



## **Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade**

Eligio Carlos Eduardo

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP  
São Paulo  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Eduardo, Eligio Carlos.

Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade /  
Eligio Carlos Eduardo. - São Paulo: IFSP, 2013.  
101f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de  
São Paulo

Orientador: Henrique Marins de Carvalho.

1. Geometrias Não-Euclidianas. 2. Física. 3. Relatividade. 4.  
Espaços. 5. Interdisciplinaridade. I. Título do trabalho.

---

**ELIGIO CARLOS EDUARDO**

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E A GEOMETRIA DA  
RELATIVIDADE**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

**APROVADA EM 05/12/2013**

**CONCEITO: 10,0 ( Dez )**



---

Profa. Dra. Cleide Matheus Rizzato  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Membro da Banca



---

Prof. Me. José Maria Carlini  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Membro da Banca



---

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Orientador



---

Aluno, Eligio Carlos Eduardo



*“A Ciência é feita de fatos, como uma casa é feita de pedras; mas um conjunto de fatos não é ciência, assim como um monte de pedras não é uma casa”.*

*Henri Poincaré*



*À Minha Família*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir a vida e poder fazer parte da natureza e aprender sobre ela.

Agradeço especialmente à minha mãezinha, Dona Jonadir, por me ensinar o valor moral da vida, o respeito às pessoas e à vida; às minhas irmãs, grandes educadoras, que me fizeram perceber precocemente o valor da educação e também o gosto pela profissão.

À minha esposa, Flávia, pela compreensão e por estar sempre do meu lado.

Aos meus amigos do IFSP pelo companheirismo e apoio no dia a dia, os quais, com toda certeza, contribuíram no meu aprendizado. Da Matemática: Alberto, Ana C. Cordeiro, Ana Olivia, Ana Toschi, Anderson (Bigafour), Anderson (Perucão), André Rosale, Arnaldo, Cideni, David, Douglas, Denys, Fabrício, Filipe, Laura, Leandro, Helaine, Marcão, Orlando, Thais, Talita, Willian; da Química: Carol Kakazu e Laura Santos; aos meus colegas da Física: Douglas, Leandro e Admilson e tantos outros que não citei.

Em especial agradeço a todos, pois todos foram igualmente especiais. Jamais esquecerei os bons momentos que passei com vocês.

Aos professores do IFSP que me proporcionaram ainda mais gosto pela matemática. Em especial: ao professor Me. Henrique Marins de Carvalho, pela paciência e compreensão; ao Prof. Me. José Maria Carlini; à Prof<sup>a</sup> Dra. Cristina Lopomo; à Prof<sup>a</sup>. Dra. Cleide Rizzatto; à Prof<sup>a</sup>. Dra. Delacir Poloni; ao Prof. Me. César Adriano Batista; ao Prof. Me Amari Gular; à Prof<sup>a</sup>. Ma. Valéria Luchetta; à Prof<sup>a</sup>. Dra. Mariana Baroni; à Prof<sup>a</sup>. Dra. Graziela Tiago, em fim a todos os grandes mestres com os quais tive o prazer de aprender.



## RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar as geometrias não-euclidianas e sua influência no desenvolvimento da Teoria da Relatividade, bem como a possibilidade deste tema ser inserido no contexto da educação básica. Este estudo parte das primeiras teorias sobre as Geometrias Não-Euclidianas, com o problema do quinto postulado dos *Elementos* de Euclides e a tentativa para demonstrá-los, até o surgimento dos modelos de Geometrias Não-Euclidianas e sua influência na física, especificamente na Teoria da Relatividade. Neste contexto, estudamos como as ideias não-euclidianas mudaram a concepção de espaço e geometria influenciando o surgimento das teorias relativistas. Os conceitos geométricos não-euclidianos estão fortemente ligados à Teoria da Relatividade. A partir de pesquisa bibliográfica mostraremos como se deu o desenvolvimento histórico das Geometrias Não-Euclidianas e também que conceitos como espaços curvos da Teoria da Relatividade, só são possíveis considerando o espaço não-euclidiano. Também é feita uma análise das possibilidades de inserção no currículo básico.

**Palavras-chaves:** Geometrias Não-Euclidianas; Física; Relatividade; Espaços; Interdisciplinaridade.



# NON-EUCLIDEAN GEOMETRY AND THE RELATIVE GEOMETRY

## ABSTRACT

The aim of this work is to study at non-Euclidean geometries and it's influence at the theory of relativity's development as well as the possibility of this topic be placed in the context of basic education. The study of the early theories about non-Euclidean geometries as the problem of the fifth postulate of Euclid's Elements and the attempts to demonstrate them until the appearance non-Euclidean's geometric models and it's influence in physics, specifically in relativity theory. In this context, we study how ideas have changed the non-Euclidean concept of space and geometry influencing the relativistic theories arise. The non-Euclidean geometric concepts are strongly linked to the Theory of Relativity. Literature show us how was the historical development of Non-Euclidean geometries and also that concepts such as curved spaces of the Theory of Relativity are possible only considering the Non-Euclidean space. Also an analysis of the possibilities of trying to add to the basic curriculum is made.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry; Physics; Relativity; Spaces; Interdisciplinarity.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.0 – Representação de Ibn Qurra.....	26
Figura 2.1 – Representação de Ibn Qurra.....	26
Figura 2.2 – Construção de Ibn Qurra para demonstrar o 5° postulado.....	27
Figura 2.3 – Quadrilátero de Saccheri.....	29
Figura 2.4 – Hipótese do ângulo agudo de Saccheri.....	31
Figura 2.5 – Quadrilátero de Lambert .....	31
Figura 3.0 – Retas paralelas segundo Bolyai.....	38
Figura 3.1 – Retas paralelas no postulado de Lobachevsky.....	40
Figura 3.2 – Hipótese de Lobachevsky.....	41
Figura 3.3 – Representação da horoesfera.....	43
Figura 3.4 – Pseudoesfera.....	47
Figura 3.5 – Modelo de Klein.....	48
Figura 3.6 – Ângulo de paralelismo no modelo de Klein .....	49
Figura 3.7 – Modelo do Disco de Poincaré.....	51
Figura 3.8 – Modelo do Semi-plano de Poincaré.....	52
Figura 3.9 – Modelo de Representação da Geometria Elíptica.....	55
Figura 3.10 – Intersecção de geodésicas.....	56
Figura 3.11 – Região fechada determinada por duas geodésicas.....	57
Figura 3.12 – Alinhamento de três pontos na eometria elíptica.....	58
Figura 3.13 – Ângulo esférico.....	58
Figura 3.14 – Triângulo esférico.....	59
Figura 3.15 – Curvatura de uma circunferência.....	62
Figura 3.16 – Cículo osculante.....	63
Figura 3.17 – Curvatura dertermina a geometria.....	66
Figura 4.0 – Interferômetro de Michelson-Morley .....	74
Figura 4.1 – Diagrama de espaço-tempo de Minkowski.....	81
Figura 4.2 – Desigualdade triangular na Relatividade Restrita.....	82
Figura 4.3 – Desvio de um raio de luz pelo Sol.....	85



## SUMÁRIO

	<b><u>Pág.</u></b>
1 INTRODUÇÃO.....	19
2 GOMETRIA EUCLIDIANA .....	23
2.1 O quinto postulado .....	24
2.1.1 O trabalho dos árabes .....	24
2.1.2 O Quadrilátero de Saccheri.....	28
2.1.3 O Quadrilátero de Lambert.....	31
3 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS.....	35
3.1 Geometria Hiperbólica.....	36
3.1.1 O postulado de Lobachevsky .....	39
3.1.3 Modelos de representação da Geometria Hiperbólica .....	45
3.2 Geometria Elíptica.....	53
3.2.1 Postulados de Riemann e o modelo esférica .....	54
3.2.2 Alguns Resultados das investigações de Riemann.....	59
3.2.3 A ideia de curvatura.....	61
4 A GEOMETRIA DA RELATIVIDADE.....	67
4.1 O conceito de espaço na Física .....	67
4.2 Física pré-relatividade .....	71
4.3 Relatividade Restrita .....	75
4.3.1 Transformações de Lorentz.....	75
4.3.2 Contração do espaço – O trem não-euclidiano .....	76
4.4 Geometria de Minkowski .....	79
4.5 Relatividade Geral.....	82
4.5.1 Princípio da Equivalência .....	83
4.5.2 Desvio da luz pelo campo gravitacional .....	83
5 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA .....	87
5.1 O currículo de Matemática .....	88
5.2 O currículo de Física .....	90
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	93
REFERÊNCIAS.....	97



## 1 INTRODUÇÃO

Por vários séculos os conceitos da geometria euclidiana foram considerados os que melhor representavam a realidade física. Por volta da metade do século XIX, tomaram força ideias contrárias a isso, e surgiram vários questionamentos sobre a validade universal da geometria euclidiana, principalmente com relação ao quinto postulado de Euclides. A descoberta das Geometrias não-Euclidianas gerou uma grande revolução na matemática.

Embora não se tivesse dúvidas da validade da geometria euclidiana, e que esta correspondia à realidade, havia certa insatisfação com seus fundamentos por causa do caráter não intuitivo do postulado das paralelas. Desde a antiguidade, diversos autores tentaram substituir o postulado das paralelas por outro mais intuitivo, ou demonstrá-lo a partir dos demais postulados de Euclides com a finalidade de tornar a geometria mais bem fundamentada.

Nesse intento, como veremos, surgiram as geometrias não-euclidianas que funcionavam tão bem quanto a própria geometria de Euclides.

Com essa descoberta foi possível introduzir novos objetos matemáticos para representar o mundo físico. Paraná (2008) afirma:

Muitos dos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas *geometrias não-euclidianas*. Um exemplo são os estudos que resultaram na *Teoria da Relatividade*, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma geometria não-euclidiana, de modo que conceitos, como a luz se propaga ao longo de geodésicas e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche, foram fundamentais (PARANÁ, 2008, p. 56).

O surgimento das geometrias não-euclidianas teve forte repercussão na física, basicamente por dois motivos. Primeiro, porque até o início do século XIX muitos autores acreditavam que a física de Newton era uma teoria verdadeira *a priori* – do mesmo modo que a geometria – e que seus princípios básicos podiam ser provados a partir de postulados ou axiomas intuitivos. Essa visão foi desfeita, juntamente com a concepção análoga a respeito da geometria. Segundo, a existência de diferentes

geometrias tinha uma consequência imediata na física, pois muitas teorias físicas utilizam a geometria (junto com pressupostos físicos) em sua formulação.

Mesmo se os princípios básicos da física (incluindo a mecânica) fossem mantidos, a existência de diferentes geometrias abriria a possibilidade de teorias físicas alternativas, que levassem às novas consequências, pelo uso dessas geometrias alternativas (SILVA, 2006).

Os conceitos da Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879 – 1955) estão fortemente ligados aos conceitos das geometrias não-euclidianas. O desenvolvimento da nova física de Einstein só foi possível com uma mudança radical de paradigma da concepção de espaço, o qual por sua vez só foi possível devido ao surgimento das geometrias não-euclidianas.

Nesse sentido, partimos da questão se seria possível apresentar os dois tópicos numa abordagem que leva em consideração a educação básica. Por isso, nesta pesquisa, enfocamos o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e investigamos a questão do espaço e geometria da teoria da relatividade. Neste trabalho consideramos, ainda, a importância da história da ciência e do desenvolvimento histórico da matemática, uma vez que o conhecimento científico não se dá de maneira isolada, neutra, é sempre parte de um processo mais amplo e dinâmico.

Para dar conta do objetivo delineado, desenvolvemos este trabalho, dividindo-o da seguinte forma:

- Capítulo 2: *Geometria euclidiana*, em que apresentamos a geometria de Euclides, seus postulados e o problema do *quinto postulado*, bem como as diversas intenções de demonstrá-lo como teorema, o que resultou no surgimento das geometrias não-euclidianas;
- Capítulo 3: *Geometrias não-euclidianas*, em que apresentamos as geometrias não-euclidianas, propriamente ditas. Neste capítulo figuram os trabalhos de Bolyai, Gauss, Lobachevsky e Riemann na criação das geometrias não-

euclidianas clássicas: hiperbólica e elíptica. É o capítulo em que procuramos apresentar os detalhes que serviriam de base para os fundamentos da Teoria da Relatividade;

- Capítulo 4: *Geometria da Relatividade*, em que apresentamos as ideias básicas dessa teoria com outro enfoque. Discutimos a evolução da ideia de espaço físico e mostramos que os conceitos geométricos não-euclidianos estão intrinsecamente ligados à Teoria da Relatividade;
  - Capítulo 5: *Geometrias não-euclidianas na educação básica*, em que apresentamos possibilidades de inclusão dessa disciplina na educação básica, da mesma forma que discutimos a possibilidade de apresentar tópicos relacionados à Teoria da Relatividade, com uma breve discussão sobre currículo;
- a) Capítulo 6: Considerações finais a partir do levantamento bibliográfico e das análises feitas.



## 2 GEOMETRIA EUCLIDIANA

Durante mais de dois mil anos a geometria Euclidiana era a que melhor representava nosso mundo. A obra *Elementos*, de Euclides, é tida como uma das mais importantes já escritas. Nela, Euclides sintetiza todo conhecimento matemático da época e, além disso, fornece um modelo para o desenvolvimento rigoroso das ideias matemáticas que é utilizado até os dias de hoje.

*Elementos* é composto por treze livros (capítulos). O livro I se inicia com 23 definições, cinco noções comuns e cinco postulados. As definições dão nomes aos objetos e conceitos básicos que Euclides vai estudar. As noções comuns são regras comumente aceitas sobre raciocínio e relações que ele explicita. Os postulados, ou axiomas, são afirmações sobre os objetos em estudo que são consideradas verdadeiras sem demonstração. As definições, noções comuns e postulados são tomados como ponto de partida a partir dos quais outras afirmações, chamadas de *proposições*, são demonstradas segundo rígidas regras lógicas. Uma proposição significativa é chamada de *teorema*, uma proposição cujo principal objetivo seja demonstrar um teorema é chamada de *lema*, e uma proposição que resulta facilmente de um teorema é chamada de corolário.

O livro I de *Os Elementos* contém 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns. Para ilustrar, colocamos a seguir algumas definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesmo.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão posta sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.

10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.

23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Os cinco postulados do livro I:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(EUCLIDES, 2009, p. 97-98).

## 2.1. O quinto postulado

Desde o início, o quinto postulado dos *Elementos* de Euclides gerou problemas.

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

É possível que o próprio Euclides tenha tentado adiar a inclusão do mesmo. Os quatro primeiros são declarados de forma sucinta, em menos de uma linha. Mas não é o que ocorre com o quinto postulado. Euclides só o utilizou pela primeira vez na demonstração da Proposição 29<sup>1</sup> do livro I (SAMUCO, 2005). Esse fato pode sugerir que Euclides talvez não tenha ficado satisfeito com a forma do quinto postulado.

---

<sup>1</sup> Proposição 29, I: A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.

Durante vários séculos, muitos matemáticos se perturbaram com o quinto postulado. A formulação desse postulado requer uma sentença lógica muito mais complexa que os demais, semelhante à de alguns teoremas demonstrados por Euclides. Caso fosse possível eliminar esse postulado um sistema muito mais simples resultaria. O objetivo dos gregos ao organizar a geometria em rigorosa forma dedutiva era demonstrar teoremas. E, nesse sentido, dispor de postulados óbvios e verdadeiros implica credibilidade dos teoremas, visto que associamos a credibilidade dos teoremas à credibilidade dos postulados. O quinto postulado, diferente dos demais, não apresenta essa característica de ser obviamente verdadeiro.

Muito pensadores tentaram afastar o quinto postulado do sistema lógico. A idéia era buscar demonstrar que o quinto postulado não era independente dos demais. Quem estudou Euclides, gregos, árabes, por exemplo, procuraram por diversas vezes demonstrar que o quinto postulado era um teorema do sistema, dedutível dos quatro primeiros postulados.

O resultado disso foi o surgimento de vários princípios geométricos capazes de substituir o quinto postulado, que associados aos outros postulados permitem demonstrar os teoremas de Euclides. Um princípio conhecido como axioma de Playfair<sup>2</sup> pode substituir o quinto postulado de Euclides. No entanto, nenhum dos princípios surgiu como alternativa mais simples que o postulado original.

### **2.1.1. O trabalho dos árabes**

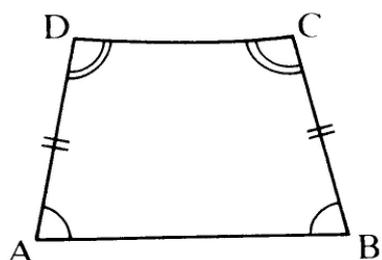
Durante a Idade Média, nos séculos IX e X, o quinto postulado foi mais estudado pelos árabes do que na Europa, mediante a tradução dos livros de Euclides entre os árabes. Entre eles, destacam-se os trabalhos de Thabit ibn Qurra, Omar Khayyam e Nasir Eddin al-Tusi (SILVA, 2006).

Conforme vemos em Silva (2006), encontramos uma boa referência da descrição dos trabalhos do primeiro e do último autor.

---

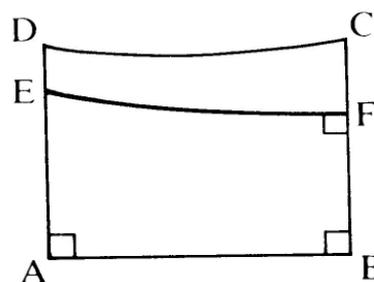
<sup>2</sup> Em 1795, John Playfair propôs o seguinte axioma: dada uma linha e um ponto fora dela, uma e somente uma paralela à linha dada passa por esse ponto. O axioma de Playfair é interpretado como uma nova forma do quinto postulado que, nesse formato passou a ser chamado de axioma XI (SILVA, 2006).

