RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATRIZES

Tatiane Watanabe

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP
São Paulo
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Watanabe, Tatiane.
Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes/ Tatiane Watanabe - São Paulo: IFSP, 2012.
69f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Henrique Marins de Carvalho.

1. Matemática. 2. Resolução de Problemas. 3. Matrizes . 4. Ensino - aprendizagem. 5. Representação semiótica I. Título do trabalho.

TATIANE WATANABE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATRIZES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 11/07/2012 **CONCEITO: 10,0**

Profa. Me. Elisabete Teresinha Guerato
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Tatiane Watanabe

Aluna: Tatiane Watanabe

“Escolhe um trabalho de que gostes, e não terás que trabalhar nem um dia na tua vida”.

Confúcio, filósofo chinês.

Aos Meus Pais,

que foram a chave para o meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças, sabedoria e luz para a realização deste trabalho, por nunca me desamparar e sempre me confortar nos momentos complicados da minha trajetória.

Um agradecimento especial aos meus pais e irmã, que sempre estiveram ao meu lado apoiando o meu sonho, me incentivando a continuar mesmo quando eu própria pensava que era o momento de desistir.

Ao meu namorado, que foi muito compreensivo com a minha dedicação ao trabalho, me auxiliando na digitação e até mesmo dando ideias para a melhoria desta pesquisa.

Aos meus colegas de classe, que mesmo espalhados pelo curso continuaram com o companheirismo e constante ajuda até o presente momento. Em especial, quero destacar dois eternos amigos, Filipe e Diogo (Paçoca), com quem passei momentos inesquecíveis nos tornando o “trio parada dura”. Obrigada pelos sábados de estudos e pelas infinitas risadas.

Aos muitos professores que contribuíram para minha formação acadêmica, ou seja, colaboraram com todo tipo de conhecimento acadêmico que obtive. Principalmente por nunca desistirem da profissão com a qual me encantei desde quando cursava o Ensino Fundamental e, desde esse momento, já me imaginava lecionando. Hoje, já ministrando aula na rede pública estadual, mesmo com tantas dificuldades e complicações, trabalho com tamanha dedicação e admiração.

À Profa. Ms. Cristina Lopomo Defendi, que me auxiliou principalmente na questão da língua portuguesa, nas questões de produção de texto e revisão; e à Profa. Dra. Mariana Baroni, que também auxiliou na orientação do TCC, desde os pequenos detalhes da formatação até os inestimáveis conselhos para o momento da apresentação.

Ao nosso digníssimo Diretor Geral e meu Prof. Ms. Carlos Alberto Vieira, que quando solicitado sempre demonstrou interesse pelo aluno e sempre esteve apto e empenhado a resolver qualquer tipo de problema em questão.

Com carinho, ao meu orientador Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho, que esteve presente desde o início do desenvolvimento desta pesquisa, primeiramente quando o tema surgiu como Projeto de Iniciação Científica e se estendeu para o TCC. Ele sempre se mostrou ativo e compreensivo, fornecendo material e um pouco da sua magnitude de conhecimento para que o trabalho se desenvolvesse da melhor forma possível.

Por fim agradeço aos membros da banca Profª Ms. Elisabete Teresinha Guerato e o Prof. Dr. Rogério Ferreira Fonseca pelas colaborações, sugestões e correções enfatizando sempre a melhoria do trabalho.

RESUMO

Nossa pesquisa teve como objetivo apresentar uma proposta de ensinar um conteúdo específico do currículo do Ensino Médio, no caso Matrizes, através da Resolução de Problemas, de acordo com as quatro fases de George Polya. Para isso, selecionamos cinco exercícios deste assunto que foram organizados de acordo com os procedimentos adotados por esse autor. Além disso, tentamos proporcionar uma visão panorâmica que auxilie na formação do professor, uma vez que o docente utilizará situações-problema para apresentar o assunto aos seus alunos. O referencial teórico utilizado foi a obra *A Arte de Resolver Problemas* (2006) de George Polya, na qual analisamos e expomos cada uma das quatro fases descritas pelo autor. Apresentamos, também, uma comparação com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Com isso foram elaborados dois textos didáticos, o “Guia de Atividades do(a) Professor(a)” e o “Guia de Atividade do Aluno”, contribuições estas presentes no corpo da pesquisa que podem, pautadas nas ideias de Polya e Duval, promover o ensino-aprendizagem mais efetivo de matrizes no Ensino Médio.

Palavras-chaves: Matemática, Resolução de Problemas, Matrizes, Ensino-aprendizagem, Representação Semiótica.

PROBLEM SOLVING IN THE TEACHING OF MATRICES

ABSTRACT

Our research aims to present a proposal to teach a specific subject of the curriculum of secondary school, in the case Matrices, through the Resolution of Problems, according to the four phases of George Polya. Therefore, we selected five problems that were organized according to procedures adopted by this author. Besides this, we tried to provide an overview to assist in student's formation, since the teacher uses problem-situations to presents the subject to their students. The theoretical reference used was the book "*A Arte de Resolver Problemas*" by George Polya (2006), which we analyzed and exposed each of the four phases explained by the author. We also presented a comparison with the "*Teoria dos Registros de Representação Semiótica"* of Raymond Duval. With this, we composed two texts: the "Guia de Atividade *do(a) Professor(a)" (Teacher's Activity Guide) e o "Guia de Atividade do Aluno" (Student's Activity Guide).* We conclude these contributions, as the ideas of Polya and Duval were exposed, may promote the teaching-learning of Matrices more effective in secondary school.

Keywords: Mathematics, Problem Solving, Matrices, Teaching and Learning, Representation Semiotics.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

Pág.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma pesquisa sistemática sobre o uso de Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem sobre Matrizes, conteúdo este abordado no Ensino Médio. O tema surgiu como um Projeto de Iniciação Científica, a princípio sendo uma pesquisa de análise de alguns problemas seguindo a visão de Polya. Por meio desse estudo, tentamos proporcionar uma visão panorâmica que auxilie na formação do futuro professor, uma vez que este próprio poderá utilizar situações- problema para explicar o assunto aos seus alunos.

A formulação e resolução de problemas é uma prática constante na atividade do docente de Matemática. O próprio desenvolvimento da Matemática deve-se, em grande parte, à curiosidade despertada por problemas de origem prática, visando a sanar deficiências da vida cotidiana, bem como daqueles criados somente no campo da abstração. Conforme expõe Onuchic[1] (2008, p.1):

> "Problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo da Matemática escolar desde a Antiguidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa, babilônica e grega. São, ainda, encontrados problemas em livros-texto de Matemática dos séculos XIX, XX e até nos dias de hoje."

Dessa forma, a compreensão de métodos e referências teóricas para o emprego da Resolução de Problemas no ambiente de ensino-aprendizagem de Matemática é elemento importante na prática do docente, não podendo ser desprezada durante sua formação inicial.

Sejam como atividades para apresentação ou reforço de conceitos nos livros didáticos, sejam como itens de teste nas avaliações de larga escala, os problemas matemáticos são uma constante na vida de qualquer indivíduo imerso no sistema

---

[1] Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática ela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (1954), mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos-USP (1971) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP (1978). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática. Atualmente no Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Departamento de Matemática, sendo sua linha de pesquisa a Resolução de Problemas (http://lattes.cnpq.br/8641323605322627, acessado em 04/03/2012).

educacional. Ser capaz de uma interpretação consciente do enunciado, do domínio de técnicas para formular e resolver o modelo matemático obtido e de uma resposta eficiente para a questão proposta é o objetivo esperado em uma educação Matemática bem sucedida.

Com o objetivo de estudar tal desenvolvimento e encontrar um procedimento que promova tal aprendizado mais efetivo, vamos nos apoiar principalmente no trabalho de George Polya que, em sua famosa obra *How to solve it* (A arte de resolver problemas) de 2006, sendo sua obra original de 1945, estabelece que a Resolução de Problemas deve caminhar por quatro passos fundamentais: compreender o problema, desenvolver um plano, implementar o plano e avaliar a solução. Para complementar o estudo usaremos a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, por meio da obra *Semiósis e Pensamento Humano*: *registros semióticos e aprendizagens intelectuais* de 2009 para compreender melhor a aprendizagem de conceitos matemáticos no pensamento Humano.

