



Modelagem Matemática: Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação

Marcos Afonso da Silva

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Marcos Afonso

Modelagem Matemática: Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Graduação / Marcos Afonso da Silva - São Paulo: IFSP, 2014.

140f.

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Henrique Marins de Carvalho

1. Modelagem Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Aplicações. I. Modelagem Matemática: Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Graduação.

MARCOS AFONSO DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS EM CURSOS DE GRADUAÇÃO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 03/07/2014

CONCEITO: 10,0 (Dez)

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Marcio Yuji Matsumoto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Membro da Banca

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador

Aluno: Marcos Afonso da Silva

*“Eu te farei ter perspicácia e te instruirei
no caminho em que deves andar. Vou
dar conselho com o meu olho [fixo] em
ti”.*

Salmos 32:8

*Aos meus pais, irmão e irmã e meus
tios pelo apoio e companheirismo em
tantos momentos difíceis nessa jornada.
Aos amigos, por tudo que passamos
juntos em todo esse tempo.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Verdadeiro DEUS cuja morada está nos mais altos dos céus. Sem Seu amor, Sua benignidade imerecida, Seus maravilhosos conselhos e princípios, Sua sabedoria ilimitada e muitas outras qualidades infinitas que só o Senhor possui eu não seria nada. Obrigado, Pai Amado por toda sua provisão durante todos esses anos e por me fazer perspicaz em todos os momentos de acordo com seus propósitos. Obrigado por me segurar com sua mão direita de justiça sempre quando estive prestes a cair. Todas as coisas que eu lhe peço e agradeço nunca são por méritos próprios, pois nada mereço de ti. Tudo são nos méritos do Seu Amado Filho, nosso Senhor Jesus.

Agradeço minha família: minha mãe Luiza, meu pai Sergio, meu irmão Marcelo, minha irmã Fernanda e meus tios Gonçalo, Lourival, Aparecido e João, minha cunhada Tatiana e sobrinhas Mariana e Sophia, pois sem o apoio de cada um de vocês, sem os seus carinhos em diversos momentos que em minha cabeça passava a palavra desistência e eu estava praticamente caído vocês me pegaram pelo braço e me levantaram para que eu continuasse a lutar até o fim. Esse apoio foi fundamental para que todos nós conseguíssemos chegar até o fim.

Agradeço a todos os meus amigos que, nessa hora, é bastante difícil citar um por um, pois foram muitos que lutaram a cada dia comigo nessa jornada, pela paciência, pelas ajudas, pelos estudos diários e alguns até mesmo de madrugada, pelos momentos divertidos que tivemos em todos esses semestres, por abdicarem de vários momentos em que poderiam estar fazendo outras atividades, mas estavam lá comigo lutando para atingirmos os mesmos objetivos.

Agradeço a oportunidade de ser orientado pelo Professor Ms. Henrique Marins de Carvalho que aceitou de braços abertos este projeto e contribuiu de forma excelente para o crescimento do mesmo. Agradeço sua paciência, dedicação, humildade, compartilhamento do conhecimento em que eu pude aprender muitas coisas que jamais imaginaria aprender e isso me fez amadurecer e crescer academicamente. Mais importante do que isso, em nome de todos os alunos agradeço por, antes de ser nosso Professor e Coordenador, você sempre foi nosso amigo acima disso. Ficam aqui nossos agradecimentos.

Agradeço ao Professor Dr. Marcio Matsumoto do curso de Licenciatura em Química por sua paciência, humildade e dedicação nesse projeto, sempre me atendendo da melhor maneira possível dentro de suas possibilidades e fornecendo ricas sugestões em todos nossos encontros. Meu muito obrigado.

Agradeço a Professora Ms. Elisabete Teresinha Guerato por ter feito parte dessa minha caminhada como futuro professor e por ter confiado a mim substituí-la na Oficina de Artes e Ensino onde estou até hoje e, aproveitando o ensejo, agradeço também a Nádia e Mariangela pela oportunidade de ser um dos professores da oficina e por terem participado

ativamente todo esse tempo do meu crescimento sempre confiando e me dando a força necessária para continuar batalhando por nossos alunos.

Agradeço a Professora Dra. Graziela Marchi Tiago pelo convite para participar do projeto de Iniciação Científica em que eu pude aprender muito e crescer academicamente. Muito obrigado.

Agradeço ao Professor Ms. Jose Maria Carlini por trabalhar contigo durante alguns semestres nos textos do reforço para o Ensino Médio. Pode ter certeza que esse contato e trabalho me fez aprender e crescer muito contigo.

Agradeço à EMEF Professor Amadeu Mendes e toda sua direção que me acolheu desde os meus primeiros anos de estudo até à minha formação. Agradeço a todos os professores principalmente dois: Professor Sidnei Ribeiro e Professor Renato Arebas. Ambos contribuíram muito em todos os sentidos dessa maravilhosa profissão; sendo eles bastante atenciosos, humildes, guerreiros e com energia inesgotável na luta para uma educação melhor para nossos alunos. Professores, muito obrigado.

Agradeço à Professora Ms. Cristina Lopomo Defendi pela paciência, ricas contribuições, sugestões, correções referentes à Língua Portuguesa no trabalho.

Agradeço também a todo o corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP, pois sem nenhuma exceção fizeram parte da minha vida acadêmica e do meu crescimento pessoal e profissional.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar e estudar modelos matemáticos descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) presentes nas grandes áreas do conhecimento principalmente em cursos de graduação. Tais áreas são Engenharias, Física, Biologia e Química e foram escolhidas por fazerem parte dos cursos oferecidos no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP. Os fenômenos que foram modelados são as vibrações livres amortecida e não-amortecida, os circuitos elétricos RC , RL , LC e RLC , o corpo em queda livre com influência do atrito, a dinâmica de crescimento de um tumor, um modelo matemático para absorção de drogas (medicamentos) e a função de onda na mecânica quântica. A análise dos modelos foi feita a partir das etapas de criação de um modelo matemático segundo Bassanezi (2002). Ao final de cada capítulo, apresentamos algumas aplicações de cada área.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias, Aplicações.

Abstract

The aim of this is to present and study mathematical models described by Ordinary Differential Equations (ODE) present in the large area of knowledge, particularly in the graduation. These areas are Engineering, Physics, Biology and Chemistry and they were chosen because are courses offered by the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP. The phenomena modeled are vibrations (damped and undamped free vibrations), electrical circuits RC , RL , LC e RLC , free fall bodies with friction influence, dynamic of tumor growth, a mathematical model for drugs absorption (medicament) and the wave function in the quantum mechanics. The models analysis was made from creation steps of a mathematical model according [Bassanezi \(2002\)](#). At the end of each chapter, we presented some application for each knowledge area.

Keywords: Mathematical Modelling, Ordinary Differential Equations, Applications.

Lista de figuras

Figura 1 – Funcionalidade da transformada.	26
Figura 2 – Mola em equilíbrio.	36
Figura 3 – Mola após sofrer uma tensão (esticamento).	36
Figura 4 – Gráfico: deslocamento <i>versus</i> tempo.	42
Figura 5 – Movimento subamortecido considerando $\zeta = 0,4$	47
Figura 6 – Movimento criticamente amortecido considerando $\zeta = 1$	49
Figura 7 – Movimento superamortecido considerando $\zeta = 1,3$	51
Figura 8 – Comparação entre os movimentos criticamente amortecido e superamortecido.	51
Figura 9 – Comparação entre as velocidades de retorno à posição zero.	52
Figura 10 – Circuito elétrico simples.	57
Figura 11 – Circuito RC.	58
Figura 12 – Circuito RL.	63
Figura 13 – Circuito LC.	66
Figura 14 – Circuito RLC.	70
Figura 15 – Gráfico do deslocamento em função do tempo - ressonância.	74
Figura 16 – Gráfico da carga de carregamento do capacitor.	76
Figura 17 – Gráfico da corrente de carregamento do capacitor.	76
Figura 18 – Gráfico da diferença de potencial entre as placas do capacitor.	77
Figura 19 – Gráfico da descarga do capacitor em função do tempo.	78
Figura 20 – Gráfico da corrente elétrica de descarga do capacitor em função do tempo.	79
Figura 21 – Gráfico da corrente elétrica no circuito <i>RL</i>	80
Figura 22 – Gráfico da diferença de potencial no indutor <i>L</i>	81
Figura 23 – Gráfico da diferença de potencial no indutor <i>R</i>	81
Figura 24 – Gráfico da oscilação da carga no circuito <i>LC</i>	83
Figura 25 – Gráfico da oscilação da corrente no circuito <i>LC</i>	83
Figura 26 – Gráfico da oscilação subamortecida da carga no circuito <i>RLC</i>	84
Figura 27 – Gráfico da oscilação subamortecida da corrente no circuito <i>RLC</i>	85
Figura 28 – Gráfico da oscilação superamortecida da carga no circuito <i>RLC</i>	87
Figura 29 – Gráfico da oscilação superamortecida da corrente no circuito <i>RLC</i>	87
Figura 30 – Gráfico da oscilação criticamente amortecida da carga no circuito <i>RLC</i>	89
Figura 31 – Gráfico da oscilação criticamente amortecida da corrente no circuito <i>RLC</i>	89
Figura 32 – Gráfico da velocidade em função do deslocamento.	96
Figura 33 – Comparação das velocidades do corpo em queda livre	105

Figura 34 – Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais.	109
Figura 35 – Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais - Modelo logístico.	111
Figura 36 – Gráfico da evolução temporal: Modelo de Gompertz e Modelo logístico.	112
Figura 37 – Gráfico: concentração <i>versus</i> tempo.	116
Figura 38 – Energia potencial V em função do deslocamento x	130

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação entre elementos do movimento livre não-amortecido e do circuito <i>LC</i>	69
Tabela 2 – Comparação entre elementos do movimento livre amortecido e do circuito <i>RLC</i>	72
Tabela 3 – Velocidades (m/s) - Método de Euler e solução exata.	101
Tabela 4 – Velocidades (m/s) - Método de Euler Melhorado e solução exata.	102
Tabela 5 – Velocidades (m/s) - Método de Heun e solução exata.	103
Tabela 6 – Velocidades (m/s) - Método de Runge-Kutta de 4 ^a ordem e solução exata.	104

Sumário

1	Introdução	15
2	Equações Diferenciais Ordinárias: Um Mínimo	17
2.1	Equação Diferencial Ordinária Separável	17
2.2	Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem	18
2.3	Equação Diferencial Ordinária de Bernoulli	19
2.4	Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem	20
2.4.1	Linear, homogênea, com coeficientes constantes	20
2.5	Transformada de Laplace	25
2.5.1	Definição da transformada de Laplace	25
2.5.2	A transformada inversa de Laplace	26
2.5.3	Resolução de equações lineares por meio da transformada de Laplace	27
3	Modelagem Matemática	29
3.1	Modelo Matemático	29
4	Modelagem Matemática nas Engenharias	33
4.1	Aplicações das EDO na Engenharia Mecânica	33
4.1.1	Vibração livre não-amortecida	34
4.1.2	Vibração livre amortecida	37
4.1.3	Aplicações	40
4.1.4	Suspensões mecânicas automotivas	44
4.1.4.1	Aplicações	45
4.1.5	Válvulas de segurança e alívio de pressão	47
4.1.5.1	Aplicações	48
4.2	Aplicações das EDO na Engenharia Elétrica	53
4.2.1	Corrente elétrica	55
4.2.2	Força eletromotriz	57
4.2.3	Circuito RC	58
4.2.4	Indutores e indutância	62
4.2.5	Circuito RL	63
4.2.6	Circuito LC	66
4.2.6.1	Uma comparação com a vibração livre não-amortecida	66
4.2.7	Circuito RLC	69
4.2.7.1	Uma comparação com a vibração livre amortecida	69
4.3	Ressonância: uma preocupação para grandes oscilações em sistemas sem amortecimento	72
4.4	Aplicações	75
5	Modelagem Matemática na Física	91

5.1	Físicos e matemáticos: a fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral	91
5.1.1	A era Bernoulli	93
5.2	Corpo em queda livre com influência do atrito	94
5.3	Aplicação	96
5.4	Tratamento numérico para EDO e questão do corpo em queda livre	97
5.4.1	Método de Euler	98
5.4.2	Método de Euler melhorado	98
5.4.3	Método de Heun	98
5.4.4	Método de Runge-Kutta de quarta ordem	99
5.5	Aplicação: o movimento de queda livre	99
5.5.1	Tabela para os métodos numéricos	101
6	Modelagem Matemática na Biologia	107
6.1	Dinâmica de crescimento de um tumor	107
6.1.1	Modelo de Gompertz para o crescimento de tumores	107
6.1.2	Modelo Logístico para o crescimento de tumores	109
6.2	Modelo matemático para absorção de drogas (medicamentos)	113
7	Modelagem Matemática na Química	119
7.1	Função de onda	119
7.1.1	Mecânica clássica <i>versus</i> Mecânica quântica	119
7.1.2	A equação de Schrödinger	123
7.1.3	Partícula na caixa unidimensional	124
7.1.3.1	Soluções aceitáveis	125
7.1.4	Partícula na caixa bidimensional	126
7.1.4.1	Resolução por separação de variáveis	126
7.1.5	Processo de tunelamento	127
7.2	Oscilador harmônico simples (quântico)	129
8	Considerações Finais	135
	Referências	139

1 Introdução

Esta pesquisa é de cunho teórico e tem como objetivo o estudo de Modelagem Matemática utilizando as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). O foco principal da pesquisa é investigar os modelos matemáticos que utilizam as equações diferenciais para descrever situações problemas nas grandes áreas do conhecimento, principalmente em cursos de graduação.

Notemos que nesses cursos, principalmente nas Engenharias e Tecnologias, há uma carga ampla de disciplinas da área de exatas que, por consequência, tem a Matemática como norte. Como questões principais e até mesmo inquietações surgidas por alunos que cursam Engenharia, levantamos as seguintes questões: qual o objetivo de estudar uma carga ampla de Matemática em alguns cursos de graduação? Onde usaremos em nossa vida profissional tais conceitos matemáticos?

Com este trabalho, apresentaremos para algumas áreas do conhecimento, alguns modelos matemáticos que são resolvidos por meio de equações diferenciais e com isso mostrar, principalmente aos iniciantes nos cursos, que tal carga ampla de Matemática não é apenas para completar o currículo do curso, mas sim a necessidade de aprender tais métodos e que eles estão presentes nas situações rotineiras profissionais e, assim, diminuir as possíveis inquietações que podem surgir em muitos alunos ingressantes na graduação.

Evidentemente, não estamos defendendo a questão de que um curso de EDO nessas áreas deixe de ter seu enfoque matemático, mas, como explicam [Figueiredo e Neves \(2012\)](#), tal área da Matemática surgiu para resolver problemas de outras ciências. Um exemplo clássico é o próprio Teorema Fundamental do Cálculo motivado por problemas físicos e que até hoje é necessário pesquisar os problemas provenientes dessas ciências ([FIGUEIREDO; NEVES, 2012](#)).

Ressaltamos que a resolução de diversos problemas nas áreas de Engenharia, Física, Matemática, Química, entre outras, envolve abordagem analítica e/ou até mesmo numérica de equações diferenciais ordinárias. Modelando-se matematicamente o problema, inicia-se sua solução, muitas vezes não tão simples dependendo de sua aplicação. Segundo [Chapra e Canale \(2008\)](#), a resolução de problemas envolvendo tais modelos consiste em definir a problemática por meio da teoria ou dos dados obtidos experimentalmente, modela-se matematicamente a questão e com as ferramentas disponíveis para a solução geram-se resultados numéricos e/ou gráficos.

Já [Boyce e Diprima \(2006\)](#) afirmam que é necessário reconhecer que cada problema tem suas características e que a “arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras” ([BOYCE; DIPRIMA, 2006](#), p. 5). Porém, listar alguns

passos torna-se útil, pois a parte mais difícil do problema é a construção de um modelo que exprime, de fato, a situação real estudada. Por exemplo, podemos citar a identificação das variáveis (independente e dependente), escolhas convenientes de unidades de medidas, determinar a lei que conduz o problema podendo ser ela uma lei da física conhecida ou uma hipótese a ser verificada a partir de observações de um determinado fenômeno de interesse e também, dependendo da complexidade do modelo, resolvê-lo com um sistema com n equações diferenciais.

Em se tratando de Modelagem Matemática, ela se faz presente em nosso meio desde os tempos mais primitivos, sendo tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. Embora não conhecida por essa terminologia, seu estudo funcional e aplicabilidade já se integravam no processo evolutivo da sociedade. Segundo [Biembengut \(2011\)](#), a expressão Modelagem Matemática surgiu durante o Renascimento, quando foram construídas as primeiras ideias da Física, apresentadas segundo linguagem e tratamentos matemáticos e, posteriormente, foi sendo utilizada em toda a ciência, contribuindo sobremaneira para a evolução do conhecimento humano seja nos fenômenos microscópicos, em tecnobiologia, seja nos macroscópicos, com a pretensão de conquistar o universo. É importante ressaltar que esse processo não é somente próprio dos cientistas, pois para que se possa elaborar um modelo, além do conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas ([BIEMBENGUT, 2011](#)).

Nesse sentido, a elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma Matemática elementar, como aritmética ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma Matemática mais sofisticada.

Quanto à definição do termo modelo, para uma maior aproximação do conceito, podemos nos apoiar na definição do Dicionário Aulete ¹ que designa, como um dos seus verbetes, modelo como “um conjunto de hipóteses, de ideias, sobre a estrutura de um sistema [...] pelo qual podem ser explicadas as propriedades desse sistema” ([MODELO, 2014](#)). Analogamente, podemos afirmar que a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real ([BASSANEZI, 2011](#), p. 16).

¹ Disponível em <<http://aulete.uol.com.br/modelo>> Acesso em 25/03/2014.

2 Equações Diferenciais Ordinárias: Um Mínimo

Definição 2.0.1 (*Equação diferencial*). Denomina-se equação diferencial toda equação que contém como incógnita funções e suas respectivas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Definição 2.0.2 (*Equação diferencial ordinária*). Se as equações da definição 2.0.1 contiver apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente, então ela é denominada *equação diferencial ordinária (EDO)*. Em linguagem matemática

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

em que F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ e sendo $y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$.

Definição 2.0.3 (*Solução de uma EDO*). É denominada solução de uma equação diferencial ordinária em um dado intervalo I toda função ϕ definida nesse intervalo que contém n derivadas em I onde substituídas na equação de ordem n reduzem-na a uma identidade. Em linguagem matemática

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

2.1 Equação Diferencial Ordinária Separável

Definição 2.1.1. Definimos uma equação diferencial separável quando ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad q(y) \neq 0 \tag{2.1}$$

tal que $y' = \frac{dy}{dx}$ é a derivada da função y em relação a variável independente x .

As funções $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $q : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas nos intervalos abertos (a, b) e (c, d) , respectivamente.

Dizemos *Equação Diferencial Ordinária Separável* pois podemos escrever (2.1) da seguinte forma:

$$q(y)y' = p(x) \quad \text{ou} \quad q(y)dy = p(x)dx. \tag{2.2}$$

Uma solução de (2.2) é a função $y : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 desde que $(a', b') \subset (a, b)$, $y((a', b')) \subset (c, d)$ e $q(y) \neq 0$ satisfaça (2.1) para todo $x \in (a', b')$.

Para resolver (2.2), integramos ambos os lados da equação de acordo com suas variáveis, ou seja,

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx \Rightarrow Q(y(x)) = P(x) + C$$

Determinamos a constante C a partir de que seja dado $x_0 \in (a', b')$, $y(x_0) = y_0 \in (c, d)$, então

$$\int_{y_0}^{y(x)} q(y)dy = \int_{x_0}^x p(x)dx \Rightarrow Q(y(x)) - Q(y_0) = P(x) - P(x_0)$$

Logo,

$$C = Q(y(x_0)) - P(x_0).$$

2.2 Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem

Definição 2.2.1. Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem é uma equação na variável dependente x da seguinte forma

$$a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t). \quad (2.3)$$

É possível reescrever a equação (2.3) na forma padrão. Dividindo ambos os membros pelo coeficiente $a_1(t)$, obtemos

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t). \quad (2.4)$$

A solução de (2.4) pode ser determinada em um intervalo I em que as funções p e f são contínuas. Para resolvê-la, vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, chamada de fator integrante ¹.

Seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

e observe ainda que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt} \left(\int p(t)dt \right) = e^{\int p(t)dt} p(t) = \mu(t)p(t).$$

¹ Não faz parte do objetivo deste trabalho a justificativa da existência do fator integrante. Recomendamos a leitura de livros sobre Equações Diferenciais Ordinárias inclusive as referências contidas no final deste trabalho.

Assim, multiplicando (2.4) por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + \mu(t)p(t)x = \mu(t)f(t)$$

mas, $\mu(t)p(t) = \frac{d\mu}{dt}$, então

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + \frac{d\mu}{dt}x = \mu(t)f(t).$$

Porém, note que o lado esquerdo dessa equação é exatamente a derivada de um produto de funções, então podendo ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x(t)) = \mu(t)f(t).$$

Como precisamos encontrar a função $y(x)$, então basta integrar ambos os membros da equação:

$$\mu(t)x(t) = \int \mu(t)f(t) dt + C$$

porém, $\mu(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então podemos dividir a equação acima por $\mu(t)$ e, assim, obtemos a solução geral da equação (2.4) que é dada por

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)f(t) dt + C \right), \quad C \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

2.3 Equação Diferencial Ordinária de Bernoulli

Definição 2.3.1. Uma equação da forma

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^n(t)$$

com $n \neq 0$ e $n \neq 1$ em que $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo aberto (a, b) é denominada *Equação Diferencial de Bernoulli*². Note que se $n = 0$, temos uma equação diferencial linear completa do tipo $x' + p(t)x = q(t)$ e se $n = 1$, temos uma equação diferencial linear homogênea do tipo $x' + (p(t) - q(t))x = 0$.