Thabit Ibn Qurra (836-910), no seu segundo tratado sobre a geometria de Euclides, estabeleceu inicialmente que um segmento de linha poderia se mover sem ter seu comprimento alterado, pois considerava que a ausência de deformação das figuras geométricas quando há movimento, não era óbvia (GRAY, 1989 *apud* SILVA, 2006 p.7). Na demonstração da proposição 4<sup>3</sup>, Euclides considera que um dos triângulos pode ser movido e colocado sobre o segundo para fazer sua análise. Ibn Qurra introduz uma figura que será muito utilizada nas tentativas de demonstrar o quinto postulado: um quadrilátero com dois lados iguais e opostos fazendo o mesmo ângulo com a base, como na figura 2.0, onde os lados  $DA$  e  $CB$  são iguais, e os ângulos  $D\hat{A}B$  e  $C\hat{B}A$  são iguais.



**FIGURA 2.0:** Ibn Qurra considera um quadrilátero com ângulos iguais na base e lados  $AD$  e  $BC$  iguais.

**Fonte:** Silva (2006).

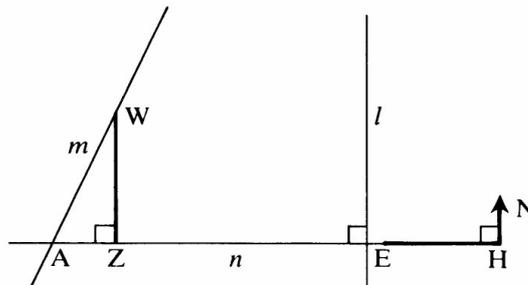


**FIGURA 2.1:** Os ângulos da base são retos e  $EF$  é igual a  $AB$ .

**Fonte:** Silva (2006).

Segundo a hipótese de Qurra, em um quadrilátero no qual os ângulos da base são ângulos retos, como na figura 2.1, e considerando  $EF$  igual a  $AB$ , pois essa linha seria o deslocamento da base e portanto manteria o comprimento, então o quarto ângulo,  $A\hat{E}F$ , também seria reto. Baseado nessa hipótese, Ibn Qurra tentou provar o quinto postulado usando a figura 2.2.

<sup>3</sup> Proposição 4: Caso dois triângulos tenham dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais (EUCLIDES, 2009).



**Figura 2.2:** Construção de Ibn Qurra para tentar demonstrar o quinto postulado.

**Fonte:** Silva (2006).

Na figura 2.2, as linhas  $l$  e  $m$  cortam uma terceira linha  $n$ , sendo que  $l$  e  $n$  são perpendiculares (por hipótese). Assim, ele tomou um ponto  $W$  sobre  $m$  e traçou a perpendicular  $WZ$  até  $n$ . Se  $AZ$  é menor que  $AE$ , então algum múltiplo dele,  $AH$  excede  $AE$ , e pode formar o triângulo retângulo  $AHN$ , onde  $N$  está sobre  $m$ . Pela hipótese do quadrilátero,  $NH$  não encontra  $l$ , pois se encontrasse, não formaria o quadrilátero que ele introduziu inicialmente (figura 2.0). Dessa forma,  $l$  deve encontrar  $m$  e o quinto postulado está provado, ou seja, as linhas  $l$  e  $m$  se encontram do lado em que a soma dos ângulos (os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{E}$ ) somam menos que dois retos.

Em sua demonstração, Ibn Qurra assumiu uma das proposições, a proposição 29 do livro I, que utilizava o quinto postulado, o que invalidou sua demonstração (GRAY *apud* SILVA, 2006, p.8).

O trabalho de outro árabe teve destaque na tentativa de demonstração do quinto postulado. Nasir Eddin AL-Tusi (1201 – 1274) também utilizou o quadrilátero com pelo menos dois ângulos retos e um raciocínio semelhante ao de Ibn Qurra para fazer sua demonstração. Porém falhou ao supor que linhas que pareciam convergir

de um lado efetivamente iriam se encontrar (SILVA, 2006, p.9). Essa demonstração foi a que causou maior interesse na Europa.

Outro matemático árabe, Omar Khayyam (1048-1131), foi um dos que introduziram uma nova abordagem nas tentativas de demonstração do quinto postulado, utilizando o método de redução ao absurdo. Khayyam considerou um quadrilátero ABCD, porém com os ângulos da base A e B retos e os dois lados (AD e BC) adjacentes à base iguais. “Mostrou” então que os ângulos C e D eram iguais e necessariamente retos, visto que as hipóteses “C e D agudos” e C e D obtusos levavam a contradição. Isto permitiu a Omar Khayyam deduzir a proposição 29 do livro I (dos *Elementos*) e daí o quinto postulado. No entanto, na sua demonstração utilizou a afirmação segundo a qual duas perpendiculares à mesma reta são paralelas, o que é equivalente ao quinto postulado que pretendia provar (SAMUCO, 2005).

### 2.1.2 O quadrilátero de Saccheri

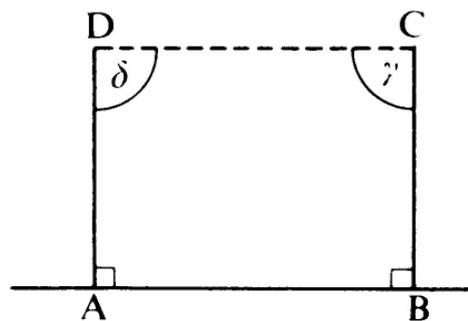
Das diversas tentativas de demonstração do quinto postulado, a que mais se aproximou de uma solução foi a de Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733). Saccheri foi um padre jesuíta e professor de matemática da Universidade de Pavia. Sua obra mais conhecida é *Euclides livre de Todos os Erros* de 1733, em que praticamente descobriu a primeira Geometria Não-euclidiana, ainda que o mesmo não tenha observado que, com seus resultados, poderia ser construída uma nova geometria sem contradição.

Uma maneira de resolver o problema do quinto postulado seria empregar o raciocínio de demonstração por absurdo (*reductio ad absurdum*), assim como fez Omar Khayyam. Saccheri, assim como Lambert (1728-1777), utilizou esse método. Desse modo, sua ideia foi admitir por hipótese que o quinto postulado era independente dos demais e mostrar que essa hipótese conduz a uma contradição devendo, portanto, ser falsa. Sacchieri admitiu de início que os quatro primeiros postulados de Euclides eram verdadeiros; admitiu, ainda, a hipótese de que qualquer segmento possa ser prolongado indefinidamente, para torná-lo tão extenso

quanto fosse desejável. Admitiu a seguir, para efeito de discussão, que o quinto postulado era falso.

Ele considera, então, um quadrilátero  $ABCD$  com dois ângulos retos em  $A$  e  $B$ , e dois lados iguais  $AD$  e  $BC$  (figura 2.3), provando o seguinte lema:

Se um quadrilátero  $ABCD$  tem os ângulos consecutivos  $A$  e  $B$  retos, e os lados  $AD$  e  $BC$  iguais, então o ângulo  $C$  é igual ao ângulo  $D$ ; mas se os lados  $AD$  e  $BC$  são desiguais, dos dois ângulos  $C$  e  $D$  é maior o que é adjacente ao menor lado, e vice-versa. (BONOLA, 1955 *apud* SILVA, 2006).



**Figura 2.3:** Quadrilátero de Saccheri, com ângulos retos em  $A$  e  $B$  e lados  $AD$  e  $BC$  iguais.

**Fonte:** Silva (2006)

Conforme a hipótese de Euclides, os outros dois ângulos,  $C$  e  $D$ , também serão retos, e para provar essa igualdade é necessário usar o quinto postulado. Assumindo como hipótese inicial que ambos são obtusos ou agudos, o quinto postulado estará sendo negado. Saccheri chamou esses ângulos de ângulos de topo (BARKER, 1969), e dessa forma permitem lançar três hipóteses:

- 1 – hipótese do ângulo reto ( $\angle C = \angle D = \text{ângulo reto}$ ), então  $AB = CD$
- 2 – hipótese do ângulo obtuso ( $\angle C = \angle D > \text{ângulo reto}$ ), então  $AB > CD$
- 3 – hipótese do ângulo agudo ( $\angle C = \angle D < \text{ângulo reto}$ ), então  $AB < CD$

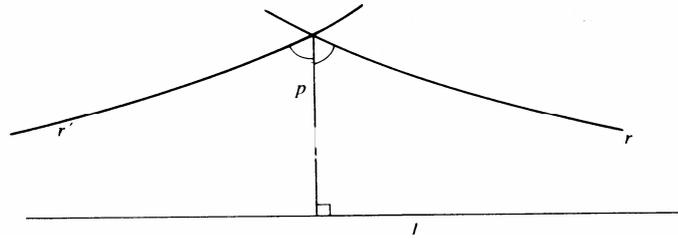
Em qualquer retângulo que tenha aquela forma. Admitindo que o espaço seja uniforme, apenas uma dessas hipóteses deve ser verdadeira. Partindo de suas premissas, Saccheri pode revelar que o quinto postulado de Euclides deve ser verdadeiro, caso verdadeiro a hipótese 1). Mas como admitiu a falsidades do quinto postulado (para chegar à contradição), deixou de lado a hipótese 1). Da mesma forma abandonou a hipótese 2), dado as premissas que admitiu. Restou, então, a hipótese 3). Sacchieri tentou mostrar que essa hipótese era incompatível com seus pressupostos, onde achou que podia abandoná-la devido a algumas estranhas consequências que apareciam. Uma vez que Saccheri tivesse obtido sucesso em demonstrar que a hipótese 3) era logicamente incompatível com seus pressupostos estaria completa a demonstração: teria chegado à contradição que o método *reductio ad absurdum* procurara. Mas isso não ocorreu. No entanto, ainda que não tenha percebido, conseguiu um resultado muito importante. Tentando demonstrar o absurdo da hipótese 3), Saccheri pode deduzir logicamente fatos paralelos aos teoremas de Euclides, mas diferentes deles. Nascia um tipo completamente novo de Geometria.

Saccheri usou o seguinte raciocínio com relação à hipótese 3 (hipótese do ângulo agudo):

Dada uma linha  $l$  e um ponto  $P$  fora de  $l$  (Figura 2.4), as linhas que passam por  $P$  estão divididas em três famílias:

- a) uma família infinita de linhas que se encontram com  $l$ ;
- b) uma família infinita de linhas que nunca se encontram com  $l$ ;
- c) duas linhas que são assintóticas a  $l$  e que separam as duas primeiras famílias.

Para nosso ponto de vista euclidiano, essas condições podem parecer absurdas. Mas elas são impossíveis de se negar logicamente. Com relação a isso, Saccheri argumenta que seria “contrário à natureza da linha reta...” (SACCHERI *apud* SILVA, 2006).



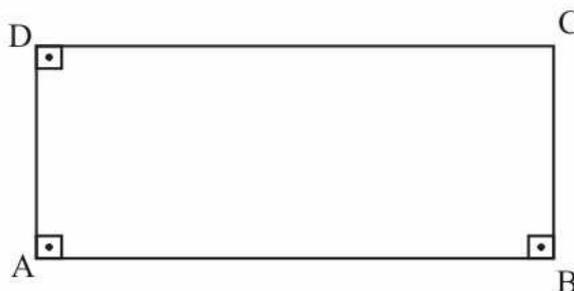
**Figura 2.4:** Se fosse válida a hipótese do ângulo agudo, partindo de  $P$  seria possível traçar uma infinidade de linhas que nunca se encontram com  $l$  e uma infinidade de linhas que sempre se encontram com  $l$ .

**Fonte:** Silva (2006).

### 2.1.3 O quadrilátero de Lambert

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), colega de Euler e Lagrange na Academia das Ciências em Berlim, foi o primeiro a publicar a demonstração de que  $\pi$  é irracional. Fez importantes trabalhos sobre a teoria das paralelas, tendo escrito um livro com esse título, onde deduziu muitas propriedades da Geometria Não-euclidiana, embora não aceitasse claramente sua existência (SAMUCO, 2005).

Da mesma forma que Saccheri, Lambert tentou provar o quinto postulado por meio de um argumento indireto. Ele considerou um quadrilátero com três ângulos retos, agora chamado de quadrilátero de Lambert (COUTINHO, 2001).



**Figura 2.5:** Quadrilátero de Lambert.

**Fonte:** Coutinho (2001).

Lambert, então, supôs três hipóteses para o quarto ângulo:

1. Hipótese do ângulo reto, o que equivale ao quinto postulado de Euclides;
2. Hipótese do ângulo obtuso e;
3. Hipótese do ângulo agudo.

A primeira hipótese conduz à geometria euclidiana. Da mesma forma que Saccheri, Lambert rejeitou a hipótese do ângulo obtuso. Fez isso mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares à mesma reta intersectam-se. Isso na verdade não resulta nenhuma contradição. Se a hipótese do ângulo obtuso fosse válida, então as propriedades das figuras seriam como se traçadas sobre uma esfera, ou seja, curvadas. As linhas retas seriam como círculos máximos. No entanto, como os círculos máximos se encontram em mais de um ponto, não possuem as propriedades das linhas retas, e isso permite refutar a hipótese do ângulo obtuso (ROSENFELD *apud* SILVA, 2006, p.11). Todavia, também não chegou à contradição ao tentar demonstrar a hipótese do ângulo agudo. Assim, Lambert obtém que sendo válidas as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo, o defeito<sup>4</sup> na soma dos ângulos de um triângulo seria proporcional à área deste triângulo.

Essa diferença é conhecida como ***diferença do triângulo***, e tem um papel muito importante na Geometria Hiperbólica e seu valor é igual a zero na Geometria Euclidiana, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

No caso do quadrilátero com o terceiro ângulo agudo (terceira hipótese), Lambert conclui que quanto mais agudo fosse o ângulo, maior seria o quadrilátero. Essa análise levou Lambert a descobrir que a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser inferior a dois ângulos retos.

Para a hipótese do ângulo agudo, Lambert conclui que, se comparada à hipótese do ângulo obtuso, poderia ocorrer o caso de uma “esfera imaginária”. Sobre esse fato

---

<sup>4</sup> Defeito de um ângulo corresponde ao excesso sobre  $180^\circ$  ou a falta sobre  $180^\circ$  na soma de seus ângulos na trigonometria esférica. É a *diferença do triângulo* visto anteriormente.

Lambert teria dito “Estou quase inclinado a concluir que a terceira hipótese surge com uma superfície esférica imaginária”. (LAMBERT *apud* SAMUCO, 2005, p.20).

Assim, Lambert observa que a hipótese do ângulo obtuso vale para triângulos esféricos e que a hipótese do ângulo agudo vale na superfície de uma esfera de raio imaginário. Essas observações serão comprovadas posteriormente por Riemann e Lobachevsky.



### 3 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Vimos no capítulo anterior que, com a negação do quinto postulado, era possível considerar novos objetos matemáticos que permitiram o surgimento de novas geometrias. Foram os matemáticos Janos (ou mesmo Johann) BOLYAI (1802 – 1860), Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1792 – 1856), Carl Friedrich GAUSS (1777 – 1855) e Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826 – 1866) que plantaram as bases para essas novas geometrias, que agora chamamos de geometrias não-euclidianas, termo cunhado por Gauss, e que são, do ponto de vista lógico, tão boas e consistentes como a própria geometria de Euclides.

Gauss foi o maior matemático de sua época e contribuiu muito para o desenvolvimento das Geometrias Não-euclidianas, como podemos ver recorrendo a Barbosa (2009, *apud* SILVA, 2011, p. 13):

Nos anos críticos que antecederam a descoberta da nova geometria, a figura dominante do mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que deu uma grande contribuição no desenvolvimento de ideias que levaram à sua descoberta. Poucos dos seus resultados, fruto de muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado, foram tornados públicos durante sua vida. Algumas cartas a outros interessados naqueles problemas, críticas de tratados sobre paralelas, e notas inéditas descobertas entre seus trabalhos, são toda a evidência disponível de que foi ele o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma Geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides (BARBOSA, 2009 *apud* SILVA, 2011, p. 13).

Por volta da década de 1820, ou talvez antes, Gauss parece ter-se convencido de que é possível haver geometrias em que o quinto postulado deixa de ser válido. Nesse período, teria escrito ao amigo Taurinus:

A premissa de que a soma dos três ângulos de um triângulo seja menor que  $180^\circ$  conduz a uma curiosa geometria, muito diferente da nossa (da geometria euclidiana), mas totalmente coerente que desenvolvi para minha completa satisfação, de forma que sou capaz de resolver nela qualquer problema, com exceção da determinação de uma constante, que não pode ser fixada a *priori*... os três ângulos de um triângulo podem ser tão pequenos quanto se queira, desde que os lados sejam suficientemente grandes, ainda assim a área do triângulo não pode superar, nem mesmo atingir, certo limite,

independente de quando os lados sejam grandes (O'Shea, 2009, p.93).

Segundo Silva (2006), Gauss escreve uma carta<sup>5</sup> a Wolfgang Bolyai onde relata que “*pensava no assunto há 40 anos*”. No entanto, o fato de apenas alguns de seus resultados terem sido conhecidos durante sua vida pode ser compreensível. Isso porque, em seu tempo, a Inquisição ainda exercia grande pressão sobre aqueles que dominavam algum tipo de conhecimento e esses deveriam agir com prudência. Gauss era cuidadoso nas coisas que escrevia, e temia opor-se publicamente às teorias de Immanuel Kant (1724 – 1804), cuja filosofia havia sido adotada pela igreja católica e considerada como dogma. Kant acreditava que a intuição deveria ser adotada, em detrimento do rigor das demonstrações matemáticas. Em sua obra, *Crítica da Razão Pura*, de 1787, Kant se refere ao espaço euclidiano como sendo de uma “necessidade inevitável de pensamento”. Para Kant, a geometria de Euclides era a única possível.