Nosso trabalho consta também na elaboração de dois textos didáticos para auxiliar tanto o aluno quanto o professor no processo de investigação das situações-problema. Além disso, para nossa pesquisa não fazemos distinção entre exercício e problema.

Para atingir este objetivo e apresentar os textos didáticos desenvolvidos, este trabalho está dividido em 4 capítulos. No capítulo 2, traremos a nossa fundamentação teórica que está dividida em duas subseções: uma dedicada a George Polya e outra a Raymond Duval. No capítulo 3, vamos apresentar a escolha dos exercícios que são usados para verificar se esse procedimento criado por Polya promove um aprendizado mais efetivo do conceito de Matrizes. Na sequência, como resultado desta análise, temos como contribuição dois textos didáticos: um voltado ao(a) professor(a) e o outro ao aluno. Finalmente, no capítulo 4 apresentamos as nossas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como fundamentação teórica, teremos dois autores principais: George Polya com sua obra *A Arte de Resolver Problemas*, 2006, e Raymond Duval com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, estudada neste trabalho com a obra *Semiósis e Pensamentos Humanos*: *Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*, 2009, traduzida por Lênio Fernanes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Esses dois autores pesquisados trabalham com áreas distintas, ou seja, Polya, mesmo fazendo diversos cursos, tornou-se matemático e Duval filósofo e psicólogo. Entretanto ambos desenvolveram trabalhos que contêm linguagens e simbologias distintas, mas com o mesmo enfoque: a preocupação com o ensino-aprendizagem da Educação Matemática.

Polya, por ser um matemático, tenta mostrar por meio do que chama de investigação e indagações, um método mais eficiente de consolidar o processo de ensino-aprendizagem, usando praticamente para a análise os mesmos objetos de Duval. Este último, que por ser filósofo e psicólogo, expõe as mesmas ferramentas, porém teorizadas, ou seja, definidas por meio de uma concepção, no caso, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Valendo-se dessas informações teremos abaixo nas duas subseções uma pequena biografia dos dois autores e suas contribuições para a Educação Matemática através das suas obras. Como essas teorias se mostram complementares, são ambas respaldo teórico para o nosso estudo que visa trabalhar o processo de ensino-aprendizagem modelado nas quatro fases de Polya. A partir da análise, observaremos se a consolidação do conceito, no nosso caso de Matrizes, torna-se mais satisfatória.

Para verificar isso, antes precisamos compreender as quatro fases propostas por Polya e como se dá essa aquisição de conhecimento e a organização de situações de aprendizagem na Matemática. E, para compreender como ocorre essa aquisição de conhecimento, temos a Teoria dos Registros da Representação Semiótica de Raymond Duval.

2.1. George Polya e a Resolução de Problemas

Figura 2.1 – George Polya[2]
Fonte: Retirado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

George Polya nasceu em 13 de Dezembro de 1887 em Budapeste (Hungria) e faleceu em 7 de Setembro de 1985 em Palo Alto, na Califórnia (Estados Unidos). Foi um excelente estudante no ensino secundário, apesar de a escola que frequentava valorizar muito a aprendizagem com base na memória, prática esta que Polya considerava monótona e sem utilidade.

Licenciou-se em 1905, ganhador de uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste começou por estudar Direito, seguindo os passos de seu pai, no entanto, não gostou do curso e passou a estudar literaturas. Depois, interessou-se por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo, em 1912, concluído o seu doutorado.

No Outono de 1913 foi para Göttingen, onde conheceu Hilbert. Ainda durante este ano, publicou um dos seus maiores resultados, a solução do problema do passeio aleatório. Depois, foi para Paris trabalhar no seu pós-doutorado. No ano seguinte assumiu um cargo na Universidade de Zurique onde conheceu Hurwitz e, foi

[2] A biografia de George Polya pode ser encontrada em POMBO,O. *Breves dados históricos sobre Pólya*. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/biografia.htm, acessado em 18/04/2012.

chamado pelo seu país para a guerra, mas recusou-se a prestar serviço militar. O medo de ser preso por não ter respondido à chamada fez com que apenas regressasse a Hungria depois de ter terminado a Segunda Guerra Mundial.

No ano de 1940, com receio de uma possível invasão alemã da Suíça, decidiu ir para os Estados Unidos, onde no ano seguinte aceitou o cargo de professor na Universidade de Stanford, onde permaneceu até sua retirada do ensino, em 1953.

Em 1945, publicou um dos seus livros mais famosos: *How to Solve it* traduzido em 1978 em português *A Arte de Resolver Problemas* que teve extrema importância para estudos em Educação Matemática.

Polya coloca nessa obra seu trabalho de investigação dos matemáticos e propõe um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, investigando problemas abertos e desafiantes para todos. Sobre isso, ele afirma que "resolver problemas é a realização específica da inteligência e que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta" (2006, p.2).

Assim, segundo Polya (2006), resolução de problemas era um bom caminho para se ensinar Matemática, pois ao resolver um problema o aluno poderia montar uma linha de raciocínio, ou seja, desenvolveria métodos de resolução onde o professor seria o mediador da situação-problema se colocando nos momentos oportunos e indagando as questões pertinentes para conduzir o aluno à chegada da solução.

A sua teoria consiste em um modelo no qual o professor segue passo a passo um planejamento que Polya coloca como um processo de investigação. Na seção denominada "As Quatro Fases", ele apresenta:

PRIMEIRA FASE (Compreensão do problema): É preciso compreender totalmente o problema.

Indagações: - Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou excessiva? Ou contraditória? Preciso desenhar uma figura?

Preciso adaptar uma notação adequada? Separar as diversas partes da condição? É possível defini-las de outro modo? Comentá-las?

Nesse passo é explorado o problema como um todo, ou seja, se o enunciado verbal está claro, se o aluno consegue identificar as partes principais, se precisa do auxílio da construção de uma figura, se precisa mudar de notação, ou seja, o professor precisa perguntar (indagar) sobre todas as possibilidades para que a compreensão do aluno seja a melhor possível. Como o próprio autor coloca:

> “É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas.” (2006, p.5)

SEGUNDA FASE (Estabelecimento de um plano): Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita.

Indagações - É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata? É preciso chegar afinal a um plano para a resolução - Já viu este problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado? Ou um que seja útil aqui? Conhece um teorema que lhe poderia ser útil? Ou uma propriedade? Olha bem para a incógnita! Pensa num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlacionado e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Você precisa voltar às definições iniciais.

Nessa fase a figura do professor como mediador da situação-problema é crucial, pois o aluno precisa ter uma ideia de como estabelecer as conexões pertinentes entre os dados do problema e a incógnita procurada. Para isso ocorrer é um caminho que pode ser longo e tortuoso, e cabe ao professor, discretamente, guiar esse aluno por meio de suas indagações, conforme mencionado por Polya (2006, p.7):

> “[...] é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes. [...]”

TERCEIRA FASE (Execução do Plano): Executar o plano desenvolvido

Indagações - Ao executar o plano desenvolvido conseguimos verificar cada passo? É possível verificar claramente que cada passo está correto? Mas podemos também demonstrar que o passo está correto?

Nessa penúltima fase, o plano desenvolvido proporciona um roteiro geral e precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro. Assim o professor terá um período de tranquilidade dado que o aluno estará submerso em colocar o seu plano em prática e verificar a correção de cada passo.

QUARTA FASE (Retrospecto): Examinar a solução obtida

Indagações - É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, para outros problemas?

Nessa última fase, enfim, o aluno chegou à solução do problema e escrita da demonstração. Porém, agora, precisamos consolidar o conhecimento adquirido e para isso acontecer, segundo Polya, devemos fazer um retrospecto da resolução completa, ou seja, reconsiderar e reexaminar o resultado final e o caminho que o aluno fez até chegar à resposta para assim, melhorar o processo de ensino e aprendizagem ou até mesmo melhorar a resolução do problema.

Polya (2006, p.13) afirma que:

> “Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução”.

Essa é a teoria de Polya, que é descrita de uma forma para compreender os procedimentos, porque verificamos que sua ideia não era somente deixar o aluno por si só encontrar uma solução, e sim, principalmente, analisar o problema e desenvolver seu pensamento matemático. Ao deixar os conceitos matemáticos que são trabalhados claros, por exemplo, ao perguntar o que é incógnita, o professor pode esclarecer ao aluno qual o significado desta palavra no contexto da Matemática e, assim, sua teoria vai se complementando a cada fase cumprida.

