INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

LOGARITMOS: NAPIER *VERSUS* DANTE

Diogo Oliveira Soares

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof.Ms. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP
São Paulo
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Soares, Diogo Oliveira.
Logaritmos: Napier *versus* Dante / Diogo Oliveira Soares - São Paulo: IFSP, 2012.
69f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador (es): Henrique Marins de Carvalho.

1. Logaritmos. 2. John Napier. 3. História da Matemática. 4. Livro Didático. 5. Ensino de Matemática. I. Título do Trabalho

DIOGO OLIVEIRA SOARES

LOGARITMOS: NAPIER *VERSUS* DANTE

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 12/07/2012 **CONCEITO:** 10,0

Profa. Me. Elisabete Teresinha Guerato
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. José Maria Carlini
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Aluno: Diogo Oliveira Soares

"... Ensinar o caminho, eu não sei
Das mil vezes que por lá eu passei
Nunca pude guardar o seu desenho
Como posso saber de onde venho
Se a semente profunda eu não toquei?

Esse longo caminho que eu traço
Muda constantemente de feição
E eu não posso saber que direção
Tem o rumo que firmo no espaço
Tem momentos que sinto que desfaço
O castelo que eu mesmo levantei
O importante é que nunca esquecerei
Que encontrar o caminho é meu empenho
Como posso saber de onde venho
Se a semente profunda eu não toquei?"

"... Se não olho pra trás com claridade
Um futuro obscuro aguardarei
Mas aquela semente que sonhei
É a chave do tesouro que eu tenho
Como posso saber de onde venho
Se a semente profunda eu não toquei?..."

(Siba e Bráulio Tavares, 1999)

Aos Meus Pais e à minha irmã

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado coragem, disposição, força e humildade para encarar o desafio de estudar Matemática e poder realizar este trabalho.

Agradeço aos meus pais e à minha irmã pelo apoio e compreensão no decorrer da minha vida.

A todos os colegas de classe e companheiros da Matemática. Em especial: Orlando, Toninho, Filipe, Anderson (Bigafour), Anderson (Perucão), Tati, Thaís, Patrícia, Lindomar, Renata, Sara, Cideni, Leandro, André, Arnaldo, Jéssica, Felipe, Marcos Medeiros, David, Fernando Pavan, Fernando Manholer, Éverton, Robinho, Roberto, Djalma e Diego.

Ao Diretor Geral Carlos Alberto Vieira, pelo apoio durante a batalha que foi o 2º semestre de 2011.

A todos os professores, desde a pré-escola até os da graduação.

Em especial: ao Prof.Ms Henrique Marins de Carvalho, pela paciência e orientações; à Profa. Ms. Cristina Polomo; à Profa. Dra. Mariana Baroni; à Profa. Ms Elizabeth Guerato; ao Prof. Ms José Maria Carlini; à Profa. Dra Delacir Poloni; ao Prof.Ms. César Adriano Batista; ao Prof.Ms. Marco Granero; ao Prof. Ms. Amari Goulart.

A todos os funcionários do IF-SP Campus São Paulo e em especial à Vera e ao Domingos.

RESUMO

Tendo em vista a importância da História da Matemática no Ensino, este trabalho tem o intuito de resgatar a essência dos logaritmos e situá-la nos dias de hoje. Desse modo, comparamos os conceitos de logaritmo e função logarítmica extraídos da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, publicada em 1614, por John Napier, com um livro didático de Matemática, aprovado pelo Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM). A partir disso, demonstramos que a ideia de base que temos hoje não se aplica à ideia de logaritmos concebida no século XVII, assim como as somas (ou subtrações) de logaritmos não eram exatamente logaritmos de produtos (ou quocientes). Por meio de um sistema de equação diferencial, identificamos o caráter funcional implícito na formulação dos logaritmos de Napier. Com base no contexto histórico no qual sua obra está inserida, mostramos que antigamente os logaritmos eram importantes por facilitar cálculos extensos; em contrapartida, considerando os avanços tecnológicos proporcionados pela era da informação, notamos que atualmente a utilidade dos logaritmos está vinculada às inúmeras aplicações de modelos matemáticos baseados nas propriedades da função logarítmica. Por fim, evidenciamos brevemente a questão da interdisciplinaridade e da contextualização dos logaritmos na própria matemática, com o objetivo de identificar apresentações didáticas nas duas obras estudadas.

Palavras-chaves: Logaritmos; John Napier; História da Matemática; Livro Didático; Ensino de Matemática.

LOGARITHMS: *NAPIER VERSUS DANTE*

ABSTRACT

In order to know importance of the History of Mathematics Education, this paper aims to rescue the essence of the logarithms and situate it to actual days. Therefore, was compared the concepts of logarithms and logarithmic function from the work of Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, published in 1614 by John Napier, with a book of mathematics teaching, approved by the “Programa Nacional do Livro do Ensino Médio” (PNLEM). From this, was demonstrated that the idea of base that we have nowadays does not apply to the idea conceived of logarithms in the 17^{th} century, as are the sums (or subtractions) of logarithms were not exactly logarithms of products (or quotients). Through a system of differential equation, was identified the functional character implicit in the formulation of the logarithms of Napier. Based on the historical context in which his work is included, was showed that the logarithms were important to facilitate extensive calculations, however, considering the technological advances provided by the information age, is noted that currently the use of logarithms are linked to numerous applications mathematical models based on the properties of the logarithmic function. Finally, was briefly pointed out the issue of interdisciplinarity and the contextualization of the logarithms in mathematics itself, with the aim of identifying didactic presentations in the two works studied.

Keywords: Logarithms; John Napier; Mathematics History; Didactics Books; Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao mesmo tempo em que a vasta utilização de raciocínio matemático garante sua aplicação em salas de aula, o estudo dos logaritmos pode provocar muita apreensão nos alunos do ensino médio e da graduação.

Por isso, é necessário desmistificar a ideia de que logaritmos é a “assombração” da matemática. Conhecendo sua essência, a assimilação poderá ser mais produtiva e menos tediosa, sem que haja um desperdício de tempo com exaustivos cálculos de fórmulas e propriedades, mas sim um ganho na construção desse conhecimento.

De acordo com Miguel (1997), alguns dos argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas da História da Matemática são:

- a história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino;
- a história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
- a história é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico; e
- a história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática;

Assim, a pesquisa historiográfica sobre os logaritmos torna-se necessária, pois, a partir dela, poderá ser verificado porque é importante o ensino e a aprendizagem desse conteúdo. Podemos verificar qual a necessidade de usar os logaritmos no século XVII e a de usá-los numa sociedade repleta de informação e tecnologias, bem como o modo com que essa ferramenta se relacionava com outros temas da matemática na época em que foi inventada e de que forma isso acontece atualmente e quais os fatores que tornam esse assunto tão relevante na matemática.

Sem nenhuma pretensão de facilitar a tarefa de ensinar os logaritmos, mas sim de resgatar sua origem e o que restou dela nos dias de hoje, esse trabalho propõe a investigação de semelhanças e diferenças entre duas abordagens inseridas em contextos distintos, contribuindo para a pesquisa em Educação Matemática por meio de um estudo historiográfico e comparativo.

Portanto, pensando numa pesquisa historiográfica voltada para o ensino de Matemática, associamos a um determinado livro didático as informações conceituais extraídas da primeira publicação oficial sobre logaritmos, que foi intitulada *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos),em 1614, por John Napier, cuja biografia será apresentada na seção 3.2.1.

Para desenvolver a proposta, dividimos o trabalho do seguinte modo:

- Capítulo 2: *Justificativa da escolha do livro didático*, em que justificamos a escolha do livro didático usado como objeto de estudo comparativo.

- Capítulo 3: *Contexto histórico da origem dos logaritmos*, em que contextualizamos historicamente o livro que semeou os logaritmos na matemática e apresentamos as biografias de John Napier e Henry Brigss, pois este último, apesar de não ter sido autor da obra que será estudada, manteve contato com o primeiro e aperfeiçoou o sistema de logaritmos publicado em 1614.

- Capítulo 4: *Resumo geral da obra Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, em que resumimos brevemente a obra de John Napier.

- Capítulo 5: *Napier versus Dante*, em que comparamos a ideia original dos logaritmos com a abordagem encontrada no livro didático escolhido.

- Capítulo 6: *Considerações finais*, em que apresentamos os resultados obtidos, levando em consideração aspectos que foram comparados e que poderão servir para trabalhos posteriores.

2 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO

Considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN, 1999) e o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM), a escolha do livro didático para o estudo comparativo dos logaritmos procurou um autor, cuja coleção seguisse as seguintes orientações metodológicas, presentes nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e também abordadas por Bianchi (2006), em sua dissertação de mestrado, na qual ela traz uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos:

- aplicações da matemática no cotidiano, através da apresentação de situações-problemas, de modo que o aluno perceba a importância de aprender determinado conteúdo, relacionando a experiência atribuída na sala de aula com o mundo em que ele vive;

- interdisciplinaridade, visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) priorizam a visão de conteúdos além de conceitos, através da interação entre as áreas de ensino, que devem se envolver independente e conjuntamente;

- modelagem Matemática, a fim de libertar a imaginação do aluno e situá-lo num contexto no qual ele poderá desenvolver métodos e fórmulas matemáticas, estimulando o raciocínio, a criação e autonomia de pensamento;

- história da Matemática como recurso didático não só informativo, mas também como parte integrante do desenvolvimento do conteúdo; e

- incentivo ao uso de tecnologias, através da adequação de calculadoras e computadores no ambiente escolar.

Levando em conta tais aspectos, o livro didático *Matemática: Contexto e Aplicações* (Volume I) de Luiz Roberto Dante foi escolhido, pois possui uma linguagem clara e concisa e é aprovado pelo PNLEM.

Além disso, seu *Manual do Professor*, que é avaliado pelos critérios classificatórios do PNLEM, evidencia a intenção do autor em trabalhar os conceitos matemáticos intuitivamente e construtivamente, antes da simbologia e da linguagem matemática, bem como utilizar a história da matemática através da relação de seus episódios com a evolução da humanidade. Desta forma, contribui para o entendimento do conteúdo em questão e não apenas serve como leitura adicional, que não se adapta ao conteúdo e ao modo com o qual ele foi abordado.

Pelo exposto, o livro *Matemática: Contexto e Aplicações* está de acordo com as exigências sociais da atualidade, encontradas na Lei de Diretrizes e Base (LDB), contribuindo para a socialização e universalização do ensino, cuja metodologia auxilia o professor e atende aos principais campos de competência a serem desenvolvidos com a Matemática no Ensino Médio: representação e comunicação; investigação e compreensão; percepção sociocultural e histórica da Matemática.

Porém, vale ressaltar que a coleção de Luiz Roberto Dante não é a única que atende às orientações e exigências mencionadas, assim como não é o único autor de livro didático bem avaliado no PNLEM. Outros autores como, Manoel Paiva e Iezzi, poderiam fazer parte deste trabalho, pois suas coleções também são aprovadas pelo PNLEM e, por isso, serviriam perfeitamente como objeto desse estudo comparativo.