### **3.1. Geometria Hiperbólica**

É interessante o fato de algumas vezes na história da ciência uma nova ideia ocorrer em várias pessoas mais ou menos simultaneamente. Isso ocorreu no século XVII com a descoberta do cálculo por Newton na Inglaterra e por Leibniz na Alemanha, e também no século XIX com a descoberta da primeira Geometria Não-euclidiana.

Conforme Coutinho (2001), a Geometria Hiperbólica foi desenvolvida, independentemente, por dois matemáticos contemporâneos: o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky e, simultaneamente, o matemático húngaro Janos Bolyai.

Em 1820 Janos Bolyai informou o seu pai, o também matemático e amigo de Gauss, Wolfgang (ou Farkas) Bolyai (1775 - 1856) que estava interessado na teoria das

---

<sup>5</sup> Refere-se à carta que Gauss escreve comentando o artigo de Janos Bolyai, filho de Wolfgang Bolyai, *Teoria absoluta do espaço*, escrito em 1829, que veremos a diante.

paralelas, ao qual o teria aconselhado a desistir da ideia<sup>6</sup>. No entanto Janos não seguiu o conselho do pai.

Em 1823 Janos Bolyai em carta ao seu pai Wolfgang Bolyai escreveu:

Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, tão logo tenha organizado o material e as minhas circunstâncias o permitam. Não completei o meu trabalho, mas o caminho que segui torna quase certo que o objetivo será alcançado, se isso for de todo possível; o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas, e seria motivo de lamento se as perdesse. Quando as vires, querido pai, também perceberás... do nada criei um universo (SAMUCO, 2005).

O trabalho de Janos Bolyai é entregue ao seu pai em 1829, que o publicou como um apêndice em seu livro. Após vários atrasos na publicação, o primeiro volume de *Os Ensaios sobre Elementos de Matemática para Jovens Estudiosos*, livro de Wolfgang Bolyai, foi finalmente publicado em 1832, contendo o famoso Apêndice de Janos Bolyai com o título “A ciência do espaço absoluto com uma demonstração da independência da verdade ou falsidade do axioma XI de Euclides (que não pode ser decidido a priori) e também a quadratura do círculo no caso da sua falsidade (SAMUCO, 2005).

Segundo Silva (2006, p. 15), Janos pretendia seguir o mesmo caminho que Saccheri e Lambert, mas, ciente dos erros de seu pai, acabou optando pelo método dos gregos, sem decidir, a priori, sobre a validade ou não do quinto postulado<sup>7</sup>. Tanto Janos como Lobachevsky começaram suas teorias a partir da ideia de que mais de uma paralela a uma dada linha reta poderia passar pelo mesmo ponto (o que contraria uma das consequências do quinto postulado de Euclides).

No trabalho de 1832, Janos fornece uma nova definição para paralela, que depende do chamado ângulo de paralelismo:

Se o raio AM não é cortado pelo raio BN, situado no mesmo plano, mas é cortado por qualquer outro raio BP compreendido no ângulo

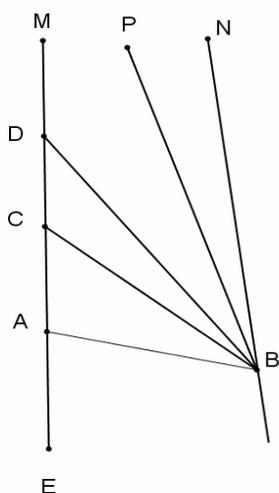
---

<sup>6</sup> Palavras de Wolfgang Bolyai ao seu filho: “Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo o seu tempo, e priva-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida!”.

<sup>7</sup> Ou seja, não considerou o quinto postulado parte do sistema de axiomas.

ABN, chamaremos o raio BN *paralelo* ao raio AM; Isto é designado por  $BN \parallel AM$ . (BOLYAI, 1832, *apud* SILVA, 2006, p.16).

Podemos observar que a definição de paralelas usada por Janos Bolyai não implica equidistância entre os raios paralelos, o que nos leva a imaginar o raio BN como sendo assintótico a AM, sem deixar de ser paralelo. Um esquema é mostrado na figura 3.0.



**Figura 3.0:** O raio BN é paralelo ao raio AM, segundo a definição de Bolyai.

**Fonte:** Adaptado de Silva (2006).

Com base em seus resultados referentes às paralelas, assim definido, Bolyai provou uma série de teoremas para a Geometria Hiperbólica, todos independentes do quinto postulado. Um deles é o que segue referente aos lados do triângulo: “*Em qualquer triângulo esférico, os senos dos lados são como os senos dos ângulos opostos*” (BOLYAI, 1932, *apud* SILVA, 2006, p.16).

Na construção da *Teoria Absoluta do Espaço*, Bolyai define *paralelas* e suas propriedade independentemente do quinto postulado, e deduz uma geometria independente do quinto postulado, onde aparece um parâmetro  $i$ , que ele chama de unidade absoluta de comprimento. Dessa forma, quando  $i$  tende a infinito, a geometria se aproxima da euclidiana.

Como dissemos anteriormente, nesse mesmo período Lobachevsky desenvolveu seu trabalho independentemente de Bolyai. Lobachevsky, que estudou na Universidade de Kazan e onde foi professor de 1827 a 1846, apresentou seus trabalhos sobre geometria não-euclidiana na revista de Kazan em 1829 e 1830.

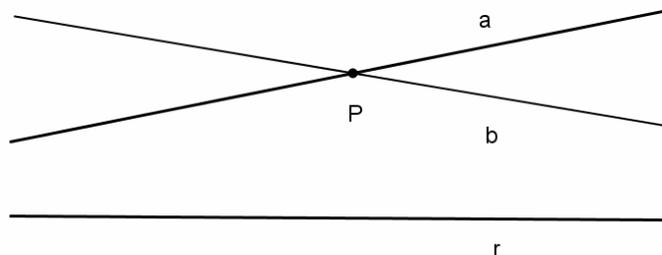
Lobachevsky fez a primeira apresentação pública de seus trabalhos numa conferência ao Departamento de Física-Matemática da Universidade de Kazan, onde se negava o quinto postulado. Então submeteu um artigo pela Academia de Ciências de São Petersburgo que inicialmente foi rejeitado.

Diferente de Bolyai, que embora tivesse plenas convicções de suas ideias, Lobachevsky aprofundou seus estudos procurando, de imediato, aplicações para sua nova geometria culminando em sua obra *Pangeometria* (1855). É interessante observar que este último livro foi ditado, pois ele se encontrava cego, e publicado em francês. Isso mostra a força de sua mente e a confiança que tinha em seu trabalho. E também o fato dessa publicação ter sido em francês, pode ter contribuído para uma maior divulgação da Geometria Hiperbólica como sendo devida a Lobachevsky.

Foram os trabalhos das mentes criativas Lobachevsky, Gauss e J. Bolyai que desenvolveram a geometria não-euclidiana. No entanto, Lobachevsky foi o primeiro a divulgar suas descobertas não temendo o impacto de seu trabalho. Mesmo assim o reconhecimento de seu trabalho só se deu após a sua morte. Em 1871, o matemático alemão Felix Klein (1849 - 1925) deu o nome de Geometria Hiperbólica à nova geometria desenvolvida por esses três matemáticos.

### **3.1.1. O Postulado de Lobachevsky**

A Geometria Hiperbólica admite todos os postulados da geometria euclidiana, exceto o quinto. A publicação de 1829, de Lobachevsky, continha os princípios básicos da nova geometria (chamada de *Geometria Imaginária* ou *Pangeometria*), em que postula “*Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$  passa mais de uma reta paralela à reta  $r$* ” (COUTINHO, 2001).



**Figura 3.1:** Modelo de retas paralelas na Geometria Hiperbólicas. Entre as retas **a** e **b** passam infinitas retas, que não interceptam **r**. Essas retas são chamadas de retas não-secantes.

**Fonte:** Coutinho (2001).

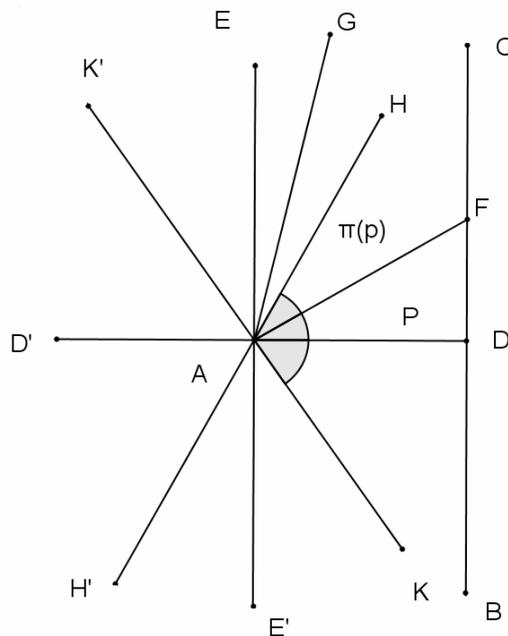
Conforme Silva (2006), Lobachevsky baseia-se em definições diferentes da geometria euclidiana e atribui propriedades diferentes para linhas retas:

1. Uma linha reta ajusta-se sobre si mesma em todas as posições. Com isto quero dizer que durante a rotação de uma superfície que contém, a linha reta não muda seu lugar se ela passa por dois pontos fixos na superfície (com isso quero dizer que se giramos a superfície contendo a reta por dois pontos da linha, a linha não se move).
2. Duas linhas retas não podem se interceptar em dois pontos.
3. Se uma reta está num plano limitado por uma fronteira, então essa reta quando for suficientemente prolongada para os dois lados, deve ultrapassar a fronteira e assim dividir o plano em duas partes.
4. Duas linhas retas perpendiculares a uma terceira se cortam, não importa o quanto são prolongadas.

A seguir Lobachevsky apresenta um grupo de quinze teoremas geométricos independentes do postulado das paralelas. Esses teoremas servem de base para

compreensão das suas ideias relativas à nova geometria. Após, apresenta sua definição de retas paralelas.

**Definição 16<sup>8</sup>:** *Todas as linhas retas que em um plano partem de um mesmo ponto podem, com relação a uma linha reta no mesmo plano, ser divididas em duas classes: as secantes e não-secantes. As linhas de fronteira desta e daquela classe de linhas serão chamadas de paralelas à linha dada. (LOBACHEVSKY, 1840, apud SILVA, 2006, p.17).*



**Figura 3.2:** Na definição de paralela de Lobachevsky, AF é secante à linha DC, AG é não-secante à linha DC e AH é paralela à linha DC.

**Fonte:** adaptado de Samuco (2005).

Pelo ponto A (figura 3.2) traça-se a reta AD perpendicular a BC e a reta AE perpendicular a AD. No ângulo ADE todas as retas que passam pelo ponto A intersectam a reta DC, como por exemplo AF, ou algumas delas, como a perpendicular AE, não intersectam DC. Assuma a possibilidade de que pode ser

<sup>8</sup> Esta definição está aqui posta integralmente tal como aparece no trabalho de Lobachevsky. Assim, “Definição 16” refere-se à definição de nº. 16 do trabalho de Lobachevsky.

possível que haja outras retas que não intersectam DC, como, por exemplo, AG, por mais que sejam prolongadas. Entre as linhas secantes, como AF, e as linhas não secantes, como AG, existem linhas como AH, paralelas a DC, que são linhas fronteiriças, uma vez que de um lado de AH, todas as linhas intersectam DC, como AF; e do outro lado de AH, todas as linhas, todas as linhas não cortam DC, como AG. O ângulo HAD entre a paralela AH e a perpendicular AD é denominado por Lobachevsky de **ângulo de paralelismo**, e denotado por  $\Pi(p)$ , em que  $p$  é a distância AD.

Se  $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$ , prolongando AE, obtemos AE' que também será paralelo ao prolongamento da linha DC, ou seja, DB. Este caso corresponde à geometria euclidiana, que Lobachevsky chama de ordinária, em que a distância entre as paralelas é constante.

Se  $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ , do lado oposto de AD, fazendo o mesmo ângulo  $\text{DAK} = \Pi(p)$  encontra-se uma reta AK, paralela ao prolongamento DB da reta DC, deste modo sob esta hipótese devemos fazer uma distinção dos lados de paralelismo: o lado em que está AH e o lado em que está AK.

Desse modo, assim exposto, para a hipótese  $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$  as retas podem apenas intersectar BC ou serem paralelas a BC; mas se assumirmos que  $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ , então devemos admitir duas paralelas uma em cada lado de AD.

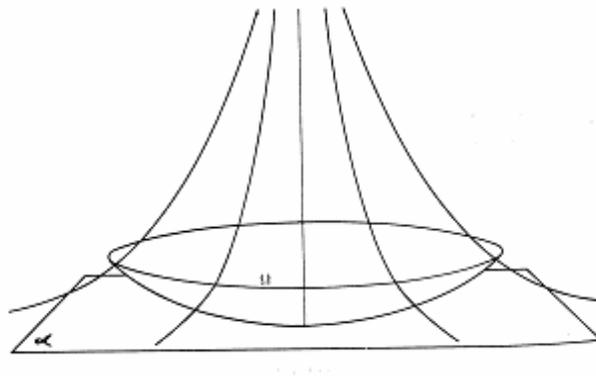
De posse dessa definição de paralelas, Lobachevsky estabeleceu novas proposições como, por exemplo, as que seguem (LOBACHEVSKY, 1840 *apud* SILVA, 2006, p.18):

18. Duas linhas são sempre mutuamente paralelas<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> Essa proposição pode ser entendida como: se duas linhas, AB e CD, prolongadas, satisfazem a definição de paralelas de Lobachevsky, então em qualquer ponto delas, elas serão paralelas.

19. Em um triângulo retilíneo a soma dos três ângulos não pode ser maior que dois ângulos retos.
22. Se duas perpendiculares à mesma reta são paralelas, então a soma dos ângulos de um triângulo retilíneo é igual a dois ângulos retos.
24. Quanto mais são prolongadas duas retas paralelas do lado do seu paralelismo, mais elas se aproximam uma da outra.
25. Se duas retas são paralelas a uma terceira reta, então as duas retas são paralelas entre si.
31. Chama-se horociclo<sup>10</sup> à curva do plano na qual todas as perpendiculares que passam pelo ponto médio de cordas são paralelas entre si.
34. Chamar-se-á horoesfera<sup>11</sup> à superfície que resulta da rotação de um horociclo em torno de um dos seus eixos, que juntamente com os outros eixos do horociclo será um eixo da horoesfera.



**Figura 3.3:**  $\Omega$  representa a horoesfera.  
**Fonte:** Retirado de Silva (2006).

<sup>10</sup> Também chamado de *Curva Limitante*, que, assim como a *Curva Equidistante* (ou hiperciclo) é definida a partir dos feixes de retas paralelas e das não-secantes da Geometria Hiperbólica (COUTINHO, 2001).

<sup>11</sup> Em seu último trabalho, *Pangeometria* (1855), Lobachevsky assumiu explicitamente que a horoesfera é uma esfera de raio infinito.

Na proposição 24, é interessante notarmos como se opõe ao fato de na Geometria Euclidiana a distância entre duas retas paralelas ser constante. Isso corrobora a ideia de que Lobachevsky estava apresentando uma geometria não-euclidiana.

Lobachevsky consegue encontrar, para o triângulo esférico, a relação entre o defeito na soma dos ângulos do triângulo e a área dele sobre a esfera.

Um das consequências dessa nova geometria, conforme já verificado por Gauss em carta a Taurinus, é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$ . Na Geometria Hiperbólica triângulos semelhantes não existem. Se dois triângulos têm os ângulos iguais, então eles são congruentes. Essas duas consequências estão relacionadas, pois a deficiência (diferença entre a soma dos ângulos internos e dois ângulos retos) do triângulo varia com o tamanho do triângulo. Ou seja, quanto maior o triângulo, maior a deficiência, e quando menor o triângulo, mais próximo da geometria euclidiana ele está.

Com a intenção de encontrar aplicação para sua *Pangeometria*, e tendo em vista que acreditava que isso seria possível com experimentos de larga escala, como medidas astronômicas, Lobachevsky aplicou a teoria da geometria imaginária para determinar a paralaxe de uma estrela e comparar este valor com o encontrado empiricamente. Isso mostra a determinação de Lobachevsky em tentar encontrar explicação do espaço físico utilizando a *Pangeometria*. No entanto, não obteve sucesso, pois em sua época os dados astronômicos não eram de grande precisão.

Outra diferença entre os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai foi o uso da *Pangeometria* para o cálculo de integrais definidas. Isso mostra, mais uma vez, que ele estava interessado na aplicação da geometria não-euclidiana e não apenas na sua axiomatização:

Do que foi visto pode-se deduzir duas expressões do valor da área de um polígono fechado, uma expressa por uma integral definida, a outra dependente somente da medida do ângulo de um polígono. Os dois valores calculados devem ser iguais. Deste modo obtém-se um novo método de encontrar o valor de muitas integrais definidas,

valores que seriam difíceis de solucionar de outro modo (LOBACHEVSKY, 1867 *apud* SILVA, 2006, p. 22).

É interessante notar, no entanto, como são tão similares as ideias de Lobachevsky e Janos Bolyai. Ambos abordam a geometria plana através da horoesfera no espaço, tendo ambos mostrado que a geometria na horoesfera, onde as retas são interpretadas como horociclos, é euclidiana (SAMUCO, 2005, p.45).

Além disso, as ideias dos dois coincidiram, mais uma vez, quando mostraram que a trigonometria esférica euclidiana é válida na geometria neutra<sup>12</sup>, tendo construído uma aplicação da esfera para o plano não-euclidiano para deduzir as fórmulas da trigonometria não-euclidiana. Bolyai descobriu a fórmula  $\text{tg} \frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{k}}$ , que relaciona o ângulo de paralelismo com a reta que lhe corresponde. Essa equação é a chave da Trigonometria não-Euclidiana, sendo um ponto de convergência com as ideias de Lobachevsky (SAMUCO, 2005, p. 45).

Lobachevsky desenvolveu a Geometria Imaginária dando grande contribuição analítica, enquanto que Janos Bolyai entrou mais profundamente na questão da dependência ou independência dos teoremas da geometria relativamente ao quinto postulado.

