que não definem o conteúdo em estudo." (2007, p. 115).

Assim sendo, tarefa, como a própria palavra indica, é aquilo que desejamos resolver. Diante do problema matemático, o discente com a ajuda do professor, deve identificar o que ele quer solucionar. Lembrando que a determinação da tarefa se altera de acordo com o problema e em que instituição ele foi proposto.

Ainda segundo Almouloud, temos: "A palavra técnica é aqui utilizada como uma 'maneira de fazer' uma tarefa, mas não necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico" (2007, p. 114).

Com isso, podemos dizer que as técnicas são os caminhos que tomamos para resolver o exercício. Inicialmente, elas não precisam ser demonstradas matematicamente, não sendo necessário, portanto ter a hipótese, tese e demonstração. Devemos ressaltar que diante de um exercício de matemática, uma determinada tarefa pode nos levar a diversas técnicas que deverão sempre ser analisadas minuciosamente, com isso buscamos os possíveis erros e acertos na resolução do aluno e conseguimos ver o quanto o seu raciocínio lógico-dedutivo é desenvolvido.

O surgimento de diversas técnicas aparece na instituição em que as tarefas se desenvolvem. Quando sua execução torna-se rotineira, não há desenvolvimento de novas técnicas, pois as falhas que elas apresentavam já foram descobertas e corrigidas. Assim, temos que o papel da instituição é organizar e delimitar as técnicas para que elas funcionem regularmente.

A técnica que a instituição definiu como rotineira deve ser demonstrada matematicamente, o que é feito através do discurso teórico/tecnológico que será definido a seguir, a partir do terceiro postulado:

3. *A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.*

Nota-se que o autor faz uso de um termo não matemático, embora a modelagem seja feita no campo da matemática. Fato que é notado quando vimos a utilização do termo "ecologia". O termo ecologia, segundo o *Dicionário eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*, possui duas definições.

Em Biologia é a "ciência que estuda as relações dos seres vivos entre si ou com o meio orgânico ou inorgânico no qual vivem". Porém, neste trabalho nota-se que o termo é utilizado segundo a definição derivada por analogia, que é "estudo das relações recíprocas entre o homem e seu meio moral, social, econômico".

Lembrando que a utilização do termo "antropológico" se deu pelo fato de situar a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Fazendo uso destas definições, analisaremos o seguinte trecho: "Supõe-se que, para existir uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada, o que seria uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas". (Almouloud, 2007, p. 116)

Sendo assim, o bloco tarefa/técnica vem sempre associado a uma tecnologia, pois a resolução da tarefa, por meio de qualquer técnica, só é aceita como verdadeira quando existe uma tecnologia que a justifique.

O conjunto de técnicas, tecnologias e teorias, quando utilizadas em uma determinada tarefa, forma uma “organização praxeológica”. O termo Praxeologia, segundo Almouloud (2007, p. 117) é formado por dois termos gregos, práxis e logos, que significam, respectivamente, prática e razão.

Podemos dizer então que a prática docente dentro de uma instituição está ligada a uma organização praxeológica, pois o papel do professor é trazer o problema matemático e fazer com que o aluno consiga entender a tarefa proposta e utilizar uma técnica adequada para aquele tipo de problema (prática). Depois de realizada, o professor analisa o procedimento e verifica se existe uma teoria que a justifique (razão).

Assim, o aluno desenvolve intuitivamente as possíveis técnicas que podem surgir durante a resolução do problema, e que ele mesmo possa perceber em que momentos ocorreram os equívocos, corrigindo-os, de tal maneira que faça com que a técnica seja validada.

Concluindo, a prática docente dentro da instituição pode ser realizada da seguinte forma: o professor traz um problema matemático, o aluno busca entender a tarefa proposta e encontrar possíveis caminhos para solucioná-la. Assim, o professor mostra quais caminhos tomados são verdadeiros, justificando-os matematicamente através de teorias/tecnologias existentes. Isso faz com que o aluno desenvolva mais o raciocínio lógico-dedutivo, pois ele está em contato direto com cada passagem utilizada e o professor justifica se ela é válida ou não.

De forma geral, quando o professor apresenta apenas a fórmula pronta, o aluno não é motivado a desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo, já que a fórmula apresentada facilita a resolução do problema, mas não traz a sua origem.