Desse modo, esclarecemos que o livro de Dante serve apenas para identificar uma abordagem de logaritmos reconhecida e aproveitada em salas de aula, a fim de que possamos comparar o que restou da ideia original de Napier em um livro didático atual. Obviamente, seus tópicos apresentados também podem, de certa forma, ser encontrados em qualquer outro livro aprovado pelo PNLEM.

3 CONTEXTO HISTÓRICO DA ORIGEM DOS LOGARITMOS

Tendo em vista que os estudos de Napier foram desenvolvidos no final do século XVI até a segunda década do século XVII, apresentamos a seguir um breve resumo do contexto histórico desse período, bem como uma pequena biografia de John Napier e Henry Brigss, a fim de evidenciar alguns fatores políticos, econômicos, sociais e culturais que, de certo modo, exerceram influência no advento dos logaritmos.

3.1. Contexto Histórico

Conforme Alves e Oliveira (2010), os séculos XVI e XVII estão inseridos no período da história ocidental denominado Idade Moderna. Seu início é considerado a partir da tomada de Constantinopla (capital do Império Romano do Oriente) pelos turcos otomanos, em 1453, e o término é caracterizado pela Revolução Francesa, em 1789. Logo, a Idade Moderna se inicia no século XV e se estende até o século XVIII.

A Idade Moderna é um período de transição, pois o modo de produção feudal foi substituído pelo modo de produção capitalista, o comércio se desenvolveu e as cidades cresceram. Somam-se a isso alguns inventos que foram introduzidos na Europa e se tornaram fundamentais para o progresso técnico e avanço da ciência, como a bússola, pólvora e imprensa.

Assim, surgiu a burguesia, que reunia banqueiros, artesãos, camponeses e mercadores. A partir da união entre a Igreja e essa nova classe social houve a abertura do sistema capitalista, que do século XV ao XVIII é conhecido pela fase do capitalismo comercial, quando começaram a existir relações de trabalho e produção assalariada.

Devido ao monopólio comercial italiano e à supremacia turca nos portos mediterrâneos, após a tomada de Constantinopla, era necessário descobrir novas rotas marítimas para fortalecer a economia europeia, o que acarretou o inicio das Grandes Navegações.

Com o desenvolvimento das cidades e do comércio, iniciou - se um movimento cultural na Itália, conhecido como Renascimento, que posteriormente influenciou todo o pensamento e os costumes da Europa ao longo da Idade Moderna. A principal característica do Renascimento foi o retorno à cultura Greco-Romana, que fez renascer a arte, filosofia, ciência e religião.

A cultura renascentista se expandiu pela Europa devido à queda de Constantinopla, pois vários intelectuais se dirigiram à Itália, às Grandes Navegações - que trouxeram novas experiências culturais e científicas com a descoberta do Novo Mundo (Américas), ao apoio dos mecenas - que investiam em artistas, cientistas e literatos, à invenção da imprensa, pelo alemão Johannes Gutenberg (século XV) - que ocasionou a multiplicação dos livros e à abertura das universidades.

Surgiu então o movimento literário conhecido como humanismo, assim como correntes filosóficas, como o racionalismo, hedonismo, antropocentrismo e neoplatonismo. Este movimento passsou a contrariar os preceitos pregados pela Igreja durante a Idade Média, defendendo a tese de que o homem é o centro do Universo e, por isso, é responsável por si mesmo, logo, não está submisso à vontade de Deus.

Dentre os humanistas mais famosos podemos citar:

- Dante Alighieri (1265-1321), Francesco Petrarca (1304-1374) e Nicolau Maquiavel (1469-1527), na Itália;
- Miguel de Cervantes (1547-1616), na Espanha;
- Luís de Camões (1524-1580) e Gil Vicente (1470-1536), em Portugal;
- Michel Montaigne (1533-1592), na França;
- Thomas Morus (1478-1535) e William Shakespare (1564-1616), na Inglaterra; e
- Erasmo de Rotterdam (1466-1536), na Holanda.

O principal propósito dos artistas renascentistas foi a libertação a partir da exposição da personalidade humana, que se tornara notável com o progresso proporcionado pelas mudanças da Idade Moderna e que, por isso, evidenciar-se-iam nas principais pinturas e esculturas da época. Entre tantos artistas que acompanharam esse pensamento, podemos destacar:

- Diego Velázquez (1599-1660) e Miguel Servet (1511-1553), na Espanha;
- Pierre Lescot (1515-1578), na França;
- Albert Dürer (1471-1528), na Alemanha; e
- Leonardo da Vinci (1452-1519), Donatello (1386-1466) e Sandro Botticelli (1444-1510), na Itália.

Com as mudanças culturais e sociais ocorridas na época, a ciência passou por um momento de grande efervescência de ideias, propiciando mudanças de concepções na ciência ocidental, culminando com o Renascimento Científico. Como reflexo disso, na Polônia apareceu Nicolau Copérnico (1473-1543), com sua teoria heliocêntrica, defendendo a ideia de que o Sol, e não a Terra é o centro do Universo, o que contrariava mais uma vez a Igreja.

Além de Copérnico, mas agora no campo da matemática e física, destaca-se o inglês Isaac Newton (1642-1727), famoso pelas suas inúmeras descobertas relacionadas às leis da Física e pela sua enorme contribuição no que se refere ao avanço do Cálculo. Perseguido pela Igreja, destacou-se na Itália Galileu Galilei (1564-1642) com suas pesquisas nas áreas de matemática, física e astronomia. Na França, apareceu René Descartes (1595-1650), pai do racionalismo, criador da geometria analítica e que no campo da filosofia ficou conhecido principalmente pela sua obra Discurso do Método.

Destacaram-se no Renascimento Científico, o astrônomo e cientista alemão Johannes Kepler (1571-1630), famoso por seus estudos sobre as leis dos movimentos do planeta, e Andreas Vesalius (1514-1564), médico belga que ficou marcado como o pai da anatomia moderna.

No campo religioso, o pensamento renascentista acabou refletindo na chamada Reforma Protestante, cujo movimento surgiu dentro da própria Igreja Católica como uma forma de contestação aos valores morais e éticos impostos pelos sacerdotes da época, que naquele momento não eram mais coerentes com o novo pensamento europeu, verificado no renascimento científico e artístico.

O principal nome desse movimento religioso foi Martinho Lutero, que em 1517 publicou as “Noventa e Cinco Teses”. Era o início da Reforma, que se espalhou por toda a Europa, dando origem a outros movimentos religiosos, como o calvinismo (Suécia), puritanismo (Inglaterra), huguenotes (França), reformismo (Países Baixos) e presbiterianismo (Escócia).

Com isso, a Igreja Romana necessitava dar uma resposta, pois diminuía sua influência na Europa e, nos países onde esse movimento protestante era mais forte, a Igreja estava perdendo terras que outrora lhe pertenciam, o que demonstrava uma queda do poder político e econômico do clero. Assim, após a promulgação das resoluções do Concílio de Trento (reunido entre 1545 e 1563) na cidade de Trento, na Itália, a Igreja conseguiu se reafirmar. Era o início da Contra-Reforma, que mais tarde, com a aliança entre a Igreja e o poder civil, acarretaria a institucionalização dos Estados Absolutistas.

A burguesia, oprimida pelos nobres, apoiou os reis, que no absolutismo exerciam poder supremo, pois eram considerados representantes de Deus na Terra. Nessa época houve a criação dos exércitos permanentes e notou-se a influência do Direito Romano, que começou a se restaurar já no século XII.

O absolutismo na Inglaterra apareceu na institucionalização do anglicanismo, caracterizado pela submissão da Igreja inglesa ao poder real e pela habilidade dos reis em controlar o Parlamento e dessa forma dominar totalmente o país.

A partir de então, a Europa passou por várias guerras e revoluções de carácter politico e religioso, como as Guerras de Religião, entre os anos de 1562 e 1598 na França, a Revolução Inglesa (1642-1660), a Revolução Gloriosa (1688-1689), na Inglaterra, Revolução Americana (1776-1783), até culminar na Revolução Francesa, em 1789, quando a burguesia tomou o poder na França, marcando o fim da Idade Moderna e o início da Idade Contemporânea.

3.2. Biografias

3.2.1. John Napier

De acordo com Boyer (1996), John Napier, filho de Archibald Napier, um homem importante na Escócia do século XVI, e de Janet Bothwell, nasceu em 1560 e ingressou, aos 13 anos, na St Andrews University, de onde saiu sem ser graduado. Realizou várias viagens pela Itália, França e Holanda. Após seu casamento, em 1573, foi residir num castelo construído na região de Gartness, onde colocou em prática sua capacidade criativa e conhecimento científico, desenvolvendo práticas de cultivo com maior rendimento e menor custo, além de um curioso método para reduzir o ataque de aves às suas lavouras.

Protestante fervoroso, fez investidas importantes no campo da teologia, publicando, em 1593, o que considerou como sua principal obra: “*Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John”,* um alerta contra as invasões de Felipe da Espanha, apoiado pela Igreja Católica.

Surpreendentemente, para Napier, a matemática era um simples passatempo e ele só se interessava por certos aspectos dela, principalmente os relacionados à aritmética e trigonometria.

3.2.2. Henry Briggs

Segundo Boyer (1996), Henry Briggs nasceu em Warley Wood, próximo de Halifax, em Yorkshire na Inglaterra. Depois de estudar latim e grego, ele entrou na faculdade de St. John, Cambridge, em 1577, e graduou-se em 1581. Interessou-se por navegação e astronomia, colaborando com Edward Wright. Seu interesse pela astronomia foi tão notável que até uma cratera lunar foi nomeada Briggs em homenagem ao professor inglês.

Em 1586, tornou-se o primeiro professor de geometria na recém-fundada Gresham College, Londres, onde lecionou aproximadamente durante 23 anos.

Foi amigo de Chistopher Heydon, escritor de astrologia e, logo após sua publicação, obteve uma cópia do *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, no qual Napier introduziu a ideia dos logaritmos.

A formulação de Napier, detalhada no Capítulo 5, não foi facilmente adaptada nos centros acadêmicos, apesar da enorme aceitação do novo sistema concebido pelo escocês, mas de qualquer forma, o livro incendiou a imaginação de Briggs e, como conseqüência disso, ele acabou contribuindo para o desenvolvimento dos logaritmos com a publicação da obra *Arithmetica Logarithmica*, em 1624, e sua tábua de logaritmos decimais foi usada até o século XIX.

Em 1619, Briggs ingressou na Companhia de Londres, e teve dois filhos: Henry, que mais tarde emigraria para Virgínia, e Thomas, que permaneceu na Inglaterra. Nesse mesmo ano, ele foi nomeado professor de geometria em Oxford e, em julho de 1620, renunciou ao cargo de professor de Gresham College.