Com o passar dos anos o método de Resolução de Problemas foi encarado como um processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. Como coloca Romanatto (2008, p. 2):

> "Em termos históricos, Polya (1978), educador matemático húngaro, foi o primeiro grande incentivador da resolução de problemas. Isso aconteceu ainda na primeira metade do século passado. Sua proposta era tornar os estudantes de Matemática em bons solucionadores de problemas. Houve avanços e recuos em relação a essa proposta de trabalho com a Matemática, mas a sua essência sempre foi mantida, ou seja, ensinar o estudante a resolver problemas era o objetivo fundamental do ensino dessa disciplina."

2.2. Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Figura 2.2 – Raymond Duval[3]
Fonte: Retirado de http://www.kaputcenter.umassd.edu

[3] A biografia de Raymond Duval foi elaborada a partir da leitura de artigos que utilizaram como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Raymond Duval é licenciado em filosofia e psicologia. De 1970 a 1995 trabalhou na IREM (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática) de Strasbourg, na França e tem contribuído fortemente para as pesquisas em Educação Matemática. Foi professor da Universidade do Litoral da Costa do Opala onde também foi diretor do laboratório de Mudanças do Sistema Educacional.

Lecionou na IUM (Instituto Universitário para Formação de Mestres) onde dirigiu um seminário de pesquisa sobre a conversão das representações. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de pesquisa em Educação Matemática (IREM).

Durante dez anos (de 1970 a 1980), fez um trabalho importante, com François Pluvinage, de pesquisa sobre aquisições do conhecimento pelos estudantes. Os resultados foram publicados no Estudo da Educação Matemática (de 1973 a 1977) e no A.P.M.E.P (Jornal da Associação dos Professores de Matemática). Seus campos de pesquisa principais eram a compreensão dos textos, a diversidade das formas e das práticas do raciocínio, as dificuldades da compreensão das demonstrações, a interpretação dos gráficos, os problemas que relacionam visualização na geometria e todas as representações não-discursivas que utilizam amplamente gráficos para ensinar.

Em 1988 criou a Revista Anual de Didática e de Ciências do Conhecimento. Era membro do comitê científico nacional do IREM e é, atualmente, membro do comitê científico da pesquisa em Didática da Matemática. Ele ainda contribui escrevendo vários artigos sobre representações, problemas no ensino da matemática entre outros.

Sua obra *Sémiosis et Penseé Humaine*: *Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels,* em português, *Sémiosis e pensamento humano*: *registros semióticos e aprendizagens intelectuais*, mostra a importância de sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica para pesquisas no âmbito da Didática da Matemática.

Na última década um grande número de pesquisas têm sido realizadas no Brasil, utilizando esse referencial teórico. A tradução desta obra em língua portuguesa contém apenas a primeira parte da obra original, que é de suma importância para o meio acadêmico da Educação Matemática brasileira, que compartilha com essa teoria em seus estudos e pesquisas sobre aprendizagem Matemática.

A Teoria de Raymond Duval trata do desenvolvimento do funcionamento do pensamento humano, segundo o qual, um indivíduo para aprender um conceito científico precisa fazer distinção entre a *representação semiótica de um objeto matemático e ele próprio.* Esse indivíduo somente tem acesso a esse conceito por meio das representações. Daí o papel essencial, nessa teoria, da atribuição de significados às representações de um conceito científico no processo de ensino-aprendizagem. Duval estabeleceu tipos e funções de representação, conforme a Tabela que segue:

Tabela 2.1 – Tipos de representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
NÃO-CONSCIENTE	Computacional Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: Adaptado de Duval (2009, p. 43).

Conforme consta nessa tabela, temos os tipos de representação que são:

- *as representações subjetiva e mental*, na qual se estudam as crenças, explicações e conhecimentos da infância. O método para o estudo das representações mentais é o de conversão, no qual aquilo que pode aparecer como um *erro* é considerado como um indício das coisas ou de outra lógica;

- *as representações internas ou computacionais*, ou seja, não conscientes do sujeito onde nem todos os passos necessários para a execução de determinadas atividades são pensados anteriormente (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações); e

- *as representações semióticas*, ou seja, externas e conscientes do sujeito. É através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano. Duval (2009, p.15) chama de *semiósis* “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” e *noésis* “a apreensão conceitual de um objeto”.

A teoria dos registros de representação desenvolvida por Raymond Duval estabelece que, para um indivíduo desenvolver o funcionamento do seu pensamento na aquisição de um conhecimento matemático é necessário tanto diferenciar uma noção científica dos registros semióticos que a representam, quanto conhecer a funcionalidade desses registros. Nesta Teoria, ocorrem no funcionamento cognitivo do pensamento humano, dois importantes tipos de aquisições funcionais: as aquisições funcionais relativas aos sistemas orgânicos, disponíveis desde o nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória, e as aquisições funcionais relativas aos sistemas semióticos, usados para se comunicar e também para organizar e tratar as informações.

Com isso, numa atividade de aquisição de conhecimento matemático, temos que considerar dois componentes: os próprios conteúdos desse conhecimento, nos quais existem métodos e processos para descobrir e estabelecer resultados, e o cognitivo, que segundo Duval (2009), a identificação de uma noção matemática com seus registros de representação semióticos pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção. Um registro de representação semiótico de um objeto matemático pode ser símbolo (algébrico ou figural), figura ou a língua natural. Cada tipo de registro apresenta um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido. A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar tratamentos (operações internas a um mesmo registro) e conversões (passagem de um registro a outro, mudando a forma pela qual determinado registro é representado).

Nessa teoria, Duval admite ser próprio da atividade Matemática mobilizar simultânea ou alternadamente vários registros de representação semiótica e, ser essa ação de grande importância para o ensino-aprendizagem da Matemática. A mobilização de registros envolve dois tipos diferentes de transformação dos mesmos: *os tratamentos e as conversões.*

Para o nosso trabalho o objetivo é o aluno ser capaz de efetuar esses tratamentos e conversões necessárias, uma vez que Duval (2009) afirma que o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais se dá a partir da utilização de diversos registros de representação.

2.3. Comparação entre Polya e Duval

Conforme apresentado acima, tivemos o contato com os trabalhos e os pensamentos dos dois autores em questão e, mesmo sendo de áreas tão diferentes, ambos em suas obras se preocuparam com o ensino-aprendizagem da Educação Matemática.

Essa convergência aparece nos procedimentos adotados por cada autor ao abordar os métodos de trabalho. Quando Polya expõe seu modelo priorizando a investigação matemática por meio das quatro fases, quer que fique claro que nesse método o ponto inicial é entender o problema e que para isso precisamos entender o enunciado e trabalhar com todas as possibilidades de indagações. Só assim, encontraremos as conexões necessárias para a solução.

Polya não conseguiu formalizar isso de um modo teórico já que, possivelmente, o seu conhecimento psicológico não era suficiente para definir seus pensamentos, ou seja, as concepções e definições para esse elo: a “amarração” do problema. Duval fez isso com as atividades cognitivas que ele classifica como tratamentos e conversões, além do trabalho com registro de representação semiótico de um objeto matemático que pode ser símbolo (algébrico ou figural), figura ou a língua natural, cuja manipulação entre um e outro na Matemática se dá constantemente.

Na tabela a seguir, teremos a montagem comparativa de pensamentos de Polya que foram consolidados por Duval através de uma linguagem formalizada.

Tabela 2.2 – Possíveis relações entre as ideias de G. Polya e R. Duval

George Polya	**Raymond Duval**
Compreensão do problema Investigação e indagações (enunciado → simbologia matemática)	Conversão do registro de língua natural para o registro simbólico e/ou figural
Auxílio da construção de uma figura	Conversão para o registro figural
A notação precisa ser alterada	Tratamento no registro simbólico (algébrico)
Conhecer problemas correlacionados	As representações subjetiva e mental
Voltar às definições iniciais	As representações semióticas (externas e conscientes do sujeito)
Roteiro geral	Sistema semiótico
Examinar a solução obtida	Tratamentos e conversões satisfeitas
Consolidar o conhecimento adquirido revendo todas as fases até a chegada da solução	Consolidar o conhecimento adquirido, manipulando todas as possíveis conversões e tratamentos

Notamos que eles abrangem as mesmas ferramentas, porém com linguagens diferentes. O que temos atualmente é que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval vem sendo cada vez mais utilizada quando as pesquisas concernem à aquisição de conhecimento e à organização de situações de aprendizagem.