4 ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS

Neste capítulo faremos à análise de algumas atividades envolvendo os conceitos de arranjos, permutações e combinações. Esta análise será baseada nos princípios da Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard. O nosso objetivo será identificar as tarefas a serem realizadas, as possíveis técnicas para a resolução das tarefas e finalmente, em qual discurso teórico-tecnológico elas são fundamentadas. Pretendemos, com isso, concluir que o Princípio Fundamental da Contagem é um conceito essencial para a resolução destes problemas.

Lembrando que durante o desenvolvimento do exercício, consideraremos que o discente já tenha o conhecimento sobre fatoriais e suas propriedades. Pois esta clareza servirá de base para a simplificação de alguns cálculos.

4.1. Arranjos

Primeiro exercício:

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis de se obter?

<u>Identificação da Tarefa</u>: obter o número de sequências de 3 cartas que são possíveis de montar com um baralho de 52 cartas.

<u>Resolução esperada</u>:

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = 132600$$

Ou

$$52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

Análise da técnica da primeira resolução:

T_1: Identificar que o problema se trata de um arranjo simples.
T_2: Aplicar a fórmula de arranjo simples.

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = 132600$$

Análise da técnica da segunda resolução:

T_1: Identificar o primeiro acontecimento (retirar a primeira carta do baralho).
T_2: Contar o número maneiras de se retirar uma carta de um baralho com 52 cartas.
T_3: Identificar o segundo acontecimento (retirar a segunda carta do baralho).
T_4: Contar o número maneiras de se retirar uma carta de um baralho com 52 cartas, dado que, uma carta já foi retirada.
T_5: Identificar o terceiro acontecimento
T_6: Contar o número maneiras de se retirar uma carta de um baralho com 52 cartas, dado que duas cartas já foram retiradas.
T_7: Aplicar o PFC

$$52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Discurso Teórico/Tecnológico: Na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de um arranjo e aplicou o algoritmo pronto, sem precisar refletir sobre a teoria envolvida por trás do algoritmo. Apenas aplicou a fórmula do arranjo que ele já tinha memorizado.

Já na segunda forma de resolução, ele buscou todo um raciocínio lógico-dedutivo em que, a cada passagem T_i, ele era obrigado a elaborar um procedimento que o levasse à resposta correta. Com isso, concluiu que o Princípio Fundamental da Contagem era aplicável ao exercício.

Segundo exercício:

Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras, cada listra com uma cor. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Identificação da Tarefa: escolher 5 cores distintas dentre as 8 cores disponíveis.

<u>Resolução esperada</u>:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(5-3)!} = 6720$$

Ou

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

<u>Análise da técnica da primeira resolução</u>:

T_1: Identificar que o problema se trata de um arranjo simples.
T_2: Aplicar a fórmula de arranjo simples.

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(5-3)!} = 6720$$

<u>Análise da técnica da segunda resolução</u>:

T_1: Identificar o primeiro acontecimento (escolher uma cor, das 8 cores possíveis para pintar a primeira listra da bandeira).
T_2: Contar o número de maneiras de ocorrer o primeiro acontecimento.
T_3: Identificar o segundo acontecimento (escolher uma cor para pintar a segunda listra da bandeira).
T_4: Contar o número de maneiras de ocorrer o segundo acontecimento, dado que ocorreu o primeiro acontecimento.
T_5: Identificar o terceiro acontecimento (escolher uma cor para pintar a terceira listra da bandeira).
T_6: Contar o número de maneiras de ocorrer o terceiro acontecimento, dado que ocorreu o primeiro e o segundo acontecimentos.
T_7: Identificar o quarto acontecimento (escolher uma cor para pintar a quarta listra da bandeira).
T_8: Contar o número de maneiras de ocorrer o quarto acontecimento, dado que ocorreu o primeiro, o segundo e o terceiro acontecimentos.
T_9: Identificar o quinto acontecimento (escolher uma cor para pintar a quinta listra da bandeira).
T_{10}: Contar o número de maneiras de ocorrer o quinto acontecimento, dado que ocorreu o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto acontecimentos.
T_{11}: Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

Discurso Teórico/Tecnológico: Assim como no primeiro exercício, na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de um arranjo e aplicou o algoritmo pronto.