Após a contextualização do período histórico e dos autores que primeiro apresentaram a ideia de logaritmos, apresentamos no próximo capítulo o resumo geral da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Esta é inserida num contexto histórico marcado por grandes mudanças culturais causadas pelas ideias renascentistas que deram vida nova à cultura europeia. Nesta época, houve um respeito maior pelos pensadores e cientistas, bem como um resgate da cultura Greco – Romana, cujos princípios são notáveis nas correntes filosóficas que surgiram na Idade Moderna e, de certa maneira, foram capazes de libertar o ser humano da alienação imposta pela Igreja, o que foi fundamental para o desenvolvimento científico e acadêmico desse período.

4 RESUMO GERAL DA OBRA *MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO*

Pelo seu interesse por certos aspectos da matemática, o jovem escocês John Napier se inquietou por algum tempo com as sequências de potências sucessivas de um dado número encontradas em *Arithmetica Integra* de Stifel[1] e em algumas obras de Arquimedes.[2]

Segundo Boyer (1996), ao mesmo tempo em que isso acontecia, havia na época uma grande necessidade de realizar cálculos extensos relacionados à Astronomia e Navegação, devido às mudanças que ocorreram nos séculos XVI e XVII, marcados pelo desenvolvimento científico verificado no Renascimento. Tais cálculos poderiam ser recorridos à trigonometria, através do uso da prostaférese, que relaciona produtos com somas ou subtrações.

Foi assim que, então, Napier começou a pensar num sistema em que somas e subtrações corresponderiam a multiplicações e divisões, respectivamente, através do uso de uma sequência de potências que pudesse atender melhor do que a prostaférese as necessidades de cálculo da época.

Tendo em vista seu uso, principalmente na Astronomia, Napier pôs-se a pensar aproximadamente durante vinte anos numa tábua calculadora com o auxílio de uma relação entre os senos de alguns ângulos e seus “números artificiais” que posteriormente receberiam outro nome.

Através de uma situação cinemática, explicitada no capítulo 5, era notável que essa relação associava os termos de uma progressão geométrica decrescente aos termos de uma progressão aritmética crescente. Além disso, era possível usar interpolação e preencher lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros grosseiros que às vezes apareciam com a ferramenta da trigonometria.

---

[1]Conforme Boyer (1996): Michael Stifel (1487 – 1567) – matemático alemão, publicou *Arithmetica Integra* em 1544.
[2]Conforme Boyer (1996): Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C) – físico, engenheiro, astrônomo grego e considerado o maior matemático da Antiguidade.

A palavra logaritmo, que substituiu o termo “números artificiais”, foi, segundo Miguel e Miorim (2002), criada por Napier para denominar o novo objeto matemático forjado com base nas propriedades correlativas entre os termos de uma PA e de uma PG, e traz subjacente o modo como ele explorou essas propriedades a fim de dotá-las do caráter operatório explicativo do seu aproveitamento na simplificação de cálculos aritméticos. Segundo os autores, logaritmo é uma combinação de duas palavras gregas – *logos e arithmos* -, a primeira significando razão e a segunda, número. Assim, o significado etimológico da palavra logaritmo é o número de razões, sendo que o termo razão refere-se à razão da PG, e número de razões, ou o logaritmo de um termo n da PG, refere-se ao número *n* de vezes em que a razão $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ da PG deveria ser sucessivamente aplicada ao primeiro termo (10^7) dessa mesma PG a fim de se obter o número$10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$.

Com base nesses estudos, Napier publicou sua obra, em 1614, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio,* na qual ele explica detalhadamente sua definição de logaritmos, propondo-se a determinar os logaritmos de segmentos de reta representativos dos senos de certos ângulos. Ainda nesta obra, ele mostra como manipular as propriedades geradas pelo seu sistema. Isto entusiasmou grande parte da comunidade científica da época, além de muitos professores e estudantes de matemática, devido à beleza e praticidade com as quais era possível realizar cálculos que outrora pareciam cansativos e tediosos.

No ano posterior à publicação de sua obra, Napier recebeu a visita inusitada do professor Henry Briggs (1561-1631). Segue abaixo um pitoresco relato deste encontro, como denomina Maor (2008, págs. 26 e 27), feito por um astrólogo chamado William Lilly (1602-1681):

> [...] Um certo John Marr, excelente matemático e geômetra, chegara na Escócia antes de Sr. Briggs, com o propósito de estar presente quando duas pessoas tão cultas se encontrassem. Sr. Briggs marcou um certo dia para o encontro em Edimburgo, mas não comparecendo, Lord Napier passou a duvidar que ele viria. “Ah John”, diz Napier, “o senhor Briggs não vai vir mais”. Naquele momento alguém bate no portão. John Marr desce correndo e recebe o senhor Briggs para sua grande alegria. Ele o leva até a

> câmara do lorde, onde os dois passam quase um quarto de hora se admirando, antes que alguém diga alguma coisa. Finalmente Briggs diz: "Meu senhor, eu realizei esta longa jornada com o propósito de vê-lo em pessoa, e para saber por que artifício de inteligência e engenhosidade o senhor concebeu esta excelente ajuda para a astronomia, os logaritmos, e tendo-os descoberto, eu me pergunto por que ninguém mais pensou nisso antes, agora que sabemos que é tão fácil [...].

Nessa ocasião eles discutiram sobre um possível aprimoramento no método dos logaritmos, que resultou no uso da base 10. Em 1624, Briggs publicou a obra *Arithmetica logarithmica*, com uma tábua de logaritmos decimais, que infelizmente Napier não pode ver, devido à sua morte em 1617.

Antes de iniciar o próximo capítulo, ressaltamos que estamos tomando a obra de Napier como a semente dos logaritmos na matemática, mas

> [...] é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Burgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém, Burgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua Descriptio [...] (Boyer, 1996,pág. 216).

Por isso, não trabalharemos aqui com a formulação de Jobst Burgi[3] pois a obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, de fato, foi a primeira publicação oficial sobre logaritmos na Matemática.

---

[3] Conforme Boyer (1996), Jobst Burgi (1552-1632), suíço, construtor de instrumentos, concebeu seus estudos sobre logaritmos independentemente de John Napier, publicando seus resultados num livro chamado Aritmetishe und geometrische Progress – Tabulen, em 1620.

5 NAPIER *VERSUS* DANTE

Com base no resumo apresentado no capítulo anterior, primeiramente explicamos a definição de Napier para, em seguida, interpretá-la com um sistema de equação diferencial. Isso nos auxilia na representação da situação cinemática pela qual os logaritmos foram definidos, a fim de que possamos adaptá-la para uma linguagem matemática mais usual, facilitando nas comparações que se sucedem neste trabalho.

Feito isso, apresentamos as definições de logaritmo e de função logarítmica, encontradas no livro didático de Dante e, com base nas definições de Napier e Dante, serão comparados os seguintes itens:

- definição de logaritmo e de função logarítmica;
- consequências da definição de logaritmo;
- propriedades operatórias dos logaritmos; e
- aplicações, contextualização dos logaritmos na Matemática e interdisciplinaridade .

Por fim, no Apêndice A, a partir de uma definição encontrada no livro didático de Dante, evidenciamos o quanto foi necessário, no desenvolvimento do Cálculo Integral, um conceito da função logarítmica, que permeia toda a obra de Napier, mesmo sem ele a ter definido. Fazemos isso não mais com o intuito de comparar, mas sim de complementar nosso estudo e mostrar a importância histórica dos logaritmos no avanço da Matemática.

5.1. Definição de logaritmo, segundo Napier

Conforme Boyer (1996), Napier definiu os logaritmos da seguinte forma: considere um segmento de reta AB e uma semirreta CE (veja Figura 5.1). Supõe-se que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B.Concomitantemente ao movimento de P, supõe-se que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CE, com velocidade constante igual à velocidade inicial de P. Napier definiu, então, CQ como o logaritmo da distância PB.

a)

b)

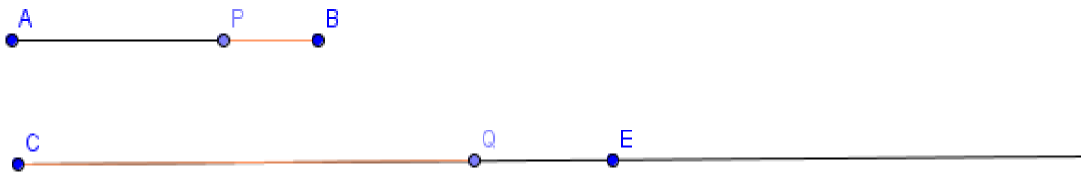


Figura 5.1 – Segmentos de reta usados como auxilio para definição de logaritmo

Considerando PB = x, CQ = y, $V_{P(0)}$ (velocidade inicial de P) =10^7, AB = 10^7, a definição geométrica acima pode ser representada por um sistema de equação diferencial da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x \\ \dfrac{dy}{dt} = 10^7 \end{cases}$$

Em que α é um número real positivo,$\frac{dx}{dt}$ é a velocidade instantânea do ponto P e $\frac{dy}{dt}$ é a velocidade instantânea do ponto Q.

Por conveniência, tomamos α = 1, de tal forma que:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 10^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{dy}{dt} = 10^7 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia, temos :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{10^7}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{10^7} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{10^7} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \; y10^{-7} = -\ln x + k$$

Considerando a definição de Napier, obtemos, de acordo com a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, um problema de valor inicial, de tal forma que:

> para y = 0 $\Rightarrow x = 10^7$, pois quando a distância entre C e Q é nula, a distância entre P e B é igual à medida do segmento AB. Assim, obtemos:

$$0 = -\ln 10^7 + k \Leftrightarrow k = \ln 10^7.$$

Então, $y = (-\ln x + \ln 10^7)\, 10^7 \Leftrightarrow y = \left(\ln \frac{10^7}{x}\right) 10^7 \Leftrightarrow y = \left[\log_{\frac{1}{e}}(x\, 10^{-7})\right] 10^7.$

Aplicando a definição usual de logaritmos, ainda deduzimos que:

$$y = \left[\log_{\frac{1}{e}}(x\, 10^{-7})\right] 10^7 \Leftrightarrow x = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{y}{10^7}} \quad .$$

Como podemos ver, a base desse sistema de logaritmos é $\frac{1}{e}$, porém, no início do século XVII, não se sabia da existência do número "e". No caso de Napier, a fim de que os números da progressão geométrica (x) estivessem bem próximos, era necessário tomar a base do logaritmo muito próximo de um. Na realidade, segundo Boyer (1996, p.214), "Napier não pensou numa base para seu sistema, mas suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes a potências de 0,9999999".

Pode-se dizer, então, que Napier teria escolhido o número $1 - 10^{-7}$ como base do seu sistema de logaritmos (ou 0,9999999) e, para evitar casas decimais, ele multiplicou cada potência por 10^7. Assim, se N = $10^7(1 - 10^{-7})^L$, então L é o "logaritmo" de Napier do número N, ou ainda,

$$\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^L.$$

Veja que essa última definição algébrica parte da definição feita por Napier, de modo que tal expressão é apenas uma adaptação que será muito útil nas comparações que aparecerão neste capítulo.