Dessa forma, Janos Bolyai e Lobachevsky mostraram que a Geometria não-Euclidiana era matematicamente possível e chegaram a esta conclusão da mesma maneira.

### 3.1.2. Modelos de representação da Geometria Hiperbólica

Se a Geometria euclidiana é consistente, assim também é a Geometria hiperbólica. Com o intuito de verificar a consistência da nova geometria, vários modelos foram desenvolvidos para visualizá-la e para poder expor seus objetos. Outro modo de estudarmos a geometria hiperbólica é através de modelos. Dentre os mais

---

<sup>12</sup> Nessa abordagem da geometria é apresentado um sistema de postulados, exceto o quinto postulado de Euclides, e a partir desses postulados várias geometrias vão sendo definidas até chegar à chamada Geometria Neutra. A partir desse ponto e das considerações que se faça é possível chegar à Geometria Euclidiana ou à Geometria Hiperbólica, por exemplo.

conhecidos estão o modelo de Beltrami – Klein e o modelo Poincaré. Vejamos esses dois modelos.

### 3.1.2.1. Modelo de Beltrami – Klein

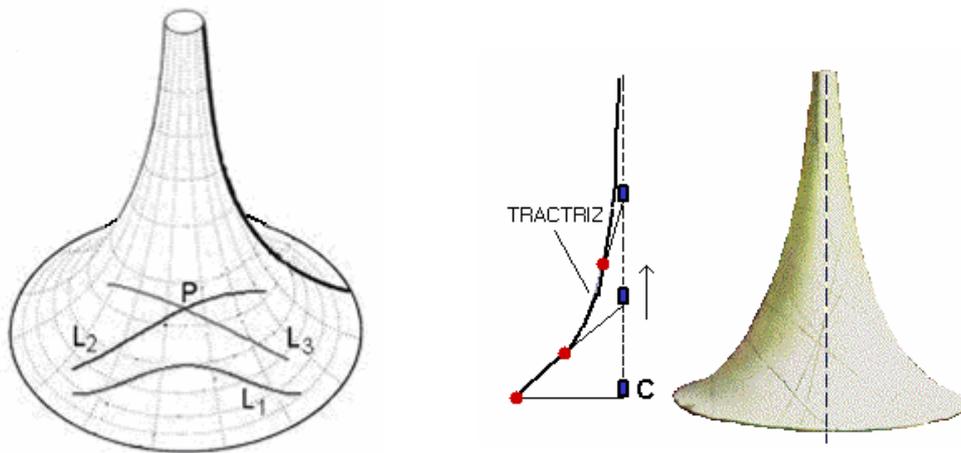
O matemático Eugênio Beltrami (1835 – 1900), em seu artigo “Uma tentativa de interpretação da geometria não-euclidiana” (1868) descreve um modelo euclidiano para a Geometria Hiperbólica. Anos depois o alemão Félix Klein (1829 – 1925) aplicou o conceito de métrica projetiva do matemático Arthur Cayley (1821 – 1895) para introduzir um conceito de distância no modelo proposto por Beltrami. Esse modelo, então, passou a ser conhecido como modelo de Beltrami – Klein.

O trabalho de Beltrami mostra que numa superfície de curvatura negativa constante, tomando as geodésicas como retas, todos os resultados obtidos por Lobachevsky podiam ser verificados.

Essa superfície tridimensional é chamada de *pseudo-esfera* e é obtida pela rotação de uma curva chamada *tractriz*<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Segundo O’Shea (2009, p.291) a tractriz é a curva no plano traçada pela ponta de uma linha de comprimento fixo que inicialmente aponta diretamente para cima, enquanto a outra ponta da linha se move sobre uma linha reta horizontalmente sobre o plano.



**Figura 3.4:** PSEUDO-ESFERA. Temos duas retas (geodésicas)  $L_2$  e  $L_3$  que passam por um ponto  $P$ , mas que não cruzam com a reta  $L_1$  e desta forma, as retas  $L_2$  e  $L_3$  são paralelas a  $L_1$ . (ÁVILA, 2010 apud CAMARGO, 2012, p. 50).

**Fonte:** (ÁVILA, 2010 apud CAMARGO, 2012, p. 50).

Segundo Coutinho (2001), na superfície da pseudo-esfera, encontra-se a possibilidade da confirmação do Postulado de Lobachevsky. Porém, o modelo de Beltrami possui uma falha. As superfícies de curvatura negativa constante possuíam arestas, o que impedia o prolongamento de certas geodésicas para além das arestas que a pseudo-esfera possui e isso contraria o segundo postulado de Euclides (lembre-se que a Geometria Hiperbólica admite todos os postulados de Euclides exceto o quinto).

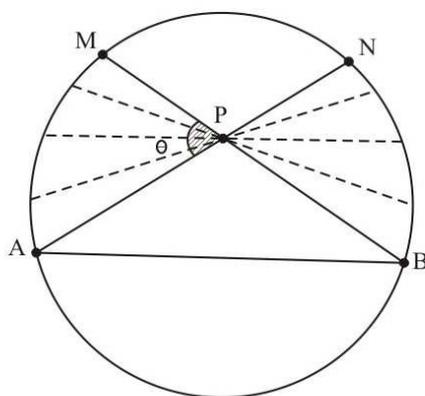
Conforme argumenta O'Shea (2009, p.134), o problema técnico desse modelo, de a *pseudosfera* (pseudo-esfera) ter uma extremidade, é que um habitante dessa superfície chegaria a essa extremidade num tempo finito. Não ficou claro se existiriam superfícies de curvatura<sup>14</sup> negativa constante e sem extremidade.

Klein apresentou outro modelo que não tinha esse problema, e que também se apoiava na Geometria Euclidiana.

<sup>14</sup> Mais adiante teremos um tópico específico sobre o tema *curvatura*. TROQUE DEPOIS PELA SEÇÃO específica, NA SEÇÃO 3.4 (POR EXEMPLO) VEREMOS....

No modelo elaborado por Klein, como podemos ver em Coutinho (2001), considera-se fixado um círculo no plano euclidiano. Neste modelo, considera-se apenas a região do interior desse círculo, o qual passa a ser o *plano* de Lobachevsky. As retas do *plano* lobachevskyano são cordas do círculo sem considerar suas extremidades.

Conforme a figura 3.5, por **P** traçam-se as retas PA e PB paralelas à reta AB. As infinitas retas que passam por **P** e situadas no interior do ângulo  $\theta$ , são as retas não-secantes.



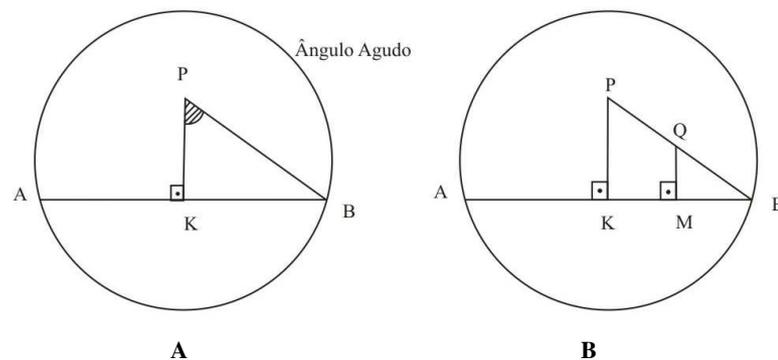
**Figura 3.5:** Modelo de Klein.  
**Fonte:** Coutinho (2001, p. 42).

Conforme Coutinho (2001), para completar este modelo, é necessário que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita. O mesmo autor argumenta que é possível vencer esta dificuldade introduzindo uma unidade de medida variável, isto é, seu tamanho diminui na medida em que se aproxima da fronteira do plano (circunferência do círculo). Matematicamente não há nenhuma dificuldade nisso. Pense, por exemplo, na seguinte situação: faltam duas unidades de distância para chegar à extremidade (do círculo) e os passos diminuem, por exemplo, na razão 2. Então a soma infinita  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  de comprimentos de passos (com o primeiro passo valendo uma unidade) jamais alcançará o valor 2.

No modelo de Beltrami-Klein, duas retas dizem-se paralelas se não tiverem pontos em comum. De acordo com a figura 3.5 pelo ponto **P** (conforme a própria construção do modelo) passam pelo menos duas retas AN e BM paralelas a AB.

Desse modelo é possível extrair importantes consequências que facilitam o entendimento de certos resultados da Geometria Hiperbólica:

- 1 – O ângulo de paralelismo é agudo, sendo este ângulo formado por uma das paralelas e a perpendicular do ponto **P** a AB (Figura 3.6 A);
- 2 – O ângulo de paralelismo é variável, isto é, depende da distância do ponto **P** à reta AB;
- 3 – duas retas distintas e perpendiculares à reta AB formam um quadrilátero PQMK (Figura 3.6 B), que é o “retângulo” da Geometria Hiperbólica.



**Figura 3.6:** O ângulo de paralelismo (A) e o “quadrilátero” (B) da Geometria Hiperbólica de acordo com o modelo de Beltrami-Klein.

**Fonte:** Coutinho (2001).

Deste último (figura 3.6B) é possível extrair um resultado característico muito importante dessa geometria: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .

A seguir veremos um modelo mais sofisticado, principalmente com relação à definição de retas e a de distância (comprimento) entre dois pontos.

### 3.1.2.2. Modelo de Poincaré

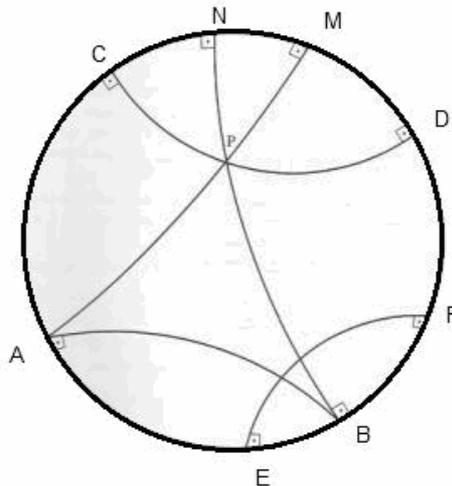
O grande matemático francês Henry Poincaré (1864 – 1912) foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos e autor da famosa *Conjectura de Poincaré*, que hoje é um teorema demonstrado. Os modelos propostos por Poincaré para a geometria hiperbólica, desenvolvidos entre 1882 e 1887, são o *modelo do disco* e o *modelo do semi-plano*.

#### Modelo do Disco de Poincaré

Assim como no modelo de Klein, Poincaré apresenta seu modelo no interior de um disco euclidiano. Ao fazer isso, Poincaré substitui alguns termos como retas e pontos por entidades concretas. O ponto é usado no sentido habitual. No entanto, conforme Coutinho (2001, p.44), nesse modelo, as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo (do disco), que representa o plano hiperbólico. Essas retas são chamadas de *reta-h*, para caracterizá-las como retas hiperbólicas.

Os pontos de interseção das retas com círculo, que é o bordo do disco, são pontos que não pertencem ao plano hiperbólico, denominados de *pontos ideais* ou finais da reta hiperbólica. Este é o ponto ômega ( $\Omega$ ).

Se duas retas-h interceptam-se num ponto A, a medida do ângulo formado entre elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semi-retas euclidianas tangentes aos arcos (retas-h) no ponto A. Ou seja, no modelo do Disco de Poincaré os ângulos entre as tangentes, são medidos como no caso euclidiano, utilizando-se as retas (euclidianas) tangentes às retas-h (ou seja, os arcos do modelo).



**Figura 3.7:** Modelo do Disco de Poincaré.  
**Fonte:** Coutinho (2001, p.45).

Para o modelo de Poincaré, falta conhecer qual é a métrica utilizada para medir a distância entre dois pontos no interior do disco. Veremos que esta métrica não é a euclidiana, pois se assim o fosse, uma reta-h teria um comprimento finito e teríamos o problema da pseudo-esfera de Beltrami.

### O Semi-Plano de Poincaré

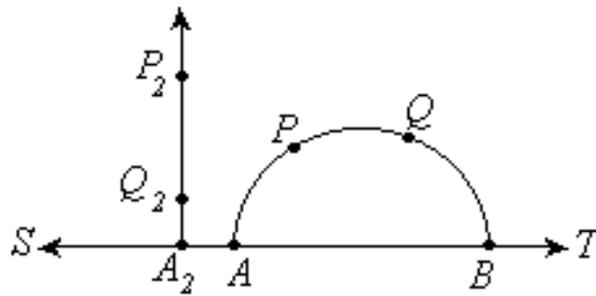
Iremos definir os seguintes objetos matemáticos.

**Proposição:** seja  $P = H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ .

Uma *reta tipo I* é um subconjunto de  $H$  da forma  $L_a = \{(x, y) \in H / x = a\}$ , onde  $a$  é um número real fixado.

Uma *reta tipo II* (reta dado centro e raio) é um subconjunto de  $H$  da forma  $L_{c,r} = \{(x, y) \in H / (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$  onde  $c$  e  $r$  são números reais fixados com  $r > 0$ .

O conjunto  $H$  com as retas assim definido é chamado de **Semi - Plano de Poincaré** (ou Semi-Plano Superior) para geometria hiperbólica.



**Figura 3.8:** modelo do *Semi-plano* de Poincaré.  
**Fonte:** autores.

Com essas definições, Poincaré desenvolve uma métrica para calcular a distância entre dois pontos na Geometria Hiperbólica.

Seja  $P=(x_1, y_1)$  e  $Q=(x_2, y_2)$  dois pontos no semi-plano de Poincaré.

A distância de Poincaré é dada por:

$$\text{a) } d_H(P, Q) = \left| \ln \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \right|, \text{ se } x_1 = x_2, \text{ ou seja se } P, Q \in L_a.$$

$$\text{b) } d_H(P, Q) = \left| \ln \left( \frac{\frac{x_1 - c + r}{y_1}}{\frac{x_2 - c + r}{y_2}} \right) \right| \text{ se } P, Q \in L_{c,r}.$$

Com a distância de Poincaré assim definida, podemos notar que o comprimento de um segmento de reta não depende da ordem pela qual se escreve P e Q. Se, por exemplo,  $d(P, Q) = |\ln(A)|$ , então,

$$d(Q, P) = \left| \ln \left( \frac{1}{A} \right) \right| = |-\ln(A)| = |\ln(A)|$$

Isto é  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .

Vimos que a medida de ângulos tem o significado euclidiano usual e, portanto, a congruência de ângulos também o tem. Conforme argumenta Samuco (2005, p. 50), esta é a principal vantagem do modelo de Poincaré em relação ao modelo de Beltrami-Kein.

### 3.2. Geometria Elíptica

Com a descoberta de Bolyai e Lobachevsky e os avanços das ideias relacionadas à Geometria Hiperbólica, ficou em aberto a possibilidade de haver outras geometrias. Na abordagem feita anteriormente, para o quadrilátero de Saccheri os ângulos de topo são agudos. Não obstante, a hipótese do ângulo de topo do quadrilátero de Saccheri ser obtuso carecia de uma verdadeira e rigorosa fundamentação geométrica, isso até a metade do século XIX. Nesse sentido, sem dúvida, as investigações e reflexões que fez Georg Bernhard Riemann (1854) constituem um tema valioso para Geometria em geral e para física moderna, como veremos no capítulo 4, seção 4.5.

Segundo Boyer (2010, p. 377), em 1854 Riemann tornou-se Privatdozent (professor-adjunto) na Universidade de Göttingen, Alemanha, e segundo o costume da universidade ele foi designado para apresentar uma *Habilitationschrift* (palestra de habilitação) perante o corpo docente. Foi a famosa aula inaugural na qual Riemann apresentou suas ideias geométricas.

Conforme O'Shea (2009, p.111), como tema da aula, Riemann submeteu três tópicos ao corpo docente. A escolha do tópico coube a Gauss, seu orientador, que optou pelo terceiro da lista que tem como título *Das Funktionen que Sustentam a Geometria* e podemos supor alguma influência de Gauss nos resultados de Riemann. “De todos os artigos comparáveis a esse em tamanho, nenhum se mostrou mais rico em implicações em toda história da matemática” (EVES, 2004, p. 614).

Para a Geometria riemanniana, assim como na Geometria Hiperbólica, a melhor maneira de captar a lógica dos sistemas geométricos de geometrias curvas é através de modelos de representação euclidianos. O modelo ideal para Geometria riemanniana é a superfície de uma esfera (COUTINHO, 2001, p. 73). É claro que esse modelo alude apenas um caso especial dessa geometria, em que a superfície em consideração tem uma curvatura igual em todos os pontos (constante).

Na Geometria Elíptica abandona-se a noção de “estar entre” e a reta não carrega mais o sentido de infinita como na Geometria Euclidiana, e passa a ser ilimitada. As retas são os círculos máximos ou geodésicas da superfície esférica. Vejamos os postulados de Riemann e algumas de suas consequências.

### 3.2.1 Postulados de Riemann e o Modelo Esférico para Geometria Elíptica

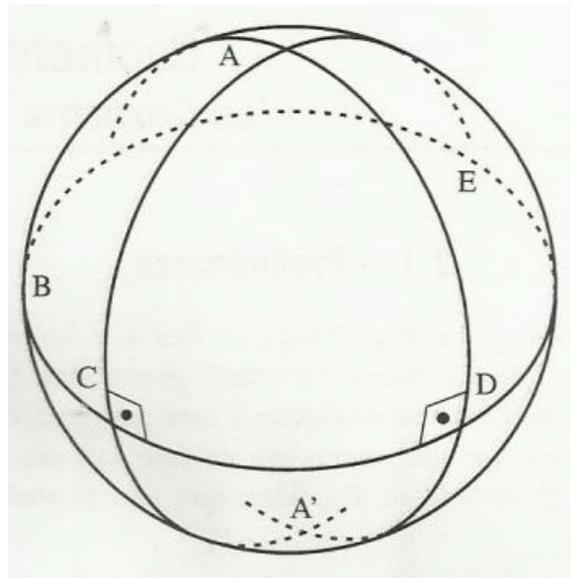
Na superfície esférica  $P = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ .

“Retas” são interseções com planos que passam pela origem.

Segundo Legarda (2011, p. 201) Os postulados que seguem são a base para Geometria riemanniana:

- 1) dois pontos distintos determinam ao menos uma geodésica (círculos máximos);
- 2) as geodésicas são de comprimento finito, porém ilimitadas;
- 3) não existem geodésicas paralelas, isto é, dois círculos máximos se intersectam em ao menos um ponto.

Segundo Coutinho (2001, p. 73), com relação a este último postulado, evita-se o inconveniente de as retas se encontrarem em mais de um ponto, considerando os pontos como sendo idênticos.



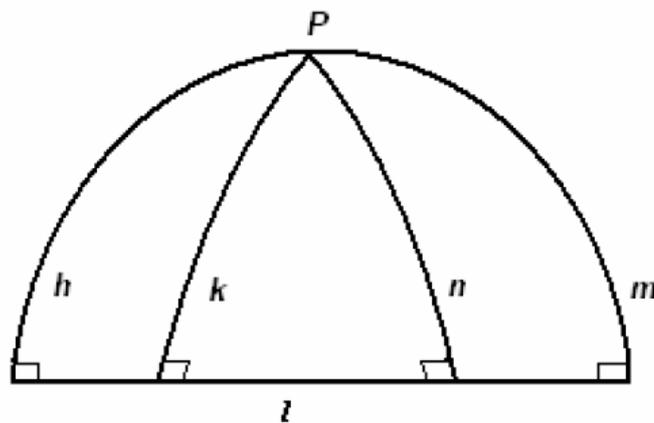
**Figura 3.9:** Modelo de Geometria Elíptica.  
**Fonte:** Coutinho (2001, p. 74)

Conforme a figura 3.9, os círculos máximos, ou seja, as retas  $ACA'$  e  $ADA'$ , perpendiculares à “reta”  $BCDE$ , intersectam-se nos pontos antípodas  $A$  e  $A'$ , que são a extremidade de um mesmo diâmetro da esfera. A geodésica perpendicular às geodésicas  $ACA'$  e  $ADA'$  é a polar comum dos pontos  $A$  e  $A'$ , e estes dois pontos são os pólos da geodésica  $BCDE$ . A distância de  $A$  e  $A'$  a qualquer ponto da geodésica  $BCDE$  é constante. Podemos notar (figura 3.9) que duas geodésicas secantes como as geodésicas  $ACA'$  e  $ADA'$  têm em comum uma única geodésica perpendicular  $BCDE$ .

Na geometria esférica, dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre uma circunferência máxima, a distância entre esses pontos é a menor porção da circunferência que os contém. Mesmo que por  $A$  e  $B$  outros círculos possam ser considerados, a distância entre eles é sempre medida sobre o único círculo máximo determinado por  $A$  e  $B$ .

Na Geometria Esférica, os círculos são máximos quando os planos que interceptam a esfera passam pelo centro da esfera. Pode-se observar que o centro do círculo máximo coincide com o centro da esfera correspondente. A reta é a circunferência desse círculo e quaisquer outros círculos serão considerados menores.

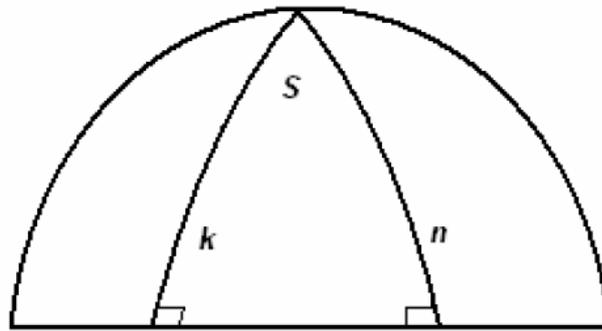
Um caso particular da geometria esférica pode ser visto na figura 3.10. Todas as circunferências máximas perpendiculares a uma dada geodésica se interceptam em um ponto. De acordo com a figura 3.10, na superfície esférica, as geodésicas  $h$ ,  $k$ ,  $n$  e  $m$ , perpendiculares a uma mesma geodésica  $l$  se interceptam no ponto  $P$ . No caso da geometria euclidiana estas retas seriam paralelas entre si.



**Figura 3.10:** todas as geodésicas se interceptam em ao menos um ponto.

**Fonte:** Legarda (2011, p. 202)

Nessa abordagem do modelo, duas geodésicas determinam uma região  $S$  da superfície esférica: as geodésicas  $k$  e  $n$  (veja figura 3.11).

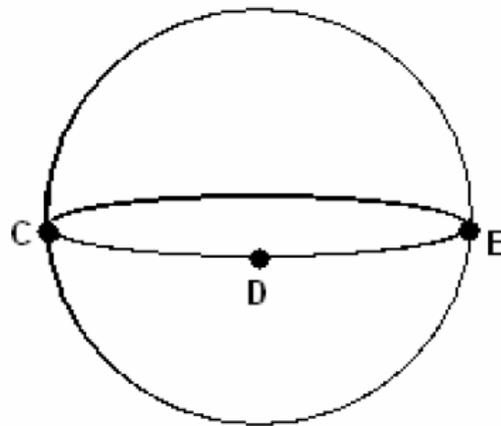


**Figura 3.11:** Região *fechada* determinada por duas geodésicas.  
**Fonte:** Legarda (2011, p. 202).

Um contra-senso euclidiano desse resultado é que, na geometria euclidiana, duas retas não encerram entre si uma superfície.

Na geometria esférica, dados três pontos arbitrários C, D e E em um círculo máximo, há três casos que se verificam (veja figura 3.12):

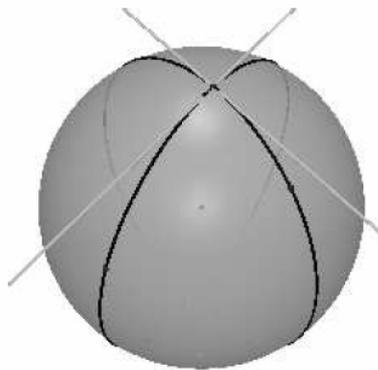
- a) D se encontra entre os pontos E e C;
- b) C se encontra entre os pontos D e E;
- c) E se encontra entre os pontos C e D.



**Figura 3.12:** alinhamento de três pontos na geometria elíptica.

**Fonte:** Legarda (2011, p. 202).

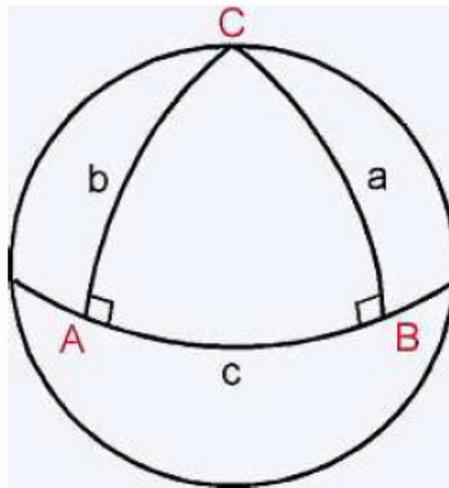
O ângulo sobre a esfera, chamado de ângulo esférico, é a intersecção de uma reta (circunferência máxima) e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção. (figura 3.14).



**Figura 3.13:** ângulo esférico.

**Fonte:** Antunes (2009, p. 35).

Dados três pontos A, B e C, distintos e não pertencentes todos a uma mesma circunferência máxima, a figura formada pelos arcos de circunferências, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico (figura 3.14).



**Figura 3.14:** Triângulo esférico.  
**Fonte:** Antunes (2009, p. 35).

Na Geometria Euclidiana, duas retas não encerram entre si uma superfície.

### 3.2.2 Alguns resultados das investigações de Riemann

Ao elaborar seus estudos, Riemann distingue a noção de espaço e geometria, que é uma estrutura adicional num espaço. Dada essa nova conceituação, e principalmente com relação aos estudos matemáticos de curvas e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , afirma Ferreirós (1992):

Neste caso, Riemann passava a esboçar avançadas teorias de geometria diferencial por meio da qual analisava a noção de espaço geométrico e físico com uma sofisticação sem precedentes (Ferreirós, 1992 *apud* Legarda, 2011, p. 172).

Segundo O'Shea (2009, p. 113), Riemann definiu espaço como consistindo em pontos, e uma *variedade* como um tipo particular de espaço que consiste em regiões em que os pontos podem ser designados por coleções de números.

A variedade mais simples, denominada geralmente de  $\mathbf{R}$ , é a reta numérica. A segunda variedade mais simples é o plano  $\mathbf{R}^2$ , que podemos considerar como sendo

pares ordenados de números reais. Em seguida vem o espaço tridimensional  $\mathbf{R}^3$ , que é o conjunto cujos pontos são triplas ordenadas de números reais.

Riemann, então, generaliza a ideia de variedade. Se  $n$  é um inteiro positivo, podemos pensar o conjunto de todas as coleções de números reais como um espaço, chamado de espaço *n-dimensional*, indicado por  $\mathbf{R}^n$ . Uma variedade  $n$ -dimensional é um conjunto em que o conjunto de pontos próximos a um ponto dado parece (ou seja, é homeomorfo a) uma região no espaço  $n$ -dimensional (O'SHEA, 2009, p. 114).

Conforme Boyer (2010, p. 377), Riemann percebeu que entre as regras mais importantes em qualquer geometria, está a regra para achar a distância entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro.

Riemann encontrou uma forma muito interessante de especificar distâncias dentro de uma variedade, tão importante quanto aquelas noções primitivas de Euclides. De acordo com O'Shea:

Ele observou que, encontrada uma forma de medir a velocidade ao longo de uma trajetória numa variedade, o cálculo diferencial oferece um meio automático de medir os comprimentos de curvas nessa variedade (equações diferenciais), a álgebra (e a trigonometria) nos dá automaticamente um meio de medir ângulos. Usamos a palavra métrica para significar uma regra para medir a velocidade ao longo de uma curva ou para medir a distância entre dois pontos. De acordo com Riemann, as duas regras são a mesma coisa (O'SHEA, 2009, P. 115).

O ponto de partida de Riemann foi a fórmula da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos. Na geometria euclidiana essa métrica é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Riemann destacou que se podem usar muitas outras fórmulas de distância, mas nesse caso as propriedades do espaço e da geometria ficam determinados pela métrica escolhida. Um espaço com uma métrica da forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz \\
 & + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz \\
 & + g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2,
 \end{aligned}$$

Onde os  $g_{ij}$  são constantes ou funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é conhecido agora como *espaço de Riemann* e a geometria desse espaço como *geometria riemanniana*. O espaço euclidiano é o caso particular em que  $g_{ij} = 1$  sempre que  $i=j$  e  $g_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

Segundo Eves (2004, p. 614), posteriormente, Albert Einstein e outros iriam encontrar no conceito amplo de espaço de Riemann o contexto necessário para a teoria da relatividade.

Conforme Legarda (2011), pode-se dizer que a noção primitiva de variedade, desde o ponto de vista topológico, permitiu a Riemann (1854) esboçar o marco conceitual de uma geometria generalizada, contemplando a possibilidade de ir mais além de uma estrutura geométrica euclidiana ou não-euclidiana.

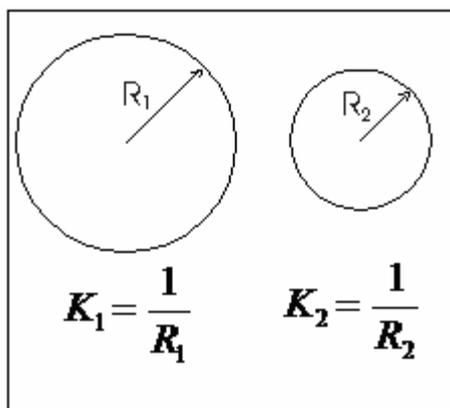
A geometria não-euclidiana era até então, e havia sido por muitas décadas, um aspecto da matemática um tanto à margem até ser completamente integrada através das ideias notavelmente gerais de Riemann (BOYER, 2010, p. 377).

### 3.2.3 A Ideia de curvatura

Até aqui definimos situações geométricas sobre superfícies curvas e falamos de curvatura do espaço. No entanto, ainda não elaboramos uma compreensão muito esclarecedora deste tema. Por considerá-lo muito importante, vamos tentar dar algum sentido a este tópico, terminando por apresentar a abordagem de Riemann para curvatura.

Mas, afinal, o que é curvatura? A ideia de curvatura pode ser entendida como sendo a medida de quão fechada é uma curva em cada ponto da mesma.

A curva mais simples que conhecemos cuja curvatura é constante em todos os pontos é a circunferência. A curvatura de uma circunferência de raio  $R$  é dada por  $K = \frac{1}{R}$ . Quanto maior for o raio, menor a curvatura.

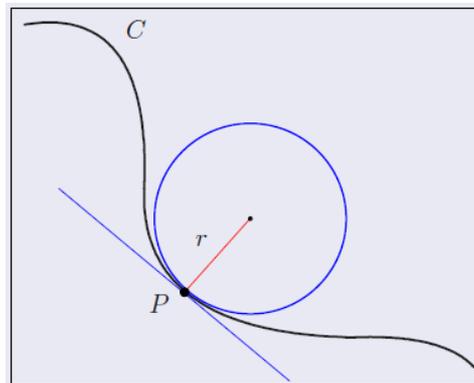


**Figura 3.15:** Curvatura de uma circunferência.  
**Fonte:** adaptado de Universidade Federal do Ceará (2013).

Mas e se a curva for variada, ou seja, não constante? Como podemos medir sua curvatura?

Conforme a Universidade Federal do Ceará (2013), para encontrar a curvatura num ponto  $P$  de uma curva qualquer, procedemos da seguinte maneira: desenhemos uma circunferência no lado côncavo da curva de tal modo que o único ponto em comum entre a curva e a circunferência seja o próprio ponto  $P$ . Como podem existir várias circunferências com essas características, tomamos aquela com maior raio possível. Essa circunferência recebe o nome de *círculo osculante*<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Isto é, o círculo que “beija” a curva. Termo cunhado, provavelmente por Leibniz (Universidade Federal do Ceará, 2013).



**Figura 3.16:** Círculo osculante para determinar curvaturas não constantes.

**Fonte:** González (2010).

Desse modo, a curvatura da curva no ponto  $P$  será igual à curvatura do círculo osculante nesse mesmo ponto onde se tocam. De acordo com a figura 3.18, a curvatura será  $k=1/r$ , pois  $r$  é o raio do círculo osculante.

Devemos observar que a curvatura é o inverso do raio, de modo que a unidade de medida é o inverso do metro e se chama *dioptria*.<sup>16</sup>

E no caso de uma superfície? Como determinar a curvatura?

Segundo Silva (2006, p. 27), em 1827, Gauss apresentou à Sociedade Real de Göttingen o trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que se tornou o trabalho fundamental introduzindo a geometria diferencial em superfícies curvas quaisquer. Neste trabalho, Gauss tratou de curvatura de uma superfície curva de um modo diferente do que era conhecido desde Euler (SILVA, 2006, P. 27). O trabalho de Gauss servirá como base para o desenvolvimento posterior da geometria não-euclidiana por Riemann (1854).

<sup>16</sup> Dioptria é o popular “grau” dos óculos, isto é, 1 grau = 1 dioptria. Por exemplo, uma lente de óculos com 0,5 graus (ou 0,5 dioptrias) tem raio de curvatura igual a 2 metros (Universidade Federal do Ceará, 2013).

Em seu trabalho, Gauss mostrou que não era necessário sair do espaço do observador para estudá-lo. Dessa forma, Gauss encontrou equações para curvatura que dependiam das coordenadas intrínsecas à superfície, o que lhe permitiu definir seu *Theorema Egregium* (teorema notável) e a concluir a seguinte fórmula:

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\text{área}(\Delta)}$$

que, em geral varia de ponto para ponto.

E então, o teorema Gauss-Bonnet (~1850), que é a relação entre o valor total (integral) da curvatura de Gauss e a topologia global da superfície:

$$\int_s K ds = 2\pi E$$

Onde  $s$  é a área da superfície e  $E$  é o chamado número de Euler.

Usando esse resultado, é possível encontrar que o ângulo faltante (de um triângulo) de uma superfície é igual à curvatura de Gauss dessa superfície.

### O que disse Riemann

A ideia de curvatura do espaço segundo Riemann (1854 apud O' Shea, 2009, p. 115) é a seguinte. Dada a noção de linhas retas (geodésicas num espaço riemanniano), pode-se definir triângulos: são figuras limitadas por três segmentos geodésicos. E dados os triângulos, pode-se definir *curvatura*. Numa variedade bidimensional (o  $\mathbf{R}^2$ ), a curvatura em um ponto é apenas um número que mede o desvio em relação a  $180^\circ$  da soma dos ângulos internos de um triângulo com vértice naquele ponto. Mais precisamente, é a medida do desvio em relação a  $180^\circ$  à medida que se reduz a área do triângulo. Curvatura positiva significa que o triângulo tem mais de  $180^\circ$ , curvatura negativa, menos de  $180^\circ$ , e curvatura zero, que a soma dos ângulos do triângulo é exatamente igual a  $180^\circ$ .

Numa variedade com dimensão maior que 2, temos muitos planos bidimensionais passando por um ponto. Também podemos ter curvaturas diferentes para triângulos

geodésicos que sejam tangentes para os diferentes planos passando pelo ponto. Com relação a esse fato, argumenta O'shea (2009, p. 116):

Curvatura não é um número, mas toda uma coleção, uma para cada par de direções em um ponto - cada par de direções determina um plano no espaço de direções, e este, por sua vez, determina uma superfície traçada pelas geodésicas tangentes às direções no plano. (O'shea, 2009, p. 116).