Já na segunda forma de resolução, ele buscou todo um raciocínio lógico-dedutivo. Quando fazem a contagem do número de possibilidades de escolha de cada cor para se pintar as listras, os discentes devem fazer uso constante do Princípio Fundamental da Contagem. A cada passagem, aplicam uma vez o princípio.

4.2. Permutações

Primeiro exercício:

De quantas maneiras podemos ordenar 10 pessoas em fila?

Identificação da Tarefa: formar sequências de 10 pessoas em fila, ou seja, de forma que fiquem 10 pessoas uma atrás da outra.

Resolução esperada:

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

Ou

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

Análise da técnica da primeira resolução:

T_1: Identificar que o problema se trata de uma permutação.
T_2: Aplicar a fórmula de permutação.

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

<u>Análise da técnica da segunda resolução</u>:

T_1: Escolher uma entre as 10 pessoas para ocupar o primeiro lugar da fila.
T_2: Escolher uma entre as 9 pessoas restantes, para ocupar o segundo lugar da fila, sabendo que uma já foi posicionada na primeira posição.
T_3: Escolher uma entre as 8 pessoas restantes, para ocupar o terceiro lugar da fila, sabendo que duas já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_4: Escolher uma entre as 7 pessoas restantes, para ocupar o quarto lugar da fila, sabendo que três já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_5: Escolher uma entre as 6 pessoas restantes, para ocupar o quinto lugar da fila, sabendo que quatro já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_6: Escolher uma entre as 5 pessoas restantes, para ocupar o sexto lugar da fila, sabendo que cinco já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_7: Escolher uma entre as 4 pessoas restantes, para ocupar o sétimo lugar da fila, sabendo que seis já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_8: Escolher uma entre as 3 pessoas restantes, para ocupar o oitavo lugar da fila, sabendo que sete já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_9: Escolher uma entre as 2 pessoas restantes, para ocupar o nono lugar da fila, sabendo que oito já foram posicionadas nas posições anteriores.
T_{10}: Posicionar a última pessoa restante na décima posição.
T_{11}: Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

<u>Discurso Teórico/Tecnológico</u>: Na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de uma permutação e aplicou o algoritmo pronto, sem precisar refletir sobre a teoria envolvida por trás do algoritmo. Apenas aplicou a fórmula de permutação que ele já tinha memorizado.

Na segunda forma de resolução, notamos que, em cada uma das dez passagens, devemos fazer uma análise do evento ocorrido anteriormente. Ou seja, para ocorrer a suposição, devemos saber que a suposição anterior ocorreu. Buscamos, com isso, melhorar o raciocínio lógico-dedutivo do discente durante a resolução desse tipo de problema.

A cada passagem, ele deve perceber a aplicabilidade do Princípio Fundamental da Contagem.

Segundo exercício:

Supondo que o número de identidade das pessoas aqui no Brasil seja composto por uma sequência de 9 algarismos, e que só são utilizados os números de 1 a 9, quantas dessas identidades, com algarismos todos distintos entre eles, podem ser formadas?

Identificação da Tarefa: formar uma sequência com nove algarismos, todos eles distintos entre si.

Resolução esperada:

$$P_9 = 9! = 362880$$

Ou

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

Análise da técnica da primeira resolução:

T_1: Identificar que o problema se trata de uma permutação.
T_2: Aplicar a fórmula de permutação.

$$P_9 = 9! = 362880$$

Análise da técnica da segunda resolução:

T_1: Escolher um entre os 9 algarismos para ocupar a primeira posição da sequência.
T_2: Escolher um entre os 8 algarismos para ocupar a segunda posição da sequência, sabendo que a primeira posição já foi ocupada por um algarismo.
T_3: Escolher um entre os 7 algarismos para ocupar a terceira posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.
T_4: Escolher um entre os 6 algarismos para ocupar a quarta posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.
T_5: Escolher um entre os 5 algarismos para ocupar a quinta posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.
T_6: Escolher um entre os 4 algarismos para ocupar a sexta posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.
T_7: Escolher um entre os 3 algarismos para ocupar a sétima posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.