Através dessa definição, nota-se que, de fato, Napier elegeu o valor[4] 10^7 para a medida do segmento AB, pois quando L = 0 ⇒ N = 10^7. Notemos que L = 0 significa que a medida do segmento CQ é nula, e nesse caso o ponto P ainda não partiu do ponto A, logo PB = AB = 10^7, conforme a dedução feita anteriormente no sistema de equação diferencial.

Segundo a definição apresentada, temos que P descreve um movimento retilíneo uniformemente variado enquanto Q descreve um movimento uniforme. Além disso, vimos que Napier considerava o comprimento do segmento AB igual a 10^7. Logo, podemos inferir que o coeficiente de desaceleração na velocidade do ponto P era de $(1-10^{-7})$ e os intervalos de tempos considerados, a fim de tornarem discretos os movimentos contínuos dos pontos P e Q, eram de 10^{-7}. Desse modo, a Tabela 5.1 apresenta a situação original considerada por Napier, em quet_i, VQ, CQ, CP, AP, PB, são, respectivamente: os valores dos tempos, os valores das velocidades do ponto Q nesses diferentes tempos, os valores das distâncias percorridas pelo ponto Q nesses diferentes tempos, os valores das distâncias percorridas pelo ponto P nesses diferentes tempos, os valores das velocidades do ponto P nesses diferentes tempos, e os valores das distâncias que restam a ser percorridas pelo ponto P nesses diferentes tempos.

Tabela 5.1 – Situação original

t_i	VQ	CQ	AP	VP	PB
$t_0=0$	10^7	0	0	10^7	10^7
$t_1=1$	10^7	1	$(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})$
$t_2=2$	10^7	2	$2(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^2$	$10^7(1-10^{-7})^2$
$t_3=3$	10^7	3	$3(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^3$	$10^7(1-10^{-7})^3$
$t_4=4$	10^7	4	$4(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^4$	$10^7(1-10^{-7})^4$
$t_5=5$	10^7	5	$5(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^5$	$10^7(1-10^{-7})^5$

[4]Conforme Miguel e Miorim (2002): Este número, 10^7, Napier atribuía à medida do raio de uma circunferência e ao longo do qual eram determinados outros segmentos menores representativos dos senos de certos ângulos

Portanto, de acordo com a definição de Napier, os logaritmos de cada uma das distâncias que aparecem na última coluna da tabela seriam iguais às respectivas distâncias que aparecem na terceira coluna:

$\log 10^7 = 0$, $\log 10^7(1 - 10^{-7}) = 1$, $\log 10^7(1 - 10^{-7})^2 = 2$, e assim por diante.

Através da resolução do sistema de equação diferencial e da explanação que foi apresentada em seguida, podemos afirmar que Napier já trazia implicitamente as ideias que mais tarde caracterizariam a própria função logarítmica. Isso fica ainda mais evidente após as definições apresentadas no livro didático que escolhemos. Assim, comparamos a definição original não só com a definição de logaritmo, mas também com a definição de função logarítmica encontrada no livro de Dante.

5.2. Definição de logaritmo e de função logarítmica, segundo Dante.

Ao introduzir o "Capítulo 9 *Logaritmos*", Dante apresenta uma situação-problema relacionada à geografia, mais especificamente ao crescimento populacional da América Latina. Assim, o autor encontra uma equação exponencial que só poderá ser resolvida por logaritmos. Em, seguida, sem resolver a equação, é formalizada a definição de logaritmos (Vejamos Figura 5.2 e 5.3).

No capítulo seguinte, Dante apresenta uma situação relacionada à análise combinatória, recordando a lei da função exponencial que caracteriza o número de resultados possíveis (cara ou coroa) em função do número de moedas lançadas para, em seguida, definir a função logarítmica a partir da ideia de que a função exponencial é bijetora e, portanto admite uma inversa, que é a logarítmica (Vejamos Figuras 5.4 e 5.5).

C A P Í T U L O

9

Logaritmos

1. Introdução

Na América Latina, a população cresce a uma taxa de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1{,}03$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1{,}03)1{,}03 = P_0(1{,}03)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}03)^3$
⋮	⋮
x anos	$P_x = P_0(1{,}03)^x$

Para Refletir

$100\% + 3\% = 103\% = \frac{103}{100} = 1{,}03$

Supondo que a população dobrará após **x** anos, temos:

$$P_x = 2P_0$$

Daí

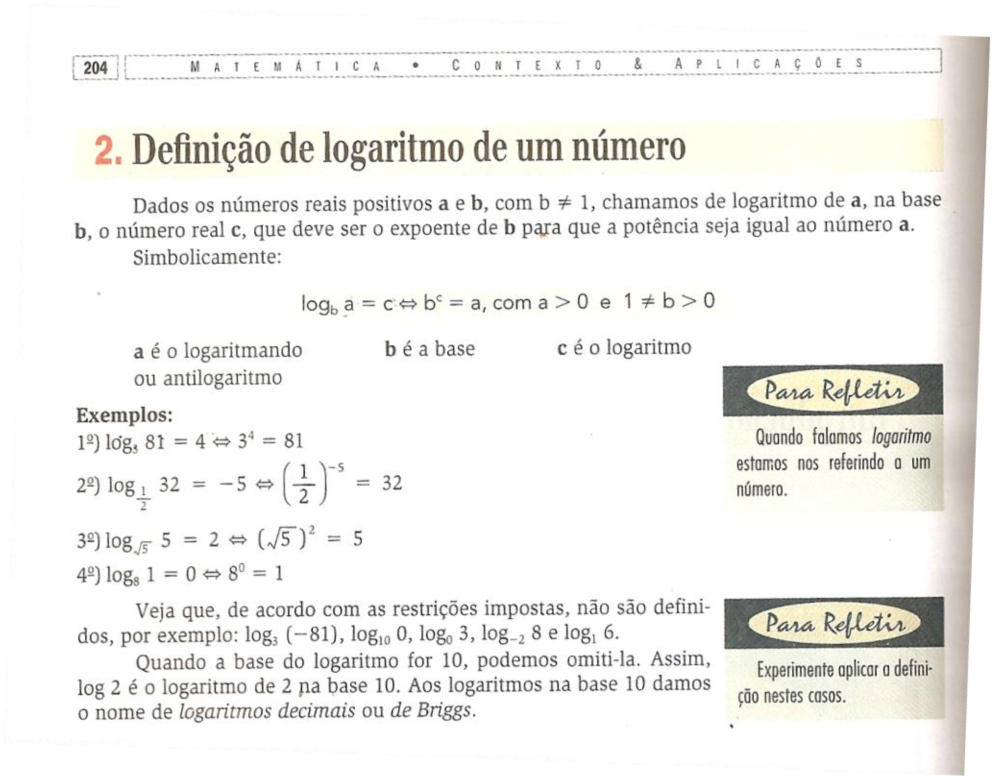
$$\cancel{P_0}(1{,}03)^x = 2\cancel{P_0} \Leftrightarrow (1{,}03)^x = 2$$

Não é possível resolver essa equação transformando-a em uma igualdade de potências de mesma base, como vimos no capítulo anterior.

Para resolvê-la, precisamos utilizar logaritmos.

Figura 5.2 – Introdução à definição de logaritmo dada por Dante.

Fonte: Dante, 1999, p. 203.



204 MATEMÁTICA • CONTEXTO & APLICAÇÕES

2. Definição de logaritmo de um número

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $b \neq 1$, chamamos de logaritmo de **a**, na base **b**, o número real **c**, que deve ser o expoente de **b** para que a potência seja igual ao número **a**.

Simbolicamente:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a, \text{ com } a > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0$$

a é o logaritmando ou antilogaritmo — **b** é a base — **c** é o logaritmo

Exemplos:

1º) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

2º) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

3º) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

4º) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$.

Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, log 2 é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de *logaritmos decimais* ou *de Briggs*.

Para Refletir

Quando falamos *logaritmo* estamos nos referindo a um número.

Para Refletir

Experimente aplicar a definição nestes casos.

Figura 5.3 – Definição de logaritmo dada por Dante.

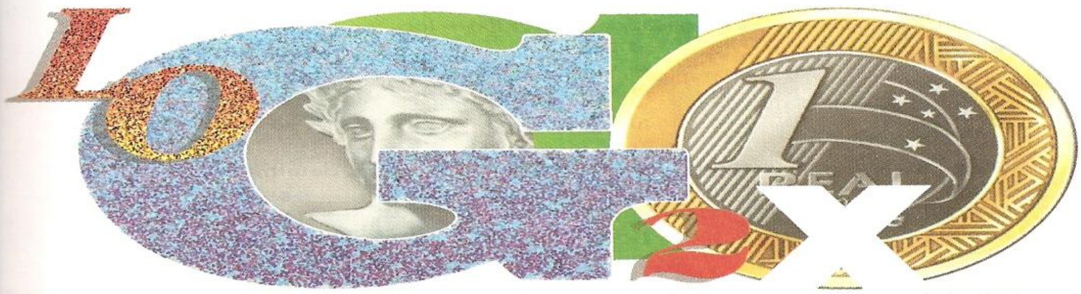
Fonte: Dante, 1999, p. 204

C A P Í T U L O

10

Função logarítmica

1. Introdução



Nos capítulos anteriores vimos que, ao lançar moedas diferentes entre si, o número de resultados possíveis (cara ou coroa) é dado em função do número de moedas lançadas pela lei $f(x) = 2^x$, em que **x** é o número de moedas.

Essa função **f**, definida de $A = \mathbb{N}^*$ em $B = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$, é uma função bijetora. Logo, existe uma função **g**, de **B** em **A**, inversa da função **f**, cuja lei podemos determinar:

- escrevemos $f(x) = 2^x$ como $y = 2^x$;
- trocamos **x** e **y**, obtendo $x = 2^y$;
- escrevemos $x = 2^y$ como $y = \log_2 x$;
- então, $g(x) = \log_2 x$.

Veja a tabela:

Número de resultados	2	4	8	16	...	x
Número de moedas	1	2	3	4	...	$\log_2 x$

Para Refletir

Por que **f** é uma função bijetora?

Quando definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, a função **f** tal que $f(x) = 2^x$ é chamada de função exponencial. Sua inversa, definida de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \log_2 x$, é uma *função logarítmica*.

Figura 5.4 – Introdução à definição de função logarítmica dada por Dante.

Fonte: Dante,1999, p.225

226 M A T E M Á T I C A • C O N T E X T O & A P L I C A Ç Õ E S

2. Definição de função logarítmica

A função **g** que associa a cada número real $x > 0$ o número real $\log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de função logarítmica de base **a**, e é indicada por $g(x) = \log_a x$, em que $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \mathbb{R}$ e $g^{-1}(x) = a^x$.

Figura 5.5 – Definição de função logarítmica dada por Dante.