O grande trabalho desenvolvido por Riemann para descrever as diferentes curvaturas em diferentes direções é chamado de *Tensor de Curvatura de Riemann*. Como veremos mais adiante esse importantíssimo instrumento matemático foi usado por Einstein na teoria da Relatividade Geral.

Conforme Costa (1995, p 59) a teoria dos tensores tem origem no cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita. Um tensor pode ser entendido como um “super vetor”. Se, num espaço de três dimensões, são necessários três componentes para definir um vetor – um número para cada coordenada,  $x, y, z$  –, para definir um tensor em tal espaço são necessários nove números –  $3^2$ .

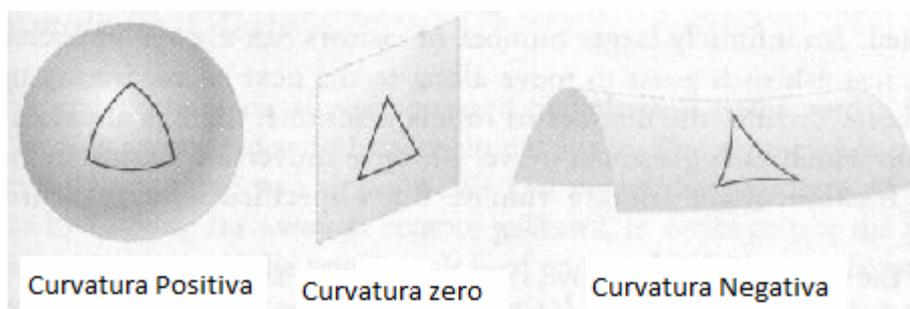
A seguir estão representados um esquema escalar, Vetorial e tensorial. Nessa ordem:

$$8, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Riemann foi além da definição de Gauss para curvatura. Ele definiu que o espaço era plano se e somente se todo triângulo no espaço tiver  $180^\circ$  (ou seja, a soma de seus ângulos internos medir  $180^\circ$ ). Isto é, o caso quando a curvatura em todos as direções planas é zero. Portanto, um espaço é plano se e somente se tivermos válido o que chamamos de “pacote euclidiano”. Ou seja, se e somente se o teorema de Pitágoras for válido; se e somente se o quinto postulado de Euclides for válido.

Essa definição dada por Riemann resume três milênios de geometria! (O'SHEA, 2009, p. 116). Dessa última definição podemos tirar, também, que o célebre Teorema de Pitágoras é equivalente ao quinto postulado.

Então, pelo que vimos, a curvatura determina a geometria do espaço. Assim, temos:



**Figura 3.17:** Curvatura determina a Geometria do espaço.  
**Fonte:** <<http://plato.if.usp.br/~fma0374d/aula11/node4.html>>.

Como vimos, Riemann distingue a noção de espaço e geometria permitindo-lhe elaborar de maneira generalizada a própria geometria. Os trabalhos de Riemann proporcionaram avanços muito importantes na física, como veremos. Mas, afinal, qual é o espaço de que estamos falando? Qual é a noção de espaço que temos? Essas discussões serão feitas no próximo capítulo.

## 4 A GEOMETRIA DA RELATIVIDADE

Neste capítulo iremos investigar as relações da teoria da relatividade e qual a influência do pensamento não-euclidiano nas concepções geométricas relativísticas. Basicamente gostaríamos de discutir quais foram as ideias com as quais Einstein converteu a geometria não-euclidiana em uma linguagem natural para a Física, ao mesmo tempo em que apresentamos algumas consequências naturais da teoria.

### 4.1 O conceito de espaço na Física

Na física, em geral, podemos qualificar o espaço como contínuo, isotrópico, homogêneo<sup>17</sup>, finito ou infinito, quando não é considerado um puro sistema de relações. Em certos campos bem determinados, essa concepção física do espaço é baseada na geometria euclidiana. Por exemplo, para fazer um mapa da cidade de São Paulo podemos usar uma geometria plana, mas para um mapa das Américas devemos usar uma geometria esférica. No entanto, tais qualificações não são acessíveis aos nossos sentidos.

Para o homem primitivo, “espaço” era apenas um conjunto de orientações concretas, uma multidão de direções locais. Esse espaço primitivo era geralmente associado ao “espaço” comum ao grupo, à família ou à tribo. Certos eventos astronômicos ou meteorológicos, como o nascer e o pôr do Sol, as tempestades e as enchentes, conferiam a algumas direções algum valor cuja importância todos reconheciam.

A intuição geométrica humana é consideravelmente mais forte do que a algébrica por uma razão óbvia: desde a Idade da Pedra, temos grande experiência em movimentação espacial, mas muito pouca em contagem.

A ideia de espaço aparece muito cedo na filosofia grega. Segundo Aristóteles, os pitagóricos atribuíam aos números uma espécie de espacialidade:

Também os pitagóricos diziam que o vácuo existe e penetra nos céus pela respiração sem limite. Segundo eles, os céus respiram o

---

<sup>17</sup> Homogêneo significa que suas propriedades são as mesmas em qualquer direção local definida sobre ele. Ser isotrópico significa que suas propriedades não dependem da direção em que são consideradas.

próprio vácuo, o qual separa e divide os objetos naturais próximos entre si. Em primeiro lugar, é o caso dos números, pois o vazio delimita a sua natureza. (ARISTÓTELES *apud* JAMMER, 2010, p. 32).

Ainda segundo Jammer (2010), para o próprio Aristóteles o conceito de lugar seria:

O lugar de uma coisa não é parte da coisa em si, mas aquilo que abarca; o lugar imediato ou “apropriado” de uma coisa não é menor nem maior o que coisa; o lugar em que a coisa está pode ser abandonado por ela e, portanto, é separável dela; por último, todo e qualquer lugar implica e envolve os correlatos de “acima” e “abaixo”, e as substâncias elementares têm um tendência natural a se mover para seus lugares próprios, ou repousar neles quando neles se encontram – e tal movimento é “para cima” ou “para baixo”, e tal repouso é “acima” ou “abaixo”. (JAMMER, 2010, p. 41).

Na concepção aristotélica de espaço, uma pedra abandonada de certa altura sofria uma tendência natural de se mover para Terra, pois este era o lugar natural da pedra. O universo, em si, era plano.

O conceito de espaço foi enriquecido e tornado mais complexo por Galileu e Newton, à medida que o espaço tem de ser instituído como causa independente do comportamento inercial dos corpos, se quisermos dar um significado exato ao princípio clássico da inércia – e, a partir daí, à lei clássica do movimento. (EINSTEIN *apud* JAMMER, 2010, p. 18).

O problema clássico do espaço foi criado nos séculos XVII e XVIII. Nessa ocasião, pela primeira vez se analisou o espaço euclidiano como um todo. Figuras como Leibniz e Newton tinham visões opostas do conceito de espaço, conforme aponta Ferreirós (2004):

Newton defende, nos *Principia*, que o espaço tem que ser absoluto, uma entidade autônoma, distinta dos objetos materiais e que os condiciona. Trata-se de um receptáculo tridimensional homogêneo, um imenso recipiente de todos os fenômenos “externos” ou materiais.

Entretanto, Leibniz defende que seria arbitrário conceber o espaço como um absoluto, e que não se pode encontrar nos fenômenos prova alguma de que se trata de uma entidade autônoma e real. Se trataria, ao contrário, de uma entidade derivada e *ideal* – ainda que nada arbitrária – que decifraria o emaranhado de relações entre os objetos materiais (...), o espaço não seria mais que a ordem de

coexistência entre as coisas, o conjunto de relações que se dão em um instante de tempo. (FERREIRÓS, 2004, p. 12).

Para Newton, o espaço era algo continente de tudo que existe, estático e imutável. No ponto de vista de Leibniz, o espaço era apenas a ordem dos dados coexistentes: “*Spatium est ordo coexistendi*” (LEIBNIZ *apud* JAMMER, 2010, p.26).

Para Isaac Barrow, antigo professor de Isaac Newton e um convicto de que geometria euclidiana era um modelo ideal do espaço físico, ao responder à pergunta: *como estamos seguros de que os princípios geométricos se aplicam à natureza?*, afirma :

Estes princípios são derivados da razão inata. Os objetos sensíveis são unicamente os agentes que os despertam. Mas os princípios da geometria são confirmados mediante a experiência e continuará assim, porque o mundo desenhado por Deus é imutável. A geometria é, então, uma ciência perfeita e segura. (CURVELLO, 2002, p. 21).

Curvello (2002) argumenta, ainda nesse sentido, que os filósofos do século XVII e XVIII formularam perguntas questionando os fundamentos da física newtoniana, principalmente Hobbes, Locke e Leibniz contestaram as leis matemáticas, no que Leibniz deixou certo espaço para dúvida quando distingue o mundo possível e o mundo real, isto é, o mundo matematicamente possível e o mundo das experiências reais. No entanto, nessa época o trabalho mais importante foi “*Treatise of human nature*” (1739), de David Hume, que negou a existência das leis necessárias dos eventos no universo. Hume observou que se ocorrem sequências de um determinado fenômeno, os seres humanos concluiriam que sempre ocorrerá da mesma forma tal fenômeno.

Immanuel Kant (1721 – 1804) sem dúvida sofreu profunda influência da polêmica entre Leibniz e Newton, principalmente conservando muitos dos enfoques desse último, e nega Hume. Para Kant, tudo que conhecemos com relação ao espaço, à geometria e à espacialidade dos fenômenos observados, tudo isso é compatível com a mera intersubjetividade do espaço. Nosso conhecimento da geometria euclidiana demonstra, segundo Kant, que a representação do espaço é necessariamente a mesma para todos nós: intersubjetivo.

Para Kant, o espaço e o tempo são *a priori*, isto é, não dependem de nenhuma forma de experiência por serem gerados no interior da própria razão:

Eu demonstro o valor da soma dos ângulos do triângulo fazendo uma construção no espaço. Mas, por que a demonstração se opera tão bem em minha folha de papel quanto no quadro negro... ou quanto no solo em que Sócrates traçava figuras geométricas para um escravo? É porque o espaço, assim como o tempo, é um quadro que faz parte da própria estrutura de meu espírito. O espaço e o tempo são quadros *a priori*, necessários e universais de minha percepção... O espaço e o tempo não são, para mim, aquisições da experiência. São quadros *a priori* de meu espírito, nos quais a experiência vem se depositar. Eis que as construções espaciais do geômetra, por mais sintéticas que sejam, são *a priori, necessárias e universais*. (KANT *apud* ABDALLA, 2005, p.6).

Kant foi o filósofo mais influente de seu tempo. Suas ideias influenciaram profundamente toda a ciência e, sem dúvida, a matemática. Gauss sofreu notável influência de Kant. (FERREIRÓS, 2004, p. 12)

O final do século XIX registrou os maiores avanços com relação à teoria do espaço, com o advento das Geometrias não-euclidianas, como visto no capítulo anterior. Um dos fatos importantes para concretização das novas ideias de espaço é colocado com o conceito de infinito em geometria, pela abordagem de Riemann. Podemos distinguir espaço infinito de espaço ilimitado. Isto é, o espaço representado por uma superfície esférica é finito, mas, já que não possui limites, é ilimitado.

A outra concepção de espaço, fundamental para generalização da relatividade, é a dada por Minkowski. A estrutura geométrica de Minkowski constitui um conjunto de pontos gerando um espaço-tempo de quatro dimensões plano, isento de curvatura, dotado de uma métrica especial. Veremos esta estrutura na seção 4.4.

## 4.2 Física pré-relatividade

A forma que estudamos a Física hoje na escola é baseada originalmente nos trabalhos de Galileu e Newton. A maneira do *como fazer física* primeiro foi sistematizada em um cuidadoso planejamento experimental por Galileu, e também na obtenção das mais simples equações matemáticas por Newton (e também Kepler). Essas foram as grandes contribuições desses autores.

A lei fundamental da mecânica de Galileu-Newton, conhecida como lei da inércia, afirma: *“Um corpo suficientemente afastado de outros corpos permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme”*. (EINSTEIN, 1999, p. 18).

Essa proposição admite um sistema de referência, ou sistema de coordenadas na descrição da mecânica.

No caso da mecânica newtoniana, quando nos movemos de um referencial para outro, as regras de transformação são as seguintes:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Nessa relação consideramos um referencial  $S'$  se movendo em relação a um referencial inercial<sup>18</sup>  $S$ . A regra acima define uma transformação de Galileu, ou grupo de Galileu.

As transformações de Galileu têm como consequência a lei da adição da velocidade. Por exemplo, segundo essa lei, para um homem que caminha dentro do vagão de um trem em movimento com velocidade constante, no sentido do comprimento deste e na mesma direção de seu movimento, sua velocidade em relação ao leito da estrada é dada por:

$$W = v + w$$

Onde  $w$  é sua velocidade dentro do trem e  $v$  é a velocidade do trem.

Até a metade do século XIX, todos os fenômenos físicos podiam ser descritos utilizando as regras criadas por Newton. Era o auge do pensamento mecanicista, que teve grande influência nas ciências, na filosofia, na economia e em praticamente todas as áreas do conhecimento.

---

<sup>18</sup> Isto é, um referencial onde vale a lei da inércia.

Nessa mesma época, porém, alguns fatos novos começaram a mostrar que uma nova área da Física se iniciava, exigindo uma nova teoria, a eletromagnética.

O físico e matemático escocês James C. Maxwell, baseado nos trabalhos de Gauss sobre o fluxo do campo elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$ , através de uma superfície fechada, e dos trabalhos de Faraday sobre a lei de geração da força eletromotriz, da obra de Ampère sobre o campo magnético produzido por uma corrente elétrica sintetiza um conjunto de equações, acrescentando a chamada corrente de deslocamento. As equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Onde  $\epsilon_0$  é a constante de permissibilidade elétrica do espaço livre e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do espaço livre. Essas equações, juntamente com a lei de Lorentz (1853 – 1928) sobre a força produzida sobre uma carga elétrica em movimento pelos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , formam a base para a física que rege os fenômenos elétricos e magnéticos, o eletromagnetismo.

É interessante ressaltar, aqui, que o formalismo matemático encontrado por Maxwell para descrever suas equações tem como pano de fundo a álgebra dos quatérnios ou quadrivetores, desenvolvida por William R. Hamilton (1805 – 1865). O mesmo princípio é utilizado por Minkowski na generalização da Relatividade Restrita. (MARTINS, 1995, p. 68).

Assim, até o final do século XIX, as leis fundamentais da física eram:

- 1) as leis do movimento de Newton,
- 2) a lei da gravitação de Newton, e

### 3) as leis do eletromagnetismo de Maxwell – Lorentz.

A física parecia formar um sistema consistente e completo. Mas já no século XIX, essa física clássica começou a apresentar inconsistência. A Teoria da Relatividade resolveu essa inconsistência e completou a física clássica. (LESCHE, 2005, p. 11).

Qual era a inconsistência da física clássica? Primeiro, os fenômenos eletromagnéticos, que ocorrem na velocidade da luz, parecem não obedecer à lei de adição de velocidade. Outro ponto é que na mecânica de Newton todos os referenciais inerciais são equivalentes. O lado direito da equação fundamental da dinâmica  $\vec{F} = m \vec{a}$  é invariante sob as transformações de Galileu. Ou seja,

$x' = x - vt$ . Derivando em relação ao tempo duas vezes para obter a aceleração:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Observamos que são idênticas as acelerações de um corpo no sistema S e S'. Isso significa que forças iguais provocam em ambos os sistemas de referencial igual efeito. Por isso, invariante.

O eletromagnetismo é uma teoria das forças do lado esquerdo da equação  $\vec{F} = m \vec{a}$ , mas as equações de Maxwell não são invariantes sob a transformação de Galileu. (LESCHE, 2005, p. 11).

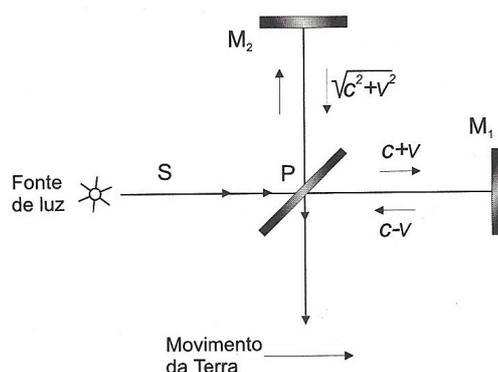
Das equações de Maxwell deriva-se a velocidade de propagação da onda eletromagnética, que é a constante:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

e as transformações de Galileu alteram velocidades. Assim, a eletrodinâmica parecia ter um referencial privilegiado.

Por esse motivo, pensou-se que as ondas eletromagnéticas se propagavam como as ondas elásticas, num meio chamado *éter*. Isso introduziu alguns fenômenos novos, como velocidades diferentes para a luz se ela se movia na mesma direção do éter ou em direção diferente.

Muitas experiências foram feitas para tentar comprovar a existência do éter, mas nenhuma delas foi bem sucedida. A mais famosa foi a experiência de Michelson – Morley<sup>19</sup> (EMM). Eles projetaram um interferômetro que emitia dois feixes de luz perpendiculares, um dos quais seguia na direção do movimento da Terra pelo éter. Desse modo, o raio de luz tinha uma velocidade que se somava à velocidade da Terra na ida, e se subtraía à da Terra na volta.



**Figura 4.0:** Desenho esquemático do interferômetro de Michelson-Morley.

**Fonte:** Cherman (2004, p. 91).

Na figura 4.0, o raio de luz que seguiu paralelo ao movimento da Terra percorre a distância entre  $P$  e  $M_1$ , com velocidade  $c+v$  (na ida) e  $c-v$  (na volta). O outro raio de luz, perpendicular, tem velocidade  $\sqrt{c^2+v^2}$  (ida e volta). Como a distância percorrida por ambos é a mesma, e as velocidades são diferentes, eles levam tempos diferentes para chegar ao coletor; portanto, deveriam apresentar interferência. Mas isso não ocorreu.