Proposição 2.3.1. *Seja*

$$x' + p(t)x = q(t)x^n \quad (2.6)$$

² Jacques Bernoulli (1623 - 1708) foi um matemático suíço, membro de uma família que alcançou muitos êxitos na Matemática e na Física. Com o *cálculo infinitesimal* foi além dos trabalhos de Newton e Leibniz. Sua obra mais importante chama-se *Ars Conjectand*, obra considerada a mais antiga sobre as teorias das probabilidades.

uma equação diferencial de Bernoulli. A substituição $x = z^{\frac{1}{1-n}}$, $z = z(t)$ transforma a EDO de Bernoulli em uma EDO linear em z

$$z' + (1-n)p(t)z = (1-n)q(t). \quad (2.7)$$

Demonstração. Com efeito, $x' = \frac{1}{1-n}z^{\frac{n}{1-n}}z'$. Substituindo em (2.6), obtemos

$$\frac{1}{1-n}z^{\frac{n}{1-n}}z' + p(t)z^{\frac{1}{1-n}} = q(t)z^{\frac{n}{1-n}}.$$

Multiplicando ambos os membros por $(1-n)z^{-\left(\frac{n}{1-n}\right)}$, obtemos

$$z' + (1-n)p(t)z = (1-n)q(t).$$

□

2.4 Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem

Definição 2.4.1. Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é uma equação na variável dependente y da seguinte forma

$$a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t) \quad (2.8)$$

que pode ser escrita na forma padrão dividindo ambos os membros por $a_2(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t)$$

ou com a notação de Lagrange

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t).$$

2.4.1 Linear, homogênea, com coeficientes constantes

Uma equação da forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx &= f(t) \\ \left(x'' + bx' + cx &= f(t) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Os coeficientes b e c são números reais fornecidos e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e I é um intervalo na reta.

Se $f(t) = 0$ no intervalo considerado, então a equação é dita *homogênea*. Isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (2.10)$$

Para determinar a solução geral de (2.10), considere a equação algébrica

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.11)$$

denominada *equação característica* de (2.10). Notemos que se λ_1 for uma raiz real de (2.11), então $x(t) = e^{\lambda_1 t}$ será solução de (2.10). Com efeito,

$$(e^{\lambda_1 t})'' + b(e^{\lambda_1 t})' + ce^{\lambda_1 t} = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + ce^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} (\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) = 0$$

A partir disso, enunciaremos um teorema que garante que, se conhecermos as raízes da equação (2.11), conheceremos, também, a solução geral da equação homogênea (2.10).

Teorema 2.4.1. *Sejam λ_1 e λ_2 raízes da equação característica (2.11).*

(i) *Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então a solução geral da equação homogênea será*

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(ii) *Se $\lambda_1 = \lambda_2$, então a solução geral da equação homogênea será*

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} (A + Bt), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(iii) *Se λ_1 e λ_2 forem raízes complexas, isto é, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ de fato, uma conjugada da outra, então a solução geral da equação homogênea será*

$$x(t) = e^{\alpha t} [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Item (i). Sendo λ_1 e λ_2 raízes distintas da equação característica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, temos

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -b \\ \lambda_1 \lambda_2 = c \end{cases}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 &\iff \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{dx}{dt} + \lambda_1\lambda_2x = 0 \\
&\iff \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda_1\frac{dx}{dt} - \lambda_2\frac{dx}{dt} + \lambda_1\lambda_2x = 0 \\
&\iff \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1x\right)}_{\gamma} - \lambda_2 \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1x\right)}_{\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Note que $x = x(t)$ será solução de (2.9) se, e somente se, $\gamma = \frac{dx}{dt} - \lambda_1x$ for solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d\gamma}{dt} - \lambda_2\gamma = 0.$$

De (2.5) segue que $\gamma = C_2e^{\lambda_2t}$ então, $x = x(t)$ será solução de (2.9) se, e somente se,

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_1x = C_2e^{\lambda_2t}.$$

Novamente de (2.5), segue que

$$x(t) = \frac{1}{e^{-\lambda_1t}} \left(\int e^{-\lambda_1t} \cdot C_2e^{\lambda_2t} dt + C_1 \right)$$

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1t} + \frac{C_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2t}$$

$$= Ae^{\lambda_1t} + Be^{\lambda_2t} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

com $A = C_1$ e $B = \frac{C_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

E, portanto, $x(t) = Ae^{\lambda_1t} + Be^{\lambda_2t}$.

□

Demonstração. Item (ii). Sendo $\lambda_1 = \lambda_2$ raízes da equação característica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ e seguindo o mesmo raciocínio do item (i), temos

$$x(t) = \frac{1}{e^{-\lambda_1 t}} \left(\int e^{-\lambda_1 t} \cdot C_2 e^{\lambda_2 t} dt + C_1 \right)$$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-\lambda_1 t}} \left(\int C_2 dt + C_1 \right)$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

$$= A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_1 t}$$

$$= e^{\lambda_1 t} (A + Bt) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

com $A = C_1$ e $B = C_2$.

□

Demonstração. Item (iii). A expansão em série de Taylor da função $f(t) = e^t$ em torno de $t = 0$ é dada por

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2.12)$$

Substituindo t por it em (2.12), temos

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i \frac{t^5}{5!} + \dots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

A solução geral de (2.10) pode ser escrita da seguinte forma: $x(t) = Ce^{(\alpha+\beta i)t} + De^{(\alpha-\beta i)t}$ com $C, D \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{(\alpha+\beta i)t} + De^{(\alpha-\beta i)t} \\ &= Ce^{\alpha t} e^{\beta i t} + De^{\alpha t} e^{-\beta i t} \\ &= e^{\alpha t} (Ce^{\beta i t} + De^{-\beta i t}) \quad \text{e por (2.13)} \\ &= e^{\alpha t} [C(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)) + D(\cos(-\beta t) + i\text{sen}(-\beta t))] \\ &= e^{\alpha t} [C(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)) + D(\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t))] \\ &= e^{\alpha t} [(C+D)\cos(\beta t) + i(C-D)\text{sen}(\beta t)] \end{aligned}$$

Mas observe que a solução geral está escrita de forma complexa e o ideal é expressá-la com valores apenas reais. A solução geral de (2.10) pode ser escrita como a soma e a diferença de duas funções soluções, então $x_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t}$ e $x_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t}$ e por (2.13) $x_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t))$ e $x_2(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t))$. Daí

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)) + e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t)) \\ &= 2e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)) - e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t)) \\ &= 2ie^{\alpha t}\text{sen}(\beta t) \end{aligned}$$

Disso, desprezando as constantes multiplicativas 2 e $2i$ nós obtemos um par de soluções com valores reais $u(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $v(t) = e^{\alpha t}\text{sen}(\beta t)$. Pode-se mostrar que o Wronskiano³ de ambas as funções u e v é diferente de zero e $W(u, v) = \beta e^{2\lambda t}$. Para $\beta = 0$ não se aplica nesse caso pois as raízes serão reais. A consequência imediata disso é que u e v formam um conjunto fundamental de soluções, logo a solução geral de (2.10) é dada por

$$x(t) = e^{\alpha t} [A\cos(\beta t) + B\text{sen}(\beta t)] \quad \text{com } A, B \in \mathbb{R}$$

□

Teorema 2.4.2. *Seja*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi^2 x = 0 \tag{2.14}$$

uma EDO Homogênea de 2ª Ordem. Então a solução geral é

$$x(t) = A\cos(\varphi t) + B\text{sen}(\varphi t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

³ O Wronskiano, em homenagem ao matemático polonês Josef Wronsk (1776 - 1853), tem como função determinar se um conjunto de funções diferenciáveis são linearmente independente ou linearmente dependente em um intervalo dado. Se o Wronskiano for diferente de zero, dizemos que as funções são linearmente independentes. No caso acima, $W(u, v) = \beta e^{2\lambda t}$, para $\beta \neq 0$, não será nulo pois a função exponencial não possui imagem nula qualquer que seja t .

Demonstração. A prova segue diretamente do item (iii) do Teorema 2.4.1.

□

No Capítulo 4, Seção 4.1, estudaremos uma aplicação de uma EDO de 2ª Ordem do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

que descreve o movimento harmônico simples.

2.5 Transformada de Laplace

Nas seções anteriores, apresentamos alguns métodos para solucionar alguns tipos de equações diferenciais que podem aparecer em diversas aplicações. Apresentaremos agora um novo método que é a transformada de Laplace⁴ que é um operador \mathcal{L} em que transforma uma função $f(t)$ em uma outra função $F(s)$.

A transformada de Laplace é interessante porque ela transforma uma equação diferencial em uma equação algébrica que é muito mais fácil de ser resolvida. Suas propriedades a tornam extremamente útil para solucionar problemas de valores iniciais.

2.5.1 Definição da transformada de Laplace

Definição 2.5.1 (*Transformada de Laplace*). Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $[0, +\infty[$. A transformada de Laplace da função $f(t)$ é definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (2.15)$$

se, pelo menos para algum valor de s , a integral imprópria converge.

A função $K(s, t) = e^{-st}$ é chamada de núcleo da transformada.

Exemplo 2.5.1. A transformada da função $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{kt}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(s-k)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(s-k)t} - 1}{-(s-k)} = \frac{1}{s-k} \quad \text{se } s > k. \end{aligned}$$

⁴ Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês que trabalhou em várias áreas do conhecimento científico, como por exemplo, Teoria Analítica das Probabilidades, Mecânica Celeste organizando a astronomia matemática em seu livro com cinco volumes *Mécanique Céleste*.

Abaixo, apresentaremos um importante teorema que mostra que a transformada da soma é a soma das transformadas. A semelhança está na propriedade de integração que diz que a integral da soma é a soma das integrais, nos permitindo calcular integrais de duas ou mais funções separadamente, uma a uma.

Teorema 2.5.1 (*Linearidade da transformada*). *Sejam α e β constantes. Se $F(s)$ é a transformada de $f(t)$ em que $s > k_1$ e se $G(s)$ é a transformada de $g(t)$ em que $s > k_2$, então*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

para todo s tal que existam as transformadas de f e g .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (\alpha f(t)) dt + \int_0^{+\infty} e^{-st} (\beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

A figura abaixo representa a funcionalidade da transformada de Laplace esquematizado por meio de uma caixa.

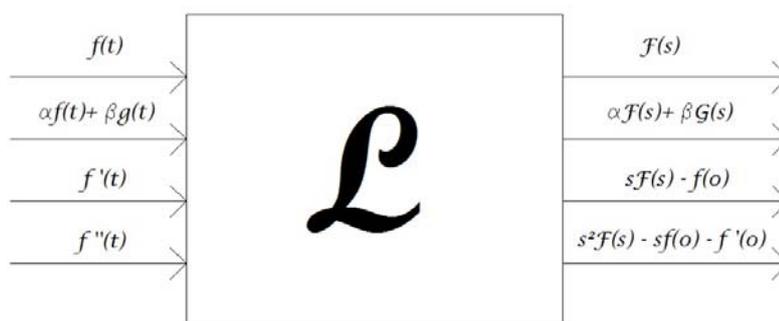


Figura 1 – Funcionalidade da transformada.

2.5.2 A transformada inversa de Laplace

Vimos que $F(s)$ é a função transformada de $f(t)$ pelo operador $\mathcal{L}\{f(t)\}$, então podemos dizer que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. No exemplo 2.5.1, encontramos $F(s) = \frac{1}{s-k}$, para todo $s > k$, então $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kt}$.

Para a solução de equações diferenciais ordinárias, aplicamos primeiramente a transformada de Laplace diretamente com as condições do problema de valor inicial e após isso aplicamos a transformada inversa resultando na solução particular da equação. Resumindo, o método consiste em eliminar as incógnitas funções derivadas da equação transformando-as em uma equação algébrica como se fosse uma máquina.

Da mesma forma, a transformada inversa possui a propriedade da linearidade, isto é, ela é uma transformação linear. Com efeito,

$$(i) \mathcal{L}^{-1} \{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}$$

$$(ii) \mathcal{L}^{-1} \{kF(s)\} = k\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

Nos livros de equações diferenciais referenciados neste trabalho contém tabelas das funções e suas transformadas de Laplace juntamente com sua inversa.

2.5.3 Resolução de equações lineares por meio da transformada de Laplace

Como já citado, podemos solucionar problemas de valores iniciais (PVI)⁵ com a transformada de Laplace. Vários modelos matemáticos utilizam esse procedimento poderoso para solucionar seus respectivos problemas por transformar a equação diferencial em uma equação algébrica mais fácil de resolver. Apresentaremos alguns exemplos para ilustrar como funciona o método.

Exemplo 2.5.2. Obtenha a solução dos PVI abaixo por meio da transformada de Laplace.

$$1. \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \{y''\} + 2\mathcal{L} \{y'\} + \mathcal{L} \{y\} = 0$$

$$s^2\mathcal{L} \{y\} - sy(0) - y'(0) + 2s\mathcal{L} \{y\} - 2y(0) + \mathcal{L} \{y\} = 0$$

$$s^2\mathcal{L} \{y\} - s - 1 + 2s\mathcal{L} \{y\} - 2 + \mathcal{L} \{y\} = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1)\mathcal{L} \{y\} = s + 3$$

$$\mathcal{L} \{y\} = \frac{s + 3}{(s + 1)^2}$$

$$\mathcal{L} \{y\} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2}$$

⁵ Problema de valor inicial, ou PVI, é uma equação diferencial dada acompanhada do valor que será determinada num ponto específico, isto significa que, se a ordem da equação diferencial for $n > 1$ e se a função e suas derivadas até a ordem $n - 1$ são especificadas num mesmo ponto, então temos um PVI.

Por fim, aplicando a transformada inversa, temos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$

$$2. \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t} \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \{y''\} - 4\mathcal{L} \{y'\} + 4\mathcal{L} \{y\} = \mathcal{L} \{t^3 e^{2t}\}$$

$$s^2 \mathcal{L} \{y\} - sy(0) - y'(0) - 4(s\mathcal{L} \{y\} - y(0)) + 4\mathcal{L} \{y\} = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$s^2 \mathcal{L} \{y\} - 4s\mathcal{L} \{y\} + 4\mathcal{L} \{y\} = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L} \{y\} = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$(s-2)^2 \mathcal{L} \{y\} = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$\mathcal{L} \{y\} = \frac{3!}{(s-2)^6}$$

Por fim, aplicando a transformada inversa, temos

$$y(t) = 6\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^6} \right\}$$

$$y(t) = 6\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{120} \cdot \frac{5!}{(s-2)^6} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{20} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5!}{(s-2)^6} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{20} t^5 e^{2t}$$

Vários são os modelos matemáticos que podemos solucionar com a transformada de Laplace. No decorrer deste trabalho, aplicaremos esse método para solucionar algumas aplicações a fim de mostrar a grande importância dessa ferramenta na solução de equações diferenciais ordinárias.

3 Modelagem Matemática

3.1 Modelo Matemático

Para se definir modelo matemático, tomaremos como base a definição de [Bassanezi \(2002\)](#):

Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese de reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica ([BASSANEZI, 2002](#), p. 12).

Destacamos a definição do Professor Bassanezi, pois ele é um dos pioneiros no estudo de Modelagem Matemática a qual tem se dedicado por muitos anos com publicações e produções científicas, orientações e tem atuado como professor titular nos maiores centros universitários brasileiros ([CARVALHO, 2010](#)).

Algumas etapas são necessárias para obter um modelo. Em sua obra *Equações Diferenciais Ordinárias: um curso introdutório*, Bassanezi expõe sete etapas significativas: (1) experimentação, (2) abstração, (3) formulação do modelo, (4) resolução, (5) validação, (6) modificação e (7) aplicação.

Experimentação: para se compreender o problema, levanta-se dados a partir de experimentos que por sua vez são bastante relevantes na estruturação, formulação e possíveis modificações que podem vir a ser necessárias nos modelos e na sua consequente validação por meio dos dados obtidos.

Abstração: nessa fase de estudo são levantadas hipóteses para serem testadas no modelo e assim verificar as variáveis essenciais para sua evolução.

Formulação do Modelo: aqui a linguagem matemática entra em ação substituindo a linguagem usual anteriormente para a formulação das hipóteses. “A construção do modelo segue de perto o uso de um dicionário que traduz as palavras chaves em alguma estrutura matemática” ([BASSANEZI, 2002](#), p. 13). Um exemplo inicial e de fácil verificação é a variação de uma determinada população no tempo. Em linguagem matemática, temos $\frac{dP}{dt}$ a derivada de $P(t)$ em relação ao tempo e que nesse caso é um tratamento de uma variação contínua. Também, podemos citar $P(t_2) - P(t_1)$ que é uma variação discreta da população em dois tempos distintos ou até mesmo a variação média dessa população nos mesmos dois tempos citados que é dada por $\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Se formularmos a hipótese de que a variação populacional é proporcional à população e se tratando, por exemplo, de uma variação contínua de $P(t)$, então: $\frac{dP}{dt} = kP$, em que k é uma constante de proporcionalidade.

Resolução: Como já citado anteriormente, a resolução de um modelo pode ser dada analítica ou numericamente ¹ dependendo do quão complexo é o fenômeno estudado e modelado.

Validação: A comparação é feita por intermédio dos resultados obtidos com a solução do modelo com os dados reais obtidos experimentalmente. Nesse ponto é necessário verificar a proximidade dos dados com o que foi “projetado” inicialmente por meio das hipóteses formuladas.

Modificação: Esta etapa depende da anterior, pois se a proximidade dos dados não está de acordo com que foi “projetado” inicialmente, então novas variáveis devem ser inserida no modelo ou até mesmo modificando sua lei de formação, iniciando, assim, novamente o processo.

Aplicação: A aplicação do modelo permitirá um estudo da situação de acordo com as variáveis selecionadas, permitindo, assim, o entendimento, a tomada de decisões, previsões, como por exemplo, em função do tempo, fornecendo “ferramentas” para criar estratégias de trabalho para determinar melhoras em diversas situações modeladas.

A partir dessa reflexão, acerca da Modelagem Matemática, podemos afirmar que há uma tendência de crescimento da aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Bassanezi acrescenta:

a Matemática tem penetrado fortemente na Economia, Química, Biologia, entre outras, na perspectiva da utilização de modelos, quase sempre apoiados nos paradigmas que nortearam a Física – como as leis de conservação e analogias consequentes. Outras áreas como Sociologia, Psicologia, Medicina, Linguística, Música, e mesmo a História, começam a acreditar na possibilidade de ter suas teorias modeladas por meio da linguagem matemática (BASSANEZI, 1999, p. 13).

A partir das necessidades em um determinado momento, os profissionais dessas áreas sentem a necessidade de uma explicação matemática de algum fenômeno de interesse ou da satisfação, de algum modo, de uma necessidade humana. Isso nos leva a fazer suposições a fim de construir uma estrutura básica do sistema a ser modelado. Se tais suposições são consideradas suficientemente precisas, a consequência imediata disso são as equações que regem o sistema do fenômeno estudado em questão. Um exemplo disso é que na mecânica clássica a massa é considerada uma constante, porém na teoria da relatividade de Einstein, a massa é considerada variável. Com isso em mente, Newton estudou corpos com

¹ Reforçamos que nesse trabalho nos preocuparemos mais com as soluções analíticas, mas não descartamos a grande importância das soluções numéricas estudadas na disciplina Cálculo Numérico.

velocidades consideradas baixas, mas Einstein modelou o sistema considerando velocidades próximas ou iguais à velocidade da luz gerando, assim, inconsistência acerca daquilo que é estudado na teoria e o que é realmente observado.

Não podemos deixar de relatar que uma das partes consideradas mais difícil de um modelo é o teste, pois é nesse momento que podem aparecer os possíveis erros e é importante ter em mente as previsões de erros no modelo considerado. Se estivermos trabalhando com dados empíricos, há uma grande necessidade de tomar cuidado porque o fenômeno estudado pode ser muito específico para aquele sistema e é possível relatar a realidade apenas daquele fenômeno e não apresentar uma generalização.

Se sabemos que é possível encontrar erros ao modelar um sistema, então podemos ter uma base sólida para saber como lidar com eles. Caso estamos estudando um fenômeno natural, por exemplo, o crescimento populacional de uma determinada bactéria, podemos fazer previsões de possíveis erros ao conhecer o ambiente natural e sua variabilidade por meio de estudos e pesquisas feitos anteriormente para esse específico sistema. Tendo em mãos os dados dos testes realizados, podemos fazer ajustes no modelo para que ele possa atender bem ao sistema e verificar, assim, se tais alterações atendem de forma eficaz os dados obtidos anteriormente.

Com o que relatamos anteriormente, podemos notar que a interdisciplinaridade da Matemática Aplicada, segundo [Bassanezi \(1999\)](#), nos permite utilizar das estruturas matemáticas fora do seu próprio contexto para adentrar-se em um contexto alheio, isto é, a Modelagem Matemática aplicada em outras ciências.

Além de Bassanezi, outro nome que se destaca nas pesquisas sobre Modelagem Matemática é o de Dionísio Burak. Para esse autor,

A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos do qual o homem vive o seu cotidiano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões ([BURAK, 1987](#), p. 21).

Isso quer dizer que um modelo matemático pode traduzir fenômenos que se assemelham a acontecimentos reais, sendo que o estudo de tais modelos permite que façamos previsões futuras de situações que ocorrem no presente. Conforme cita [Burak \(1987\)](#) “a adequação de um modelo pode ser julgada por seu êxito em ordenar os dados e, a partir deles, fazer previsões”, ou seja, quanto mais o modelo se aproximar da realidade mais garantido será inferir sobre seus dados.

[Burak \(1987\)](#) apresenta, em sua dissertação, onde tem sido desenvolvido o uso da Modelagem Matemática na educação: iniciação científica, aperfeiçoamento para o professor, cursos regulares e pesquisa científica. A iniciação científica proporciona, com a modelagem matemática, as aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento podendo

ser aprofundada a partir das áreas de pesquisa da disciplina em questão, por exemplo, as Equações Diferenciais Ordinárias. O aperfeiçoamento para o professor proporciona a especialização do docente para uma nova metodologia de ensino ou simplesmente renovar os conhecimentos já adquiridos anteriormente a respeito da modelagem. Os cursos regulares, por exemplo, de Cálculo Diferencial e Integral pode proporcionar um ambiente rico de aplicações e modelos matemáticos em diversas áreas como Engenharia, Biologia, Física, entre outras áreas do conhecimento, permitindo, assim, investigações por parte dos alunos em sua própria área de estudo. E a pesquisa científica, de acordo com [Burak \(1987\)](#), é o segmento que, por meio de projetos, faz largo uso dos modelos matemáticos em diversas áreas do conhecimento e há um aumento significativo de programas de pós-graduação na área da Modelagem Matemática.

Como forma de indagação, de acordo com [Barbosa \(2001\)](#), a Modelagem Matemática propicia aos alunos oportunidades de questionamentos em diversas situações utilizando os conceitos matemáticos sem a necessidade de procedimentos pré-fixados. O encaminhamento fornecido aos estudantes é que apresentará o ambiente de aprendizagem por meio da modelagem e as condições das ferramentas fornecidas é que possibilitará a estimulação e a criatividade para solucionar as situações propostas.

[Barbosa \(2001\)](#) assume modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”. Nesta pesquisa, em cada situação, estamos apresentando as aplicações por meio de equações diferenciais para estudar problemas oriundos de outras realidades além da matemática aplicada à própria matemática.