Fonte: Dante,1999, p. 226

5.3. Definição de logaritmo e de função logarítmica: Napier *versus* Dante

Podemos notar que, nas duas introduções que antecedem as definições dadas por Dante, são utilizadas tabelas que mostram uma variável obedecendo a uma progressão aritmética, ao passo que a outra obedece a uma progressão geométrica. Esse é um dos conceitos que Napier já trazia implicitamente no seu tratamento dado aos logaritmos e que também pode ser observado na própria tábua construída por ele, com a diferença de que nela não estavam sendo investigados problemas relacionados à análise combinatória e muito menos ao crescimento de uma determinada população, mas sim logaritmos de senos de ângulos.

Com base nessas observações, vejamos nas tabelas abaixo como se assemelham as tabelas apresentadas por Dante (Figura 5.2 e Figura 5.4) e a tabela que descreve a situação original dos logaritmos (Tabela 5.1).

Tabela 5.2 – Tabela extraída e adaptada da Figura 5. 2.

Tempo	*População*
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 .1{,}03$
2 anos	$P_2 = P_0(1{,}03)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}03)^3$

Tabela 5.3 – 3ª e a 6ª coluna da Tabela 5.1.

CQ	PB
0	10^7
1	$10^7(1 - 10^{-7})$
2	$10^7(1 - 10^{-7})^2$
3	$10^7(1 - 10^{-7})^3$

Tabela 5.4 – Tabela extraída e adaptada da Figura 5.4.

Número de resultados	*2*	*4*	*8*	*16*	...	*X*
Número de moedas	*1*	*2*	*3*	*4*	...	$\log_2 x$

Tabela 5.5 – 3ª e a 6ª coluna da Tabela 5.1, em linhas.

PB	$10^7\ (1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^2$	$10^7(1-10^{-7})^3$	$10^7(1-10^{-7})^4$	...	N= $10^7(1-10^{-7})^L$
CQ	*1*	*2*	*3*	*4*	...	$L = \log N$

Vale observar que as progressões não são mencionadas diretamente por Dante nos capítulos sobre logaritmos, até porque elas só são explicitadas no capítulo 11 de seu livro.

Outro ponto que pode ser comparado é que a notação algébrica moderna, utilizada por Dante, particularmente a exponencial para potências, só seria apresentada pela primeira vez por William Gardiner[5], em 1742, no seu livro *Tables of Logarithmus* (Tábuas de Logaritmos), ou seja, cerca de 130 anos após a publicação da obra de Napier. Isso mostra que ele realizou seu sistema de logaritmos sem essa ferramenta matemática, que é fundamental para a definição de logaritmos em qualquer texto didático atual que aborda o tema.

Como já mencionamos, no tratamento dado aos logaritmos e na própria definição concebida por Napier, verificam-se implicitamente alguns conceitos que caracterizam a função logarítmica. Talvez, o principal deles reside no fato de que para cada seno de um arco dado, obtemos um único logaritmo e, além disso, cada logaritmo está associado a um único seno, o que evidencia não só uma relação funcional, mas também uma relação biunívoca nesse sistema de logaritmos.

Também já mostramos que Napier propõe uma tábua de logaritmos baseada, essencialmente, na função $f(x) = \left[\log_{\frac{1}{e}}(x\,10^{-7})\right]10^7$, que hoje se denomina

[5] Conforme Miguel e Miorim (2002), Willian Gardiner é conhecido por ter proposto uma definição estritamente algébrica para os logaritmos em sua obra *Tables of Logarithmus.*

bijetora e decrescente.A partir disso, observemos o que Napier (1614, p.4) aponta em sua obra:"*And as a consequence of numbers that increase beyond the total sine 10000000, (which are now called secants or tangents, and which are no longer called sines), the logarithms are less than zero*"[6].

Pensando na Figura 5.1, podemos inferir que quanto mais próximo P estiver de A, maior será a medida do segmento PB e, consequentemente, o ponto Q estará a uma distância muito pequena em relação a C. Imaginando que o aumento da distância de 10^7se deve ao deslocamento do ponto P à esquerda do ponto A, conforme a definição de Napier o ponto Q se deslocaria à esquerda do ponto C. Logo, o segmento PB será maior que 10^7, ao passo que o deslocamento de Q à esquerda de C sugere que a distância entre esses dois pontos seja representada por logaritmos negativos.

Ainda assim, podemos pensar que:

sendo $f(x) = \left[\log_{\frac{1}{e}}(x\, 10^{-7})\right] 10^7$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

E isso é abordado da seguinte forma por Dante (1999, p.228) em uma de suas observações feitas a partir dos gráficos da função logarítmica$f(x) = \log_a x$:

quando 0 < a < 1, a função logarítmica é decrescente

$(x_1 > x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2)$.

[6] Tradução livre: E como uma consequência dos números que aumentam além da distância total de 10000000 (que agora são chamados de secantes ou tangentes, e que não mais são chamados de senos), os logaritmos são inferiores a zero.

5.4. Consequências da definição de logaritmo: Napier *versus* Dante

Essa seção é apresentada do seguinte modo por Dante:

3. Conseqüências da definição de logaritmo

1ª) $\log_a 1 = 0$, *pois* $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$.

2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

208 MATEMÁTICA • CONTEXTO & APLICAÇÕES

3ª) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo **n**.

4ª) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$

Substituindo **x**: $a^{\log_a N} = N$

5ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = y$, temos:

(1) $x = y \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow r = s \Rightarrow \log_a x = \log_a y$

(2) $\log_a x = \log_a y \Rightarrow r = s \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow x = y$

Figura 5.6 – Consequências da definição de logaritmo dadas por Dante.

Fonte: Dante, 1999, págs. 207 e 208.

Antes de seguir na comparação com as consequências que podem ser extraídas da definição de Napier, destacamos que a ideia de base não se aplica à maneira como Napier abordou o tema. Pois, supondo por absurdo que c é uma base qualquer dos logaritmos de Napier, teríamos: $\log_c 10^7 = 0 \Rightarrow c^0 = 10^7$, que não é verdade, visto que qualquer número elevado a zero é sempre igual a 1.

Além disso, também pode ser demonstrado que a unicidade da base não é válida, pois: $\log_c 10^7(1-10^{-7}) = 1 \Rightarrow c = 10^7(1-10^{-7})$, mas

$$\log_c 10^7(1-10^{-7})^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 10^7(1-10^{-7})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 10^{\frac{7}{2}}(1-10^{-7}) \neq 10^7(1-10^{-7}).$$

Porém, para efeito de comparação e simplificação das expressões abaixo, será usada a definição $\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1-10^{-7})^L$, que já foi citada anteriormente. Portanto, fica subentendido aqui que o logaritmo acima não é o de base decimal, mas sim de base (1 - 10^{-7}).

Podemos deduzir as consequências da definição de logaritmo de Napier, do seguinte modo:

1ª)$L = 0 \Rightarrow N = 10^7, pois \log N = 0 \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^0 = 10^7$.

2ª)$L = 1 \Rightarrow N = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)$, pois $\log N = 1 \Leftrightarrow N = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^1 = 10^7(1 - 10^{-7})$

3ª)$L = B \Rightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^B$, pois $\log N = B \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^B$.

4ª)$(1 - 10^{-7})^{\log N} = \frac{N}{10^7}$, pois usando a definição:

$$\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^L \Longrightarrow (1 - 10^{-7})^{\log N} = (1 - 10^{-7})^L =$$

$$= \frac{1}{10^7}[10^7(1 - 10^{-7})^L] = \frac{N}{10^7}$$

5ª)$\log N = \log B \Leftrightarrow N = B$.

Justificativa: Seja $\log N = L_1 e \log B = L_2$.

Então, pela definição:

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_1} \; e \; B = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_2} .$$

Se$\log N = \log B \Rightarrow L_1 = L_2 \Rightarrow 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_1} = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_2} \Rightarrow N = B$.

Se $N = B \Rightarrow 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_1} = 10^7\left(1 - 10^{-7}\right)^{L_2} \Rightarrow L_1 = L_2 \Rightarrow \log N = \log B$.

5.5. Propriedades operatórias dos logaritmos: Napier *versus* Dante

5.5.1. Propriedades operatórias dos logaritmos apresentadas por Dante

1ª propriedade: logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, tiramos $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então:

$$a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se $a^p = a^{m+n}$, então $p = m + n$, ou seja, $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

Conclusão:

Numa mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

Figura 5.7 – 1ª Propriedade: logaritmo de um produto

Fonte: Dante, 1999, p.209

2ª propriedade: logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a \frac{M}{N} = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Daí tiramos $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então:

$$a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Se $a^q = a^{m-n}$, então $q = m - n$, ou seja, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

Conclusão:

Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Figura 5.8 – 2ª Propriedade: logaritmo de um quociente

Fonte: Dante, 1999 p. 210

3ª propriedade: logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a M^N = r$ e $\log_a M = m$.

Daí tiramos: $a^r = M^N$ e $a^m = M$.

Então:

$$a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$$

Se $a^r = a^{Nm}$, então $r = Nm$, ou seja, $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$.

Conclusão:

Numa mesma base positiva, o logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Podemos aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz (quando existir):

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \log_a M$$

Figura 5.9 – 3ª propriedade: logaritmo de uma potência

Fonte: Dante, 1999, págs. 210 e 211

5.5.2. Propriedades operatórias apresentadas por Napier

1ª propriedade: logaritmo de um produto

$$\log \frac{(M.N)}{10^7} = \log M + \log N$$

Demonstração:

Considerando $\log M = L_1 \; e \log N = L_2$. Pela definição, temos:

$$M = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_1} \; e \; N = 10^7(1 - 10^{-7})^{L_2}.$$

A partir disso, o produto entre M e N será:

$$M.N = 10^7(1-10^{-7})^{L_1}.10^7(1-10^{-7})^{L_2} = 10^{14}(1-10^{-7})^{L_1+L_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M.N}{10^7} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}.$$

Se $\frac{M.N}{10^7} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2} \Rightarrow \log\frac{(\mathrm{M.N})}{10^7} = L_1 + L_2 = \log M + \log N$.

2ª Propriedade: logaritmo de um quociente

$$\log\left(10^7\frac{M}{N}\right) = \log M - \log N$$

Demonstração:

Considerando $\log M = L_1\ e \log N = L_2$. Pela definição, temos:

$$M = 10^7(1-10^{-7})^{L_1}\ e\ N = 10^7(1-10^{-7})^{L_2}.$$

Logo, a divisão entre M e N será:

$$\frac{M}{N} = \frac{10^7(1-10^{-7})^{L_1}}{10^7(1-10^{-7})^{L_2}} = (1-10^{-7})^{L_1-L_2} \Rightarrow 10^7\frac{M}{N} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1-L_2}.$$

Se $10^7\frac{M}{N} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1-L_2} \Rightarrow \log\left(10^7\frac{M}{N}\right) = L_1 - L_2 = \log M - \log N$.