<sup>19</sup> Os americanos Albert A. Michelson (1852-1931) e Edward W. Morley (1838-1923).

O experimento foi repetido várias vezes e por vários pesquisadores, mas nenhuma evidência do éter foi comprovada. A construção desse experimento é uma boa oportunidade para se discutir a validade do Teorema de Pitágoras, ou seja, a métrica euclidiana quando se trata de deslocamentos a velocidade da luz.

### 4.3 Relatividade Restrita

A teoria da Relatividade restrita de Albert Einstein (1879 – 1955) é baseada nos seguintes postulados:

**P1:** *As leis da Física são as mesmas para os observadores situados em qualquer referencial inercial;*

**P2:** *A velocidade da luz no vácuo tem sempre o mesmo valor  $c$  em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.*

Michelson e Morley descobriram, em 1887, com o resultado do famoso experimento, que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais. Isso viola a lei da adição da velocidade, de acordo com a qual qualquer objeto ou sinal está parado no referencial inercial que se desloca com a mesma velocidade (NATÁRIO, 2010, p. 10).

Einstein foi o primeiro a compreender que isso significava que as fórmulas das transformações de Galileu não podiam estar completamente corretas, e que teriam que ser substituídas pelas fórmulas das Transformações de Lorentz.

#### 4.3.1 Transformações de Lorentz

O desenvolvimento da Relatividade Restrita (RR) começa por novas leis de transformação de coordenadas espaciais entre sistemas inerciais de referência, como  $S$  e  $S'$  da seção 4.2.

Lorentz<sup>20</sup> (1853 – 1928) foi capaz de criar um grupo de transformações (grupo de Lorentz) que podia explicar as lacunas nos experimentos de Michelson e Morley.

Conforme Fagundes (2009, p. 27), Einstein redescobriu, independentemente, essas equações em sua nova teoria. Considerando os postulados P1 e P2 e de hipóteses físicas, o resultado é:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Onde  $c$  representa a velocidade da luz (cerca de 300.000 quilômetros por segundo).

É interessante notar que essa transformação não faz sentido se  $|v/c| \geq 1$ , pois então o denominador se tornaria imaginário ou nulo. Segue que na Relatividade Restrita,

**$|v| < c$ : o módulo da velocidade relativa entre dois referenciais é sempre menor que  $c$ .**

De acordo com Natário (2010, p. 11), a Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Einstein em 1905, resume-se em explorar as consequências dessas transformações.

#### 4.3.2 Contração do Espaço – O Trem não – Euclidiano

Uma das consequências da Teoria da Relatividade Restrita é o efeito da contração do espaço (comprimento). Para ilustrar como esse efeito se opõe à Geometria Euclidiana, onde os comprimentos são constantes, iremos propor o seguinte problema teórico:

*Como encaixar um trem que mede 1,5 quilômetros, por muito tempo, dentro de um túnel que mede 1,0 quilômetro?*

---

<sup>20</sup> Hendrik Lorentz, físico holandês, prêmio Nobel de Física (1902).

O que temos de fazer, de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, é calcular a velocidade mínima que pode permitir que esse fenômeno ocorra. Vamos desconsiderar a escala, isto é, os valores considerados são adimensionais e que podem ser quilômetros, metros, milhas, etc. Os dados do problema que importam é que o trem tenha 1,5 unidades de comprimentos e o túnel tem 1,0 unidades de comprimento.

As Transformações de Lorentz – Einstein nos fornecem:

$$\Delta l = \frac{\Delta l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Observe que se  $|v| \ll c$  o termo dentro da raiz é aproximadamente igual a 1, e então  $\Delta l \cong \Delta l'$ .

Voltemos ao nosso problema. O que queremos obter é a velocidade que o nosso trem tem de se mover de forma que seu tamanho se reduza de 1,5 para 1,0 (para poder encaixar dentro do túnel), quando medido por um observador que não se move com o trem. A fim de obter esse valor, vamos trabalhar a relação acima e ver o que obtemos:

$$\Delta \ell = \frac{\Delta \ell'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta \ell'}{\Delta \ell}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{\Delta \ell'}{\Delta \ell} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left( \frac{\Delta \ell'}{\Delta \ell} \right)^2$$

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta \ell'}{\Delta \ell} \right)^2}$$

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{1,0}{1,5} \right)^2} \approx 0,7454c$$

A conclusão disto é que o trem tem de ter pelo menos 74,54% da velocidade da luz para reduzir seu comprimento e caber dentro do túnel. De outro modo, na geometria euclidiana ninguém fala de *contração do espaço* pelo fato de o módulo da diferença de coordenadas  $x$  de dois pontos, A e B, em geral, ser menor que a distância entre os pontos:  $|x_A - x_B| \leq d(A, B)$ .

Assim,

- *na geometria euclidiana comprimentos são constantes.*

- *Na contração de Lorentz da relatividade restrita, o comprimento depende do observador.*

- *A Relatividade Restrita modifica a geometria.*

Outra consequência da Teoria da Relatividade Restrita, e que novamente é contrária à geometria euclidiana onde o tempo é uma entidade absoluta, é a chamada dilatação do tempo. Para o tempo relativístico, as transformações de Lorentz fornecem:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

O efeito da dilatação temporal da Relatividade Restrita pode ser explorado didaticamente por meio do chamado “paradoxo dos gêmeos”. Nesse experimento mental, um gêmeo permanece na Terra ao passo que o outro viaja a uma velocidade próxima a da luz para uma estrela vizinha e retorna após alguns anos. O viajante será então mais novo do que o outro que tinha ficado!

#### 4.4 Geometria de Minkowski

A percepção de que a relatividade especial podia ser tratada como uma geometria do espaço-tempo foi desenvolvida por Hermann Minkowski (1864 – 1909) que apresentou uma formulação baseada em quadrivetores, de Hamilton. (MARTINS, 1995, p. 68).

Nessa geometria o espaço e o tempo são entidades indissociáveis e passam a formar um contínuo espaço-tempo.

Em 1908, Minkowski apresenta uma conferência sobre “espaço e tempo”. No relatório sobre o assunto, Minkowski começou com estas palavras:

Os pontos de vista sobre o espaço e o tempo que pretendo apresentar-lhes provém do terreno da física experimental, e aí reside sua força. São radicais. Daqui em diante, o espaço, por si só, e o tempo, por si só, estão condenados a desvanecer-se em meras sombras, e apenas um tipo de união dos dois conservará uma realidade independente. (MINKOWSKI *apud* PAIS, 1995, p. 175).

De acordo com Einstein (1999, p. 49), o mundo dos eventos físicos na geometria de Minkowski é naturalmente de quatro dimensões no sentido espaço temporal, configurando eventos que são descritos por quatro números, a saber, as três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal:  $(x, y, z, t)$ .

Vale ressaltar, aqui, que essa abordagem é não-euclidiana, pois a Geometria Euclidiana só estuda entes geométricos com até três dimensões. (MARTINS, 1995).

Minkowski observou que as transformações de Lorentz da Relatividade restrita pode ser caracterizada de uma maneira ainda mais simples, se em lugar de  $t$  introduzirmos como variável de tempo a quantidade  $\sqrt{-1} ct$ . Minkowski publicou seu trabalho mostrando que as variáveis  $t$  e  $x, y, z$ , que representam o tempo e o local de um evento na Relatividade Restrita, podem ser consideradas coordenadas de um espaço não-euclidiano (FAGUNDES, 2009, p. 75). Portanto:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= z \\x_4 &= \sqrt{-1} ct,\end{aligned}$$

Isso fornece a métrica de Minkowski no intervalo:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

Em notação diferencial:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Cabe aqui um comentário. Na mecânica de Newton temos como elemento de linha:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

O tempo não está envolvido, pois, do ponto de vista newtoniano, o espaço é uma entidade absoluta assim como o tempo, que é precisamente a concepção geométrica euclidiana. Desse modo, vale a métrica euclidiana, isto é, o Teorema de Pitágoras para calcular distâncias.

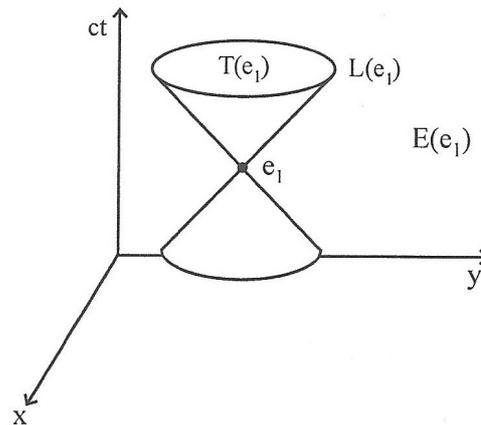
Alguns livros representam a métrica de Minkowski da seguinte forma:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Com essa variação da métrica, vamos definir intervalo entre dois eventos  $e_1$  e  $e_2$

$$Q(e_1, e_2) = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

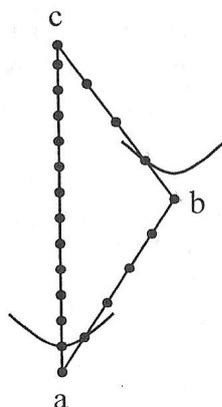
É a chamada distância temporal. Ela é a chave para determinação da geometria do espaço-tempo (LESCHE, 2005, p. 47). A distância temporal é uma grandeza absoluta e não depende da escolha de um referencial. A história do evento  $e_1$  é representada pelo diagrama de espaço-tempo, conforme figura 4.1.



**Figura 4.1:** diagrama de espaço-tempo.  
**Fonte:** Lesche (2005, p. 60).

Dado que a distância temporal definida anteriormente seja  $a$ ,  $b$  e  $c$  eventos, sendo  $b$  um evento intermediário, isto é,  $b$  é mais tarde que  $a$  e mais cedo que  $c$ , então, na geometria de Minkowski vale a desigualdade inversa:

$$\tau(a, c) \geq \tau(a, b) + \tau(b, c).$$



**Figura 4.2:** desigualdade triangular :  $5s + 4s < 12,76$ .  
**Fonte:** Lesche (2005, p. 84).

Isso é exatamente o contrário do que se passa na Geometria Euclidiana, onde o comprimento de um lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados (desigualdade triangular).

#### 4.5 Relatividade Geral

A Relatividade Geral envolve uma abordagem matemática bem mais complexa. Mas, o interessante é que vários conceitos desta teoria nós já abordamos no capítulo 3, com a descrição das geometrias não-euclidianas.

Iremos apresentar algumas noções básicas da Teoria da Relatividade Geral, de forma que possamos explorar os conceitos da Geometria Não-euclidiana presentes nesta teoria. Ou, nas palavras de Einstein:

O nosso próximo exemplo será ainda mais fantástico (...). Temos de abordar um novo problema, o da conexão entre a teoria da relatividade geral e a geometria (EINSTEIN, 2008, p. 186).

A Teoria da Relatividade Geral é uma generalização da Teoria da Relatividade Restrita, que considera a geometria de Minkowski como ponto de partida.

Segundo Costa (1995, p. 67), com a Teoria da Relatividade Geral, Einstein resolveu ao mesmo tempo o problema da gravitação e o problema de exprimir as leis dos fenômenos naturais mediante equações válidas para qualquer sistema de referência. Nessa nova teoria, a gravitação deixa de ser uma força de ação instantânea à distância e se reduz à geometria do Universo.

Conforme argumenta Cherman (2004, p. 105), Einstein precisava avançar, mas seu arcabouço matemático teórico não permitia. Sua frustração com relação a isso pode ser comprovada em carta a seu amigo Marcel Grossman (1878 – 1936), onde pede desesperado: “*Grossman, você tem que me ajudar, senão fico louco!*” (CHERMAN, 2004, p. 106).

E então, Grossman apresenta Einstein às Geometrias Não-Euclidianas. A geometria de 4-dimensional, descoberta por Minkowsky, é estendida por Einstein para um espaço-tempo curvo. Dessa forma, Einstein combina a métrica de Minkowski com a geometria curva de Riemann para obter seu espaço-tempo curvo.

Conforme Cherman (2004, p. 108), Grossman, além de apresentar Einstein às Geometrias Não-Euclidianas, também lhe mostrou alguns resultados do cálculo tensorial, que é a ferramenta utilizada por Riemann para medir a curvatura do espaço no ponto, já vista em 3.2.3.

#### **4.5.1 Princípio da Equivalência**

Conforme Natário (2005, p. 59), em 1907, dois anos após publicar a Teoria da Relatividade Restrita, Einstein teve, nas suas próprias palavras, “o pensamento mais feliz de sua vida”. Esta ideia, a que mais tarde deu o nome de Princípio de Equivalência, resume-se a isto: para um observador em queda livre, tudo se passa como se não houvesse gravidade (a ideia do elevador). O princípio de equivalência nos diz que a massa inercial e a massa gravitacional são as mesmas. Para teoria da relatividade Geral, o ponto básico é o princípio de equivalência.

#### **4.5.2 Desvio da luz pelo Campo Gravitacional**

A luz sofre atração gravitacional. Não tem massa, mas ainda assim muda de caminho na presença da matéria (campo gravitacional). Mas por que a luz se curva?

Conforme Costa (1995, p 68), na Teoria Geral da Relatividade, a velocidade da luz não é mais uma constante absoluta, e a trajetória do raio luminoso não é uma reta, mas uma geodésica. A lei da gravitação de Newton é apenas uma aproximação, e a nova teoria a compreende como caso particular. Nesse contexto, deixa de valer a geometria euclidiana e passamos a considerar a geometria riemanniana.

Em sua forma final, a relatividade geral amarra a geometria do espaço-tempo à quantidade de matéria e energia nele existentes. Isso é apresentado por meio de uma equação tensorial:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{c^2} G \Gamma_{\mu\nu}$$

Nessa equação,  $R_{\mu\nu}$  é o Tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é o Tensor métrico,  $R$  é o escalar de curvatura,  $\frac{8\pi}{c^2} G$  é constante gravitacional de Einstein, e  $\Gamma_{\mu\nu}$  é o chamado Tensor de energia-momento. Essa equação relaciona termos que dizem respeito à geometria do espaço-tempo (à esquerda) e termos que se referem ao conteúdo de massa e energia (à direita).

De modo geral, podemos dizer que enquanto a matéria diz ao espaço como se curvar, o espaço reage de volta e diz à matéria como se mover. Isto é, a geometria do espaço-tempo diz à matéria como se mover, e a matéria reage de volta dizendo ao espaço como se curvar. Esta é a ideia básica por trás da Teoria da Relatividade Geral (MAIA, 2009, p 46).

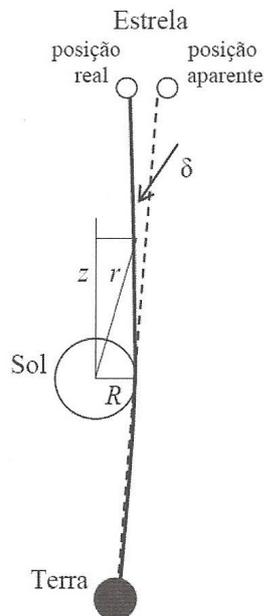
Em um campo gravitacional, a trajetória de um raio luminoso deve sofrer uma curvatura, semelhante à curvatura que experimenta um corpo lançado através desse campo. De acordo com a teoria, um raio luminoso que passa rente a um corpo celeste é desviado na direção deste. O ângulo de desvio de um raio luminoso que passa próximo ao Sol é dado por:

$$\delta = \frac{4G_N M_S}{R_S c^2}$$

Onde  $G_N$  é a constante gravitacional,  $M_S$  a massa do Sol,  $R_S$  o raio do Sol e  $c$  a velocidade da luz. Substituindo os valores das constantes encontramos:

$$\delta = 1,75'' \text{ de arco.}$$

Segundo a teoria de Einstein (1999, p. 104), metade deste desvio deve-se ao campo de atração (newtoniano) do Sol e metade à modificação geométrica do espaço (curvatura) provocada pelo Sol.



**Figura 4.3:** Ilustração do desvio de um raio de luz procedente de uma estrela pelo Sol: Sua posição aparente fica a um ângulo  $\delta$  da posição normal.

**Fonte:** Fagundes (2009, p. 81).

Conforme Costa (1995), esse valor do ângulo de desvio de um raio luminoso que passa próximo ao Sol é o dobro previsto da Teoria de Newton.

Para comprovar a medição era necessário observar estrelas com posições celestes próximas à borda do Sol. Isso foi feito pela primeira vez em 1919, por ocasião de um

eclipse solar total. Foram organizadas duas equipes de astrônomos, uma em Sobral (CE), no Brasil, e outra em Príncipe, na África. Os resultados foram:

em Sobral,  $\delta=1,98''\pm 0,16''$ ;

em Príncipe,  $\delta=1,61''\pm 0,40''$ .

considerados muito bons para uma confirmação teórica acima. Esta medição foi repetida muitas vezes. Em 1975, o efeito foi observado com ondas de rádio do *quasar* (fonte de rádio quasar-estrela) 3C279, com ótimo resultado  $\delta=1,76''\pm 0,02$  (FAGUNDES, 2009, p. 82).

Um importante resultado da Teoria da Relatividade Geral foi obtido por Karl Schwarzschild (1873 – 1916) já em 1916. Schwarzschild aplicou a fórmula a um objeto compacto de forma esférica (uma estrela, um planeta, por exemplo), e seus resultados foram surpreendentes. Ele encontrou uma região em que os efeitos gravitacionais eram tão violentos, em que o espaço-tempo estava tão curvado, que nem a própria luz conseguia escapar. A existência desses objetos celestes, que mais tarde foram denominados de “buraco negro”, corresponde ao colapso gravitacional de uma estrela de grande massa. Quando a estrela chega ao fim de sua vida, consumindo todo seu combustível nuclear a gravidade vence a pressão, que antes mantinha a estrela em equilíbrio, e colapsa sobre si mesma. O resultado é um intenso campo gravitacional em uma região muito pequena do espaço, a singularidade.