Com isso, a pesquisa será realizada a fim de investigar a utilização das Equações Diferenciais Ordinárias para solucionar problemas modelados matematicamente em algumas áreas do conhecimento e, para isso, utilizaremos as etapas descritas por [Bassanezi \(2002\)](#) nas situações apresentadas.

4 Modelagem Matemática nas Engenharias

Seria um tanto quanto injusto escolher uma definição única para Engenharia, mas, para esse trabalho, uma “definição” apropriada é que Engenharia é uma ciência que utiliza o conhecimento das Ciências Matemáticas e Naturais para desenvolver recursos e utilizar de forma justa aquilo que é obtido na natureza em benefício da sociedade. Ou seja, uma ciência que depende de outras ciências para cumprir com seu objetivo.

Apresentamos a descrição acima porque um curso de Engenharia tem uma carga ampla das ciências exatas principalmente de Matemática. Nosso objetivo é mostrar Modelos Matemáticos que são frequentemente utilizados para descrever situações dentro de cada campo a fim de maximizar as ideias teóricas estudadas nos cursos de Cálculo e EDO ligando-as contextualmente dentro das aplicações e desafios que surgirão dentro da carreira profissional.

A construção e o estudo de um modelo são mais relevantes do que sua solução pois envolvem os desafios proporcionados pela elaboração de hipóteses que levam até sua tese final. Com isso, queremos destacar e até mesmo fazer uma ligação desses desafios ao que foi citado no [Capítulo 2](#) sobre as etapas necessárias para obter um Modelo Matemático, pois um Engenheiro também experimenta, abstrai ideias, formula hipóteses, resolve problemas, valida, modifica e, por fim, faz aplicações a partir de suas conclusões finais.

Os modelos que aqui serão apresentados são desafios e problemas além dos exercícios propostos para ilustrar a teoria. Temos como pretensão fornecer aos futuros Engenheiros subsídios de que os tópicos que são estudados em Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias são poderosas ferramentas para utilização em sua vida profissional e não só acadêmica.

4.1 Aplicações das EDO na Engenharia Mecânica

Na Engenharia Mecânica um dos principais focos de estudo é analisar e estudar os efeitos da força e do movimento nos projetos de sistemas em diversos ramos internos dentro dessa própria Engenharia, como por exemplo, Estática, Dinâmica, Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica entre outras subáreas.

Um dos tópicos que tem uma carga horária grande de estudo em um curso de Engenharia Mecânica é *Mecânica Geral* e de acordo com [Kraige e Merian \(1997\)](#), os alunos encaram o curso como uma exigência difícil e com obstáculos acadêmicos desinteressantes

porque focam-se muito no aprendizado por memorização, o que é muito diferente do aprendizado a partir de fundamentos teóricos, pois com isso poderão atacar os problemas da mecânica com raciocínios concisos a partir de formulação de hipóteses criando, assim, uma forte ligação com a prática profissional. O ideal é motivar o aluno no aspecto de que “a teoria pode apenas se aproximar do mundo real da mecânica, ao contrário da visão de que o mundo real se aproxima da teoria.” (KRAIGE; MERIAN, 1997, citação de prefácio). Isso vem ao encontro com o que foi citado anteriormente de que um modelo, matemático ou não, pode ser considerado como uma reflexão sobre alguma parte da realidade.

Como primeiro exemplo, citaremos uma aplicação de EDO muito importante na área da Mecânica que são as *Vibrações de Sistemas*. Exemplos conhecidos que envolvem esse tipo de aplicação são: vibração de máquinas rotativas, por exemplo, ventiladores industriais, máquinas operatrizes na indústria metalúrgica e até mesmo em vibrações com grande escala a qual podemos citar os terremotos. Uma das soluções para amenizar os problemas e danos decorrentes de tais vibrações é assentar os “corpos” sobre molas para minimizar sua propagação.

De fato, nos concentraremos na *vibração livre de partículas* subdividida em duas partes: (a) *vibração livre não-amortecida* e (b) *vibração livre amortecida*. Esses tipos de vibrações são modelados com Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem.

4.1.1 Vibração livre não-amortecida

Como forma introdutória e intuitiva, tomemos a Lei de Hooke que está relacionada à elasticidade de determinados corpos, principalmente as molas. A força de um corpo exercido na mola causa uma determinada deformação a partir de um comprimento de equilíbrio. Desprezando o atrito, a força de tensão na mola é dada por:

$$F = -kx \quad (4.1)$$

em que k é a constante elástica da mola e o sinal negativo significa a força contrária que a mola faz para voltar ao seu comprimento de equilíbrio e x é o afastamento em relação ao equilíbrio.

Analisando a Lei de Hooke, podemos transformá-la em uma Equação Diferencial Ordinária. Sabendo que $F = -kx$ e analisando a 2ª Lei de Newton, sabendo que a aceleração é a derivada segunda do espaço em relação ao tempo, então $ma = -kx \Rightarrow mx'' = -kx$. Disso, podemos concluir que

$$mx'' + kx = 0 \quad (4.2)$$

A expressão (4.2) é uma Equação Diferencial de Segunda Ordem e é conhecida também como *movimento harmônico simples* e esse tipo de movimento é caracterizado por oscilações do espaço em função do tempo (movimento da partícula sobre o eixo Ox). Como

vimos no [Capítulo 2](#), a solução dessa EDO Linear Homogênea de 2ª Ordem é caracterizada pelo [Teorema 2.4.2](#). De fato, tomando [\(4.2\)](#), temos

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

A equação característica é dada por

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}i$. Logo a solução geral da equação [\(4.2\)](#), de acordo com [Teorema 2.4.2](#) do [Capítulo 2](#), será

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

Podemos, na equação acima, fazer uma substituição conveniente. Ao analisarmos as vibrações, recaímos no estudo das *Frequências Circulares Naturais*¹. Da Física, sabemos que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

e substituindo em $x'' + \frac{k}{m}x = 0$, então

$$x'' + \omega_n^2 x = 0 \quad (4.4)$$

em que $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a velocidade angular constante cuja unidade é radianos por segundo. Portanto, a equação [\(4.3\)](#) poderá ser escrita da seguinte forma

$$x = A \cos(\omega_n t) + B \operatorname{sen}(\omega_n t), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Embora há vários tipos de molas, como molas não-lineares duras e moles, restringiremos nosso estudo às molas lineares que é o caso já exemplificado anteriormente pela Lei de Hooke. Se a força exercida pela massa m esticar ou comprimir esse tipo de mola, ela exerce uma força restauradora $-kx$ seja para a direita ou para a esquerda. Abaixo, apresentaremos duas figuras que exemplificam a situação. Na primeira, a mola está em equilíbrio e, na segunda, a mola sofre uma tensão (no caso, o esticamento da mesma).

¹ Para um estudo mais detalhado das FCN's recomendamos uma análise nas obras de [Halliday, Walker e Resnick \(2010a\)](#) e [Kraige e Merian \(1997\)](#).

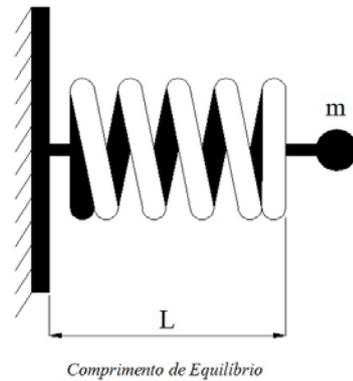


Figura 2 – Mola em equilíbrio.

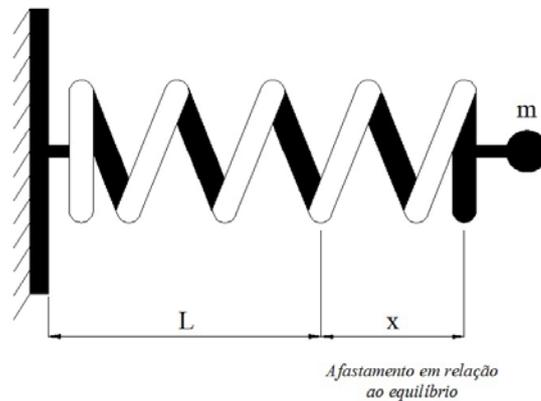


Figura 3 – Mola após sofrer uma tensão (esticamento).

Para a análise do modelo de acordo com as etapas de modelagem descritas no [Capítulo 3](#), primeiramente tomamos a Lei de Hooke como hipótese para verificação das variáveis necessárias para evoluirmos o modelo, por exemplo, a identificação da 2ª Lei de Newton, fase esta que chamamos de *abstração*.

A segunda etapa necessária foi a *formulação do modelo*. Identificadas as variáveis necessárias, passamos a modelar a equação diferencial. Sabemos que a aceleração é a taxa de variação instantânea da velocidade em função do tempo que, por sua vez, é a taxa de variação instantânea do espaço em função do tempo e, portanto, temos que a aceleração é a segunda derivada da função espaço. Fazendo as substituições necessárias, chegamos à fórmula $mx'' + kx = 0$.

O próximo passo foi resolver o modelo por intermédio do conhecimento e processos de resolução de equações diferenciais ordinárias. Esta etapa está caracterizada por *resolução*. Utilizamos do [Teorema 2.4.2](#) para obter a solução da equação diferencial.

A solução da equação diferencial (4.2) nos proporcionou avaliar a validade do modelo de acordo com as hipóteses iniciais consideradas. A Lei de Hooke por si só não considera o atrito no sistema, logo o dispositivo massa-mola sofrerá ação da força e ficará

oscilando até uma força externa parar o sistema e, como a solução da equação (4.2) é dada por uma combinação linear de funções periódicas, então concluímos a etapa chamada de *validação*.

Validado o modelo, a próxima etapa é a *aplicação*. Na subseção (4.1.3), apresentamos a aplicação da vibração livre não-amortecida para verificação imediata do que o fenômeno pode nos apresentar. Fornecemos tanto uma leitura algébrica quanto uma leitura gráfica para uma visualização de diferentes ângulos do fenômeno.

4.1.2 Vibração livre amortecida

No estudo das *vibrações livres não-amortecidas* despreza-se o atrito na descrição do fenômeno, porém “todo sistema mecânico possui algum grau inerente de atrito, que age como um consumidor de energia mecânica” (KRAIGE; MERIAN, 1997, p. 422). Torna-se complexo modelar matematicamente (com precisão) um sistema com forças de atrito dissipativas.

Um exemplo que é encontrado em diversos sistemas para limitar as vibrações são os amortecedores (ou pistões) com fluidos viscosos, por exemplo óleo ou ar. Nesses casos, a equação (4.1) é acrescida de uma constante de proporcionalidade c conhecida como *coeficiente de amortecimento viscoso* e como se trata de um novo movimento acrescido, ou seja, do pistão dentro do cilindro, então existe uma velocidade (objeto percorrendo sobre o eixo Ox) contrária à direção da massa e, portanto, a força sobre massa é $-cx'$. A derivada primeira utilizada é devido ao fato de que a velocidade em relação ao tempo é a derivada do espaço x em relação ao tempo t .

Para esse estudo, a Segunda Lei de Newton nos fornece

$$mx'' = -cx' - kx$$

$$mx'' + cx' + kx = 0. \quad (4.6)$$

Novamente, temos um fenômeno modelado matematicamente por uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem. Como fizemos anteriormente, introduziremos algumas substituições convenientes. Novamente, temos

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

e

$$c = 2m\omega_n\zeta \Rightarrow \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

em que ζ é chamado de *taxa de amortecimento* que mede o grau de amortecimento. Substituindo esses valores na equação (4.6), então

$$mx'' + cx' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x'' + 2\zeta\omega_n x' + \omega_n^2 x = 0. \quad (4.7)$$

A equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$ e $\lambda_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$.

A análise dessa solução se dá pelo fator $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ originando três categorias de movimento amortecido:

1. *Superamortecido*. Quando $\zeta > 1$ a equação característica fornece duas raízes reais λ_1 e λ_2 . Com efeito, a solução geral será

$$x(t) = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}. \quad (4.8)$$

2. *Criticamente amortecido*. Quando $\zeta = 1$ a equação característica fornece duas raízes reais iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n t$. Com efeito, a solução geral será

$$x(t) = e^{-\omega_n t} (A + Bt). \quad (4.9)$$

3. *Subamortecido*. $\zeta < 1$ a equação característica fornece duas raízes complexas, uma conjugada da outra. Note que $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ é negativo, então

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{-1(1 - \zeta^2)} = i\sqrt{1 - \zeta^2}, \text{ em que } i = \sqrt{-1}.$$

Reescrevendo a equação (4.8) e fazendo os ajustes necessários conforme as manipulações algébricas feitas acima, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= Ae^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} \\ &= Ae^{-\zeta\omega_n t} e^{i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} + Be^{-\zeta\omega_n t} e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} \end{aligned}$$

e, por fim,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[Ae^{i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} + Be^{-i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} \right], \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

Com esses três casos citados acima, analisamos nosso modelo para três tipos de soluções distintas que podem ocorrer em uma única Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem. Para efeito de curiosidade, podemos fazer uma nova substituição na equação e usar a Fórmula de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x)$. Seja $\omega_f = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Então,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[Ae^{i\omega_f t} + Be^{-i\omega_f t} \right] \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[A(\cos(\omega_f t) + i\text{sen}(\omega_f t)) + B(\cos(\omega_f t) - i\text{sen}(\omega_f t)) \right] \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[(A + B)\cos(\omega_f t) + i(A - B)\text{sen}(\omega_f t) \right] \end{aligned}$$

e, por fim,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [C \cos(\omega_f t) + D \sin(\omega_f t)] \quad (4.11)$$

em que $C = (A + B)$ e $D = i(A - B)$, em que $A, B \in \mathbb{R}$

Além de exemplificar o Modelo Matemático por meio de uma EDO, podemos utilizar outros tópicos dentro da Matemática, no caso os números complexos, para solucionar o problema. Muitas vezes ao estudá-los, os alunos questionam-se quanto à sua aplicação prática, e, para o problema apresentado, foi essencial o conhecimento dos números complexos para a sua solução.

O *movimento harmônico* é um dos fenômenos naturais utilizado nas Engenharias que pode ser modelado matematicamente por meio das Equações Diferenciais Ordinárias. De fato, sugerimos autores como [Halliday, Walker e Resnick \(2010a\)](#) e [Kraige e Merian \(1997\)](#) aos leitores interessados no aprofundamento deste estudo.

Da mesma forma como apresentamos na vibração livre não-amortecida, o processo passou pelas etapas descritas no [Capítulo 3](#). Para o estudo das vibrações livres amortecidas, nossa hipótese contém o acréscimo de um termo chamado de *coeficiente de atrito viscoso*, uma vez que o fenômeno apresentado contém atrito. Como *abstração*, a nossa outra hipótese continua sendo a 2ª Lei de Newton, porém acrescida de um novo termo, ou seja, $-cx'$ explicado na modelagem do fenômeno e, com isso, chegamos à fórmula $m x'' + cx' + kx = 0$, etapa denominada *formulação do modelo*, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, uma vez que a massa, o coeficiente de atrito e a constante de elasticidade da mola não variam com o tempo.

Tendo a equação, passamos à *resolução* por intermédio das técnicas de resoluções de EDO mostradas no [Capítulo 2](#) por meio do [Teorema 2.4.1](#) e subdividindo-o nas três categorias de movimento apresentadas.

Com a função solução do sistema considerado, passamos a avaliá-lo de acordo com as três categorias de movimento. Quando o valor de Δ é estritamente positivo, a equação característica possui duas raízes reais e distintas gerando a solução da EDO como $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$, sendo A e B números reais. Como temos uma combinação linear entre duas funções exponenciais, concluímos a não oscilação do sistema por não contemplar funções periódicas e isso vem ao encontro com a hipótese considerada do sistema possuir uma força externa, por exemplo, o atrito.

A avaliação é considerada, também, quando Δ é nulo. Neste caso, a equação característica possui duas raízes reais iguais gerando a solução $x(t) = A e^{\lambda t} + B t e^{\lambda t}$, sendo A e B números reais. Novamente não temos um movimento oscilatório que é caracterizado por oscilações. Aqui temos dois termos exponenciais sendo um deles multiplicado por um termo linear.

E, por fim, a avaliação é dada quando Δ é estritamente negativo. Neste caso, equação característica possui duas raízes complexas, uma conjugada da outra, gerando a solução $x(t) = e^{\alpha t} = [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]$, sendo A e B números reais. Observe que agora temos funções periódicas na solução, porém multiplicadas por um termo exponencial. O movimento, neste caso, será oscilatório porém de forma decrescente uma vez que a força de atrito está agindo no sistema. Todos os termos exponenciais aqui apresentados são decrescentes, pois a força de atrito é contrária à força de ação que age no fenômeno. A etapa descrita acima é denominada *validação*.

Nas subseções (4.1.4), (4.1.5) e (4.1.6), apresentamos três aplicações diferentes das vibrações livres amortecidas, uma para cada tipo de movimento. Tais aplicações nos permitirá entender cada processo e verificar a escolha de variáveis para modelar os sistemas de acordo com as necessidades. Esta última etapa é a *aplicação*. Podemos citar, por exemplo, que para projetar uma suspensão de um carro não podemos ter molas extremamente duras, porém não podemos ter molas extremamente moles e isto significa que a escolha da constante elástica da mola em seu projeto deverá satisfazer condições para que o amortecedor aja para fornecer conforto e segurança para os passageiros e as formulações de hipóteses serão condizentes para cada fenômeno a ser projetado.

As aplicações que serão apresentadas a seguir fornecem uma leitura algébrica e gráfica de modo que possamos interpretá-la de forma distinta. Tendo essas visões, podemos tomar decisões para até mesmo modificar o modelo caso ele não esteja de acordo com os dados coletados e as hipóteses formuladas.

4.1.3 Aplicações

Como aplicação inicial e mais generalizada do *movimento livre não-amortecido*, utilizaremos a *Transformada de Laplace* para resolver o seguinte PVI por meio da equação (4.4):

$$\begin{cases} x''(t) + \omega_n^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \quad m \\ x'(0) = V_0 \quad m/s \end{cases}$$

$$x''(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

$$\mathcal{L}\{x''\} + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{x\} - sx_0 - V_0 + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

$$(s^2 + \omega_n^2) \mathcal{L}\{x\} = sx_0 + V_0$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{sx_0 + V_0}{s^2 + \omega_n^2}$$

Por fim, fazendo os ajustes necessários e aplicando a transformada inversa, obtemos

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{V_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (4.12)$$

Exemplo 4.1.1. Suponhamos que um corpo com massa de 3 kg estica uma mola em 0,05 m. No instante $t = 0$ s, o corpo é solto de um ponto 0,10 cm abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade de 0,20 m/s. Desprezando o atrito, determina a função $x(t)$ que descreve o movimento livre do sistema.

Solução. Para determinar a constante elástica da mola, da *Lei de Hooke* temos que $F = kx \implies mg = kx$ e com os dados do exercício temos $3 \cdot 9,8 = k \cdot 0,05 \implies k = 588$ N/m. Daí, de (4.2) temos que

$$\begin{aligned} mx''(t) + kx(t) = 0 &\implies 3x''(t) + 588x(t) = 0 \\ &\implies x''(t) + 196x(t) = 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que $\omega_n^2 = 196$ rad/s, pois $\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{588}{3} = 196$ rad/s. Com isso, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x''(t) + 196x(t) = 0 \\ x(0) = 0,10 \text{ cm} \\ x'(0) = V(0) = 0,20 \text{ m/s} \end{cases}$$

De (4.12), temos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{V_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) \\ &= 0,10 \cos(14t) + \frac{0,20}{14} \operatorname{sen}(14t) \\ &= 0,10 \cos(14t) + 0,0143 \operatorname{sen}(14t) \end{aligned}$$

Portanto, a função que descreve o movimento livre do sistema é $x(t) = 0,10 \cos(14t) + 0,0143 \operatorname{sen}(14t)$.

Como o sistema não possui atrito, então a mola oscilará por tempo indefinido até que uma força externa pare o movimento. Gráficamente podemos perceber isso.

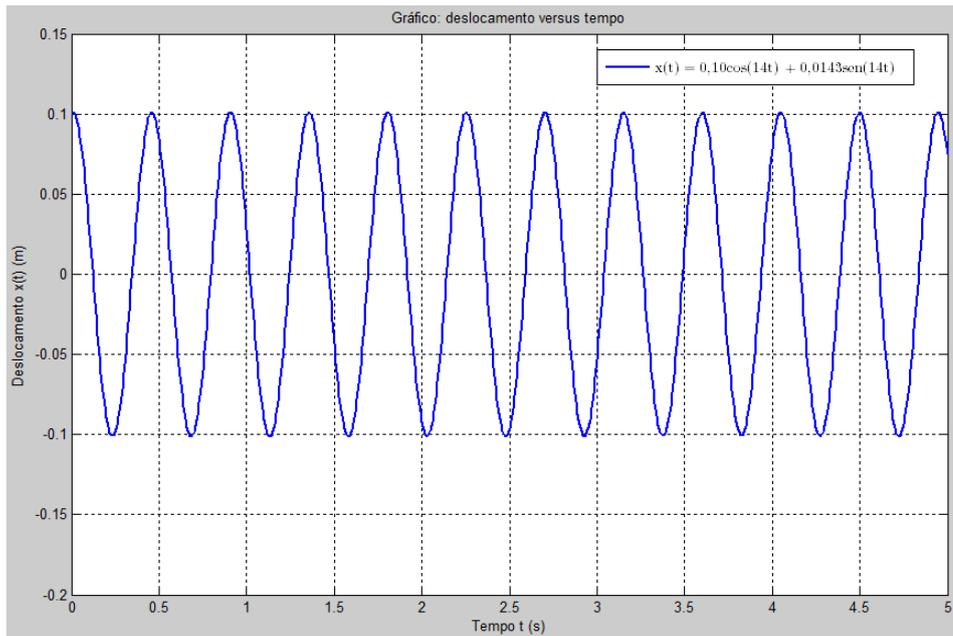


Figura 4 – Gráfico: deslocamento *versus* tempo.

Podemos notar um movimento com uma característica peculiar: uma única frequência angular ω_n . Esse tipo de sistema só ocorre em *sistemas conservativos*, isto é, em que forças externas ou dissipativas não atuam ou, se houver tais forças, elas são irrelevantes comparadas às aplicadas ao sistema. Podemos dizer também que a quantidade de energia inicial é igual à final formando um sistema em que a energia mecânica é constante, ou seja,

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}$$

em que E_m é a *energia mecânica*, E_c é a *energia cinética* e E_p é a *energia potencial*.