3ª Propriedade: logaritmo de uma potência

$$\log\frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = n\log N$$

Demonstração:

Considerando $\mathrm{L} = \log \mathrm{N}$, então pela definição, temos:

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L \Rightarrow N^n = [10^7(1-10^{-7})^L]^n =$$

$$= 10^{7n}(1-10^{-7})^{nL} = \quad 10^{7(n-1)}10^7(1-10^{-7})^{nL} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = 10^7\,(1-10^{-7})^{nL}.$$

Se $\frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = 10^7\,(1-10^{-7})^{nL} \Longrightarrow \log\frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = nL = n\log N.$

E, consequentemente, $N^{\frac{1}{n}} = [10^7(1-10^{-7})^L]^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{7}{n}}(1-10^{-7})^{\frac{L}{n}} =$

$$= 10^{7(\frac{1}{n}-1)}10^7\,(1-10^{-7})^{\frac{L}{n}} \Rightarrow \frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^{7(\frac{1}{n}-1)}} = 10^7\,(1-10^{-7})^{\frac{L}{n}}.$$

Se $\frac{N^{\frac{1}{n}}}{(10^7)^{\frac{1}{n}-1}} = 10^7\,(1-10^{-7})^{\frac{L}{n}},$ então $\log\frac{N^{\frac{1}{n}}}{(10^7)^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{L}{n} = \frac{\log N}{n}.$

A 4ª propriedade que Dante apresenta se refere à mudança de base, mas essa propriedade para Napier não existe, pois estamos considerando apenas uma base, que é $(1-10^{-7})$. Além do que, conforme demonstramos na seção 5.4 a ideia de base que temos hoje não se aplica ao sistema de logaritmos de Napier.

Conforme apresentado acima, Dante destaca uma conclusão obtida no final das demonstrações de cada propriedade, ao passo que Napier (1614, p.18) encerra sua obra do seguinte modo:

> […] From these demonstration, the learned can judge how great a benefit is bestowed by these logarithms: since by the addition of these for multiplication, by subtraction for divisional, by division by two for the extraction of square roots, and by three for cube roots, and for other prostaphaeresces [the use of trigonometric identities to ease multiplication, all the heavier work of calculation is avoided; and we have given some examples of this first in this book. But in the book following we shall set our

> their proper and particular use in that noble kind of Geometry, that is called Trigonometry […].

A seguir, apresentamos o quadro que resume as comparações, até então, abordadas neste capítulo:

Tabela 5.6 – Quadros comparativos: Napier *versus* Dante.

Definição de logaritmo	
Dante	Napier
$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$	$\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$

Consequências da definição de logaritmo	
Dante	Napier
$\log_a 1 = 0$	$\log 10^7 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log 10^7(1 - 10^{-7}) = 1$
$\log_a a^n = n$	$\log 10^7(1 - 10^{-7})^B = B$
$a^{\log_a N} = N$	$(1 - 10^{-7})^{\log N} = \frac{N}{10^7}$
$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$	$\mathrm{Log}\, N = \log B \Leftrightarrow N = B$

Propriedades operatórias dos logaritmos	
Dante	Napier
$\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$	$\log \frac{(M.N)}{10^7} = \log M + \log N$
$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$	$\log\left(10^7 \frac{M}{N}\right) = \log M - \log N$
$log_a M^N = N.log_a M$ $log_a M^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} log_a M$	$\log \frac{N^n}{(10^7)^{n-1}} = n \log N$ $\log \frac{N^{\frac{1}{n}}}{(10^7)^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{\log N}{n}$
$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_b N}$	Não existe mudança de base

Em relação à última linha do quadro que compara as propriedades operatórias, vale ressaltar que, na realidade, para Napier, não só não existia a mudança de base, como nem mesmo a base foi definida em seu sistema de logaritmos, como já demonstramos na seção 5.4.

Segundo Miguel e Miorim (2002, p. 59):

> [...] Foi G. W. Leibniz [7](1646-1716), cuidadoso leitor de St. Vincent[8], quem, pela primeira vez, definiu logaritmo com base em um sistema discreto, e deve-se a William Jones (1675 – 1749) [9]uma exposição sistemática dos logaritmos apoiada na ideia de base, a qual foi desenvolvida, em 1742, nas Tábuas de Logaritmos de William Gardiner [...].

5.6. Aplicações, Interdisciplinaridade e Contextualização dos logaritmos na Matemática: Napier *versus* Dante

5.6.1. Aplicações: Napier *versus* Dante

Partindo da célebre afirmação de Lobachevsky [10]de que não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real, e levando em consideração o contexto histórico no qual Napier estava inserido quando publicou sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, o próprio Dante (1999, p. 224) coloca em seu livro uma nota histórica retirada da revista Superinteressante (agosto, 1997) afirmando que as descobertas

[7] Conforme Boyer (1996): Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) – matemático, filósofo, cientista, diplomata e bibliotecário alemão, conhecido no campo da Matemática por ter desenvolvido o Cálculo Infinitesimal paralelamente a Isaac Newton.

[8] Conforme Boyer (1996): Gregório de St. Vicent (1584-1667) - professor jesuíta em Roma e Praga, tornou-se professor na corte de Filipe IV de Espanha e sua principal contribuição na Matemática se deve à obra *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas).

[9] Conforme Boyer (1996): William Jones (1675 – 1749) – matemático galês, cuja contribuição mais notável na matemática se refere ao uso da letra grega π para representar o quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

[10] Conforme Boyer (1996): Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856) – matemático russo, famoso pelos seus estudos relacionados às geometrias não – euclidianas.

dos logaritmos aumentaram muito a capacidade de cálculo numérico dos que estavam envolvidos em Astronomia e Navegação.

Ainda assim, segundo Eves (2004, p. 341):

> [...] muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indoarábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores [...].

Com o advento das calculadoras e dos computadores, o logaritmo, como facilitador de cálculos, perdeu sua utilidade, porém, seu aprendizado continuou importante devido às inúmeras aplicações da função logarítmica, como nas seguintes situações:

> [...] crescimento de bactérias em um meio em função do tempo, a quantificação de níveis de intensidade sonora, o estudo quantitativo do resfriamento de um copo aquecido em função do tempo, a resolução de problemas envolvendo juros compostos, a expressão e determinação quantitativas de certas noções de orientação geográfica em determinados tipos de projeções cartográficas, o estudo quantitativo da relação entre a altura e a frequência dos sons emitidos por notas musicais, a construção de escala de medição do grau de acidez ou alcalinidade de uma solução química, a construção de escalas de medição da intensidade de terremotos, o estudo quantitativo da desintegração radioativa dos átomos de substâncias radioativas, etc [...] (Miguel e Miorim, 2002, p. 99).

Assim, no decorrer dos capítulos sobre logaritmos, além de mostrar exemplos, exercícios e leituras que trazem diversas aplicações do tema, como, por exemplo, na economia e dinâmica de populações, Dante apresenta um quadro que não só resume todo o histórico dos logaritmos e suas aplicações, mas também em seguida relaciona diretamente o logaritmo no mundo atual, ou como ele mesmo denomina, na era da informática. Observemos:

LEITURAS

Logaritmos

Vários conceitos básicos da Matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que a inicialmente pensada e vieram, com a evolução das idéias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nessa Ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas, mas a relevância teórica se manteve. [...]

Os logaritmos foram inventados no início do século XVII a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos para a elaboração de tabelas de navegação.

Com efeito, a regra $\log(xy) = \log x + \log y$ e suas conseqüências, tais como $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$, $\log(x^n) = n \cdot \log x$, $\log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}$, permitem reduzir cada operação aritmética (exceto, naturalmente, a adição e a subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos. Essa maravilhosa utilidade prática dos logaritmos perdurou até recentemente, quando foi vastamente superada pelo uso das calculadoras eletrônicas.

A função logarítmica, entretanto, juntamente com sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais importantes na Matemática, por uma série de razões que vão muito além da sua utilidade como instrumento de cálculo aritmético. [...]

Resumindo: um matemático ou astrônomo do século XVII achava os logaritmos importantes porque eles lhe permitiam efetuar cálculos com rapidez e eficiência. Um matemático de hoje acha que a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, ocupam uma posição central na Análise Matemática por causa de suas propriedades funcionais, especialmente a equação diferencial $x' = c \cdot x$, que descreve a evolução de grandezas que, em cada instante, sofrem uma variação proporcional ao valor naquele instante. Exemplos de grandezas com essa propriedade são um capital empregado a juros compostos, uma população (de animais ou bactérias), a radioatividade de uma substância, ou um capital que sofre desconto. [...]

LIMA, Elon L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro, IMPA-Vitae, 1991. p. 28-30 passim.

O logaritmo na era da informática

Quando um evento tem probabilidade **p** de ocorrer, sua ocorrência fornece uma quantidade de informações **I** dada por uma expressão que envolve logaritmos, que é:

$$I = \log_2 \frac{1}{p}$$

ou seja, **I** bits de informação.

Figura 5.10 – Breve histórico dos logaritmos apresentado por Dante

Fonte: Dante, 1999, p. 240.

5.6.2. Interdisciplinaridade e Contextualização dos logaritmos na Matemática: Napier *versus* Dante

Parra e Saiz (1996, p. 31), definem que “Didática da Matemática estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos desta ciência, particularmente na situação escolar e universitária.”

Sendo assim, seguindo a ideia das autoras, procuramos de maneira simples comparar dois desses processos pelos quais Napier e Dante abordaram os logaritmos: a interdisciplinaridade e a contextualização dos logaritmos na Matemática.

Segundo Machado (1995, p. 193),

> [...] a interdisciplinaridade é hoje uma palavra – chave para a organização escolar; pretende-se com isso o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, através da fixação de um objeto comum diante do qual os objetos particulares de cada uma delas constituem subobjetos [...].

Com base nessa afirmação, podemos inferir que, ao utilizar conceitos da física mecânica, como velocidade, espaço e tempo, Napier apresenta seu sistema de logaritmos através de uma abordagem de caráter interdisciplinar, pois os conceitos físicos requisitados em sua formulação constituíram subobjetos fundamentais para compreensão da sua ideia.

Situando o papel das situações contextualizadas na produção do significado dos conceitos Matemáticos, a partir da teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (1980), Vasconcelos e Rêgo (2010, págs. 3 e 4) afirmam que

> [...] a ideia de contexto para os conteúdos matemáticos não pode ser compreendida como uma redução aos aspectos utilitários dessa ciência, abordando-se apenas elementos que o professor considera como fazendo parte do cotidiano do aluno. Embora as situações do dia-a-dia tenham grande importância no sentido de favorecer a construção de significados para muitos conteúdos a serem estudados, faz-se necessário considerar a possibilidade de construção de significados a partir de questões internas da própria Matemática, caso contrário, muitos conteúdos seriam descartados por não terem aplicabilidade concreta e imediata [...].

Assim, podemos dizer que Napier se preocupou em dar significado ao seu sistema de logaritmos, contextualizando-o na própria matemática, a partir da geometria euclidiana, através de semirretas e segmentos de reta para auxiliar na construção de sua definição, e da trigonometria, tanto na definição como na tábua que, segundo Eves (2004), ele publicou em sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Aliás, ele denominava a trigonometria como uma geometria nobre, conforme citamos na secção 5.5.2.