O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra de passar de uma representação a outra. Ou seja, ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação, porém é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão do objeto. Essa apreensão é significativa a partir do momento em que o aluno consegue realizar conversões entre registros de representação e “passar” de um a outro o mais naturalmente possível.

Esse é o foco do nosso trabalho, já que pretendemos analisar o ensino-aprendizagem de Matrizes por meio de Resolução de Problemas utilizando as quatro fases de Polya (investigação) que, como vimos, têm seus pensamentos complementados com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

Agora, sabendo como se dá essa transferência por meio do modelo de Polya e da teoria de Duval, vamos apresentar a escolha dos exercícios para tal observação, ou seja, verificar se esse método com esse procedimento promove um aprendizado mais efetivo do conceito de Matrizes.

3 REALIZAÇÃO DA ESCOLHA DOS EXERCÍCIOS

O tópico escolhido, conforme já foi mencionado, foi o estudo de Matrizes constante no currículo do Ensino Médio. Este conceito é de extrema importância para nossos alunos e sua aplicabilidade, com o passar do tempo, tornou-se cada vez mais visível ao homem, por exemplo, com o surgimento do computador (informática). Essa área faz uso de diversos exemplos de Matrizes, como em programas em que elas aparecem no auxílio dos cálculos matemáticos, editores de imagem e o próprio teclado cuja configuração é realizada por um sistema de Matrizes, entre outros.

Como outros exemplos de aplicação, temos a economia em que o estudo de Matrizes auxilia como grande ferramenta na interpretação de gráficos que também podem ser originados de tabelas que usam a disposição por Matrizes.

Também no próprio aprendizado de conceitos futuros da Matemática, aplica-se o conceito de Matrizes. Ao compreender os cálculos com determinantes, a resolução de sistemas lineares se processa de forma mais rápida embora nem sempre fique claro que está se usando uma forma matricial no sistema linear. Vale ressaltar também sua importância em outros tópicos da Matemática do ensino superior como a álgebra linear, conteúdo este abordado não somente no curso de Licenciatura em Matemática, mas essencial no curso de engenharia, física, química e outros cursos de exatas.

Verificada a importância do conteúdo, fomos à escolha de cinco exercícios para a exploração da pesquisa, ou seja, verificar se nesses problemas a utilização por etapas segundo os quatro passos de Polya (compreender o problema, desenvolver um plano, implementar o plano e avaliar a solução) facilitará o ensino-aprendizagem do conteúdo. Para tal pesquisa foram analisados 20 livros didáticos aprovados pelo PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), 15 provas de vestibulares diversos (FUVEST, PUC-SP, ITA, etc.) e macro avaliações como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) dos anos 2009, 2010 e 2011.

Dentro desse espaço amostral diverso, os critérios para a escolha dos exercícios foram:

- data da edição do livro - por se mostrar presente o conceito no decorrer do tempo e como esse conceito é apresentado;

- autor (es) responsável(is) pela organização do livro, pois o conjunto de pessoas que organiza um problema influencia a redação do mesmo e,

- o nível de dificuldade (para a classificação do nível de dificuldade adotamos que o grau se elevaria de acordo com a quantidade de conceitos englobados na situação-problema exposta ao discente).

A classificação do nível de dificuldade de cada exercício foi feita de acordo com João Pedro Mendes da Ponte (2003, p.4) que em seu artigo “Investigar, ensinar e aprender” coloca que:

> [...] uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. [..]

Para explicar o nível, Ponte (2003) coloca um diagrama (Figura 3.1) para uma melhor compreensão do leitor, que para a nossa pesquisa, será a base para podermos classificar os níveis de dificuldades dos exercícios para os quais Ponte chama de tarefas.

Assim Ponte (2003, p.5) descreve que:

- os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada (2º quadrante);
- os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade (3º quadrante);
- as investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante); e
- finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta (1º quadrante).

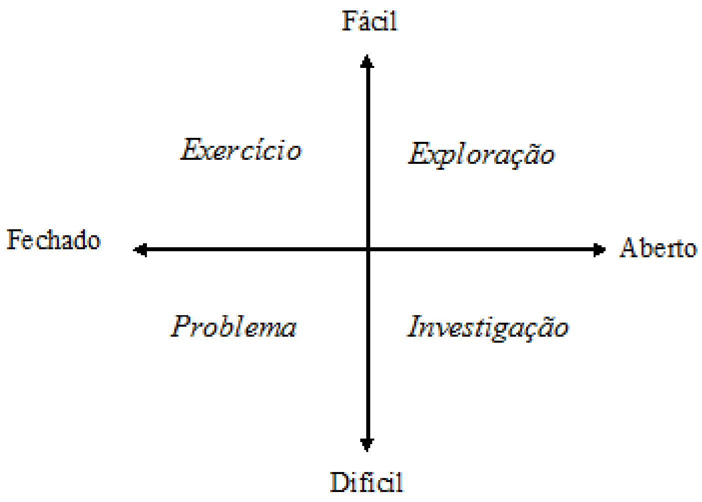

Figura 3.1 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura
Fonte: Adaptado de Ponte (2003, p.5).

Como Ponte (2003) classifica os extremos (fácil e difícil), temos também na pesquisa a classificação dos exercícios como intermediários (I, II e III), levando em conta os mesmos princípios. Ou seja, como os exercícios foram escolhidos para mostrar em uma escala crescente de dificuldade, optamos por classificar como intermediários, sendo assim a dificuldade aumenta conforme a quantidade de tarefas (conceitos) a serem realizadas para se chegar a solução.

Durante a pesquisa notamos a presença constante do conceito de Matrizes, em todos os livros didáticos tendo um capítulo específico para tal assunto. Nos vestibulares também se faz presente a cobrança desse conhecimento, e no ENEM consta nos anos 2009 e 2010 de uma forma indireta, ou seja, por meio de tabelas.

Assim, foram selecionados os cinco problemas a seguir, já organizados conforme o nível de dificuldade e citados conforme sua referência (autor, instituição e ano).

1. **(PUC-SP-70)** A é uma matriz 3 por 2 definida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \ i = j \\ i^2, & se \ \ i \neq j \end{cases}$. Então A se escreve: **(FÁCIL)**

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

2. **(FUVEST-77)** Considere as matrizes:

1) $A = (a_{ij})$, 4 x 7 , definida por $a_{ij} = i - j$

2) $B = (b_{ij})$, 7 x 9 , definida por $b_{ij} = i$

3) C = (c_{ij}) , C = AB

O elemento c_{63} : **(INTERMEDIÁRIO I)**

a) é – 112 b) é – 18 c) é – 9 d) é 112 e) não existe

3. **(Dante, L. R. – Matemática : livro do professor—1. Ed. – São Paulo : Ática, 2004)** Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de x para que se tenha detA = detB. **(INTERMEDIÁRIO II)**

4. **(Souza, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2)** Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende 4 bairros, respectivamente, nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março. Nelas, as linhas indicam respectivamente os tipos de plano, I e II, e as colunas A, B, C e D. **(INTERMEDIÁRIO III)**

$$J = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a matriz T_{2x4} que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado.

b) Em qual bairro foi vendido o maior número de unidades do plano I? E do plano II?

5. **(Souza, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2)** Na tela de um computador, cada pixel corresponde a um elemento de uma matriz. Uma imagem de 800 x 600 Pixels, por exemplo, esta disposta em uma matriz de 800 colunas e 600 linhas que não podem ser percebidos a olho nu. Para aumentar, diminuir, rotacionar ou transladar essa imagem, a computação gráfica utiliza operações de matrizes em cada um dos 800 . 600 = 480000 pixels. A rotação de um pixel de coordenadas (x,y) em α graus, no sentido horário, em torno da origem, por exemplo, é feita pela multiplicação da matriz P = [x,y] com a matriz $R = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$, gerando uma nova matriz P' = P.R, com as novas coordenadas (x',y') do pixel. Considere um triângulo ABC de vértices em A(3,2), B(5,5,) e C(7,0). Construa em um mesmo plano cartesiano os triângulos A'B'C' e A"B"C", obtidos pela rotação do ∆ABC em 90° e em 180°, respectivamente, em torno da origem, no sentido horário. **(DIFÍCIL)**

Nas próximas duas subseções serão apresentadas a proposta do material didático tanto do(a) professor(a) contendo todas as indagações pertinentes e com a resposta para manter o planejamento do método durante a execução em sala de aula e, quanto do aluno com uma abordagem apropriada (pedagógica) para a sua resolução em sala de aula. Portanto, este material poderá auxiliar a mediação do professor e, consequentemente, uma aprendizagem mais satisfatória do aluno.