Ressaltamos que estamos tratando de um sistema em que a constante da mola k é um valor fixo, mas isso acontece em uma situação ideal. Porém, nas aplicações cotidianas, ocorre um enfraquecimento da mola após um período de tempo, isto significa que a *constante de elasticidade da mola* variará (decaindo com o tempo). Então, k da equação (4.2) é substituída por $K(t) = ke^{-\alpha t}$, com k e α positivos resultando em

$$mx''(t) + ke^{-\alpha t}x(t) = 0.$$

Para o *movimento livre amortecido*, temos os três casos apresentados neste capítulo.

Exemplo 4.1.2. Para o *movimento subamortecido*, quando $\zeta < 1$, utilizaremos a *Transformada de Laplace* para resolver o seguinte PVI por meio da equação (4.7):

$$\begin{cases} x''(t) + 2\zeta\omega_n x'(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \text{ m} \\ x'(0) = V_0 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$x''(t) + 2\zeta\omega_n x'(t) + \omega_n^2 x = 0$$

$$\mathcal{L}\{x''\} + 2\zeta\omega_n \mathcal{L}\{x'\} + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + 2\zeta\omega_n (s\mathcal{L}\{x\} - x(0)) + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{x\} - sx_0 - V_0 + 2\zeta\omega_n s \mathcal{L}\{x\} - 2\zeta\omega_n x_0 + \omega_n^2 \mathcal{L}\{x\} = 0$$

Reordenando os termos, temos

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \mathcal{L}\{x\} = sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

No denominador podemos completar quadrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + (\omega_n^2 \zeta^2 - \omega_n^2 \zeta^2) &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \zeta^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2 \zeta^2 \\ &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\omega_n^2(1 - \zeta^2)}_{\omega_f^2} \\ &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_f^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_f^2}$$

Fazendo os ajustes necessários para poder aplicar a *Transformada inversa de Laplace*, temos

$$\mathcal{L}\{x\} = x_0 \left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \omega_n)^2 + \omega_f^2} \right] + \frac{\zeta\omega_n x_0 + V_0}{\omega_f} \left[\frac{\omega_f}{(s + \omega_n)^2 + \omega_f^2} \right]$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_f t) + \frac{\zeta\omega_n x_0 + V_0}{\omega_f} \text{sen}(\omega_f t) \right] \quad (4.13)$$

Exemplo 4.1.3. Para o movimento com amortecimento crítico, basta fazer $\zeta = 1$ em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{sx_0 + 2\omega_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{x_0}{s + \omega_n} + \omega_n x_0 + V_0 \left[\frac{1}{(s + \omega_n)^2} \right] \end{aligned}$$

Aplicando a *Transformada inversa de Laplace*, temos

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x_0 + (\omega_n x_0 + V_0)t] \quad (4.14)$$

Exemplo 4.1.4. Para o *movimento superamortecido*, quando $\zeta > 1$, temos duas raízes reais distintas $\lambda_1 = \omega_n (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$ e $\lambda_2 = \omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$, sabendo que $\omega_f = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$. Da mesma forma, temos em

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0 + V_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

Utilizando as frações parciais, podemos reescrever $\mathcal{L}\{x\}$ da seguinte forma

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2}$$

Encontrando A e B a partir das condições iniciais já estabelecidas e aplicando a *Transformada inversa de Laplace*, temos

$$x(t) = \left[\frac{x_0 \lambda_1 + 2x_0 \zeta \omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_1 t} - \left[\frac{x_0 \lambda_2 + 2x_0 \zeta \omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_2 t} \quad (4.15)$$

Nesta seção, apresentamos tópicos de onde as equações diferenciais ordinárias podem ser aplicadas na Engenharia Mecânica sob os tópicos da vibração livre-não amortecida e amortecida. Para a primeira, mostramos uma aplicação e a resolvemos por meio da *Transformada de Laplace*, sendo sua solução apresentada algébrica e graficamente como forma de analisar a resposta que o sistema nos retorna.

Na próxima seção, apresentaremos aplicações para as vibrações livres amortecida que, diferentemente da não amortecida, não é uma situação idealizada.

4.1.4 Suspensões mecânicas automotivas

Em meados do século VIII, as suspensões veiculares já estavam presentes com o uso de correntes em alguns sistemas de locomoção da época, porém causavam desconforto aos passageiros pois os veículos balançavam muito e eram muito ruidosos. Com o passar dos séculos e o avanço tecnológico, surgiram as molas de metal que, quando usadas como suspensão, reduzia-se muito o balanço das charretes, mas a desvantagem era que o sistema ficava bastante robusto, aumentando consideravelmente o peso do conjunto como um todo (KENNETT, 2000).

Por volta do século XVIII, os processos de fabricação eram mais desenvolvidos, sendo possível a realização de projetos automotivos mais resistentes e leves tendo como consequência novos designs de suspensões. E nos dias atuais, com a tecnologia avançando rapidamente, as suspensões tiveram uma atenção diferenciada tanto no quesito de carros de corridas quanto em automóveis de passeio, passando a ser desenvolvidas suspensões eletrônicas que corrigem imperfeições na pista mais rapidamente do que uma suspensão comum, fornecendo, assim, mais estabilidade e desempenho.

Na atualidade, o tipo de suspensão mais utilizada no Brasil é a *McPherson*. São utilizadas na parte dianteira dos veículos de pequeno e médio porte que possuem tração dianteira. Faz parte do conjunto de *suspensão independente* que tem por finalidade isolar o desnivelamento da pista para apenas uma roda, ou seja, caso ela passe por um desnível, apenas esta será deslocada, sendo a vantagem de não transferir a oscilação para todo veículo e também não transferir o ângulo de inclinação para o eixo tendo como consequência a não inclinação, de mesma unidade angular, do chassi.

Para a suspensão traseira, uma das mais utilizadas é a do tipo *barra de torção*. De material leve e compacto, é constituída de uma barra, circular ou retangular, montada longitudinalmente interligando as torres de amortecimento e, como o próprio nome diz, a torção é devido ao movimento da suspensão atuando, assim, como uma mola. Segundo [Fichera, Lacagnina e Petrone \(2004\)](#), a barra de torção sofre deformação elástica por meio do movimento das rodas e das cargas aplicadas, o que afeta as características geométricas da suspensão e deve ser modeladas como um corpo flexível.

4.1.4.1 Aplicações

Exemplo 4.1.5. O Toyota IQ, lançado em 2008, de acordo com seu catálogo de 2012², tem como especificação de massa 1.215 kg, sendo suas suspensões dianteira e traseira do tipo McPherson e barra de torção, respectivamente. De acordo com [Gillespie \(1992\)](#), um bom nível de conforto em relação à taxa de amortecimento ζ está entre 0,2 e 0,4. Sendo $\zeta = 0,4$, podemos modelar o afastamento da mola em relação ao equilíbrio por meio da equação (4.7). A força peso age sobre o carro, então

$$\begin{aligned} F = mg &\implies F = 1.215 \cdot 9,8 \\ &\implies F = 11.907 \text{ N} \end{aligned}$$

Considerando que o afastamento em relação ao equilíbrio é $x = 0,04 \text{ m}$, então, pela Lei de Hooke

$$\begin{aligned} F = kx &\implies 11.907 = k \cdot 0,04 \\ &\implies k = 297.675 \text{ N/m} \end{aligned}$$

² Disponível em <http://www.toyota.pt/Images/iq_catalogo_2012_tcm270-1198995.pdf>. Acesso em 12/03/2014.

A frequência circular, como já vimos, é dada por $\omega_n = \sqrt{k/m}$, então

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{297.675}{1.215}} = 15,652 \text{ rad/s}$$

Em (4.13), temos o termo ω_f , daí

$$\begin{aligned}\omega_f &= \sqrt{\omega_n^2(1 - \zeta^2)} = \sqrt{245(1 - 0,4^2)} \\ &= 14,35 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Considerando um afastamento inicial $x_0 = 0,04 \text{ m}$ com uma velocidade inicial $V_0 = 0,2 \text{ m/s}$ e substituindo os valores na equação (4.7), temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x''(t) + 12,52x'(t) + 245x(t) = 0 \\ x(0) = 0,04 \text{ m} \\ x'(0) = V_0 = 0,2 \text{ m/s} \end{cases}$$

Novamente em (4.13), temos

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_f t) + \frac{\zeta\omega_n x_0 + V_0}{\omega_f} \text{sen}(\omega_f t) \right] \\ &= e^{-0,4 \cdot 15,652t} \left[0,04 \cos(14,35t) + \frac{0,4 \cdot 15,652 \cdot 0,04 + 0,2}{14,35} \text{sen}(14,35t) \right] \\ &= e^{-6,2608t} [0,04 \cos(14,35t) + 0,0314 \text{sen}(14,35t)]\end{aligned}$$

Logo, a função $x(t)$ acima descreve o movimento oscilatório subamortecido do amortecedor do Toyota IQ. Como a função $x(t)$ está, também, em função de seno e cosseno, notamos o movimento oscilatório do sistema. A exponencial decrescente faz com que a amplitude do movimento harmônico diminua à medida que o tempo cresce. Para a situação modelada acima, podemos observar que passado um pouco mais de um segundo a mola retorna para sua posição de equilíbrio uma vez que o atrito, neste caso, é considerado. O sistema é projetado para manter um equilíbrio necessário para não tirar o conforto e a segurança dos passageiros deste automóvel. Se a suspensão ficar oscilando por muito tempo, o desgaste será maior e é bem provável que a segurança do veículo diminua.

Observe que, considerando um afastamento inicial de $0,04\text{ m}$, o movimento oscilatório, por meio dos outros dados considerados, apresenta um aspecto gráfico de acordo com a [Figura 5](#):

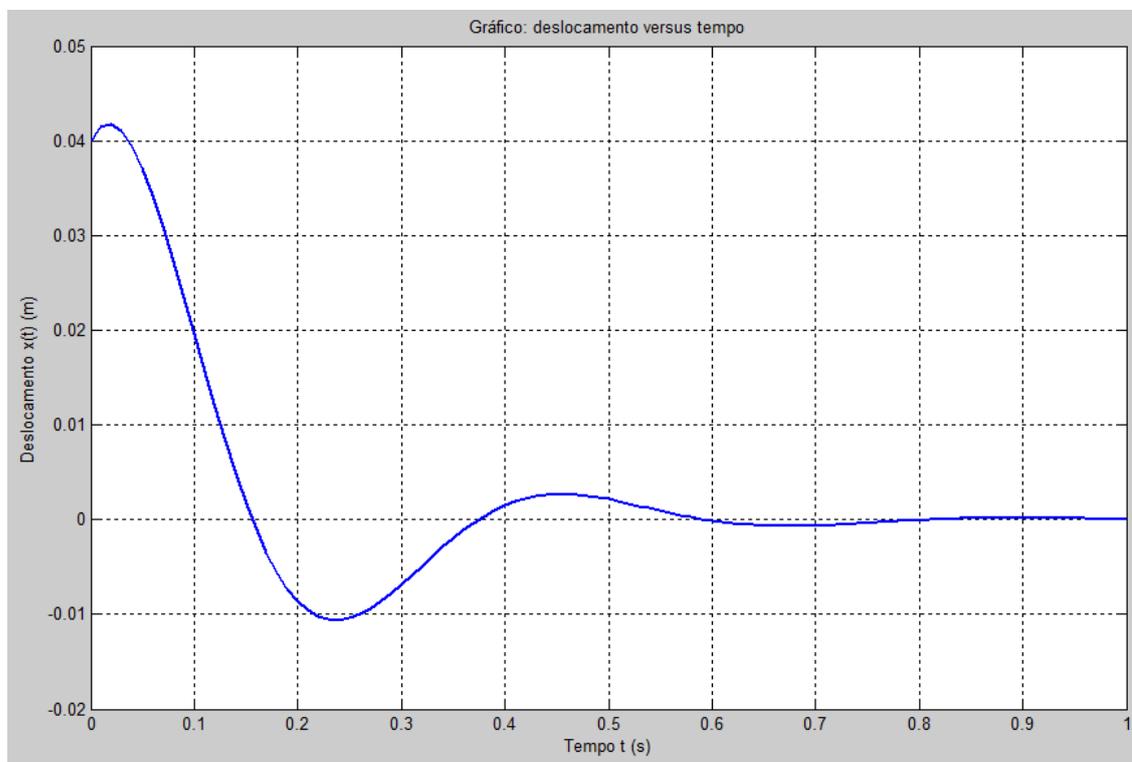


Figura 5 – Movimento subamortecido considerando $\zeta = 0,4$.

Observe que à medida que o tempo aumenta, a suspensão tem um movimento oscilatório periódico que decresce até a posição de equilíbrio.

Na próxima subseção, apresentaremos uma aplicação para o movimento *criticamente amortecido* e para isto, utilizaremos o exemplo das válvulas tipo mola com retorno rápido. Tais molas são usadas, por exemplo, em válvulas de segurança e atuadores pneumáticos que requerem essa função elástica da mola.

4.1.5 Válvulas de segurança e alívio de pressão

Em relação a proteção de linhas condutoras de fluidos sobrepessão, as válvulas de segurança e alívio de pressão são consideradas os dispositivos mais importante instalados.

Para condições de projetos, tais válvulas garantem que a pressão de operação não exceda o valor limite projetado. Isto significa que, qualquer avaria na linha condutora, por exemplo, o excesso de pressão causado por qualquer transiente hidráulico, a válvula entrará em ação de modo automático, eliminando o excesso de fluido causador do aumento de

pressão na linha. A não instalação deste dispositivos pode acarretar em sérias consequências e até mesmo graves acidentes.

Estamos interessados aqui em válvulas de segurança e alívio do tipo mola que permitem um curso rápido de elevação e retorno para a posição inicial, que consideraremos em nossa linguagem a posição de equilíbrio. Seu funcionamento ocorre, basicamente, da seguinte forma: suponha uma linha hidráulica projetada para uma pressão de 10 *bar* e caso ocorra uma avaria qualquer na linha e essa pressão aumentar para 11 *bar*, por exemplo, a válvula de alívio de pressão, automaticamente, agirá de modo que o excesso de fluido na linha faça pressão na mola e saia por uma descarga na própria válvula e com isso a pressão volta a ser equilibrada. Porém, para a pressão da linha não ficar abaixo da de trabalho, a mola retorna rapidamente à sua posição de equilíbrio, mantendo, assim, as condições iniciais de trabalho.

O conjunto é composto por uma mola na vertical, sendo que em suas extremidades há dois componentes chamados *prato de mola superior* e *prato de mola inferior* e o local onde o fluido “empurra” a mola chama-se *disco de vedação*.

4.1.5.1 Aplicações

Exemplo 4.1.6. Considere uma válvula de alívio de pressão do tipo mola montada em uma rede hidráulica, sendo diâmetro de entrada do fluido na válvula $D_E = 25 \text{ mm}$, diâmetro de saída $D_S = 50 \text{ mm}$, pressão de trabalho $P = 10 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$. Suponhamos que houve uma avaria na linha e a pressão aumentou fazendo com que a mola deslocasse no mesmo valor que o diâmetro de saída, ou seja, $x_0 = 50 \text{ mm}$, para que aliviasse a pressão e equilibrasse novamente o sistema. Como o processo requer um retorno rápido da mola, consideraremos $\zeta = 1$, ou seja, o movimento é *criticamente amortecido*. Com esses dados, podemos modelar matematicamente a oscilação criticamente amortecida do sistema, isto é, determinar a função deslocamento em cada instante de tempo para o retorno da mola em sua posição zero.

Primeiramente, temos que determinar a constante elástica k da mola. Sabendo que “pressão é força sobre área”, então

$$P = \frac{F}{A} \implies F = PA \implies F = P \cdot \frac{\pi d^2}{4} \implies F = 0,005 \text{ kgf} = 0,05 \text{ N}$$

e, sendo $x_0 = 0,050 \text{ m}$, então

$$F = kx \implies 0,05 = k \cdot 0,05 \implies k = 1 \text{ N/m}$$

Como a mola está na vertical, então ela está sujeita a ação da gravidade e à massa, que consideraremos a massa do prato de mola inferior sem qualquer outro tipo de

interferência. Vamos determinar a massa desse dispositivo. Assim,

$$F = mg \implies 0,05 = m \cdot 9,81 \implies m = 0,0051 \text{ kg}$$

com isso, temos que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies \omega_n = \sqrt{\frac{1}{0,0051}} \implies \omega_n = 14 \text{ rad/s}$$

No momento em que a mola começar a retornar à sua posição zero, ou seja, a válvula fechada, consideraremos a velocidade inicial $V_0 = 0 \text{ m/s}$. Disso, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x''(t) + 28x'(t) + 196x(t) = 0 \\ x(0) = 0,050 \text{ m} \\ x'(0) = V(0) = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

cuja solução por meio da *Transformada de Laplace* está generalizada pela equação (4.14). Então,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\omega_n t} [x_0 + (\omega_n x_0 + V_0)t] \\ &= e^{-14t} (0,050 + 0,7t) \end{aligned}$$

que tem como representação gráfica:

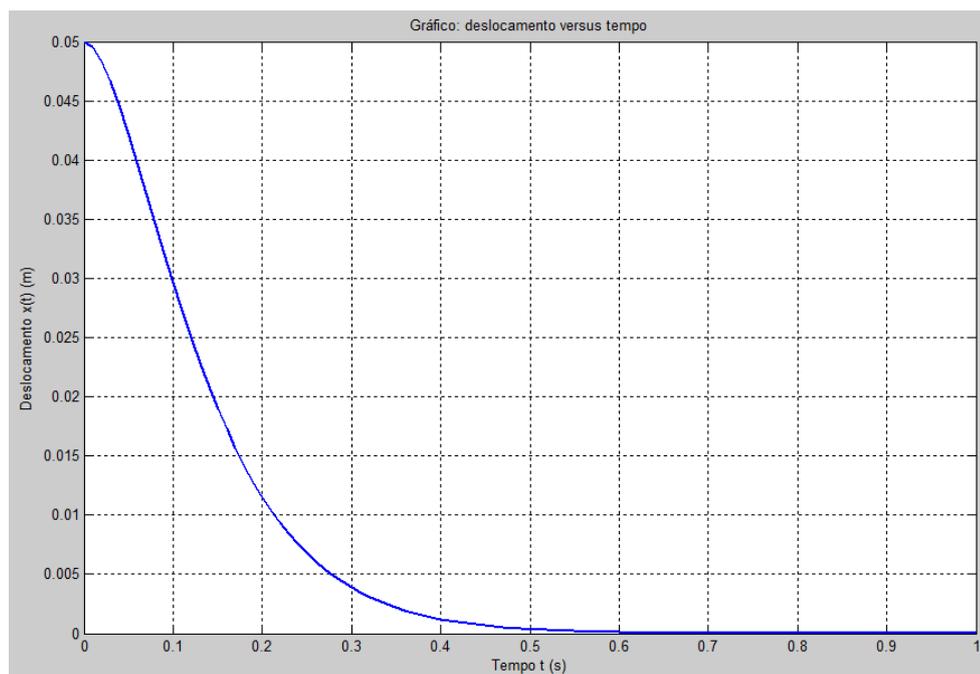


Figura 6 – Movimento criticamente amortecido considerando $\zeta = 1$.

Observe que à medida que o tempo aumenta, o deslocamento tende a zero, ou seja, o dispositivo por meio de mola está voltando para a sua posição zero, isto é, a válvula de alívio de pressão fecha-se e o sistema retorna a trabalhar com sua pressão normal. Dissemos, no início do exemplo, que quando o movimento é criticamente amortecido há um retorno mais rápido para a posição zero. Isso, de fato, é uma característica desse tipo de movimento. Iremos comparar essa mesma situação se $\zeta > 1$, ou seja, o movimento será *superamortecido* que faz com que o retorno seja mais lento que o anterior que é uma característica real desse tipo de movimento.

Exemplo 4.1.7. Considere, agora, uma válvula de alívio de pressão com as mesmas características do exemplo anterior, porém iremos fazer uma comparação entre ambos exemplos considerando $\zeta = 1, 3$. A ideia aqui é observar o movimento superamortecido e comprovar que, de fato, o retorno da mola com essa informação é mais lento. Se tal sistema fosse projetado dessa forma, seria possível que, por conta do retorno mais lento da mola, a pressão na linha de fluido ficasse abaixo da pressão de operação por um determinado período de tempo. Partindo desta ideia, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x''(t) + 36,4x'(t) + 196x(t) = 0 \\ x(0) = 0,050 \text{ m} \\ x'(0) = V(0) = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

cuja solução por meio da *Transformada de Laplace* está generalizada pela equação (4.15). Então,

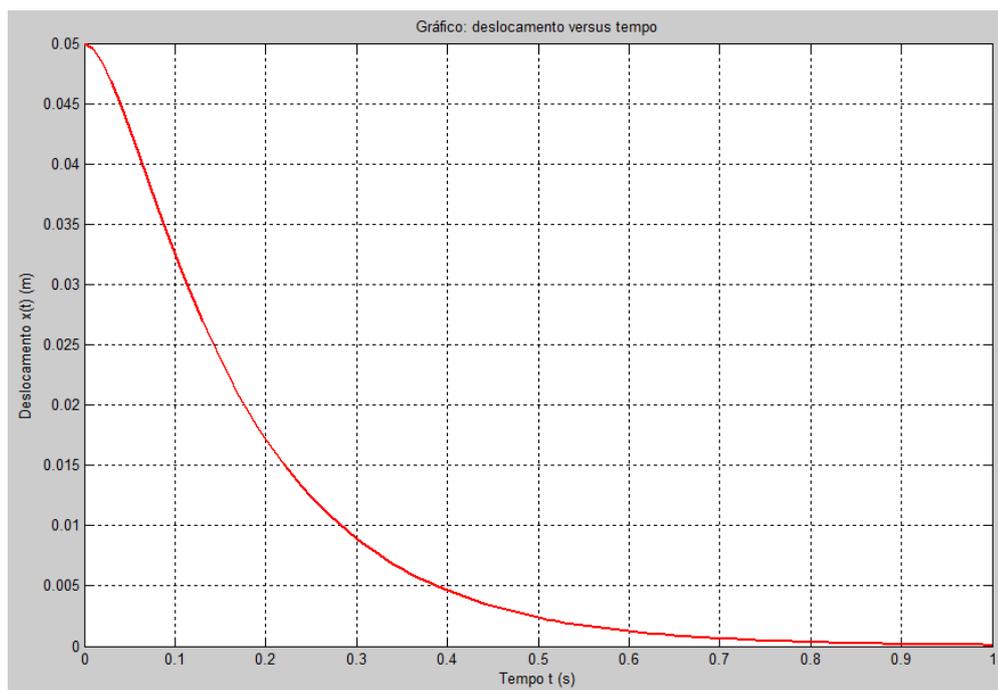
$$x(t) = \left[\frac{x_0\lambda_1 + 2x_0\zeta\omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_1 t} - \left[\frac{x_0\lambda_2 + 2x_0\zeta\omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_2 t}$$

sendo $\lambda_1 = -6,5707$, $\lambda_2 = -29,8293$ e $\omega_f = 11,6293 \text{ rad/s}$. Daí, substituindo os dados, temos:

$$x(t) = 0,06413 e^{-6,5707 t} - 0,01413 e^{-29,8293 t}$$

Observe que a função x , agora, tem duas funções exponenciais decrescentes enquanto a função x do exemplo anterior possui uma função exponencial decrescente multiplicando uma função linear. Esse último fator, faz com que o decréscimo seja mais rápido. Por outro lado, a soma das duas funções exponenciais caracterizará um retorno mais suave, mais lento do que o anterior.