T_8: Escolher um entre os 2 algarismos para ocupar a oitava posição da sequência, sabendo que as posições anteriores já foram ocupadas.
T_9: Posicionar o último algarismo restante na nona posição.
T_{10}: Aplicar o Princípio Fundamental da contagem.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

Discurso Teórico/Tecnológico: Na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de uma permutação e aplicou o algoritmo pronto, sem precisar refletir sobre a teoria envolvida por trás do algoritmo. Apenas aplicou a fórmula de permutação que ele já tinha memorizado.

Na segunda forma de resolução, a cada número que posicionamos na sequência, devemos notar que para o próximo, podemos aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

4.3. Combinações:

Primeiro exercício:

Desejamos montar uma comissão de três membros e dispõe-se de cinco pessoas. Quantas comissões podem ser formadas?

Identificação da tarefa: Formar conjuntos de 3 membros a partir de 5 pessoas.

Resolução esperada:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Ou

$$\frac{(5 \cdot 4 \cdot 3)}{6} = 10$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

Análise da técnica da primeira resolução:

T_1: Verificar que se trata de um problema de combinação.
T_2: Aplicar a fórmula de combinação.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Análise da técnica da segunda resolução:

T_1: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma pessoa, entre cinco, para ocupar a primeira vaga da comissão.
T_2: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma pessoa para ocupar a segunda vaga da comissão, dado que uma pessoa já foi selecionada para a primeira vaga.
T_3: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma pessoa para ocupar a terceira vaga da comissão, dado que duas pessoas já foram selecionadas para ocupar as duas vagas anteriores.
T_4: Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.
Obs.: Verificamos que as comissões formadas foram contadas mais de uma vez. Considere as comissões formadas pelos membros A, B e C:

Primeira vaga: A Segunda vaga: B Terceira vaga: C	Primeira vaga: B Segunda vaga: A Terceira vaga: C	Primeira vaga: C Segunda vaga: A Terceira vaga: B
Primeira vaga: A Segunda vaga: C Terceira vaga: B	Primeira vaga: B Segunda vaga: C Terceira vaga: A	Primeira vaga: C Segunda vaga: B Terceira vaga: A

Percebe-se então que cada comissão formada é contada seis vezes. É necessário tirarmos estas repetições. Percebe-se também o seguinte, que essas repetições podem ser obtidas a partir do cálculo de permutações obtidas a partir de três membros.

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

T_6: Retirar as comissões que se repetem. Para isso devemos notar que cada comissão de três membros, foi contada 6 vezes.
T_7: Dividir o resultado obtido na T_4 por 6.

$$\frac{(5 \cdot 4 \cdot 3)}{6} = 10$$

Discurso Teórico/Tecnológico: Na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de uma combinação e aplicou o algoritmo pronto, sem precisar refletir sobre a teoria envolvida por trás do algoritmo. Apenas aplicou a fórmula da combinação que ele já havia memorizado.

Como no caso dos arranjos e permutações, a teoria envolvida nesta resolução é o Princípio Fundamental da Contagem. A diferença ocorre em T4. Ao aplicarmos o Princípio Fundamental da Contagem, notamos a repetição de algumas comissões. Essas repetições são formadas a partir da permutação de três elementos. Por isso, para retirarmos, dividimos o total obtido pelo número de permutações que se repetem.

Segundo exercício:

Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Identificação da tarefa: escolher 10 dentre as 15 questões para resolvê-la.

Resolução esperada:

$$C_{15,10} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3003$$

Ou

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$$

Análise das técnicas utilizadas nas resoluções:

Análise da técnica da primeira resolução:

T_1: Verificar que se trata de um problema de combinação.
T_2: Aplicar a fórmula de combinação.

$$C_{15,10} = \frac{15!}{10!\cdot 5!} = 3003$$

Análise da técnica da segunda resolução:

T_1: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre quinze, para se resolver.
T_2: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre quatorze, para se resolver. Dado que uma já foi resolvida.
T_3: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre treze, para se resolver. Dado que duas já foram resolvidas.
T_4: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre doze, para se resolver. Dado que três já foram resolvidas.
T_5: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre onze, para se resolver. Dado que quatro já foram resolvidas.
T_6: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre dez, para se resolver. Dado que cinco já foram resolvidas.
T_7: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre nove, para se resolver. Dado que seis já foram resolvidas.
T_8: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre oito, para se resolver. Dado que sete já foram resolvidas.
T_9: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre sete, para se resolver. Dado que oito já foram resolvidas.
T_{10}: Contar o número de maneira que podemos selecionar uma questão, entre seis, para se resolver. Dado que nove já foram resolvidas.
T_{11}: Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.
Obs.: Assim como no exercício analisado anteriormente, devemos perceber o seguinte: a cada conjunto de dez questões escolhidas, ocorre a repetição de um dado número de questões, que pode ser calculado a partir da permutação de dez questões. Fato que foi provado no exercício anterior.