E, como nosso objetivo é colocar em prática o modelo de Polya, não apresentamos no Guia de Atividades do(a) Professor(a) uma análise destacando os tratamentos e as conversões presentes entre os diferentes registros.

3.1. Proposta do “Guia de Atividade do(a) Professor(a)”

Prezado(a) professor(a),

Segue abaixo o material para o auxílio no decorrer da aula sobre Matrizes, utilizando a estratégia de Resolução de Problemas, visando a procedimentos do trabalho como um todo.

As orientações aqui contidas incorporam os princípios abordados por George Polya, ficando como sugestões a serem seguidas, lembrando que seu papel é sempre de ser mediador da situação-problema, estabelecendo a ligação entre seu aluno e o problema exposto.

O conteúdo está organizado em cinco exercícios classificados conforme o nível de dificuldade os quais foram extraídos de livros didáticos, vestibulares e concursos conforme consta na fonte do próprio exercício para consulta, caso necessário. Além disso, será oferecida orientação para o desenvolvimento das situações de aprendizagem.

Esperamos que você aproveite e implemente as orientações didático-pedagógicas aqui contidas, devido a seus questionamentos, ao indagar sobre os exercícios, serem de extrema importância para o alcance da solução que é concretizada essencialmente na sala de aula, pelo(a) professor(a) e pelos alunos.

Exercícios Propostos

1. (PUC-SP-70) A é uma matriz 3 por 2 definida pela lei a $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ \ i = j \\ i^2, & se\ \ i \neq j \end{cases}$. Então A se escreve: (FÁCIL)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

OBS.: O aluno nesse estágio já teve contato com as definições e construção de matrizes, ou seja, está familiarizado com a simbologia adotada e compreende os objetos matemáticos abordados nesse exercício.

PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO (SEGUNDO POLYA)

Comentário: *O exercício exposto é fácil. Nesse ponto as indagações serão poucas. O aluno somente precisa ter compreendido a definição de como construir uma matriz dada sua lei de formação e, como mencionado na observação, isso já é um pré-requisito. Esse pode ser um exemplo para o professor(a) apresentar o conceito.*

Sendo assim, segue abaixo suas indagações juntamente com as respostas:

- Qual é a incógnita?

A nossa incógnita é a matriz A.

- O que se deve procurar?

Devemos procurar os elementos que compõem essa matriz A.

- Quais são os dados?

Os dados obtidos através do enunciado são:

a matriz A tem dimensão 3 x 2

sua lei de formação é $a_{ij} = \begin{cases} 1, \; se \;\; i = j \\ i^2, \; se \;\; i \neq j \end{cases}$

MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO

Após essa análise, temos que ... *[professor(a) mediando]* ... se A_{3X2} ela genericamente obedece a essa construção A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

Sendo regida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \ i = j \\ i^2, & se \ \ i \neq j \end{cases}$

Obtemos assim... *[professor(a) mediando]...* seus respectivos elementos que são:

a_{11}=1

a_{12}= 1^2 =1

a_{21}=2^2 =4

a_{22}=1

a_{31}=3^2 =9

$a_{32} = 3^2$ =9

Portanto, substituindo os elementos obtemos ... *[professor(a) mediando]...*

A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$.

CONCLUSÃO: Logo alternativa B é a Correta.

2. (FUVEST-77) Considere as matrizes:

1) $A = \left(a_{ij}\right)$, 4 x 7 , definida por $a_{ij} = i - j$

2) $B = \left(b_{ij}\right)$, 7 x 9 , definida por $b_{ij} = i$

3) C = $\left(c_{ij}\right)$, C = AB

O elemento c_{63} : (INTERMEDIÁRIO I)

a) é – 112 b) é – 18 c) é – 9 d) é 112 e) não existe

OBS.: O aluno, nesse estágio, além de já ter o contato com definições e construção de matrizes, precisa já ter o domínio das operações possíveis nesse universo. Ou seja, além de ter a familiaridade com a simbologia adotada e de compreender os objetos matemáticos abordados nesse exercício, ter também o conhecimento necessário e suficiente para operação com elementos desse conjunto.

PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO (SEGUNDO POLYA)

Comentário: *O exercício exposto como intermediário I tem um vínculo com o primeiro que qualificamos como fácil, uma vez que para se chegar a sua resolução somente o aluno precisa colocar em prática a definição e ter notoriamente claro o que é uma lei de formação (conceito primordial para a construção de matrizes). Já nesse segundo exercício, além de ter esses pré-requisitos, precisa saber operar, mais especificamente, realizar o produto de matrizes.*

Sendo assim suas indagações serão mantidas conforme o primeiro exercício:

- Qual é a incógnita?

A nossa incógnita é o elemento c_{63} .

- O que se deve procurar?

Devemos procurar os elementos que compõem nesse caso a matriz C.

- Quais são os dados?

Os dados obtidos através do enunciado são:

$A = (a_{ij})$, 4 x 7 , definida por $a_{ij} = i - j$

$B = (b_{ij})$, 7 x 9 , definida por $b_{ij} = i$

C = (c_{ij}) , C = AB

- É possível imaginar um problema correlato que permita auxiliar nos cálculos?

Sim, é possível buscar um problema correlato. Observe que, para se chegar à resposta correta, antes precisamos encontrar as matrizes A e B, devido C ser o produto entre elas. Ou seja, utilizaremos o conceito apreendido no item anterior como ferramenta para resolver este.

Comentário: *Após essa análise, temos a seguir duas resoluções do mesmo problema, sendo a primeira a mais abordada pelos alunos que adotam resolver diretamente através dos cálculos, uma vez que o enunciado induz a esse procedimento, que é mais cansativo e demorado. Porém, na segunda resolução, o procedimento é baseado totalmente nas definições, tornando a resolução menos cansativa e, assim, mais rápida.*

1ª Resolução:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz C o produto entre A e B então... [*professor(a) mediador*] ...

Segue a seguir o cálculo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 + (-1).2 + (-2).3 + (-3).4 + (-4).5 + (-5).6 + (-6).7 & \dots\dots\dots\dots\dots & " \\ 1.1 + 0.2 + (-1).3 + (-2).4 + (-3).5 + (-4).6 + (-5).7 & \dots\dots\dots\dots\dots & " \\ 2.1 + 1.2 + 0.3 + (-1).4 + (-2).5 + (-3).6 + (-4).7 & \dots\dots\dots\dots\dots & " \\ 3.1 + 2.2 + 1.3 + 0.4 + (-1).5 + (-2).6 + (-3).7 & \dots\dots\dots\dots\dots & " \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 0-2-6-12-20-30-42 & \dots\dots\dots\dots & 0-2-6-12-20-30-42 \\ 1+0-3-8-15-24-35 & \dots\dots\dots\dots & 1+0-3-8-15-24-35 \\ 2+2+0-4-10-18-28 & \dots\dots\dots\dots & 2+2+0-4-10-18-28 \\ 3+4+3+0-5-12-21 & \dots\dots\dots\dots & 3+4+3+0-5-12-21 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -112 & -112 & -112 & -112 & -112 & -112 & -112 & -112 & -112 \\ -84 & -84 & -84 & -84 & -84 & -84 & -84 & -84 & -84 \\ -56 & -56 & -56 & -56 & -56 & -56 & -56 & -56 & -56 \\ -28 & -28 & -28 & -28 & -28 & -28 & -28 & -28 & -28 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO: Portanto não existe o elemento c_{63}, logo a resposta correta é alternativa E.

2ª Resolução:

Sabemos pelos dados que $A_{4\,x\,7}\ e\ B_{7\,x\,9}$ queremos descobri a matriz $C = AB$.

Sendo $C = AB$, temos .. .[*professor mediando*] ...