Tanto uma quanto outra tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$, porém com velocidades diferentes, ou seja, uma será mais rápida que a outra em determinados intervalos de tempo. O gráfico do movimento *superamortecido* deste exemplo é dado por:

Figura 7 – Movimento superamortecido considerando $\zeta = 1,3$.

Note que, saindo da posição inicial, a mola retornará à posição zero para um tempo suficientemente grande, porém, como já citado de um modo mais lento. Podemos comparar isso observando ambas as situações no mesmo plano cartesiano.

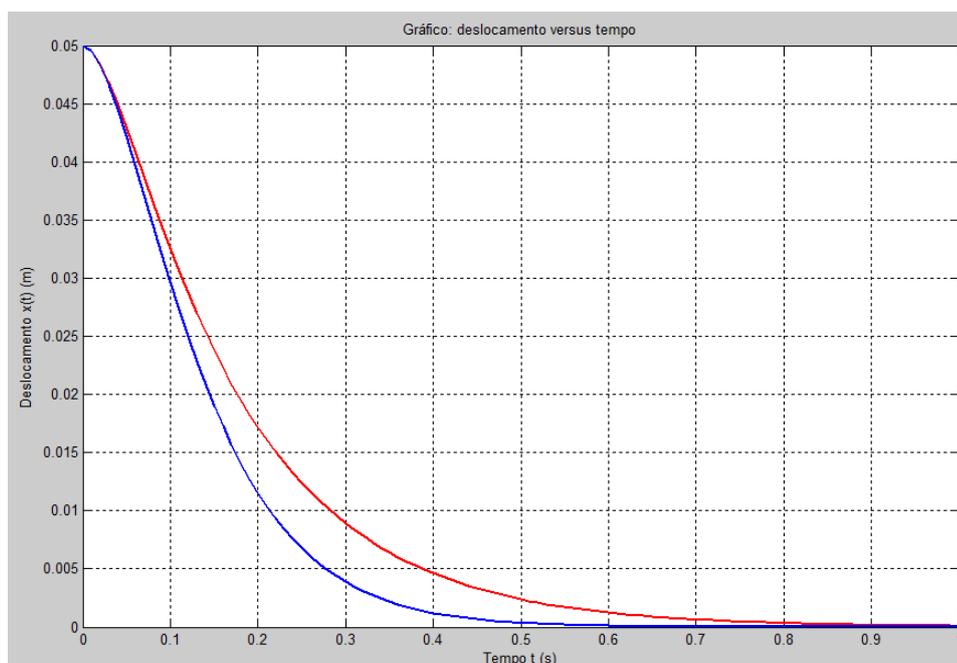


Figura 8 – Comparação entre os movimentos criticamente amortecido e superamortecido.

A função em azul representa o movimento *criticamente amortecido*, já a vermelha

representa o movimento *superamortecido*. Para $t = 0$, a mola está em sua posição inicial considerada e, após o aumento do tempo, a mola retorna para a posição onde a válvula estará fechada em sua totalidade.

A velocidade pode ser determinada fazendo $v = \frac{dx}{dt}$. Para o primeiro exemplo, criticamente amortecido, temos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0,7 e^{-14t} + 0,7 e^{-14t} - 9,8 t e^{-14t}$$

$$\Rightarrow v(t) = -9,8 t e^{-14t}$$

e para o segundo exemplo, superamortecido, temos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0,4214 e^{-6,5707t} + 0,4214 e^{-29,8293t}$$

$$\Rightarrow v(t) = -0,4214 (e^{-6,5707t} - e^{-29,8293t})$$

que graficamente tem o seguinte aspecto:

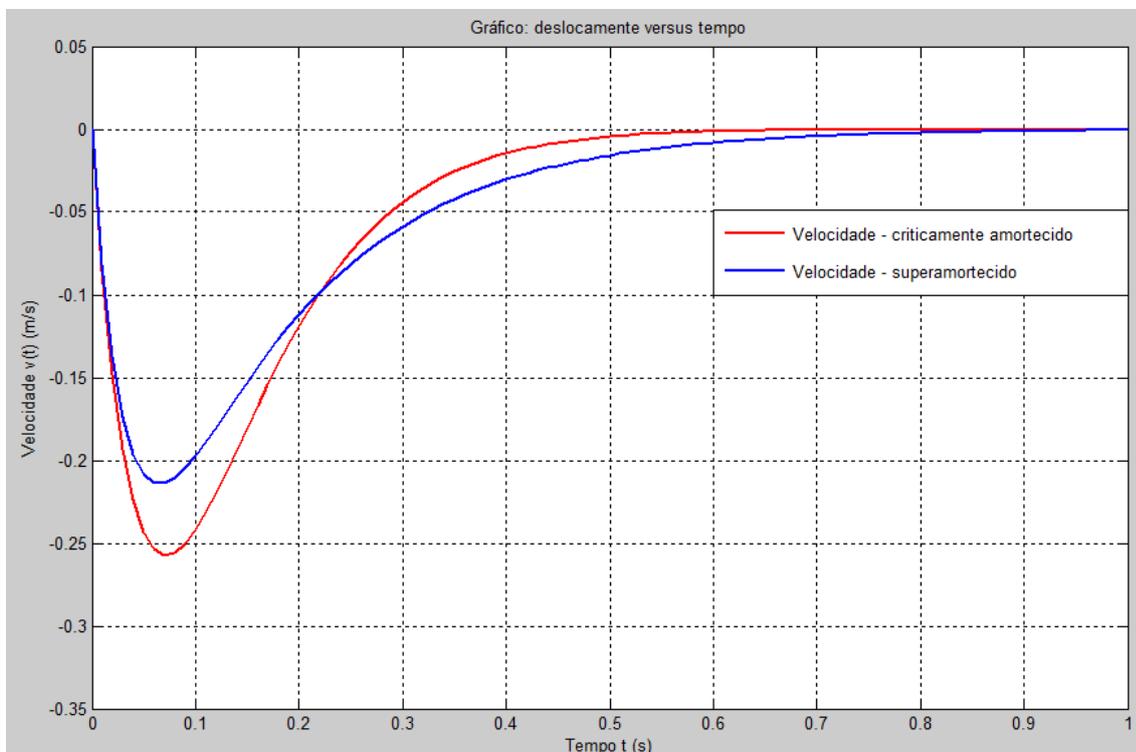


Figura 9 – Comparação entre as velocidades de retorno à posição zero.

Observe que, em primeiro momento, a velocidade no movimento superamortecido é maior e, após determinado instante de tempo, ela fica menor que a velocidade no movimento

criticamente amortecido, em que podemos observar graficamente que a velocidade neste último se aproxima de zero de forma mais rápida.

É evidente que, para condições de projeto, muitos outros fatores são considerados. A mola tem um efeito bastante importante no sistema e, ao passar do tempo, a mesma sofre desgastes consideráveis e precisa ser objeto de manutenção contínua e de modo preventivo. Vale lembrar que os sistemas são projetados para atuarem em condições normais de temperatura e pressão, porém tanto em sistemas com fluidos que trabalham em temperaturas baixas ou muito altas é necessário um cuidado especial em relação a avarias que fazem a pressão aumentar e tendo como consequência sérios danos ao projeto em si.

Apresentadas algumas aplicações das vibrações livres amortecidas para a Engenharia Mecânica, mostraremos, na próxima seção, algumas aplicações das equações diferenciais ordinárias na Engenharia Elétrica.

4.2 Aplicações das EDO na Engenharia Elétrica

No século III a.C., os mesopotâmios conheciam a condutividade de materiais como o cobre e o ferro e, segundo [Battaglin e Barreto \(2011\)](#), juntamente com os materiais isolantes - betume e argila - construíram uma bateria nomeada *Bateria de Bagdá* que gerava eletricidade. A bateria elétrica, a qual conhecemos hoje, foi inventada pelo físico italiano Alessandro Volta (1745 - 1827), determinando, para a época, que os melhores materiais para produzir eletricidade eram o zinco e a prata, contradizendo as afirmações do físico e filósofo Luigi Galvani (1737 - 1798) que defendia que os metais só eram capazes de gerar eletricidade em contato com tecido animal.

A civilização grega, por volta do século VI a.C., conhecia a magnetita assim como os chineses e por meio de suas propriedades magnéticas construíam bússolas para auxiliar na navegação pelo Mar Mediterrâneo. A importância do magnetismo, a partir de então, foi explorada com mais rigor e até hoje é objeto de grandes estudos.

Em meados do século VI a.C., Thales de Mileto descobre uma resina vegetal fóssil chamada de *âmbar* (em grego, *elektron*). Ao esfregá-la em pedaços de lã ou pele, desempenhavam a propriedade de atrair objetos, por exemplo, a palha. Essa descoberta deu origem à ciência conhecida hoje como *eletricidade*.

É também verdade que entre dois e três milênios antes de Cristo, a civilização suméria conhecia a existência da eletricidade por meio de materiais condutores e uma das aplicações era a deposição de prata em vasos de cobre ([BATTAGLIN; BARRETO, 2011](#)).

Já na idade média e mais precisamente na Inglaterra, Willian Gilbert (1544 - 1603) por volta de 1600 editou sua obra *De Magnete* em que mostrou como construir ímas

permanentes por intermédio do tratamento térmico do ferro, descreveu e desenvolveu o conceito de espectro de um campo magnético.

Adentrando os séculos XVIII, XIX e XX, temos novas descobertas. O físico Charles Du Fay (1698 - 1790) distinguiu os dois tipos diferentes de carga elétrica, a positiva e a negativa. Benjamin Franklin (1706 - 1790) estudou fenômenos provenientes da eletricidade e atestou experimentalmente que a eletricidade na atmosfera é a causa de trovões e relâmpagos e tal experimento é a famosa *experiência da pipa (ou do papagaio)*.

O inglês Joseph Priestley (1733 - 1804) percebeu que a força de atração entre duas cargas elétricas era proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Tais conclusões foram aceitas após Charles de Coulomb (1736 - 1806) realizar um experimento com uma balança de torção.

O físico e matemático britânico James Clerk Maxwell (1831 - 1879) formalizou a teoria moderna do eletromagnetismo. Os fenômenos abordados foram modelados matematicamente e isso culminou nas *Equações de Maxwell*, um grupo de equações diferenciais parciais que é a base do eletromagnetismo moderno. Seus estudos contribuíram de forma ampla para a Segunda Revolução Industrial que do ponto de vista tecnológico culminou no avanço e aprimoramento das tecnologias desenvolvidas na Primeira Revolução.

Muito do que conhecemos da evolução dos fundamentos da Engenharia Elétrica também deve-se a cientistas como Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) que descreveu a *Lei de Gauss* como a relação entre o fluxo de um campo elétrico e as cargas elétricas que geram esse campo e a *Lei de Gauss para o Magnetismo* que basicamente afirma que os polos magnéticos são inseparáveis, ou seja, a linha de campo é contínua e fechada que parte do polo norte e caminha para o polo sul por fora do ímã e retorna ao polo norte por dentro.

O físico inglês Michael Faraday (1791 - 1867) descreveu a variação de um campo elétrico em relação ao tempo ou como esse campo induz um campo elétrico. Esse fato é conhecido como *Lei de Faraday*. Outro importante contribuinte é o físico francês André-Marie Ampère (1775 - 1836) que tem a *Lei de Ampère* em sua homenagem. Essa lei afirma que os campos magnéticos podem ser gerados por meio de correntes elétricas e por campos elétricos, este último com a correção de Maxwell, pois estes campos variam com o tempo.

Como já citado acerca da revolução tecnológica, o avanço nos estudos da eletricidade culminaram em avanços em sistemas de controles automáticos. De acordo com [Ogata \(2003\)](#), James Watt (1736 - 1819) foi o precursor nesses sistemas e projetou o regulador centrífugo para controlar a velocidade de uma máquina a vapor.

Em se tratando de sistemas dinâmicos na Engenharia Elétrica, e principalmente as conexões aos sistemas de controle, [Ogata \(2003\)](#) retrata sua importância nas seguintes palavras:

Como os avanços no controle automático, na teoria e na prática, vêm produzindo meios para otimizar o desempenho dos sistemas dinâmicos, melhorar a produtividade, diminuir o trabalho árduo de várias rotinas de operações manuais repetitivas, entre outros, a maioria dos engenheiros e dos cientistas devem ter agora bons conhecimentos nessa área (OGATA, 2003, p. 1).

Isso reforça ainda mais o interesse e o avanço nas pesquisas nessa área do conhecimento. A tecnologia cresce no intuito de facilitar diversos processos, sejam eles de produção ou não, automatizando o sistema de controle de uma ou mais variáveis de um sistema.

Os modelos matemáticos para um sistema dinâmico envolvem definir um conjunto de equações que contribua para representar bem o funcionamento do sistema. Nosso estudo está interessado em apresentar alguns modelos matemáticos aplicados à Engenharia Elétrica descritos por equações diferenciais ordinárias e nesse sentido comparar os modelos, por exemplo os circuitos LC e RLC , com as vibrações livres não-amortecidas e amortecidas de sistemas encontrados na Engenharia Mecânica e com isso mostrar que muitas vezes, modelos criados em uma área específica podem muito bem se enquadrar em uma outra área do conhecimento que, *a priori*, são distintas. Essa conexão facilita o trabalho do modelador, pois a dedicação maior de tempo estará mais focada no ajustes das variáveis para cada área estudada.

4.2.1 Corrente elétrica

De acordo com a definição de Halliday, Walker e Resnick (2010b), corrente elétrica é um movimento de partículas carregadas. Porém, os mesmos autores ressaltam que “nem todas as partículas carregadas que se movem produzem corrente elétrica” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 141). O exemplo citado na mesma obra é o fluxo de água em uma mangueira. Os prótons das moléculas de água representam um movimento de cargas positivas. Os elétrons das moléculas de água caracterizam a não existência de um fluxo líquido de cargas por causa do movimento de suas cargas negativas compensando o movimento das cargas positivas. A consequência imediata é que “a corrente elétrica associada ao movimento da água no interior de uma mangueira é zero” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 141).

Define-se corrente elétrica média de um circuito elétrico como

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \quad (4.16)$$

considerada também como a taxa de variação média entre a carga elétrica q e o tempo t em dois pontos distintos do circuito elétrico, em que

- i é a intensidade da corrente;

- Δq é a taxa de variação da carga elétrica;
- Δt é a taxa de variação do tempo.

Se quisermos saber a intensidade da corrente elétrica em um instante de tempo t basta, na função $i(t)$, considerarmos a taxa de variação do tempo e da carga elétrica muito pequena, ou seja, tendendo a zero, isto é

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

e, portanto,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (4.17)$$

que é a definição de *corrente elétrica instantânea*.

Podemos determinar a carga elétrica que passa pelo circuito no intervalo $[0, t]$. Por separação de variáveis, resolvemos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} i = \frac{dq}{dt} &\implies dq = idt \implies \int dq = \int_0^t i dt \\ &\implies q(t) = i \cdot t \Big|_0^t = i \cdot (t - 0) \\ &\implies q(t) = it \end{aligned} \quad (4.18)$$

Consideremos um circuito elétrico em que aplica-se a mesma diferença de potencial nas extremidades e suponhamos materiais diferentes de condução elétrica, por exemplo, cobre, vidro, alumínio, entre outros. As características desses materiais que caracterizam essa diferença de potencial é chamada de *resistência elétrica*.

Selecionando dois pontos de um condutor e aplicando uma diferença de potencial V e medindo a intensidade da corrente elétrica i resultante, temos que a resistência elétrica R é dada por

$$R = \frac{V}{i} \quad (4.19)$$

isolando i , temos

$$i = \frac{V}{R} \quad (4.20)$$

porém, por definição de corrente elétrica

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}$$

e separando as variáveis e considerando um intervalo de tempo $[0, t]$, temos

$$\begin{aligned} dq = \frac{V}{R} \cdot dt &\implies \int dq = \frac{V}{R} \int_0^t dt \\ &\implies q(t) = \frac{V}{R} \cdot t \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em (4.20), quanto maior a resistência, menor será a intensidade da corrente. Já em (4.21), fixados V e R , a quantidade de cargas elétricas em um instante de tempo t poderá ser maior ou menor dependendo dos valores da diferença de potencial e da resistência e não sendo mais analisados a partir do valor da intensidade da corrente i .

4.2.2 Força eletromotriz

A produção de energia elétrica estável depende, basicamente, de um dispositivo tal que suas extremidades estabeleça uma diferença de potencial. Para isso, precisamos realizar trabalho, realizado por dispositivos chamados de *fonte de tensão* que produz o que chamamos de força eletromotriz \mathcal{E} “que submete os portadores de carga a uma diferença de potencial” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 167).

Há diversas fontes realmente úteis, por exemplo, a bateria que é utilizada em uma variedade de equipamentos. As usinas hidrelétricas possuem geradores de eletricidade que criam uma diferença de potencial nos consumidores finais.

Um circuito simples é mostrado na Figura 10 formado por uma fonte de tensão e uma resistência R . Do terminal negativo para o positivo, representamos por meio de uma seta a força eletromotriz \mathcal{E} .

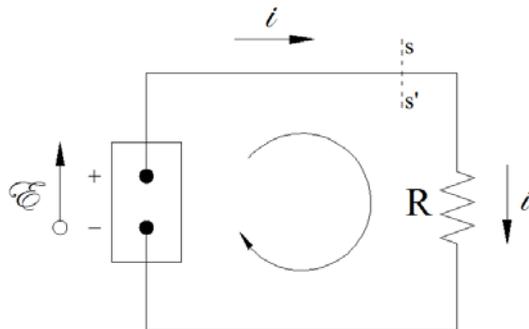


Figura 10 – Circuito elétrico simples.

Pela seção ss' , passa uma carga dq em um intervalo dt . A movimentação da carga dq depende da realização de trabalho dW pela fonte. Disso, definimos a força eletromotriz \mathcal{E} da fonte em relação ao trabalho realizado como

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}$$

isto é, a força eletromotriz é o trabalho realizado pela fonte por unidade de carga transferidas do terminal de baixo potencial (terminal negativo) para o terminal de alto potencial (terminal positivo). No SI, a unidade é *volt* (joule por Coulomb).

Apresentados os conceitos de corrente elétrica e força eletromotriz, a seguir introduziremos os circuitos RC , RL , LC e RLC . Os circuitos do tipo RC (resistor - capacitor) são simples filtros eletrônicos que são utilizados como temporizadores de sinais. Um exemplo de sua utilização são os controladores de temperatura de um sistema de ar condicionado. Os circuitos do tipo RL (resistor - indutância) são utilizados, por exemplo, em válvulas solenóides que, por ação de um campo magnético gerado por uma bobina (indutor), abrem ou fecham para controlar a passagem de fluidos. Para os circuitos LC (indutância - capacitância) e RLC (resistência - indutância - capacitância), suas aplicações estão concentradas em filtros eletrônicos que atenuam características não desejadas de uma frequência separando os sinais desejados.

4.2.3 Circuito RC

Nesta seção, vamos estudar circuitos elétricos em que as correntes variam com o tempo. A [Figura 11](#) mostra um circuito com um capacitor de capacitância C , resistência R e uma fonte ideal com força eletromotriz \mathcal{E} .

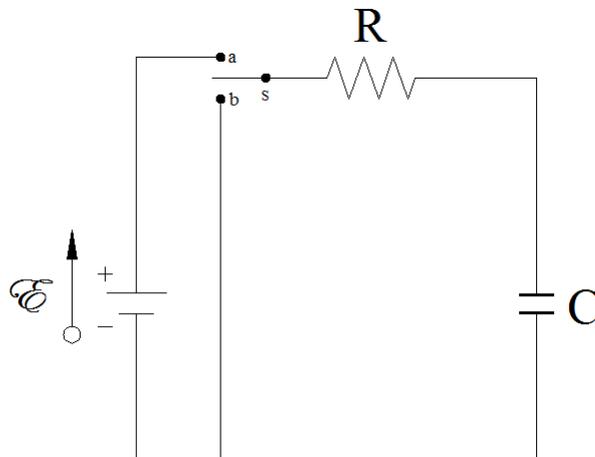


Figura 11 – Circuito RC.

A capacitância “é uma medida da quantidade de carga que precisa ser acumulada nas placas (do capacitor) para produzir uma certa diferença de potencial entre elas” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 112).

A carga q de um capacitor e sua diferença de potencial V são proporcionais, isto é,

$$q = CV$$

A partir do momento que o circuito é completado, surgem correntes elétricas acumulando cargas q nas placas do capacitor estabelecendo, assim, uma diferença de potencial V entre elas, ou seja,

$$V = \frac{q}{C}$$

Considerando ainda a Figura 11, o carregamento do capacitor de capacitância C é dado quando varia com o tempo a carga q , a diferença de potencial V e a corrente elétrica i . A partir do terminal negativo, iremos aplicar a regra das malhas em que “a soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 170), temos que

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

mas, sabemos que

$$i = \frac{dq}{dt}$$

então,

$$\mathcal{E} - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \implies R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

e colocando na forma padrão, dividindo ambos os membros por R , temos

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (4.22)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que descreve a taxa de variação instantânea da carga q em relação ao tempo t no capacitor. Podemos resolver essa equação com o seguinte procedimento: seja $\mu(t)$ o fator integrante, então

$$\mu(t) = e^{\int 1/RC dt} = e^{t/RC}$$

Multiplicando a equação (4.22) por $\mu(t)$, temos

$$e^{t/RC} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} e^{t/RC} q = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{t/RC}$$

O primeiro membro da equação é a derivada do produto da função $h(t) = e^{t/RC} \cdot q$ em que q é uma função que depende da variável temporal t , daí

$$\frac{d}{dt} (e^{t/RC} \cdot q) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{t/RC}$$

e integrando ambos os membros diferenciando t , temos

$$\int \frac{d}{dt} (e^{t/RC} \cdot q) dt = \frac{\mathcal{E}}{R} \int e^{t/RC} dt$$

$$e^{t/RC} \cdot q = \mathcal{E}C e^{t/RC} + K$$

e isolando a função q , segue que

$$q(t) = \mathcal{E}C + K e^{-t/RC} \quad (4.23)$$

Se fornecermos condições iniciais tais que $t = 0$ e $q(t) = 0$, então

$$0 = \mathcal{E}C + K \implies K = -\mathcal{E}C$$

logo,

$$q(t) = \mathcal{E}C - \mathcal{E}C (e^{-t/RC}) \implies q(t) = \mathcal{E}C (1 - e^{-t/RC}) \quad (4.24)$$

Note que quando $t \rightarrow +\infty$, temos que $q(t) = \mathcal{E}C$ que é o valor final da carga no capacitor.