Tais observações também podem ser vistas, de um modo diferente, no livro de Dante, pois a interdisciplinaridade na construção da sua definição é notável na introdução do capítulo 9, a partir da situação-problema relacionada à geografia, e a contextualização dos logaritmos na matemática é utilizada tanto na definição de logaritmos desse mesmo capítulo, quando o autor deduz uma equação exponencial que só pode ser resolvida com os logaritmos, como na definição de função logarítmica do capítulo 10, a partir de uma fórmula provinda de uma situação-problema da análise combinatória.

Desse modo, apresentamos resumidamente um quadro que compara as aplicações que conseguimos verificar em nosso trabalho, bem como a contextualização dos logaritmos na própria matemática e a interdisciplinaridade presentes nas duas abordagens estudadas.

Tabela 5.7 – Quadro comparativo: Napier *versus* Dante.

	Dante	Napier
Contextualização na matemática	Análise combinatória; matemática financeira; equação exponencial	Geometria; trigonometria
Interdisciplinaridade	Geografia; física; química; biologia	Física
Aplicações	Informática; dinâmica de populações; economia	Astronomia; navegação; comércio

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pensamos que levar a história dos logaritmos para sala de aula é necessário, pois a partir dela estudantes e professores poderão se entusiasmar com o tema, através do entendimento sobre a motivação do uso dessa ferramenta matemática na época em que foi inventada, como ela se desenvolveu e qual sua importância nos dias atuais.

Por isso, pensando numa pesquisa historiográfica voltada para o ensino de matemática, procuramos mostrar que é possível encontrar semelhanças e diferenças entre duas abordagens situadas em contextos completamente diferentes, por meio da associação feita entre as informações conceituais extraídas da origem dos logaritmos e o que é apresentado em livro didático atual.

Analisando a origem do assunto, consideramos alguns aspectos, apresentados no Capítulo 3, que influenciaram a obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Com o resumo dessa obra (Capítulo 4) e a partir da explicação da definição de logaritmos de Napier (Capítulo 5),adaptamos sua formulação para uma linguagem mais usual, de tal modo que foi possível mostrar que Napier já trazia implicitamente as ideias que mais tarde caracterizariam a função logarítmica, mesmo sem defini-la.

A partir da definição de Napier deduzimos que o logaritmo de um produto (ou quociente) não é exatamente a soma (ou diferença) dos logaritmos,ao contrário do que é exposto no livro de Dante,e a ideia de base que temos hoje não se aplica à maneira como Napier abordou os logaritmos.

Ainda sobre o ponto vista conceitual dos logaritmos, mostramos que as tabelas de Napier foram baseadas essencialmente na função $f(x) = \left[\log_{\frac{1}{e}}(x\,10^{-7})\right]10^{7}$, que hoje é caracterizada como bijetora e decrescente.Ainda assim, este fato pode ser verificado através da própria definição de Napier, conforme vimos na seção 5.3.

Tendo em vista que Napier publicou sua obra visando que estudantes e professores da época entendessem sua formulação, assim como Dante tem essa mesma preocupação por tratar de um livro didático de matemática, foi possível estabelecer conexões do ponto vista didático encontrado nas duas abordagens.

Então, baseando-nos na definição de Didática da Matemática apresentada na seção 5.6.2, comparamos de modo simples dois processos didáticos (interdisciplinaridade e contextualização dos logaritmos na matemática) dos quais Napier e Dante se apropriaram, a fim de que suas ideias pudessem ser bem assimiladas.

Em relação às aplicações, mostramos que no século XVII os logaritmos foram muito importantes para facilitar cálculos aritméticos extensos, ao passo que hoje os logaritmos têm sua importância devido aos modelos matemáticos baseados nas propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a exponencial, por descreverem diversos fenômenos naturais, conforme citamos alguns na seção 5.6.1.

Acreditamos que as comparações que realizamos neste trabalho ainda podem ser aprofundadas, a partir da análise dos aspectos conceituais dos logaritmos e didáticos da matemática que estabeleçam alguma relação entre abordagens de logaritmos inseridas em contextos distintos.

Feito isso, esperamos que professores e estudantes de Matemática, dispostos a aprender e ensinar logaritmos, olhem para a origem desse tema como um recurso didático e, sendo assim, que nosso esforço possa servir como material de apoio àqueles que queiram explorar o uso prático dos logaritmos, relacionando sua história à realidade em que vivemos, relacionando o conhecimento à semente profunda, pois:

> [...] Se não olho pra trás com claridade
>
> Um futuro obscuro aguardarei
>
> Mas aquela semente que sonhei
>
> É a chave do tesouro que eu tenho
>
> Como posso saber de onde venho
>
> Se a semente profunda eu não toquei? [...]
>
> (trecho da música Sêmen, composta por Siba e Bráulio Tavares, gravada por Mestre Ambrósio, 1999).

REFERÊNCIAS

ALVES, Alexandre. ; OLIVEIRA, Letícia Fagundes de. **Conexões com a História**. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

AUSUBEL, David P; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Ed.Interamericana,1980.

BIANCHI, Maria Isabel Zanutto. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**, 2006. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibrisbd/brc/33004137031P7/2006/bianchi_miz_me_rcla.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2012.

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; Tradução Elza F. Gomide – 2ª Ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria Nacional de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>.Acesso em: 02 out. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação**. Lista dos títulos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio de 2007.** Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/port_1818.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2012

Brasil. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 out. 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1ª Ed. vol1. São Paulo: Ática, 1999.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Traduzido por Hygino Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004

IEZZI, Gelson DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David. ; PÉRIGO, Roberto.; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 2ª Ed. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2004

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** São Paulo: Cortez, 1995.

MAOR, Eli. **e: A história de um número**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MIGUEL, A. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores,** 1996**.** Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike1/article/view/2598>. Acesso em: 01 Jan. 2012.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002.

NAPIER,John. ***Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio***,1614. Traduzido para o inglês por Ian Bruce. Disponível em: http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html. Acesso em: 21 ago. 2011.

PAIVA. Manoel. **Matemática**. Vol. único. São Paulo: Moderna, 1999.

PARRA, Cecilia; Saiz, Irma. **Didática da matemática: reflexões pedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

Vasconcelos, Maria Betânia Fernandes de; Rêgo, Rogério G. do. **A Contextualização como recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática.** Disponível em: <http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-18186241.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2012.

Apêndice A - Importância histórica da relação entre progressões aritméticas e geométricas implícita na formulação de Napier.

No fim desta seção vemos que Dante apresenta o logaritmo natural como área. A simples abordagem dada pelo autor merece uma atenção especial, pois o logaritmo natural como área faz parte de um processo histórico – evolutivo na matemática, que não se limita apenas aos logaritmos, mas também nos remete ao problema da quadratura da hipérbole, que Arquimedes não conseguiu resolver, passando por Fermat (1601 – 1665)[11], Gregorius de Saint-Vicent (1584 – 1667), até chegar a Newton e Leibniz, que através do Cálculo Diferencial e Integral mostraram como encontrar a solução de problemas desse tipo com eficiência e clareza.

Sobre a questão da quadratura da hipérbole, é importante notar no breve resumo que segue abaixo, adaptado do livro “e: a história de um número”, o quanto foi importante um conceito implícito na função logarítmica e que, conforme é possível notar no Capítulo 5, esteve presente em toda a ideia de logaritmos apresentada na obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*.

A.1 História do logaritmo natural como área

Segundo Maor (2008, p.83) quadratura se refere à própria natureza do problema de encontrar a área de uma figura plana fechada, isto é, expressar a área em unidades de área, que são quadrados.

Por exemplo, supondo que queremos encontrar a área do retângulo de lados *x* e *y*.Se esse retângulo deve ter a mesma área de uma quadrado de lado z, então:

$$z^2 = xy \Rightarrow z = \sqrt{xy}\,.$$

[11] Conforme Boyer (1996): Pierre de Fermat (1601-1665) - advogado e oficial francês do governo de Toulouse . Gostava de matemática como um passatempo. Propôs um sistema de geometria analítica semelhante ao de Descartes, assim como fez grandes contribuições à análise infinitesimal. Além disso, tornou-se o fundador da moderna teoria dos números.

Portanto, usando esquadro e compasso, podemos construir um segmento de medida $\sqrt{xy}$. Desse modo, teremos a quadratura de qualquer retângulo e consequentemente de qualquer polígono, pois um polígono pode ser dissecado em triângulos, e estes podem ser obtidos a partir da simples construção de um retângulo.

Partindo dessa ideia, Arquimedes com seu método de exaustão, cuja invenção é atribuída a Eudoxo[12], em torno de 370 a.C, foi capaz de fornecer o valor de πcom qualquer precisão desejada e, dentre tantas outras realizações, ele também foi capaz de encontrar a área de um setor parabólico. Porém, as áreas dos setores elípticos e hiperbólicos não foram encontradas, pois Arquimedes tinha o cuidado em mostrar que seu algoritmo se baseava em somas finitas.

Isso porque os gregos nessa época se recusavam a incorporar o infinito em seu sistema matemático, pois a visão estática que eles tinham do mundo e da geometria induzia-os a considerar todas as quantidades geométricas como possuidoras de magnitudes fixas, determinadas. Nossa prática moderna de designar uma quantidade por uma única letra, digamos x, e considerá-la uma variável que pode assumir uma série de valores era estranha para eles.

Posteriormente, Fermat não evitou recorrer a uma série infinita e, interessado na quadratura de uma família de curvas, encontrou uma fórmula que expressava a área sob a curva $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo. A seguir explicaremos o método de Fermat.

[12] Conforme Boyer (1996): Eudoxo (408 a.C - 355 a.C) – médico grego, mas que exerceu sua profissão durante pouco tempo, devido ao seu fascínio pela astronomia. Conhecido na matemática por ter criado fórmulas que até hoje são usadas para calcular o volume dos cones e das pirâmides, além de ser considerado um dos precursores do Cálculo Integral.

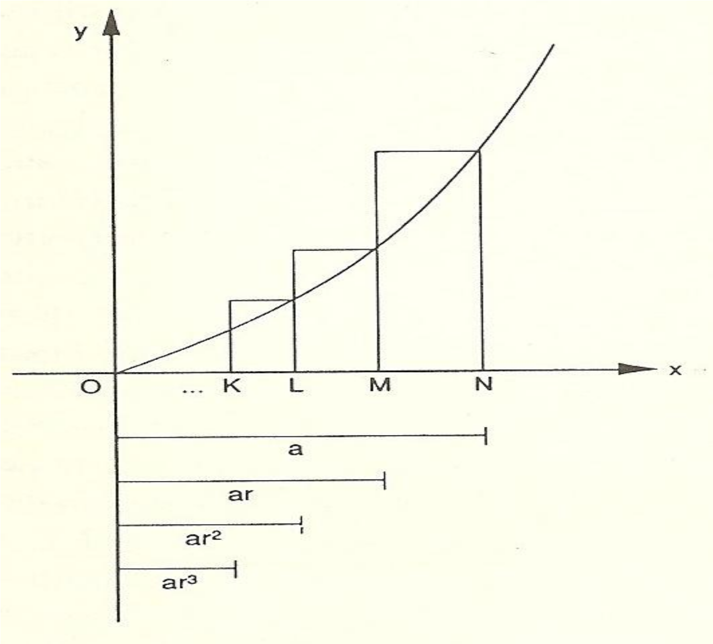


Figura A.1 – Ilustração do método de Fermat

Fonte: Maor ,2008, p.90

A figura acima mostra uma porção da curva $y = x^n$ entre os pontos x = 0 e x = a no eixo x. Suponhamos o intervalo entre x = 0 e x =a como sendo dividido num número infinito de subintervalos pelos pontos ... K, L, M, N, onde ON = a. Então, começando em N e trabalhando no sentido inverso, para que esses intervalos formem uma progressão geométrica decrescente, nós temos ON = a, OM = ar, OL = ar^2, e assim por diante, onde r é menor que 1. Assim, as alturas (ordenadas) da curva nesses pontos são $a^n, (ar)^n, (ar^2)^n, \ldots$.