$A_{4\,x\,7}\ .\ B_{7\,x\,9}$ (nº de colunas de A é igual ao nº de linhas de B).

Portanto o produto AB existe? ... [*professor mediando*] ...

Sim, segue que:$A_{4\,x\,7}\ .\ B_{7\,x\,9} = C_{\,4\,x\,9}$

Logo C é uma matriz de dimensão 4x9 e, assim o elemento c_{63} , não existe pois deveria ser um elemento que se encontraria na 6ª linha e 3ª coluna.

CONCLUSÃO: Logo resposta correta é alternativa E.

3. (DANTE, L. R. – Matemática: livro do professor—1. Ed. – São Paulo : Ática, 2004) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de x para que se tenha det(A) = det(B). (INTERMEDIÁRIO II)

OBS.: O aluno nesse estágio, além de já ter o contato com as definições e construção de matrizes e das operações possíveis nesse universo, precisa ter pelo menos a noção de conceitos de determinantes de ordem 2 e 3. Ou seja, além de ter familiaridade com a simbologia adotada e de compreender os objetos matemáticos abordados e saber as operações, é indispensável o conhecimento sobre determinantes de matrizes.

PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO (SEGUNDO POLYA)

Comentário: *O exercício exposto como intermediário II trabalha com conceitos mais "sofisticados" por isso esta classificação. Exercícios que abordam conceitos de determinantes não são considerados de fácil assimilação, pois utilizam algoritmos mais complexos como Sarrus e Laplace. Nesse exercício, para o aluno chegar à resposta, ele precisa passar pela resolução de dois determinantes, sendo um de ordem 2 e o outro de ordem 3, que neste caso, utiliza a regra de Sarrus. Para calcular o valor da sua incógnita existe uma condição que precisa estar clara para o aluno.*

Sendo assim suas indagações será:

- Qual é a incógnita?

A nossa incógnita é X.

- O que se deve procurar?

Devemos procurar o valor de X.

- Quais são os dados?

Os dados são duas matrizes A_{2X2} e B_{3X3} , no qual precisamos ter detA=detB para encontrar o valor de X.

- Qual é a condicionante?

A condicionante é termos det(A)= det(B).

- A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Sim, ela é suficiente, uma vez que resolvendo os determinantes e igualando obteremos uma equação de 1º grau e assim fica fácil a obtenção do valor da incógnita.

- Trata se de um problema razoável?

Sim, é um problema razoável, pois engloba conceitos específicos além de conter outros conceitos embutidos no decorrer da resolução.

- A resposta satisfaz o problema?

Após a resposta, para verificar se ela satisfaz o problema é preciso somente substituir o valor encontrado no lugar do X e ver se manterá a igualdade dos determinantes, caso não ocorra isso a resposta está incorreta.

Após essa análise segue abaixo a resolução:

Sendo A uma matriz de ordem 2x2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2.9 - 3x = 18 - 3x$$

Sendo B uma matriz de ordem 3x3; usamos a regra de *Sarrus*:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} \quad ; \quad \det(B) = 3 + x - 2x + 2 = x + 5$$

Agora que temos o valor dos determinantes, vamos para a condicionante para se chegar ao valor de X.

$$\det(A) = \det(B)$$

$$18 - 3x = x + 5$$

$$-3x - x = 5 - 18$$

$$-4x = -13$$

$$x = \frac{-13}{-4} = \frac{13}{4}$$

CONCLUSÃO: Portanto $x = \frac{13}{4}$.

4. (SOUZA, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2) Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende 4 bairros, respectivamente, nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março. Nelas, as linhas indicam respectivamente os tipos de plano, I e II, e as colunas A, B, C e D. (INTERMEDIÁRIO III)

$$J = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a matriz T_{2x4} que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado.

b) Em qual bairro foi vendido o maior número de unidades do plano I? E do plano II?

OBS.: O aluno nesse estágio, além de já ter o contato com as definições e construção de matrizes e das operações possíveis nesse universo, precisa ter a habilidade de compreender o problema, que esta na linguagem materna, e transformar para a simbologia Matemática. Sem esse tratamento o aluno não será capaz de chegar à resolução adequada.

PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO (SEGUNDO POLYA)

Comentário: *O exercício é classificado como intermediário III, pois aqui além de conceitos matemáticos sobre o conjunto de matrizes o aluno precisa essencialmente ter a habilidade de interpretação do enunciado. Ou seja, precisa saber lidar com a transformação da linguagem materna para a linguagem simbólica da Matemática. Sem essa habilidade não se conseguirá chegar à resolução correta.*

Sendo assim suas indagações será:

- Qual é a incógnita?

A nossa incógnita é T_{2x4} que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro e o encontro dessa matriz e a interpretação dos dados presentes nessa matriz é resposta do item b.

- O que se deve procurar?

Devemos procurar a matriz que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado, e em qual bairro foi mais vendido unidades do plano I e do plano II.

- Quais são os dados?

Os dados são as três matrizes referente às vendas dos planos no primeiro trimestre com relação à cobertura de quatro bairros A, B, C e D.

- Trata se de um problema razoável?

É um problema razoável, pois engloba conceitos que se tornam claros para o aluno somente se houver uma interpretação do problema. Esse tratamento da representação da linguagem materna para simbólica é, na maioria das vezes, o maior obstáculo para nossos estudantes.

- A resposta satisfaz o problema?

Para verificar se a resposta satisfaz o problema precisamos mais uma vez da interpretação, pois os dados não são somente números, eles estão relacionados a condicionantes (significados), nesse caso aos bairros e aos planos.

MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO

Após toda essa análise segue abaixo a resolução do problema, primeiro vamos identificar através da interpretação do enunciado o que são os planos e o que são os bairros.

Planos: linhas I e II

Bairros: colunas A, B, C e D; respectivamente nessa ordem.

$$T_{2\,x\,4} = J + F + M =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15+18+22 & 25+24+22 & 22+22+20 & 19+25+23 \\ 23+20+22 & 16+21+20 & 18+19+26 & 21+23+19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}$$

Observando $T_{2\,x\,4}$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} & \begin{bmatrix} 55 & \color{red}{74} & 64 & 67 \\ \color{red}{65} & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \end{array}$$

CONCLUSÃO: O maior número de unidades do plano I que foi vendido está no bairro B, e do Plano II está no bairro A.

5. (SOUZA, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2) Na tela de um computador, cada pixel corresponde a um elemento de uma matriz. Uma imagem de 800 x 600 Pixels, por exemplo, esta disposta em uma matriz de 800 colunas e 600 linhas que não podem ser percebidos a olho nu. Para aumentar, diminuir, rotacionar ou transladar essa imagem, a computação gráfica utiliza operações de matrizes em cada um dos 800 . 600 = 480000 pixels. A rotação de um pixel de coordenadas (x,y) em α graus, no sentido horário, em torno da origem, por exemplo, é feita pela multiplicação da matriz P = [x,y] com a matriz $R = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$, gerando uma nova matriz P’ = P.R, com as novas coordenadas (x’,y’) do pixel.

Considere um triângulo ABC de vértices em A(3,2), B(5,5,) e C(7,0). Construa em um mesmo plano cartesiano os triângulos A’B’C’ e A”B”C”, obtidos pela rotação do ΔABC em 90° e em 180°, respectivamente, em torno da origem, no sentido horário. (DIFÍCIL)

OBS.: O aluno nesse estágio, além de já ter o contato com as definições e construção de matrizes e das operações possíveis nesse universo, precisa ter a habilidade de compreender o problema, que está na linguagem materna, e transformar para simbologia Matemática. Nesse exercício o problema está contextualizado e aborda algo do seu cotidiano. Além de conceitos sobre o conjunto de matrizes, o aluno precisa ter domínio de outros conceitos matemáticos como trigonometria, plano cartesiano e geometria plana. (Vale ressaltar que esse exercício, tomando como pressuposto o ensino da matemática no ensino superior, trabalha conceitos complexos da álgebra linear).

PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO (SEGUNDO POLYA)

Comentário: *Esse exercício é classificado como difícil, pois trabalha num contexto geral da matemática englobando como foco principal a utilização de matrizes para sua resolução. Porém não é somente esse conceito que resolve o problema, precisamos de outros conceitos para se chegar à resposta correta. Como dito, este exercício envolve trigonometria, plano cartesiano e geometria plana exigindo do aluno uma maior dedicação e uma busca maior dos seus conhecimentos adquiridos até o presente momento.*

Segue abaixo as indagações pertinentes para o problema:

- Qual é a incógnita?