$$15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$$

T_{12}: Dividir o resultado obtido na T11 por 10!.

$$\frac{15!}{10!} = 3003$$

Discurso Teórico/Tecnológico: Na primeira forma de resolução, o aluno identificou que o problema se tratava de uma combinação e aplicou o algoritmo pronto, sem precisar refletir sobre a teoria envolvida por trás do algoritmo. Apenas aplicou a fórmula da combinação que ele já havia memorizado.

Assim como no exercício anterior, a teoria envolvida nesta resolução é o Princípio Fundamental da Contagem. A diferença ocorre na T_{11}, pois notamos que, cada conjunto de 10 questões é contado 10! Vezes, por isso dividimos o total obtido por 10!.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procuramos justificar uma abordagem de ensino diferenciada da tradicional, isto é, buscamos não nos basear nas definições, fórmulas e exercícios de aplicação. Objetivamos justificar que o ensino seja pautado no Princípio Fundamental da Contagem, pois acreditamos que quando trabalhamos com ele, fugindo da apresentação tradicional, os discentes desenvolvem seu raciocínio lógico-dedutivo.

Acreditamos que quando o professor, em sua aula, apresenta a definição, fórmula e exemplos práticos, os discentes não desenvolvem o raciocínio lógico-dedutivo, apenas memorizam os tipos de exercícios e tentam aplicar a fórmula. Por isso, optamos pelo ensino pautado a partir do Princípio Fundamental da Contagem.

Como vimos no capítulo 2, as demonstrações das fórmulas de arranjos, permutações e combinações são deduzidas a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Por isso, pensamos que durante a prática docente, ao invés de apresentarmos as definições, fórmulas prontas e exemplos, podemos partir da situação problema e aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

No capítulo 4, quando apresentamos a análise de alguns exercícios sobre arranjos, permutações e combinações, vimos que eles podem ser resolvidos de duas maneiras distintas, ou seja, duas técnicas distintas. No primeiro caso, percebe-se qual é o tipo de problema (se é de arranjo, permutação ou combinação), e aplica-se a fórmula conhecida, no segundo caso, os exercícios são resolvidos utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

Nota-se que não excluiremos as resoluções dadas de forma direta, ou seja, aquelas em que o aluno apenas aplica a fórmula conhecida. Porém, devemos justificar o uso da fórmula a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Posteriormente iremos mostrando aos alunos que ao invés de memorizar a fórmula, iremos resolver o exercício de forma intuitiva a partir do Princípio Fundamental da Contagem do qual a fórmula será uma conseqüência.

Percebemos que a demonstração das fórmulas e a análise dos exercícios, baseiam-se no Princípio Fundamental da Contagem. Podemos então concluir que a hipótese levantada pelo trabalho é válida, isto é, temos uma justificativa de que o ensino pautado no Princípio Fundamental da Contagem se torna mais eficaz.

Pensamos que uma aula ministrada visando apresentar um problema matemático em que o discente deverá descobrir qual a tarefa proposta e buscar uma técnica para resolvê-lo.

Feito isso, uma proposta é que o professor instigue o raciocínio lógico-dedutivo dos discentes, e trabalhar com a resolução do problema a partir do Princípio Fundamental da Contagem de forma intuitiva, apresentando a formalização posteriormente.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Atual, Curitiba: UFPR, 2007.

BACHX, A. C.; POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Análise Combinatória e Probabilidade**. 5ª. ed. v. 5, 1985.

HOUAISS. **Dicionário eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria . *Educación Matemática.* Disponível em: <htpp://www.ugr.es/~batanero>. Acesso em: 12 nov. 2011.

SABO, R. D. Mestrado em educação matemática. **Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio**. São Paulo. PUC-SP, 2010.