A partir do retângulo de base MN, podemos construir uma tabela que relaciona a base, a altura e a área de cada retângulo do seguinte modo:

Tabela A.1 – Método de Fermat

base	altura	área
$a(1-r)$	a^n	$a^{n+1}(1-\mathrm{r})$
$ar(1-r)$	$(ar)^n$	$a^{n+1}(1-\mathrm{r})r^{n+1}$
$ar^2(1-r)$	$(ar^2)^n$	$a^{n+1}(1-\mathrm{r})(r^{n+1})^2$
$ar^3(1-r)$	$(ar^3)^n$	$a^{n+1}(1-\mathrm{r})(r^{n+1})^3$
....	.....	.....

Observando a coluna que representa a área dos retângulos, percebemos que ela é caracterizada por uma progressão geométrica, cujo 1º termo é:

$a^{n+1}(1-r)$ e cuja razão é r^{n+1}.

Substituindo esses termos na fórmula que nos fornece a soma de um PG infinita, obtemos:

$$A = \frac{a^{n+1}(1-\mathrm{r})}{1-r^{n+1}}\ . \quad \text{I)}$$

Em que A expressa a soma das áreas dos infinitos retângulos.

Apesar de todo esse esforço, Fermat não estava satisfeito, isto é, ele pensou que uma aproximação da área sob essa família de curvas poderia ainda ser mais precisa, aumentando o número de retângulos e diminuindo seus tamanhos.

Para conseguir isso, a proporção comum r deve se aproximar de 1, e quanto mais próxima, melhor o encaixe desses retângulos. Notemos que quando r tende a 1, a equação I) torna-se indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Fatorando a expressão $1-r^{n+1}$, Fermat obteve:

$$1-r^{n+1} = (1-r)(\ 1+r+r^2+\ r^3+\ +\cdots+\ r^n).$$

Logo, teremos uma nova fórmula que expressará a área sob a curva $y =\ x^n$:

$$A = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}} = \frac{a^{n+1}(1-r)}{(1-r)(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)} = \frac{a^{n+1}}{(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}\,.$$

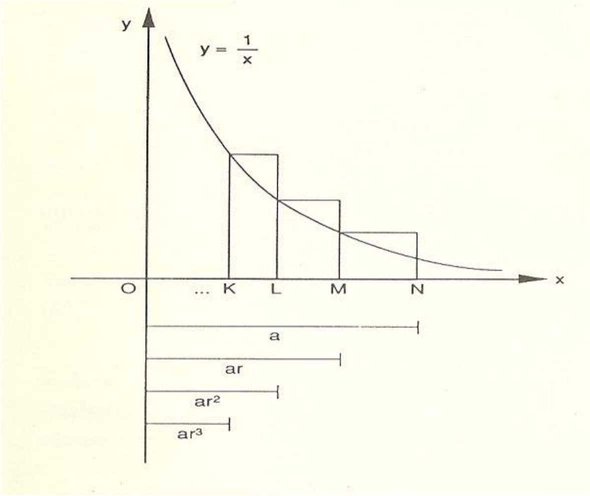
Fazendo r = 1, temos:

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Assim, em torno de 1640, trinta anos antes de Newton e Leibniz estabelecerem essa fórmula como parte de seu Cálculo Integral, Fermat já conseguia não só a quadratura de uma curva, mas sim de uma família de curvas, fornecidas pela equação $y = x^n$, pois posteriormente, com pequenas mudanças no seu método, ele também demonstrou que a fórmula também vale para valores negativos atribuídos a *n.*

Todavia, a quadratura que Arquimedes não encontrara permanecia um enigma, pois para a curva $y = \frac{1}{x}$ temos n = - 1 que resulta em $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$, que é uma indeterminação, pois o 0 aparece no denominador.

Então, coube a um jesuíta belga que atendia pelo nome de Gregorius de Saint Vicent notar que, para n = -1, enquanto as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem áreas todas iguais. Observemos:



base	altura	área
$a(1-r)$	$1/_a$	$(1-r)$
$ar(1-r)$	$1/_{ar}$	$(1-r)$
$ar^2(1-r)$	$1/_{ar^2}$	$(1-r)$
$ar^3(1-r)$	$1/_{ar^3}$	$(1-r)$
....	.....	.....

Figura A.2 – Método de Fermat

Isso significa que, conforme a distância de 0 cresce geometricamente no eixo das abscissas, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais, ou seja, aritmeticamente, e isso continua sendo verdade mesmo se passarmos ao limite quando $r \to 1$, isto é, quando fazemos a transição dos retângulos discretos para a hipérbole contínua. Portanto, a relação entre a área e a distância tem a mesma característica da tábua de logaritmos de Napier e, portanto, é logarítmica. Desse modo, um dos alunos de Saint Vicent, Afonso Anta de Sarasa (1618 – 1667), escreveu essa relação explicitamente, registrando uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma função logarítmica, quando, até então, os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

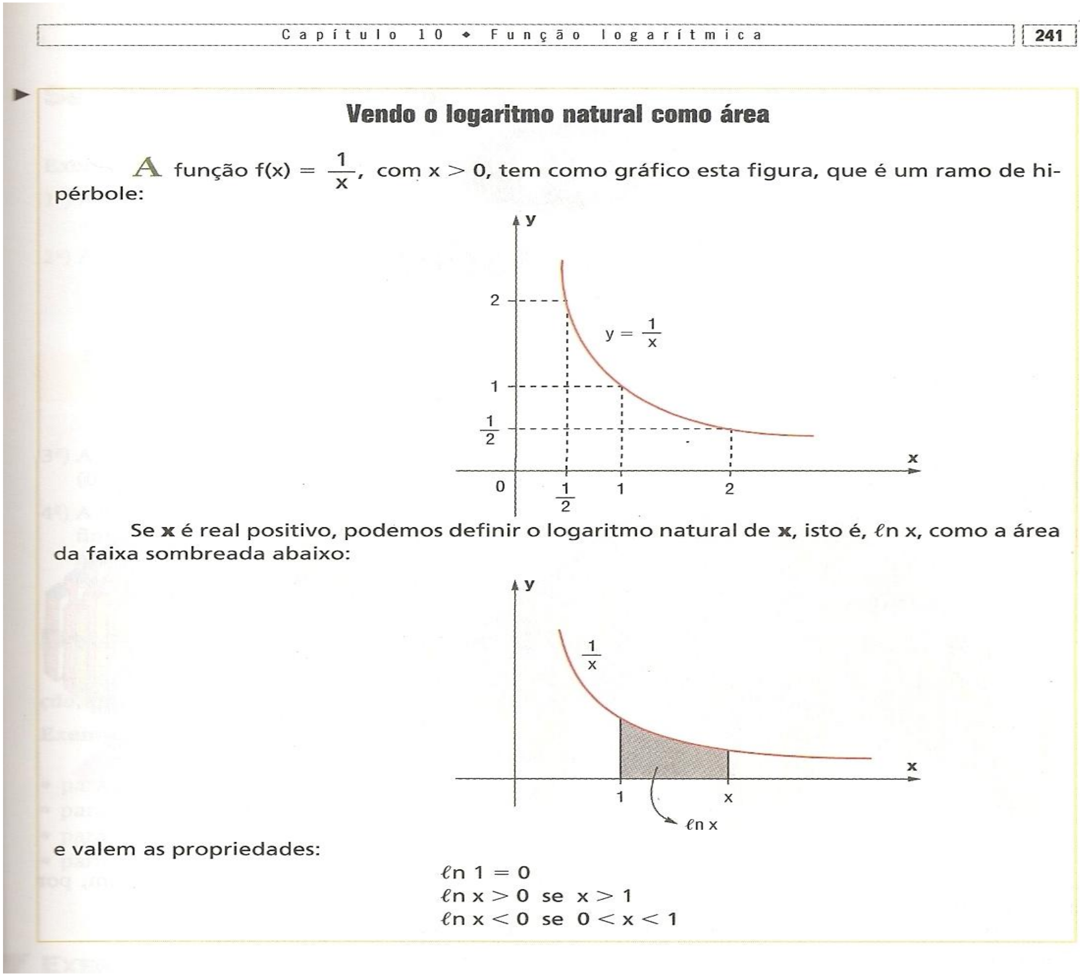
Logo, se denotarmos por $A\,(t)$ a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo x > 0 (por conveniência geralmente escolhemos x = 1) até um ponto variável x = t, teremos $A(t) = \log t$, e assim o mistério da quadratura da hipérbole estava próximo de ser desvendado. Porém, uma questão permanecia aberta: “Qual será a base desse logaritmo que determina a área sob a hipérbole numericamente?”

Mais tarde, com o aprimoramento desses esses estudos, Newton e Leibniz puderam mostrar ao mundo que Saint Vicent estava certo, isto é, a relação entre a distância e a área é realmente logarítmica e, além disso, concluíram que a base procurada é o número e. Assim, a fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ resolveu o “caso perdido”.

Agora, denotando-se a área sob a hipérbole por $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + c$. Se tomarmos o ponto inicial a partir do qual essa área será medida como x = 1, vem:

$$0 = \ln 1 + c \Leftrightarrow \ln 1 = -c \Leftrightarrow c = 0.$$

Portanto, a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de x = 1 a qualquer x > 1 é igual a $\ln x$, conforme Dante apresenta no final do Capítulo 10. Vejamos:


Capítulo 10 • Função logarítmica 241

Vendo o logaritmo natural como área

A função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x > 0$, tem como gráfico esta figura, que é um ramo de hipérbole:

Se **x** é real positivo, podemos definir o logaritmo natural de **x**, isto é, $\ell n\, x$, como a área da faixa sombreada abaixo:

e valem as propriedades:

$\ell n\, 1 = 0$
$\ell n\, x > 0$ se $x > 1$
$\ell n\, x < 0$ se $0 < x < 1$

Figura A.3 – Logaritmo natural como área apresentado por Dante

Fonte: Dante ,1999, p.241