Nesse exercício nossa incógnita são os triângulos A'B'C' e A''B''C''.

- O que se deve procurar?

Devemos procurar os pontos que formam esses respectivos triângulos.

- Quais são os dados?

Os dados são um triangulo inicial com pontos em A(3,2), B(5,5,) e C(7,0) e a rotação desses triângulos em 90° e 180° respectivamente. E, claro é dado também a matriz de rotação indicada como $R = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$.

- Qual é a condicionante?

A condicionante é essa rotação de 90° e 180° a partir desse triângulo inicial para obtenção dos demais.

- A condicionante é suficiente para determinar à incógnita?

Sim a condicionante é suficiente, uma vez que temos a matriz de rotação e os pontos iniciais do triângulo.

- Trata se de um problema razoável?

É um problema que exige um pouco mais do aluno, pois envolve vários conceitos em um mesmo exercício.

- Conseguimos segmentar o problema? Dá para trabalhar por etapas?

É possível segmentar e trabalhar por etapas sim, primeiro resolvendo com a rotação de 90° e depois com a rotação de 180°, assim a visualização da resolução ficará mais clara.

- É possível verificar o resultado?

A verificação do exercício pode ser vista através da montagem gráfica dessa rotação.

OBS.: No caso desde exercício utilizamos o software Geogebra.

Após essa análise segue abaixo a resolução proposta, juntamente com a montagem geométrica da resposta final obtida:

Inicialmente, substituímos $\alpha_1 = 90°$ e $\alpha_2 = 180°$ na matiz R, obtendo:

$$R' = \begin{bmatrix} \cos 90° & -sen\ 90° \\ sen\ 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R'' = \begin{bmatrix} \cos 180° & -sen\ 180° \\ sen\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, tomamos as matrizes $A = [3 \quad 2]\,, B = [5 \quad 5]\; e\; C = [7 \quad 0]$, correspondentes aos vértices do triângulo ABC, e multiplicamos pela matriz:

R’, obtemos os vértices do triângulo A’B’C’:

$$A' = A.R' = [3 \quad 2]\,.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3\,.0 + 2\,.1 \quad 3(-1) + 2\,.0] = [2 \quad -3]$$

$$B' = B.R' = [5 \quad 5]\,.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [5\,.0 + 5\,.1 \quad 5(-1) + 5\,.0] = [5 \quad -5]$$

$$C' = C.R' = [7 \quad 0] . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [7 . 0 + 0 . 1 \quad 7(-1) + 0 . 0] = [0 \quad -7]$$

R'' , obtemos os vértices do triângulo A''B''C'':

$$\mathrm{A}'' = \mathrm{A.R}'' = [3 \quad 2]. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \left[3(-1) + 2.0 \quad 3.0 + 2(-1)\right] = \left[2 \quad -3\right]$$

$$B'' = B.R'' = [5 \quad 5]. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [5(-1) + 5.0 \quad 5.0 + 5(-1)] = [-5 \quad -5]$$

$$C'' = C.R'' = [7 \quad 0]. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [7(-1) + 0.0 \quad 7.0 + 0(-1)] = [-7 \quad 0]$$

Visualização Geométrica

$$\Delta ABC : A(3,2); B(5,5); C(7,0)$$

$$\Delta A''B''C'': A''(-3,-2); B''(-5,-5); C''(-7,0)$$

$$\Delta A'B'C': A'(2,-3); B'(5,-5); C'(7,0)$$

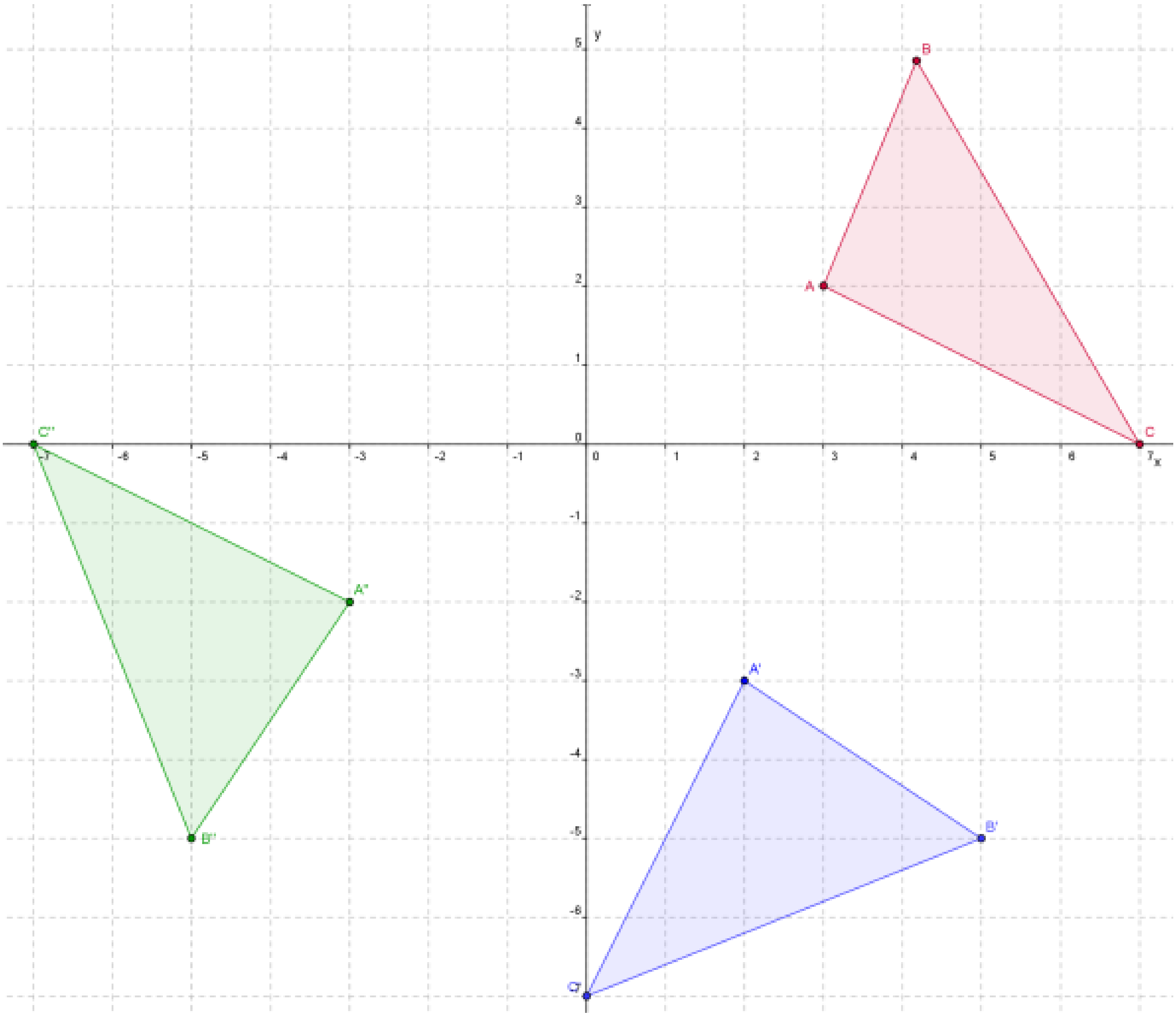

Figura 3.1 – Representação Geométrica

3.2. Proposta do “Guia de Atividade do Aluno”

Caderno do aluno

NOME:____SÉRIE:______

Caro aluno,

Os exercícios aqui contidos são para ajudar você a compreender e utilizar parte dos conhecimentos adquiridos pela humanidade ao longo da história em relação à matemática. As situações de aprendizagem que você encontrará aqui apresentam conhecimentos matemáticos sobre matrizes, de forma contextualizada, para que a aprendizagem seja construída como parte de sua vida cotidiana e do mundo ao seu redor.

Aqui você encontrará diferentes situações-problemas envolvendo diversos conceitos sobre o cálculo com matrizes. Haverá também algumas perguntas que precisam ser analisadas e respondidas por você, levando-o assim a refletir e consequentemente, a solucionar o problema proposto.