Através da derivada de $q(t)$, que sabemos que é a corrente, podemos determinar a corrente de carregamento do capacitor. Com efeito,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} = -\mathcal{E}C \left(-\frac{1}{RC} e^{-t/RC} \right) \\ &= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para $t = 0$, o valor inicial da corrente é \mathcal{E}/R e quando $t \rightarrow +\infty$, o valor da corrente tende a zero. Isso nos leva a concluir que um capacitor em seu processo de carregamento comporta-se inicialmente como um fio comum e após um longo período de tempo, comporta-se como um fio interrompido.

Observe que em (4.24), podemos determinar a diferença de potencial do capacitor em seu processo de carregamento. De fato,

$$q(t) = \mathcal{E}C (1 - e^{-t/RC}) \implies \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC})$$

mas,

$$V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

então,

$$V(t) = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}) \quad (4.26)$$

Note que o comportamento quando $t \rightarrow +\infty$, a diferença de potencial do capacitor tende para \mathcal{E} que é o seu valor final, e em seu valor inicial, ou seja, $t = 0$, a diferença de potencial é nula, isto é, o capacitor está descarregado em sua totalidade.

É possível descarregar o capacitor. Observe novamente [Figura 11](#). Se deslocarmos a chave S para a posição b , a força eletromotriz \mathcal{E} não estará no circuito e o capacitor será descarregado por meio da resistência R . Como \mathcal{E} não faz mais parte do circuito, logo $\mathcal{E} = 0$ ³, então nossa equação diferencial (4.22) será

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0 \quad (4.27)$$

sendo seu processo de resolução análoga à EDO (4.22) cuja solução é dada por

$$q(t) = K e^{-t/RC} \quad (4.28)$$

Para um tempo suficientemente grande, a carga do capacitor tende a zero.

Aqui também podemos determinar a corrente de descarga do capacitor. Com efeito,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{K}{RC} e^{-t/RC} \quad (4.29)$$

tendo, assim, um decaimento exponencial e para $t \rightarrow +\infty$, a corrente no capacitor tende a zero.

Observe o termo RC . Esse produto é chamado de *constante de tempo capacitiva* e é representada pela letra grega “tau” (τ), assim

$$\tau = RC$$

e como o próprio o nome diz possui dimensão temporal que representa o tempo necessário para que o capacitor atinja a carga ou a tensão um valor equivalente a 63% do seu valor máximo que pode ser verificado quando $t = \tau$ na equação (4.24).

De acordo com as etapas para obtenção de um modelo descritas no [Capítulo 3](#), primeiramente, obtemos os dados do circuito, como a força eletromotriz \mathcal{E} , a resistência R e a capacitância C . Esta etapa é chamada de *experimentação*. Com os dados levantados, aplicamos, como hipótese, a regra das malhas no circuito para ser testada no modelo, sendo esta etapa chamada de *abstração*.

Aplicada a regra das malhas, usamos a linguagem matemática para formular nosso modelo por meio de uma equação diferencial a partir dos dados levantados, por exemplo, sabendo que $i = \frac{dq}{dt}$. Chamamos esta etapa de *formulação do modelo*. Tendo o modelo formulado, passamos a resolvê-lo para determinar a função solução que determina a carga

³ Quando $\mathcal{E} = 0$ a corrente no resistor cai para zero, mas não de forma instantânea. O decaimento da corrente pode ser calculada com essa conjectura.

de carregamento do capacitor em função do tempo que é a etapa de *resolução*. A aplicação do circuito RC encontra-se na seção [Seção 4.4](#).

Na próxima subseção, introduziremos os conceitos de *indutores* e *indutância* para assim modelar matematicamente os circuitos elétricos do tipo RL (resistência - indutor).

4.2.4 Indutores e indutância

Com as propriedades de um capacitor, podemos produzir um campo elétrico como, já citado, o capacitor cuja parte central são placas paralelas. Para produzir um campo magnético, podemos utilizar um indutor, sendo um dos tipos mais simples o *solenóide*⁴.

Suponha um solenóide com um número de espiras N sendo utilizado como indutor conduzindo uma corrente elétrica i que produz um fluxo magnético Φ na região central do indutor. Define-se *indutância* do indutor como

$$L = \frac{N\Phi}{i} \quad (4.30)$$

em que o produto $N\Phi$ é chamado de *enlaçamento de fluxo magnético*. E, portanto, a indutância mede o enlaçamento desse fluxo no indutor por unidade de corrente sendo sua unidade no SI $T \cdot m^2/A$, isto é, tesla-metro quadrado por ampère que denominamos de *henry* (H).

De acordo com a Lei de Faraday⁵, surge no indutor uma força eletromotriz \mathcal{E}_L induzida se a corrente que o atravessa varia, tendo como consequência a variação, nas espiras, do fluxo magnético Φ .

Auto-indução é o nome que recebe esse processo e a força eletromotriz \mathcal{E}_L é denominada *força eletromotriz autoinduzida* obedecendo, assim, a Lei de Faraday. Da equação (4.30), temos que

$$N\Phi = Li \quad (4.31)$$

e da Lei de Faraday segue que

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi)}{dt} \quad (4.32)$$

Aplicando a derivada em relação a t na equação (4.31), temos

$$\frac{d(N\Phi)}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

⁴ Solenóide é uma bobina helicoidal formada por espiras circulares próximas que, ao passar uma corrente elétrica i , forma um campo magnético.

⁵ Essa lei determina que o módulo da força \mathcal{E} eletromotriz induzida por meio de uma bobina com N espiras é igual à taxa de variação instantânea di fluxo magnético Φ que passa pela espira.

e substituindo em (4.32) segue que

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (4.33)$$

que é a definição de força eletromotriz auto-induzida. O objeto por último definido é importante para o estudo dos circuitos RL, pois a corrente que varia nesse tipo de circuito faz com que exista, no indutor, uma força eletromotriz auto-induzida \mathcal{E} . Com esses conceitos presentes, passaremos a apresentar, na seguinte subseção, o circuito do tipo RL (resistência - indutância).

4.2.5 Circuito RL

Como nos circuitos RC, a corrente apresenta um comportamento semelhante quando o circuito contém uma força eletromotriz \mathcal{E} , um indutor L e uma resistência R . Pelo fato de o circuito agora possuir um indutor, então nele aparecerá uma força eletromotriz autoinduzida \mathcal{E}_L opondo-se ao aumento da corrente de acordo com a Lei de Lenz⁶.

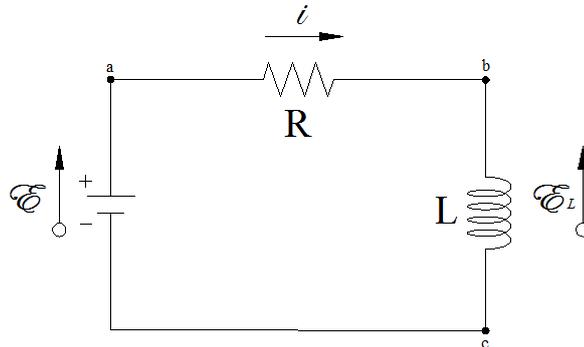


Figura 12 – Circuito RL.

Observe, na Figura 12, que agora temos duas forças eletromotrizes, sendo a da fonte, cujo valor de \mathcal{E} é constante e \mathcal{E}_L , no indutor, é variável com o tempo produzida pela autoindução.

No circuito representado pela Figura 12, aplicaremos a regra das malhas no sentido horário, ou seja, o sentido da corrente. Do ponto a para o ponto b , o potencial elétrico varia de $-iR$. Com a variação da corrente i , significa a existência da força eletromotriz autoinduzida \mathcal{E}_L ($= L \frac{di}{dt}$). Pela Lei de Lenz, \mathcal{E}_L opõe-se ao aumento da corrente que é para baixo, então do ponto b para o ponto c , o potencial varia de $-L \frac{di}{dt}$. E, finalmente, do ponto c para o ponto a , o potencial varia de $+\mathcal{E}$ que é a força eletromotriz da fonte, então,

⁶ Essa lei, que determina o sentido da corrente induzida em uma espira, afirma que “a corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o campo magnético produzido pela corrente se opõe ao campo magnético que induz a corrente” (HALLIDAY; WALKER; RESNICK, 2010b, p. 267).

pela regra das malhas, segue que

$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0 \implies L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E} \quad (4.34)$$

e, colocando na forma padrão, temos

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (4.35)$$

seguindo abaixo a demonstração da solução que é uma função $i(t)$. Determinando o fator integrante $\mu(t)$, temos

$$\mu(t) = e^{\int R/L dt} = e^{(R/L)t}$$

Multiplicando a equação (4.35) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{(R/L)t} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} e^{(R/L)t} i = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{(R/L)t}$$

O primeiro membro da equação acima é a derivada do produto da função $g(t) = e^{(R/L)t} \cdot i$, em que i é uma função que depende da variável temporal t , daí

$$\frac{d}{dt} (e^{(R/L)t} \cdot i) = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{(R/L)t}$$

Integrando ambos os membros da equação diferenciando t , temos

$$\int \frac{d}{dt} (e^{(R/L)t} \cdot i) dt = \int \frac{\mathcal{E}}{L} e^{(R/L)t} dt$$

$$e^{(R/L)t} \cdot i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{(R/L)t} + K$$

e isolando a função i , temos

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + K e^{-(R/L)t} \quad (4.36)$$

Sendo a condição inicial $t = 0$ e $i(t) = 0$, podemos encontrar o valor da constante K . De fato,

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} + K \implies K = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

e substituindo o valor de K na equação (4.36), obtemos uma solução particular tal que

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (4.37)$$

O termo R/L é chamado de *constante de tempo indutiva* e é representado pelo símbolo τ_L (letra grega “tau” com índice L) e suas características são análogas a constante de tempo capacitiva dos circuitos RC .

Considere a equação (4.34). As manipulações algébricas que faremos terão como consequência a análise da energia armazenada em um campo magnético, principalmente em forma de trabalho, e nas oscilações nos circuitos LC e RLC . Multiplicando a equação (4.34) por i , temos

$$Li \frac{di}{dt} + i^2 R = \mathcal{E} i \quad (4.38)$$

Sabemos que $i = dq/dt$ o que implica $\mathcal{E}i = \mathcal{E} dq/dt$ que representa a taxa de variação instantânea de fornecimento de energia ao circuito pela fonte. A fonte, desse modo, realiza trabalho quando a quantidade de carga dq passa por ela num intervalo de tempo dt .

No resistor, a energia fornecida ao circuito é dissipada como energia térmica e é representada pela termo $i^2 R$ em (4.38). Porém, a energia que não é dissipada no resistor é armazenada no campo magnético do indutor de acordo com a lei de conservação de energia. Assim, o termo $Li di/dt$ representa a energia potencial magnética U_L armazenada no campo magnético em função do tempo, ou seja, a taxa dU_L/dt . Então,

$$\frac{dU_L}{dt} = Li \frac{di}{dt} \implies dU_L = Li di$$

e integrando ambos os membros, temos que

$$\int_0^{U_L} dU_L = \int_0^i Li di \implies U_L = \frac{1}{2} Li^2$$

em que U_L é a energia magnética armazenada pelo indutor L que passa uma corrente i e que tem como analogia a energia armazenada por um capacitor de capacitância C que passa uma quantidade de carga q , ou seja,

$$U_C = \frac{1}{2C} q^2$$

Com esses dados em mãos, apresentaremos os circuitos LC e RLC comparando suas oscilações com as da vibração livre não-amortecida e amortecida, respectivamente.

Na etapa *experimentação*, obtivemos os dados deste circuito, como a força eletromotriz \mathcal{E} , o indutor L e a resistência R . Porém, para os circuitos RL , aparecerá uma força eletromotriz autoinduzida \mathcal{E}_L que está de acordo com a Lei de Lenz. Tendo esses dados, aplicamos, como hipótese, a regra das malhas no circuito RL para testarmos no modelo, etapa esta denominada de *abstração*.

E como, pela Lei de Lenz $\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}$, então a *formulação do modelo* por meio de uma equação diferencial foi direta, sem a necessidade de buscar outras informações dos dados obtidos inicialmente. É importante ressaltar que, para o circuito RL , estamos interessados em encontrar uma função que determina a variação da corrente elétrica i em

função do tempo, diferentemente do circuito RC que estamos interessados em encontrar a função da carga de carregamento do capacitor.

A próxima etapa foi a *resolução* do modelo por meio das técnicas de resoluções de equações diferenciais ordinárias e sendo a *aplicação* apresentada na [Seção 4.4](#).

Apresentamos, nessa subseção, o modelo matemático que descreve a corrente elétrica i em função do tempo para os circuitos elétricos do tipo RL . A seguir, apresentaremos o modelo matemático que descreve as oscilações da carga elétrica q nos circuitos do tipo LC e aproveitaremos a oportunidade para comparar essas oscilações com o modelo matemático presente nas vibrações livre não-amortecida apresentada no [Capítulo 4](#).

4.2.6 Circuito LC

4.2.6.1 Uma comparação com a vibração livre não-amortecida

As oscilações de um circuito LC podem ser comparadas às oscilações do movimento livre não-amortecido apresentada na seção [Seção 4.1](#), uma vez que não há a resistência R no circuito. A figura abaixo mostra uma representação de um circuito LC .

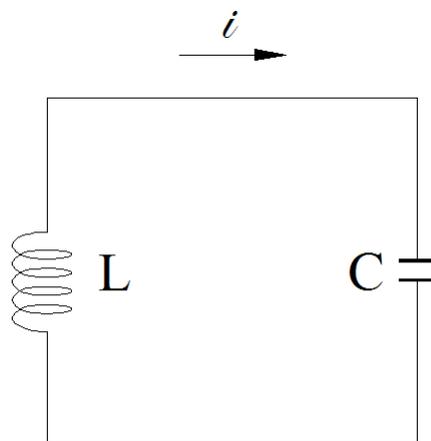


Figura 13 – Circuito LC.

Mostramos que o movimento livre não-amortecido é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

porém, para modelar matematicamente a oscilação do circuito LC , usaremos como recurso

as consequências provenientes da *Lei de Hooke*. Dessa lei, sabemos que

$$F = -kx \implies ma = -kx$$

$$\implies m \frac{dv}{dt} = -kx$$

$$\implies m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\implies mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\implies \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}_U \right) = 0$$

O termo entre parênteses (U) é a soma das energias cinética e potencial do corpo e da mola, respectivamente, ou seja,

$$U = U_K + U_M$$

mas como não há atrito, a energia total U não varia ao passar do tempo, logo

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

que é a relação a que chegamos.

De modo análogo, a energia total, qualquer que seja o instante de tempo, em um circuito LC é

$$U = U_L + U_C \implies U = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}q^2$$

e como afirmamos que não há resistência no circuito, então não há transformação de energia em energia térmica, ou seja, a energia total é constante e

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

daí,

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

mas,

$$i = \frac{dq}{dt} \implies \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

então,

$$Li \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} i = 0 \implies L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

que em sua forma padrão é dada por

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (4.39)$$

que é a equação diferencial que modela as oscilações em relação de um circuito LC .

Ao compararmos com a equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

a indutância L corresponde à massa m e $1/C$ corresponde à constante elástica k da mola.

Vimos no estudo do movimento livre não-amortecido que a frequência circular é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e fazendo as substituições de acordo com oscilação do circuito LC , temos que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

logo, a solução geral da equação (4.39) de acordo com o Teorema 2.4.2 é dada por

$$q(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) + B \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (4.40)$$

que é a carga em função do tempo.

Para determinar a corrente deste circuito, basta derivar q em relação a t , ou seja,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left[B \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) - A \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) \right] \\ &= \omega_n [B \cos(\omega_n t) - A \operatorname{sen}(\omega_n t)] \end{aligned}$$

Em se tratando da comparação, podemos resumi-la por meio da seguinte tabela:

Tabela 1 – Comparação entre elementos do movimento livre não-amortecido e do circuito LC .

Movimento livre não-amortecido	Circuito LC
k (constante elástica da mola)	$1/C$ (inverso da capacitância)
m (massa do corpo)	L (indutância)

O inverso da capacitância $1/C$ também é conhecido como *elastância* que é análogo à propriedade mecânica da constante elástica da mola k .

Para este tipo de circuito, obtivemos informações a partir dos dados do modelo matemático do circuito RC ao multiplicarmos a equação (4.34) por i obtendo a equação (4.38). A partir daí, analisamos cada termo da equação sendo eles $\mathcal{E}i = \frac{dq}{dt}$, i^2R e $Li \frac{di}{dt}$. Este último representa a taxa $\frac{dU_L}{dt}$ (energia potencial magnética) donde obtemos uma nova informação: $U_L = \frac{1}{2} Li^2$; energia magnética armazenada pelo indutor. Analogamente, a energia armazenada pelo capacitor é $U_C = \frac{1}{2C} q^2$ que é uma outra nova informação. Disso, descrevemos as etapas de *experimentação* e *abstração*.

Para a *formulação do modelo*, iniciamos, primeiramente, com uma comparação com o movimento livre não-amortecido e as consequências da Lei de Hooke em termos de energia total do sistema e que, de modo análogo, podemos estudar a energia total no circuito LC e, tendo essas informações, transformamo-as em linguagem matemática por meio de uma equação diferencial ordinária.

Para a *resolução*, utilizamos o Teorema 2.4.2 demonstrado para apresentar a solução geral da equação que é a oscilação da carga em função do tempo. A *aplicação* está apresentada na Seção 4.4.

Observa-se a analogia entre o modelo matemático para descrever as oscilações da carga elétrica e do modelo matemático que descreve as oscilações de um sistema massa-mola. É notável essa comparação, pois para sistemas em áreas distintas podemos usar a mesma linguagem matemática adequando as variáveis para cada tipo de fenômeno.

Essa analogia também será feita na próxima seção para os circuitos do tipo RLC . A comparação será feita com o modelo matemática que descreve as oscilações nas vibrações livre amortecidas.

4.2.7 Circuito RLC

4.2.7.1 Uma comparação com a vibração livre amortecida

É chamado RLC um circuito que contém uma resistência R , uma indutância L e uma capacitância C . Diferentemente do circuito LC , a energia total U não é mais constante devido à existência da resistência R e diminui ao passar do tempo. Com isso, parte da energia será dissipada como energia térmica na resistência R . A perda de energia fará com

que as oscilações diminuem de amplitude de forma contínua e isso caracteriza o sistema com amortecimento. Abaixo segue uma figura que representa um circuito RLC .

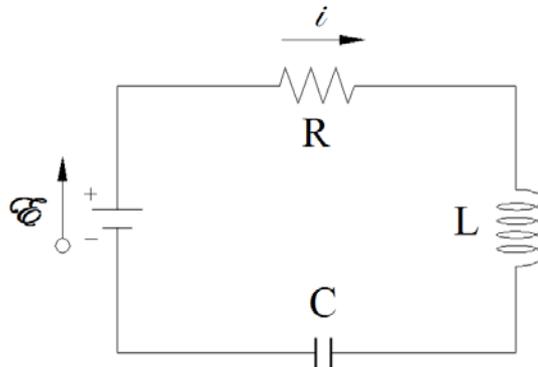


Figura 14 – Circuito RLC.

A potência elétrica em um circuito dá-se à existência da diferença de potencial, corrente e resistência. Em se tratando de energia, a potência está relacionada com a velocidade com que a energia é utilizada, sendo que esta é a capacidade de realizar trabalho. O secador de cabelo é um exemplo de conversão da energia elétrica em energia térmica e a potência associada nessa conversão é a taxa de variação instantânea dU/dt . Nosso interesse é analisar a queda da energia total e essa taxa é dada por

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

mas, sabemos que

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

então

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -i^2 R$$

Sendo $i = dq/dt$ e $di/dt = d^2q/dt^2$ e dividindo ambos os membros por i , segue que

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (4.41)$$

que é a equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes que modelam as oscilações amortecidas em um circuito RLC . Para expor sua forma padrão, basta dividir ambos os membros da equação por L . Logo,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (4.42)$$

Para a solução geral da equação diferencial, determinemos as raízes da equação característica. De fato,

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ e $\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$.

Uma expressão mais compacta é $\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ e $\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ em que

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{e} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

fator de amortecimento e frequência de ressonância (rad/s), respectivamente.

Neste caso, também faremos uma análise da solução por intermédio do fator $\sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ originando as três categorias de amortecimento: *superamortecido*, *criticamente amortecido* e *subamortecido*.

1. *Superamortecido*: quando $\alpha^2 > \omega_n^2$. Esse fato gera duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 . Logo, a solução geral da equação diferencial (4.42) é dada por

$$q(t) = A e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2})t} + B e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2})t}$$

2. *Criticamente amortecido*: quando $\alpha^2 = \omega_n^2$. Neste caso, a equação característica gera duas raízes reais iguais. Logo, a solução geral da equação (4.42) é dada por

$$q(t) = e^{-\alpha t} (A + Bt)$$

3. *Subamortecido*: quando $\alpha^2 < \omega_n^2$ a equação característica fornece duas raízes complexas, uma conjugada da outra. O termo $\alpha^2 - \omega_n^2$ é negativo, então

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = \sqrt{-(\omega_n^2 - \alpha^2)} = i\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$$

daí,

$$\lambda_1 = -\alpha + i\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\alpha - i\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$$

Logo, a solução geral da equação (4.42) é dada por

$$q(t) = e^{-\alpha t} \left[A \cos \left(\left(\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \right) t \right) + B \sin \left(\left(\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \right) t \right) \right]$$

e sendo $\gamma = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$, então

$$q(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)]$$

Em se tratando da comparação, podemos resumi-la por meio da seguinte tabela:

Tabela 2 – Comparação entre elementos do movimento livre amortecido e do circuito RLC .

Movimento livre amortecido	Circuito RLC
k (constante elástica da mola)	$1/C$ (inverso da capacitância)
m (massa do corpo)	L (indutância)
$c = 2m\omega_n\zeta$ (coeficiente de amortecimento viscoso)	R (Resistência)

No caso do circuito RLC , o inverso da capacitância $1/C$ é, também, a *elastância* que tem propriedade análoga da constante elástica da mola k .