Para regiões assim, a Geometria Hiperbólica possibilita aplicação, como na predição da órbita de objetos submetidos a esses campos gravitacionais intensos (CALDEIRA & CARVALHO, 2008).

A teoria da relatividade, restrita e geral, foi testada ao longo do tempo desde sua formulação teórica e tem se mantido nas previsões.

## 5 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDINAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Pelo que vimos até aqui, acreditamos que seja necessário se considerar a inserção, o papel e a importância das Geometrias não-Euclidianas no âmbito da Geometria Escolar. Trata-se aqui da possibilidade das geometrias não-euclidianas serem inseridas na educação básica, bem como propostas que as relacionem com física moderna (Teoria da Relatividade).

De um lado temos, conforme argumenta Porto e Porto (2008), que existe atualmente uma tendência crescente de se inserirem nos programas de física do ensino médio temas relacionados à física moderna. Sobre isso os autores argumentam:

Sua inserção nos programas escolares se defronta muitas vezes com obstáculos associados à dificuldade de se transmitirem de forma clara conceitos bastante complexos e desenvolvidos em linguagem matemática avançada. (PORTO & PORTO, 2008, p. 1).

Diante disso, acreditamos que uma abordagem que considera as geometrias não-euclidianas como fundamento teórico seja conveniente. Isso porque muito dos conceitos geométricos abstratos presentes na matemática da teoria da relatividade são desenvolvidos no ensino das geometrias não-euclidianas. Outro aspecto positivo de uma abordagem assim é com relação à interdisciplinaridade, já que os conceitos da teoria da relatividade estão fortemente ligados aos conceitos das geometrias não-euclidianas como vimos. Então, por que não aproximar o aluno dos dois tópicos ao mesmo tempo?

Conforme Eisenstaedt & Fabris (2004, p. 185) a obra *Introdução à Teoria da Relatividade*, de Manoel Amoroso Costa, físico-matemático brasileiro, publicado em 1922 é o primeiro livro brasileiro sobre a Relatividade Geral, reeditado pela UFRJ em 1995. Segundo os autores o livro surpreende ainda hoje pela sua limpidez, precisão e concisão.

Amoroso Costa (1995) dedica um capítulo só para tratar das geometrias não-euclidianas, cujo título é “*O espaço não-euclidiano*”. Nele, o autor discute o surgimento das geometrias não-euclidianas e sua relação com a nova física de Einstein. É interessante observar como o primeiro livro brasileiro sobre o assunto,

escrito na época do *fevor* das novas ideias, dedica notável destaque às geometrias não-euclidianas. Isso se opõe à maioria dos textos atuais sobre o tema *Relatividade* que consideram pouca ou nenhuma relação.

## 5.1 O currículo de matemática

Nos últimos anos, surgiram nos meios educacionais oportunidades para inclusão de conteúdos advindos das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidiana, aos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o século XXI. Esses conteúdos têm sido objetos de discussão entre os membros de várias associações de profissionais da Matemática: matemáticos, professores e educadores matemáticos de vários países (KALEFF & NASCIMENTO, 2004, p. 1).

Como resultado dessa discussão, citamos o documento referente ao Ensino Fundamental, os PCN – Matemática – 5ª a 8ª série (BRASIL, 1998), que apresenta a matemática que deve ser trabalhada com os jovens e adolescentes:

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 25).

Existem várias tentativas de se inserirem as geometrias não-euclidianas na educação básica. Com relação a isso, nossa maior motivação é o Currículo de Matemática do Estado do Paraná, elaborado no ano de 2008. Esse documento curricular inclui elementos de Geometrias Não-Euclidianas no rol de conteúdos a serem ensinados nos níveis de ensino fundamental e médio. O conteúdo estruturante “Geometrias” é desdobrado em: geometria plana; geometria espacial; geometria analítica; noções básicas de geometrias não-euclidianas.

Para o Ensino Fundamental, o conteúdo Noções de Geometrias Não-Euclidianas contempla os seguintes conteúdos: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometria dos fractais.

No caso do Ensino Médio, os conteúdos indicados com relação aos elementos de Noções de Geometrias Não-Euclidianas são: geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria Hiperbólica e geometria elíptica.

Como uma das justificativas para tal inserção, o documento apresenta:

Muitos dos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas *geometrias não-euclidianas*. Um exemplo são os estudos que resultaram na *Teoria da Relatividade*, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma geometria não-euclidiana, de modo que conceitos, como “a luz se propaga ao longo de geodésicas e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche”, foram fundamentais (COURANT & ROBBINS *apud* PARANÁ, 2008, p. 56).

Por outro lado, embora haja uma crescente discussão de se inserirem as geometrias não-euclidianas na educação básica, devemos atentar para o fato de que “*professores de ensino Fundamental e Médio, com longa experiência profissional, apresentam um quase total desconhecimento das geometrias não-euclidianas*” (KALEFF & FRANCA, 2008).

Segunda a pesquisa de Kaleff & Franca (2008), que analisaram informações junto ao Fundo FNDE, sobre o Programa Nacional Do Livro Didático (PNLD) e sobre o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM), ambos do MEC, esses autores concluem que, das coleções de livros mais solicitadas pelas escolas, a apresentação didática dos conteúdos geométricos aos alunos, as menções às geometrias não-euclidianas são esporádicas, de caráter meramente ilustrativo quanto ao seu valor histórico para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências.

A maioria dos livros didáticos não faz menção sobre a existência de outras geometrias, no entanto, quando o fazem é apenas a título de ilustração, sem qualquer aprofundamento teórico.

Destacamos, ainda, que os cursos de Formação de Professores de Matemática, em geral, não têm contemplado em suas estruturas curriculares estudos das geometrias não-euclidianas. Isso pode ser comprovado no levantamento feito por Cabariti (2004) das grades curriculares de Licenciatura em Matemática de diversas universidades públicas e privadas do Estado de São Paulo, em que os dados levantados mostram que das 11 Universidades consultadas, apenas quatro incluem essa disciplina (ou tópicos relacionados) em suas grades, sendo que, em duas delas, essa disciplina figura como optativa (CABARITI, 2004, p. 20).

## 5.2 O currículo de física

No que diz respeito à disciplina de Física, pesquisas apontam para uma necessidade de atualização curricular e a introdução de conceitos de Física Moderna na grade curricular do ensino médio. Algumas razões para isso são:

- O “despertar” da curiosidade dos alunos e ajudá-los a reconhecer a Física como um empreendimento humano;
- Os estudantes ouvem falar em temas como buracos negros e *big bang* na televisão ou em filmes de ficção científica, mas nunca nas aulas de física;
- O ensino de temas atuais da física pode contribuir para transmitir aos alunos uma visão mais correta dessa ciência e da natureza do trabalho científico, superando a visão linear do desenvolvimento científico, hoje presente nos livros didáticos e nas aulas de física (OSTERMANN & MOREIRA *apud* OLIVEIRA *et al.*, 2007).

Segundo Dinguini *et al.* (2012), com relação aos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2012, percebe-se maior empenho dos autores em inserir a Física Moderna como conteúdo de Ensino Médio. Nesse contexto, dos 10 livros de física aprovados pelo PNLD 2012, apenas 01 (Gonçalves Filho e Toscano, 2010) não aborda o tema

*Teoria da Relatividade* como conteúdo de Física Moderna. A conclusão do autor é que, no PNLD 2012, todos os autores acreditam que física moderna não é apenas um suplemento à física clássica e sim algo a ser tratado como assunto imprescindível aos alunos. Desse modo, todos os autores passam a dar maior enfoque a este conteúdo aos livros didáticos.

Na seção anterior apresentamos o currículo do Estado do Paraná como modelo inovador, que incluiu as geometrias não-euclidianas no currículo estadual. No entanto, no que se refere ao currículo de física, não existe o mesmo empenho dos educadores sobre o ensino de Física Moderna ou mesmo do tópico Teoria da Relatividade. O mesmo documento estadual que havia sido citado, na disciplina de matemática, como sendo uma aplicação da Geometria Não-Euclidiana. Ou seja, não houve consenso entre os currículos dessas matérias afins.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procuramos apresentar as Geometrias Não – Euclidianas, ao mesmo tempo em que lidamos com outro tema, não menos abstrato, a Teoria da Relatividade, buscando resgatar tanto seus aspectos históricos, filosóficos, a íntima relação com os conceitos geométricos, bem como sua importância para o ensino.

O anseio por tornar mais simples os fundamentos da matemática acabou mostrando que os fundamentos precisavam ser revistos. Negando o quinto postulado dos *Elementos*, foi possível desenvolver outras geometrias diferentes da geometria euclidiana, mas que funcionavam tão bem quanto ela.

A existência de geometrias onde a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser maior ou menor que dois ângulos retos implicava em um novo conceito de espaço. Um espaço que poderia existir apenas como objeto matemático, mas que também poderia existir fisicamente, como propunha Lobachevsky através de suas tentativas de aplicação. Essas teorias não foram muito bem aceitas inicialmente, até serem resgatadas pelas novas teorias físicas que surgiram.

A Teoria da relatividade de Einstein mudou as bases da Física alterando conceitos tão fundamentais como espaço e tempo. Essa nova Física só é possível quando se considera uma geometria Não-Euclidiana.

Acreditamos que a inclusão dos conteúdos das Geometrias não-Euclidianas nas classes de educação básica, Ensino Fundamental II e Médio, seja conveniente, ao mesmo tempo em que defendemos a inclusão do tema *Física moderna*, com o tópico Teoria da Relatividade no currículo do Ensino Médio.

Devido à importância das geometrias não-euclidianas para o desenvolvimento da teoria da relatividade, acreditamos que esta não pode ser negligenciada na apresentação daquela. Conceitos como espaços 4-dimensionais ou mais e espaços curvos, negativo ou positivo, só podem ser considerados se sairmos da geometria euclidiana.

Pensamos que as relações entre as geometrias não-euclidianas e a física ainda podem ser aprofundadas, e que as apresentadas neste trabalho são apenas uma exposição inicial. Investigações podem ser feitas por profissionais da educação que deseja explorar tais ideias e fazer da interdisciplinaridade entre as ciências tema de seus trabalhos.

Existem muitos trabalhos acadêmicos na área de pesquisa pura que utilizam modelos não-euclidianos tais como os apresentados neste texto. Por exemplo, é o caso de Belo (2007) que utiliza o modelo da pseudoesfera para investigações da Mecânica Quântica. Cabe ao professor ter contato com essas pesquisas e tentar traduzir esses resultados para educação básica.

Outro exemplo muito importante de geometria não-euclidiana, e que não tratamos neste trabalho, é o da Geometria Fractal. Essa geometria, embora tenha abordagem diferente, é considerada justamente aquela em que não vale a geometria euclidiana. A geometria Fractal é caracterizada por ter íntimas relações com o mundo natural. Logo, com a Física. Isso fica evidente em Conde (2011) em sua dissertação “*A Distribuição Fractal de Galáxias (...)*”. Atualmente, muitas outras pesquisas de ponta consideram o modelo Fractal, principalmente pesquisas em biologia, biomatemática e biofísica.

Ainda há muito que se fazer para tornar popular entre os educadores e alunos o ensino das geometrias não-euclidianas, bem como a Teoria da Relatividade. Como possibilidade para um trabalho futuro, deixamos como possível proposta a elaboração de atividades que envolvam a matemática do equipamento GPS (Global Positioning System) que possibilita tratar dos dois temas ao mesmo tempo, conforme Alves (2006) pode nos dar alguma ideia.

Esse equipamento de uso cotidiano, presente em grande parte dos aparelhos celulares mais modernos, tem seu funcionamento baseado num modelo de geometria não-euclidiano (Geometria Elíptica), assim como na comunicação do aparelho com os satélites geoestacionários é indispensável se considerar os efeitos relativísticos para correção do tempo. Assim sendo, poderia se configurar um excelente dispositivo didático para se ensinar conceitos abstratos, de forma

interdisciplinar, envolvendo uma tecnologia atual e mostrando que a matemática, a ciência, está mais próxima dos alunos do que se pode imaginar.



## REFERÊNCIAS

ANTUNES, Marcelo Carvalho. Uma possível inserção das geometrias não-euclidianas no ensino médio. 2009/02. 54 p. Monografia (Licenciado em matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, 2009.

ABDALLA, Maria C. B. Teorias Modernas do Espaço-Tempo. Disponível em: <[www.cbpf.br/~dcp/papers/papers/mariacristina/espaco\\_tempo.ppt](http://www.cbpf.br/~dcp/papers/papers/mariacristina/espaco_tempo.ppt)>

Acesso em: 09 nov. 2013.

ALVES, S. A matemática do GPS. Revista do professor de matemática, n° 59, São Paulo, 2006.

BARKER, Stephen F. Filosofia da Matemática. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BELO, L. R. A. Modelo de Heisenberg em um Espaço com Curvatura Negativa: Excitações Topológicas de *Spin* na Pseudo-Esfera. 2007. 68 f. Dissertação (pós-graduação em Física – *Magister Scientiae*) – Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, 2007.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 3.ed. Blucher. São Paulo, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CABARITI, E. Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2004.

CALDEIRA, P. I. D.; CARVALHO, T. F. de. Tradução do Software NonEuclid. In: Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas, 13, 2008, Campinas. *Anais...* XIII Campinas, 2008.

CHERMAN, Alexandre. Sobre os ombros de gigantes: uma história da física. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2004.

CONDE, S. G. A Distribuição Fractal de Galáxias em  $0,05 \leq z \leq 5,0$ . 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Astronomia) – Observatório do Valongo. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011.

COUTINHO, Lázaro. Convite às Geometrias não-euclidianas. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COSTA, M. A. Introdução à Teoria da Relatividade. 2.ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1995.

CURVELLO, Eduardo. Comentários sobre a Geometria não-euclidiana. Gustavo Guzzo revista acadêmica. N° 4 (2002).

DOMINGUINI, L.; MAXIMIANO, J. R.; LEONEL, C. Novas Abordagens do Conteúdo Física Moderna no Ensino Médio Público do Brasil. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul: *Anais IX ANPED SUL*. Santa Catarina, 2012.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EINSTEIN, Albert. A Teoria da Relatividade Especial e Geral. Tradução Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.

EINSTEIN, Albert, INFELD, Leopold. A Evolução da Física. Tradução de Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2008.

EISENSTAEDT, J.; FABRIS, J. C. Amoroso Costa e o primeiro livro brasileiro sobre a Relatividade Geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, V. 26, n. 2, p. 185 – 192, 2004.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp. Campinas, 2004.

FAGUNDES, Hélio V. Teoria da Relatividade: no nível matemático do ensino médio. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FERREIRÓS, José. Kant, Gauss y el problema del espacio. Disponível em: <[http://personal.us.es/josef/JF\\_v2\\_public.html](http://personal.us.es/josef/JF_v2_public.html)>

Acesso em: 09 nov. 2013.

INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. *Plato*. Disponível em <<http://plato.if.usp.br/~fma0374d/aula11/node4.html>>.

Acesso em: 26 de out. 2013.

JAMMER, Max. Conceito de Espaço: a história das teorias do espaço na física. Tradução de Vera Ribeiro. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Ed. PUC – Rio, 2010.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. *Boletim Gepem*, n° 44, Rio de Janeiro, 2004.

KALEFF, A.M; FRANCA, J. C. A História, as Geometrias Não-Euclidianas e os Livros Didáticos do Ensino Médio: uma análise da apresentação de retas paralelas In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 4, 2008. Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro, 2008.

LEGARDA, Hernán Jairo Narváez. Teoria de las paralelas y La emergencia de las geometrías no euclidianas. Um desarrollo histórico y epistemológico. 2011. 253 p. Trabajo de Grado (Licenciado en Matemáticas y Física) – Universidad Del Valle, Santiago de Cali, 2011.

LESCHE, Bernhard. Teoria da Relatividade. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

MAIA, Nelson B. Introdução à Relatividade. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MARTINS, Roberto de A. A Influência das Geometrias Não-euclidianas no Pensamento Físico do Século XIX. Revista da SBHC, n. 13, p. 67-80, 1995.

NATÁRIO, José. A Geometria da Relatividade. Disponível em: <<http://www.math.ist.utl.pt/~sanjos/estagio/Textos.pdf>>

Acesso em: 09 nov. 2013.

OLIVEIRA, F. F.; VIANNA, D. M.; GERBASSI, R. S. Física Moderna no ensino médio: o que dizem os professores. Ver. Bras. Ensino Fís. V. 29, n° 3. São Paulo, 2007.

O'SHEA, Donal. A Solução de Poincaré. Tradução Paulo Cezar Castanheira. Rio de Janeiro: Record, 2009.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. Curitiba: SEE/PR, 2008.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Física. Curitiba: SEE/PR, 2008.

PAIS, Abraham. Sutil é o Senhor: a ciência e a vida de Albert Einstein. Tradução Fernando Parente e Viriato Esteves. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

POINCARÉ, Henri. O valor da Ciência. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, 1995.

PORTO, C.M.; PORTO, M.B.D.S.M. *Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 1, 1603, (2008).

SAMUCO, José Maria Eduardo. A Gênese da Geometria Hiperbólica. Universidade do Porto, Departamento de Matemática Pura – Faculdade de Ciências. Porto, 2005.

SEIXAS, W. Um estudo sobre a geometria extrínseca dos espaços-tempo. Dissertação (Mestrado) \_ Universidade de Brasília, 1989.

SILVA, Ana Paula Bispo da. O Desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX. 2006. xxx f. Tese (Doutorado em .....) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”. Campinas, SP. 2006.

SILVA, Karolina B. Ribeiro da. Noções de geometrias não-euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. - 1 ed. – Curitiba, PR: CRV, 2011.

TENÓRIO, Robinson M. A razão e o tempo: trilhas da matemática na teia da história. Salvador: EDUFBA, 2009.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. Seara da Ciência. Disponível em:  
< <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler.htm>>

Acesso em: 09 nov. 2013.