Faça das suas aulas de Matemática um espaço de investigação e construção de conhecimento, sempre auxiliado pelo seu professor(a).

Exercícios Propostos

1. (PUC-SP-70) A é uma matriz 3 por 2 definida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \ i = j \\ i^2, & se \ \ i \neq j \end{cases}$. Então A se escreve:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

- Qual é a incógnita?

____

____

- O que se deve procurar?

___

___

- Quais são os dados?

___

___

___

RESOLUÇÃO

2. (FUVEST-77) Considere as matrizes:

1) $A = (a_{ij})$, 4 x 7 , definida por $a_{ij} = i - j$

2) $B = (b_{ij})$, 7 x 9 , definida por $b_{ij} = i$

3) C = (c_{ij}) , C = AB

O elemento c_{63} :

a) é – 112 b) é – 18 c) é – 9 d) é 112 e) não existe

- Qual é a incógnita?

- O que se deve procurar?

- Quais são os dados?

- É possível imaginar um problema correlato que permita auxiliar nos cálculos?

RESOLUÇÃO

3. (DANTE, L. R. – Matemática: livro do professor—1. Ed. – São Paulo : Ática, 2004) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de x para que se tenha det(A) = det(B).

- Qual é a incógnita?

____

____

- O que se deve procurar?

____

____

- Quais são os dados?

____

____

____

____

- Qual é a condicionante?

____

____

- A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

____

____

____

____

- Trata se de um problema razoável?

RESOLUÇÃO

- A resposta satisfaz o problema?

4. (SOUZA, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2) Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende 4 bairros, respectivamente, nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março. Nelas, as linhas indicam respectivamente os tipos de plano, I e II, e as colunas A, B, C e D.

$$J = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}$$

a) Escreva a matriz T_{2x4} que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado.

b) Em qual bairro foi vendido o maior número de unidades do plano I? E do plano II?

- Qual é a incógnita?

- O que se deve procurar?

- Quais são os dados?

- Trata se de um problema razoável?

RESOLUÇÃO

- A resposta satisfaz o problema?

____

____

____

5. (SOUZA, J. R. – Novo olhar matemática – 1. Ed. – São Paulo : FTD, 2010 – Coleção novo olhar; v.2) Na tela de um computador, cada pixel corresponde a um elemento de uma matriz. Uma imagem de 800 x 600 Pixels, por exemplo, esta disposta em uma matriz de 800 colunas e 600 linhas que não podem ser percebidos a olho nu. Para aumentar, diminuir, rotacionar ou transladar essa imagem, a computação gráfica utiliza operações de matrizes em cada um dos 800 . 600 = 480000 pixels. A rotação de um pixel de coordenadas (x,y) em α graus, no sentido horário, em torno da origem, por exemplo, é feita pela multiplicação da matriz P = [x,y] com a matriz $R = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$, gerando uma nova matriz P' = P.R, com as novas coordenadas (x',y') do pixel.

Considere um triângulo ABC de vértices em A(3,2), B(5,5,) e C(7,0). Construa em um mesmo plano cartesiano os triângulos A'B'C' e A"B"C", obtidos pela rotação do ΔABC em 90° e em 180°, respectivamente, em torno da origem, no sentido horário.

- Qual é a incógnita?

____

____

- O que se deve procurar?

____

____

____

- Quais são os dados?

- Qual é a condicionante?

- A condicionante é suficiente para determinar à incógnita?

- Trata se de um problema razoável?

- Conseguimos segmentar o problema? Dá para trabalhar por etapas?

RESOLUÇÃO

- É possível verificar o resultado?

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procuramos justificar a importância da Resolução de Problemas para o ensino-aprendizagem de Matrizes, buscando trazer deste tanto seus aspectos históricos quanto a sua influência para a formação de professores. Nosso objetivo foi verificar se a resolução por fases, conforme o estabelecido pela teoria de George Polya e formalizado pela teoria de Raymond Duval, pode promover esse aprendizado mais eficaz. Dessa forma, ao utilizar esse processo de investigação, os alunos desenvolvem seu raciocínio com mais naturalidade, melhorando o entendimento até a resolução, assim consolidando os conceitos envolvidos e, consecutivamente, a aprendizagem.

Acreditamos que, quando o docente em sua aula apresenta um conceito seguindo essa lógica, os discentes poderão obter um rendimento mais eficiente, além de, implicitamente, desenvolver no seu aluno o hábito da investigação, da formulação e da validação do resultado encontrado. Passos esses seguidos na íntegra por Polya.

Pensamos que uma aula ministrada visando apresentar um problema matemático em que o discente deverá descobrir o caminho para resolvê-lo, possibilita ao estudante a alegria de vencer obstáculos, vivenciando plenamente assim o que é “fazer matemática”.

Feito isso, uma proposta é que o professor instigue o raciocínio dos discentes, e trabalhe com a Resolução de Problemas de Matrizes seguindo as quatro fases, algo que se apresenta com potencialidade de ser eficiente, ou seja, pode sim promover o aprendizado mais efetivo de Matrizes, dentre outros conteúdos, no Ensino Médio.

Assim, como contribuição final, temos a proposta de dois textos: “o Caderno do Aluno” e “o Caderno do(a) Professor(a)”, que são textos contendo os problemas abordados sobre Matrizes em uma escala crescente de tarefas (conceitos) envolvidas para a resolução. Isso, visando proporcionar uma melhor compreensão tanto para o docente quando do discente, além de estar planejado já no sistema abordado por George Polya, podendo tornar assim o ensino-aprendizagem mais produtivo.

Por fim, vale ressaltar mais uma vez que esse procedimento de escolha e aplicação das fases de Polya juntamente com a complementação dos estudos de Duval, pode ser aplicado a qualquer área da Matemática, bem como também em todos os níveis de ensino, já que suas investigações são aplicáveis a todos as resoluções de problemas matemáticos.

Fica a sugestão, como sequência a esta pesquisa, analisar se a aplicação deste material produzido comprova plenamente que o ensino-aprendizagem por esses métodos se torna mais eficiente.

REFERÊNCIAS

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Fascículo I) Trad.: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Ed. Livraria da Física, 2009.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Palestra de Encerramento: Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo** In: I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 2008, - Rio Claro, Anais de Trabalhos Completos I SERP, Rio Claro: UNESP, 2008.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas.** Trad.: Heitor Lisboa de Araújo. Ed. Interciência, 2006. Título original: *How to solve it*, 1945.

POMBO, Olga. **Breves dados históricos sobre Polya.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/biografia.htm> Acesso em 18 abr. 2012.

PONTE, João Pedro Mendes. **Investigar, ensinar e aprender.** (2003) Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf> Acesso em 10 abr. 2012.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de Problemas Na Formação de Professores Pesquisadores** In: I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 2008, Rio Claro, Anais de Trabalhos Completos I SERP, Rio Claro: UNESP, 2008.

ANEXO A – Bibliografias Consultadas

Neste anexo consta uma lista de bibliografias consultadas para a realização da pesquisa, que não foram utilizadas como referências, mas que através destas leituras contribuíram indiretamente para a construção final da pesquisa. Acreditamos que as mesmas possam ser interessantes para pesquisas futuras.

Segue abaixo a listagem:

D'AMBROSIO, Beatriz S. **A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático** In: I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 2008, Rio Claro, Anais de Trabalhos Completos I SERP, Rio Claro: UNESP, 2008

GUERATO, Elizabete Teresinha. ; BARROS, L.G.X. **Resolução de Problemas no Ensino e na Aprendizagem da Matemática nos anos Iniciais do Ensino Fundamental.** In: III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIEMAT III, 2011, São Paulo, Anais do III SIEMAT, São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011.

HUÁMAN HUANCA, Roger Ruben. **Um Olhar para a Sala de Aula a partir da Resolução de Problemas e Modelação Matemática** In: I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 2008, Rio Claro, Anais de Trabalhos Completos I SERP, Rio Claro: UNESP, 2008.

OLIVEIRA, Sandra Alves. ; PASSOS, Cármem Lúcia Brancaglion. **De professora a pesquisadora:** reflexões sobre a resolução de problemas nas aulas de matemática In: XIII CONFERÊNCIA INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIAEM, 2011, Recife. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de professores e aplicação em sala de aula**.** Traduzido por P. H. Colonese. 6a ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.