Da mesma forma que o circuito LC , obtivemos as informações iniciais da energia potencial descrita a partir da equação (4.38). A hipótese inicial é analisar a queda da energia total dada por $\frac{dU}{dt} = -i^2R$. Outra informação que levantamos foi que $\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$. Aqui temos as etapas *experimentação* e *abstração*.

Com as duas informações acima, adentramos na *formulação do modelo* matemático por meio da linguagem matemática (EDO). Daí, temos o modelo que descreve as oscilações amortecidas de um circuito RLC . A etapa da *resolução* acompanha as etapas do Teorema 2.4.1 e subdivide-se nas três categorias de amortecimento: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido. A *aplicação* do modelo é apresentada na Seção 4.4.

Nesta seção, apresentamos modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias aplicadas a alguns tipos circuitos elétricos nos quais buscamos informações iniciais do sistema até chegar à formulação do modelo e sua solução. Na próxima seção, apresentaremos brevemente o estudo das *ressonâncias* que está presente tanto na Engenharia Mecânica quanto na Engenharia Elétrica. Para este trabalho, iremos trazer o exemplo da ressonância nas pontes que podem entrar em colapso por causa deste fenômeno. Tal estudo é muito importante e gera grande preocupações para engenheiros e físicos.

4.3 Ressonância: uma preocupação para grandes oscilações em sistemas sem amortecimento

Grandes oscilações em um sistema constituído por um peso e uma mola, provavelmente ultrapassaria o limite de sua elasticidade.

A problemática consiste em situações em que o movimento forçado está livre de amortecimento e com uma força periódica externa agindo no sistema oscilante, força esta próxima ou igual à frequência das vibrações presentes no sistema que podem lhe causar sérios danos e até mesma graves tragédias. Esse fenômeno é conhecido como *ressonância*.

Quando abordamos as vibrações livres não-amortecidas, notamos que a equação diferencial que descreve o movimento é homogênea, ou seja, livre de uma atuação de forças externas, nesse caso, forças oscilatórias.

Suponha um sistema descrito por meio das seguintes condições: $x''(t) + \omega_n^2 x(t) = \gamma_0 \text{sen}(\omega_n t)$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$, em que γ_0 é uma constante e $g(t) = \gamma_0 \text{sen}(\omega_n t)$ é a função que descreve o movimento oscilatório por consequência da força externa.

Por meio do *método dos coeficientes a determinar*⁷, solucionaremos o problema. Primeiramente, determinaremos a solução da equação homogênea associada (ou complementar) $x'' + \omega_n^2 = 0$, que é dada por

$$x_c(t) = c_1 \cos(\omega_n t) + c_2 \text{sen}(\omega_n t)$$

Para uma solução particular, vamos supor que a mesma é dada por

$$x_p(t) = At \cos(\omega_n t) + Bt \text{sen}(\omega_n t)$$

sendo

$$x_p'(t) = A [\cos(\omega_n t) - t\omega_n \text{sen}(\omega_n t)] + [\text{sen}(\omega_n t) + t\omega_n \cos(\omega_n t)]$$

$$x_p''(t) = -2A\omega_n \text{sen}(\omega_n t) + 2B\omega_n \cos(\omega_n t) - A\omega_n^2 t \cos(\omega_n t) - B\omega_n^2 t \text{sen}(\omega_n t)$$

Substituindo em nossa equação diferencial a fim de encontrarmos os valores de A e B , temos, após realizados os cálculos

$$-2A\omega_n \text{sen}(\omega_n t) + 2B\omega_n \cos(\omega_n t) = \gamma_0 \text{sen}(\omega_n t)$$

em que $A = -\frac{\gamma_0}{2\omega_n}$ e $B = 0$. Portanto, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t) + x_p(t) \\ &= c_1 \cos(\omega_n t) + c_2 \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\gamma_0}{2\omega_n} t \cos(\omega_n t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Das condições iniciais fornecidas pelo PVI, mostra-se que os valores das constantes da solução complementar são $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{\gamma_0}{2\omega_n}$. Logo, a solução do problema de valor inicial é dada por

⁷ Ver Boyce e DiPrima (2006), capítulo 3, seção 3.6.

$$x(t) = \frac{\gamma_0}{2\omega_n} [\text{sen}(\omega_n t) + t \cos(\omega_n t)] \quad (4.44)$$

Uma representação gráfica é fornecida pela figura abaixo.

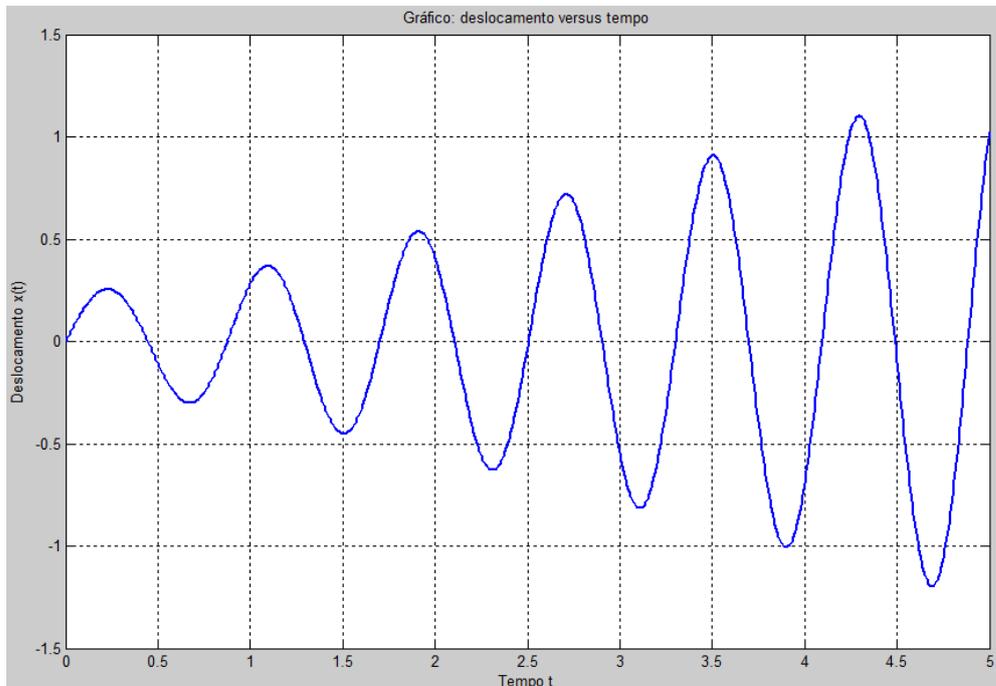


Figura 15 – Gráfico do deslocamento em função do tempo - ressonância.

Graficamente, podemos perceber que, à medida que o tempo aumenta, a oscilação do sistema aumenta. Dependendo do projeto, isso pode ser um risco muito grande, pois grandes oscilações após um período de tempo pode ocasionar danos sérios em todo o sistema.

Duas situações que não deveriam acontecer são abordadas por [Zill e Cullen \(2001\)](#). A primeira foram dois acidentes aviários que ocorreram entre o final do ano de 1959 e começo de 1960 no Texas e Indiana, respectivamente. Segundo o relato, em ambos uma asa separou-se do avião.

Após a perícia técnica, verificaram que, ao ultrapassar a velocidade de 640 km/h, uma hélice e um motor iniciaram uma trepidação causando uma força externa que não poderia ser absorvida pela caixa do motor e logo foi transferida para a asa que, por condições necessárias de projeto já possui oscilação e, ao passar um período de tempo, essa força coincidiu com a frequência máxima de oscilação da asa causando a ressonância, que não deveria ocorrer no sistema, o que foi suficiente para a quebra da asa.

O segundo relato foi o conhecido colapso da ponte Tacoma Narrows, no estado de Washington, gerado por fortes ventos. Há controvérsias quanto à causa que levou a ponte

cair, porém, segundo Zill e Cullen (2001), durante meio século acreditava-se que a causa da queda era a ressonância. Os ventos de aproximadamente 70 km/h geraram movimentos de torção e a ponte veio abaixo.

Por exemplo, a equação $x''(t) + \omega_n^2 x(t) = \gamma_0 \operatorname{sen}(\omega_n t)$ do nosso exemplo é linear, porém pesquisas posteriores apontam que efeitos não lineares foram fatores principais que causaram as oscilações na estrutura da ponte Tacoma Narrows.

Esse caso desencadeou, posteriormente, em uma série de cuidados em projetos de estruturas grandes, por exemplo, no caso das pontes. Apesar de que a ressonância não é considerada a causa principal do colapso na ponte do estado de Washington, os Engenheiros Civis procuram assegurar que as oscilações não gerem vibrações inaceitáveis que venham a formar o fenômeno da ressonância.

4.4 Aplicações

Exemplo 4.4.1 (*Circuito RC*). Considere um circuito RC com resistência $R = 6M\Omega$ e um capacitor com capacitância $C = 2,5 \mu F$ ligados em série juntamente com uma bateria com força eletromotriz $\mathcal{E} = 12V$. Por meio desses dados, podemos determinar a carga em função do tempo de carregamento do capacitor. De fato, pela equação (4.22), temos

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{\mathcal{E}}{R} \implies \frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 2 \cdot 10^{-6}$$

e considerando as condições iniciais $t = 0$ e $q(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 2 \cdot 10^{-6} \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

cuja solução, de acordo com a equação (4.24), é dada por

$$q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-t/RC}\right) \implies q(t) = 3 \cdot 10^{-5} \left(1 - e^{-t/15}\right)$$

E, portanto, a função q é a carga de carregamento do capacitor, sendo a constante de tempo $\tau = RC = 6 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} = 15$ s.

Graficamente, temos a função q representada da seguinte forma:

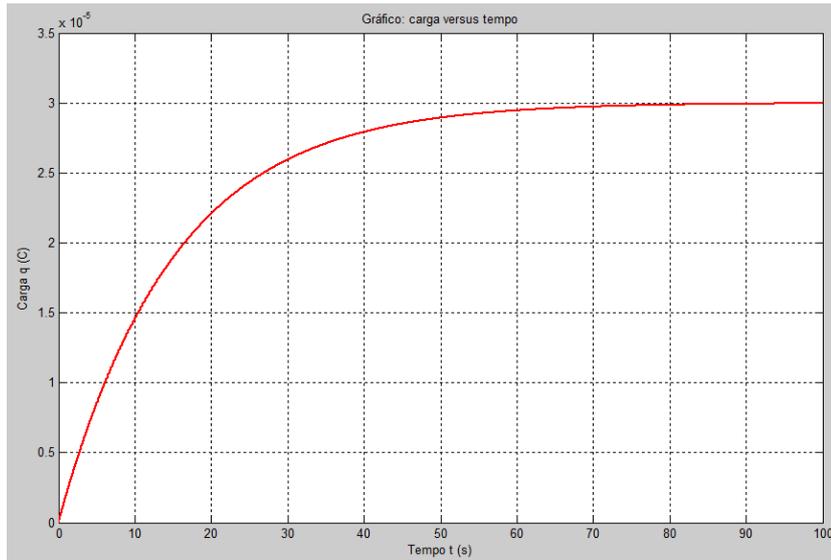


Figura 16 – Gráfico da carga de carregamento do capacitor.

Quando $t \rightarrow \infty$, obtemos o valor final da carga no capacitor e esse valor é $q = 30 \mu C$. É possível notar esse fato graficamente. A função exponencial é assintótica, sendo a assíntota a reta $q = 3 \cdot 10^{-5}$.

Podemos obter a corrente i de carregamento do capacitor. Da equação (4.25), que é a taxa de variação instantânea da carga no capacitor, temos que

$$i(t) = 2 \cdot 10^{-6} e^{-t/15}$$

cuja representação gráfica é dada por:

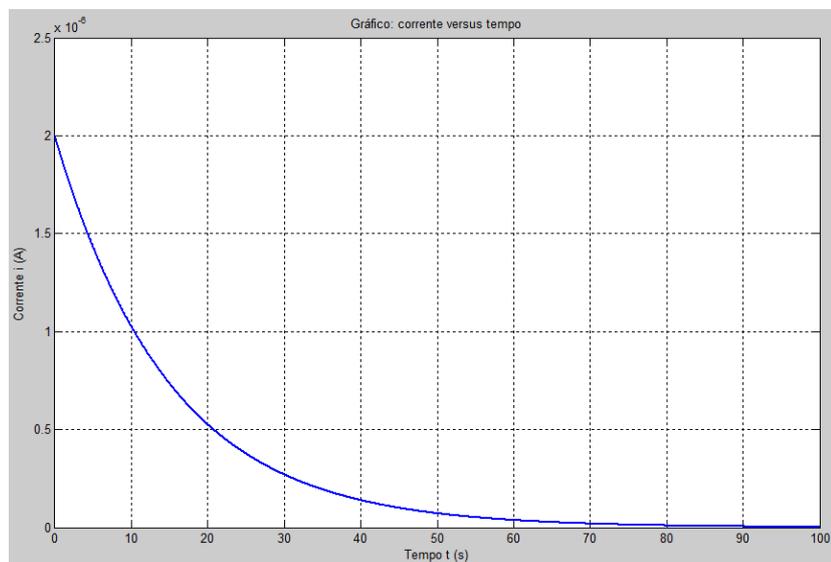


Figura 17 – Gráfico da corrente de carregamento do capacitor.

Observe que para $t = 0$, a corrente inicial é $i = 2 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ e, ao aumentar o tempo, a corrente elétrica diminui exponencialmente sendo que, para um tempo suficientemente grande, a mesma tende a zerar.

É possível determinar a diferença de potencial entre as placas do capacitor. Por meio da equação (4.26), podemos fazer tal análise. A diferença de potencial entre as placas é dada por

$$V(t) = 12 \left(1 - e^{-t/15}\right)$$

Note que para $t = 0$, $V = 0$, instante em que o capacitor está totalmente descarregado e quando $t \rightarrow \infty$, a diferença de potencial tende para \mathcal{E} e a carga do capacitor tende para seu valor final. O gráfico abaixo representa o comportamento da diferença de potencial V .

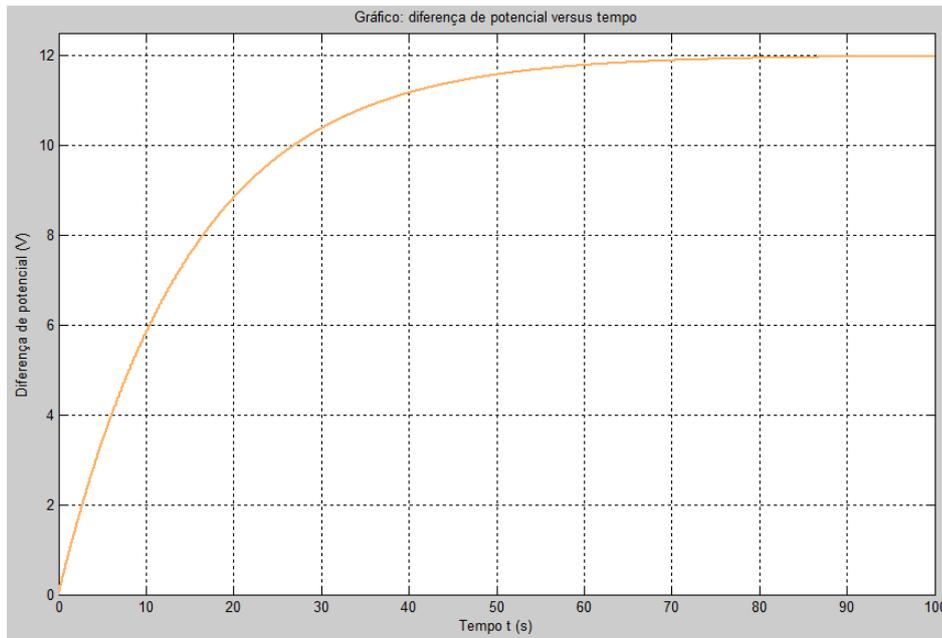


Figura 18 – Gráfico da diferença de potencial entre as placas do capacitor.

Note que a diferença de potencial no capacitor, à medida que o tempo aumenta, tende para $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ que é o seu valor e esse crescimento é dado exponencialmente conforme a função V .

Suponhamos, agora, “retirar” a força eletromotriz \mathcal{E} do circuito, isto significa ter $\mathcal{E} = 0$. Com esse dado considerado, estaremos descarregando o capacitor. Daí, nossa nova equação diferencial é dada por

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 0$$

A equação (4.26) nos fornece a solução geral, porém vamos considerar como

condições iniciais $t = 0$ e $q(0) = q_0$, logo a solução do PVI é dada por

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} \implies q(t) = q_0 e^{-t/15}$$

onde $q_0 = CV_0$. Por exemplo, considerando $V_0 = 4 \text{ V}$ e a capacitância $C = 2,5 \mu\text{F}$ do exemplo considerado, então a descarga do capacitor é dada por

$$q(t) = 10 e^{-t/15}$$

e sabendo que a corrente é a taxa de variação instantânea da carga, determinamos também a corrente de descarga, ou seja,

$$i(t) = -\frac{2}{3} e^{-t/15}$$

Em ambos os casos, temos um termo exponencial decrescente que, de fato, condiz com a nossa conjectura inicial de descarga no capacitor. É plausível pensar que para um período de tempo suficientemente longo, o capacitor descarregará por completo.

O gráfico abaixo mostra a descarga do capacitor em função do tempo.

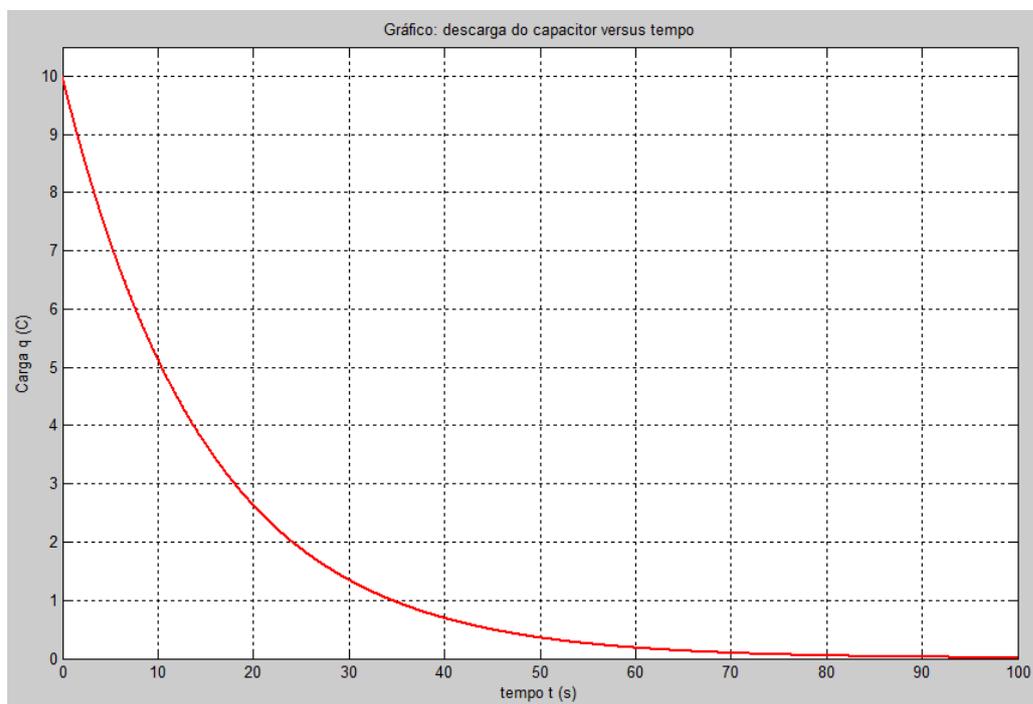


Figura 19 – Gráfico da descarga do capacitor em função do tempo.

Para $t = 0$, a carga no capacitor é $q = 10 \text{ C}$ e, como a função é exponencial decrescente, à medida que o tempo aumenta, a carga no capacitor diminui e tende a zero para t suficientemente grande.

O gráfico a seguir mostra a corrente i de descarga do capacitor em função do tempo. Note que, para a corrente elétrica, i aumentará em função do tempo. Basta observar que a derivada de i em relação a t é sempre positiva.

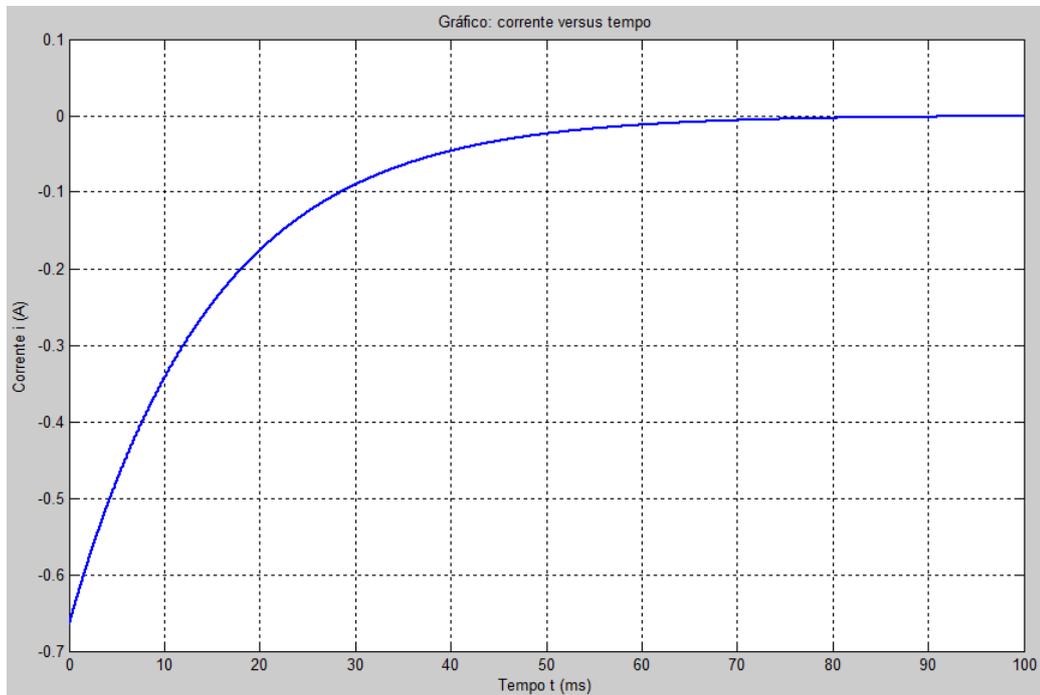


Figura 20 – Gráfico da corrente elétrica de descarga do capacitor em função do tempo.

A análise desse gráfico é análoga em relação a carga q do capacitor. Para $t = 0$, $i = -\frac{2}{3}$ A. O sinal negativo quer nos dizer o sentido contrário da corrente no circuito. E, novamente, para um tempo t suficientemente grande, a corrente elétrica no circuito tende para zero e o capacitor estará totalmente descarregado.

Exemplo 4.4.2 (Circuito RL). Considere um circuito RL com resistência $R = 9,0 \Omega$, indutor com indutância $L = 2,0 \text{ mH}$ e uma fonte com força eletromotriz $\mathcal{E} = 18,0 \text{ V}$. Com esses dados, podemos determinar a corrente elétrica i no instante de tempo t . Pela equação (4.35), temos que

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L} \implies \frac{di}{dt} + 4,5 \cdot 10^3 i = 9 \cdot 10^3$$

e considerando as seguintes condições iniciais $t = 0$ e $i(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + 4,5 \cdot 10^3 i = 9 \cdot 10^3 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

cuja solução, de acordo com a equação (4.37), é dada por

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \implies i(t) = 2 \left(1 - e^{-4,5 \cdot 10^3 t}\right)$$

E, portanto, a função i é a corrente elétrica no circuito, sendo a constante de tempo indutiva $\tau_L = \frac{L}{R} = 0,22 \text{ ms}$.

Graficamente, temos a função i representada da seguinte forma:

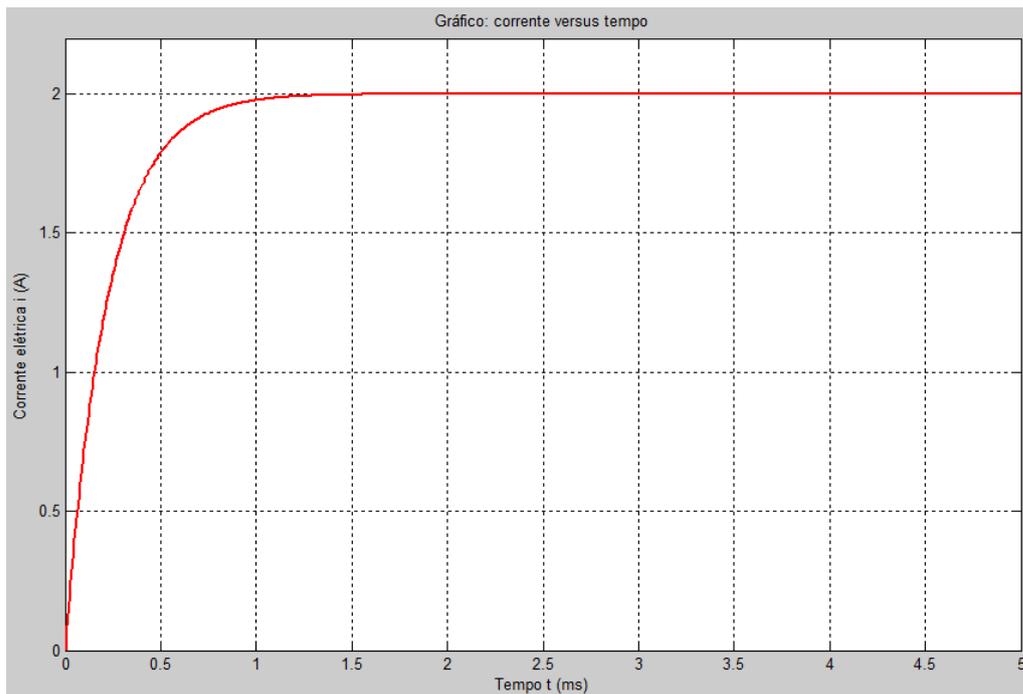


Figura 21 – Gráfico da corrente elétrica no circuito RL .

Observe que quando $t = 0$, ou seja, a chave fechada, a corrente no circuito é nula neste instante. À medida que o tempo aumenta, a corrente no circuito tende para o valor final $i = 2,0 \text{ A}$. A função exponencial é assintótica e a reta horizontal $i = 2,0$ é a assíntota.

Podemos determinar a diferença de potencial no indutor dado que $V_L = L \frac{di}{dt}$ e $L = 2,0 \text{ mH}$ e também a diferença de potencial no resistor sendo que $V_R = iR$ e $R = 9,0 \Omega$. Primeiramente, determinemos no indutor. Com efeito,

$$\begin{aligned} V_L &= (2,0) \cdot \left(9,0 \cdot 10^3 e^{-4,5 \cdot 10^3 t}\right) \\ &= 18 \cdot 10^3 e^{-4,5 \cdot 10^3 t} \end{aligned}$$

e a diferença de potencial no resistor é dada por

$$\begin{aligned} V_R &= 2 \left(1 - e^{-4,5 \cdot 10^3 t}\right) \cdot (9,0) \\ &= 18 \left(1 - e^{-4,5 \cdot 10^3 t}\right) \end{aligned}$$

Segue abaixo a representação gráfica da diferença de potencial no indutor L :

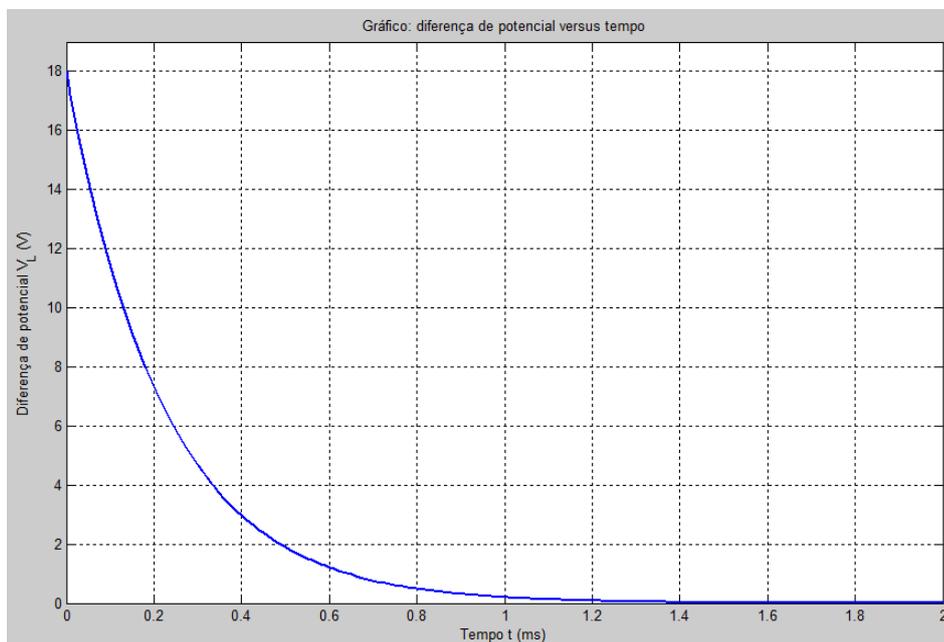


Figura 22 – Gráfico da diferença de potencial no indutor L .

E abaixo segue a representação gráfica da diferença de potencial no resistor R :

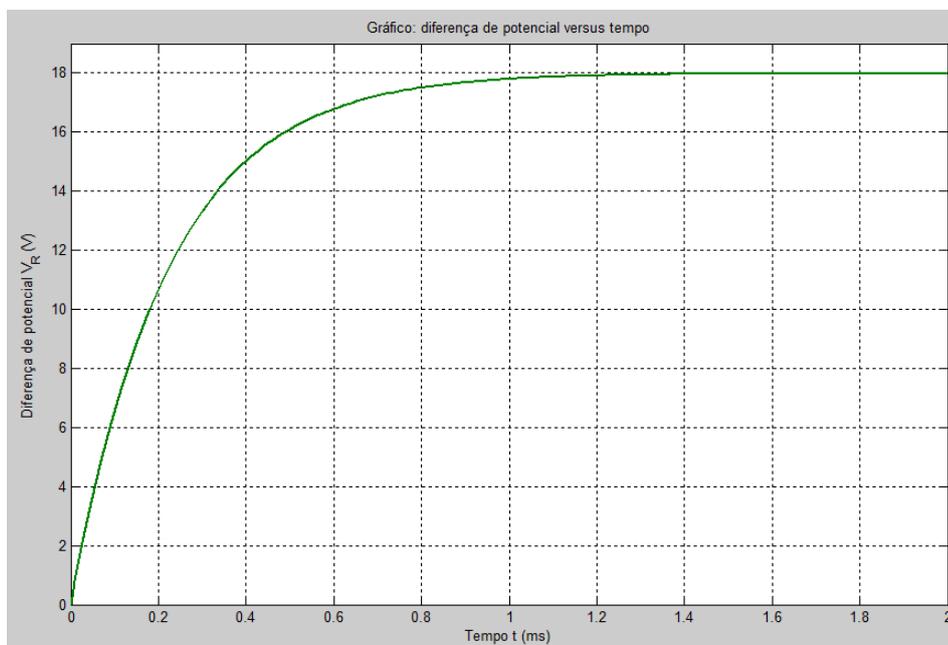


Figura 23 – Gráfico da diferença de potencial no indutor R .

Exemplo 4.4.3 (Circuito LC). Suponha que um capacitor com capacitância $C = 2,0 \mu F$ é carregado por meio de uma fonte com força eletromotriz $\mathcal{E} = 36 V$. Quando a fonte que

carrega o capacitor é desligada, um indutor com indutância $L = 12 \text{ mH}$ é ligado entre os terminais do capacitor. Com esses dados, podemos determinar as oscilações da carga elétrica q no circuito LC . Da equação (4.39) temos que

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \implies \frac{d^2q}{dt^2} + 24 \cdot 10^6 q = 0$$

e considerando as condições iniciais $t = 0$, $q(t) = 30 \mu\text{C}$ e $q'(t) = i(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + 24 \cdot 10^6 q = 0 \\ q(0) = 30 \mu\text{C} \\ q'(0) = i(0) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

Aplicando a *Transformada de Laplace* na equação diferencial, temos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2q}{dt^2} \right\} + 24 \cdot 10^6 \mathcal{L} \{q\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L} \{q\} - sq(0) - i(0) + 24 \cdot 10^6 \mathcal{L} \{q\} = 0$$

$$\mathcal{L} \{q\} (s^2 + 24 \cdot 10^6) = 30 \cdot 10^{-3} s$$

$$\mathcal{L} \{q\} = \frac{30 \cdot 10^{-3} s}{s^2 + (2 \cdot 10^3 \sqrt{6})^2}$$

e fazendo os ajustes necessários, aplicamos a *Transformada inversa de Laplace* obtendo

$$\begin{aligned} q(t) &= 30 \cdot 10^{-3} \cos(2 \cdot 10^3 \sqrt{6} t) \\ &= 0,03 \cos(2 \cdot 10^3 \sqrt{6} t) \end{aligned}$$

que é função que modela as oscilações do circuito elétrico do tipo LC . Comparando com o movimento livre não-amortecido, podemos notar que a carga elétrica q ficará oscilando, por causa da função cosseno presente na solução do PVI, até que uma força externa aja no sistema e pare tal oscilação.

Podemos determinar a corrente i neste circuito. Sabemos que $i = \frac{dq}{dt}$, então

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = -60\sqrt{6} \text{ sen}(2 \cdot 10^3 \sqrt{6} t)$$

Segue abaixo a representação gráfica das oscilações da carga no circuito LC :

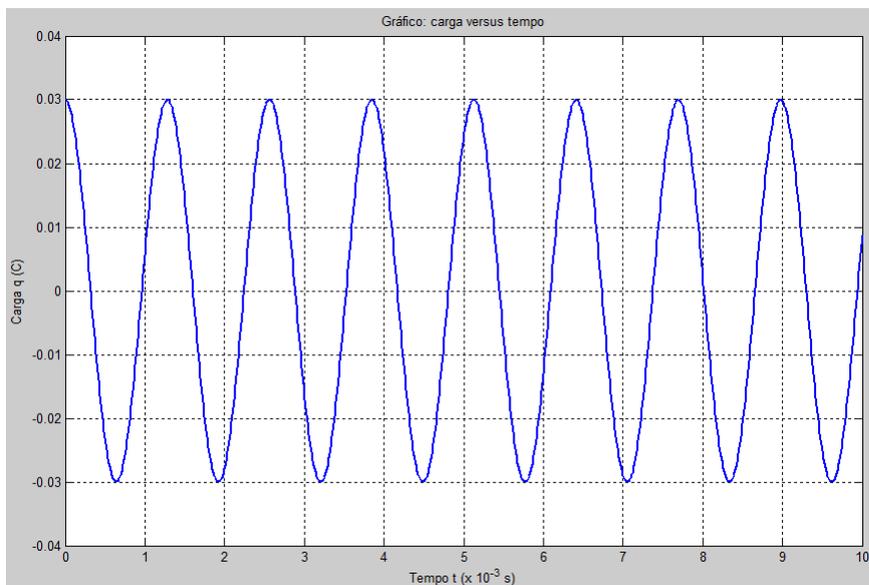


Figura 24 – Gráfico da oscilação da carga no circuito LC .

E abaixo segue a representação gráfica das oscilações da corrente no circuito LC :

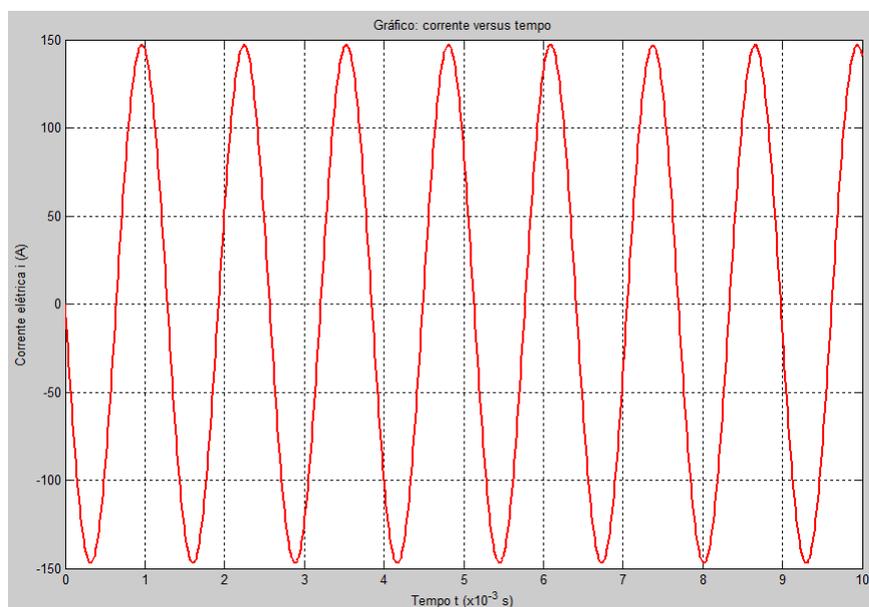


Figura 25 – Gráfico da oscilação da corrente no circuito LC .

Exemplo 4.4.4 (Circuito RLC). Considere um circuito RLC em série com um resistor de resistência $R = 2,0 \Omega$, indutor de indutância $L = 10 \text{ mH}$ e capacitor de capacitância $C = 1,5 \mu\text{F}$. Este tipo de circuito apresenta três categorias de amortecimento e com esses

dados vamos analisar em qual categoria ele encontra-se. Vimos que $\alpha = \frac{R}{L}$ e $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e se $\alpha^2 > \omega_n^2$ é *superamortecido*, se $\alpha^2 = \omega_n^2$ é *criticamente amortecido* e se $\alpha^2 < \omega_n^2$ é *subamortecido*. De fato,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad e \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

logo, $\alpha^2 < \omega_n^2$ e, portanto, a oscilação é *subamortecida*. Considerando as condições iniciais $t = 0$, $q(t) = 30 \mu C$ e $q'(t) = i(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{5} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 0 \\ q(0) = 30 \mu C \\ q'(0) = i(0) = 0 A \end{cases}$$

que tem como solução, de acordo com o [Teorema 2.4.1](#), é dada por

$$q(t) = e^{-0,1t} \left[0,03 \cos \left(\sqrt{\frac{17}{300}} t \right) + 0,003 \sqrt{\frac{300}{17}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{17}{300}} t \right) \right]$$

e abaixo segue a representação gráfica da função q :

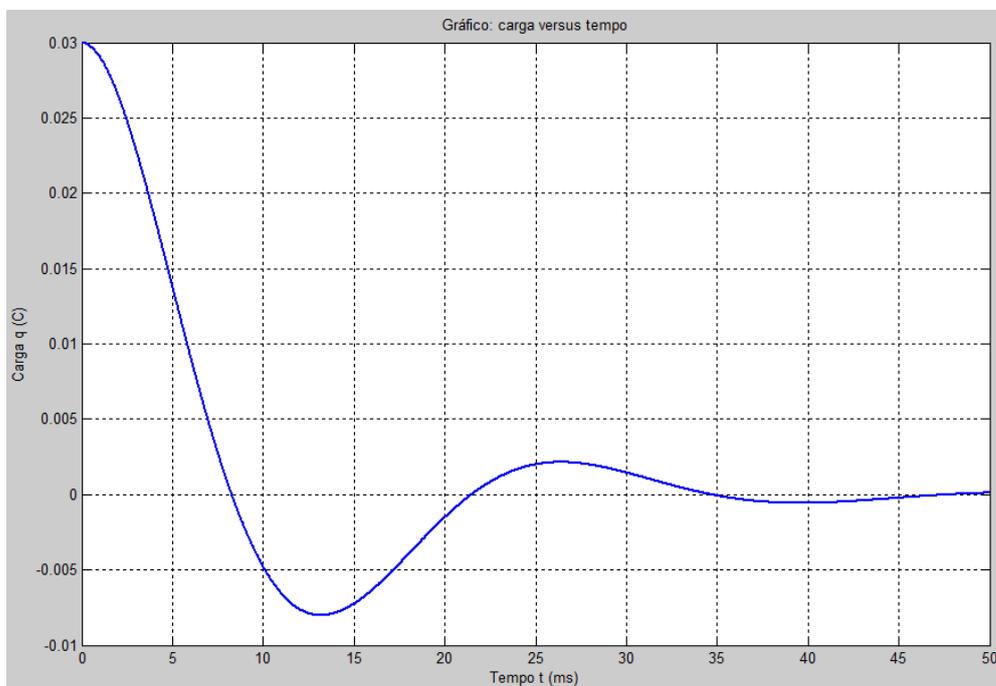


Figura 26 – Gráfico da oscilação subamortecida da carga no circuito RLC .

Em comparação com o movimento livre amortecido, a resistência R do circuito é equivalente ao coeficiente de amortecimento viscoso c . Diferentemente do circuito LC , as

oscilações serão amortecidas até num determinado tempo t e, assim, a carga, conforme mostra o gráfico, se anulará.

Podemos determinar a corrente i deste circuito. Sabemos que $i = \frac{dq}{dt}$, então

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = -e^{-0,1t} \left[\left(0,0003 \sqrt{\frac{300}{17}} + 0,03 \sqrt{\frac{17}{300}} \right) \text{sen} \left(\sqrt{\frac{17}{300}} t \right) \right]$$

que tem como representação gráfica:

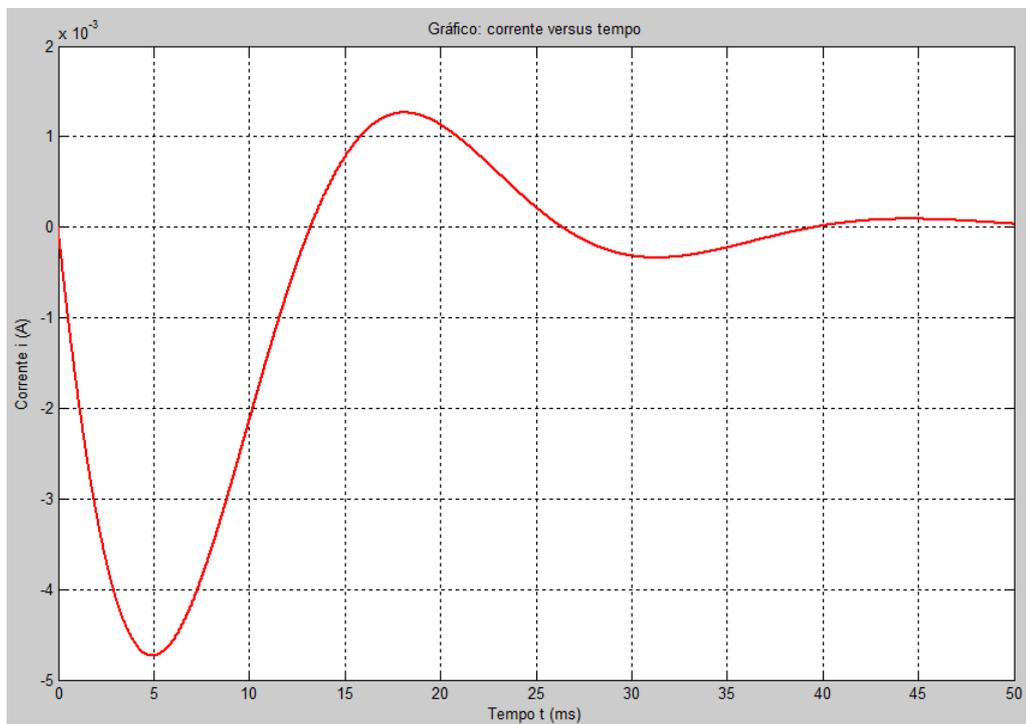


Figura 27 – Gráfico da oscilação subamortecida da corrente no circuito RLC .

e é possível, também, observar o caráter oscilatório da corrente elétrica, uma vez que a oscilação se dá em termos da função senoidal e o amortecimento se dá pelo fator exponencial decrescente contido na função i .

Exemplo 4.4.5 (Circuito RLC). Considere, agora, um circuito RLC em série com resistência $R = 6 \Omega$, indutor com indutância $L = 10 \text{ mH}$ e capacitor com capacitância $C = 1,5 \mu\text{F}$. Sabemos que

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad e \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

logo, $\alpha^2 > \omega_n^2$ e, portanto, a oscilação é *superamortecida*.

Considerando as condições iniciais $t = 0$, $q(t) = 30 \mu C$ e $q'(t) = i(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{3}{5} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 0 \\ q(0) = 30 \mu C \\ q'(0) = i(0) = 0 A \end{cases}$$

Para a solução deste PVI, iremos utilizar a equação (4.15) em que foi aplicada a *Transformada de Laplace* para o movimento superamortecido para a aplicação na Engenharia Mecânica e que é equivalente para esse caso bastando ajustar os termos referentes àquele sistema para com o circuito *RLC*. A equação (4.15) é:

$$x(t) = \left[\frac{x_0 \lambda_1 + x_0 2\zeta \omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_1 t} - \left[\frac{x_0 \lambda_2 + x_0 2\zeta \omega_n + V_0}{2\omega_f} \right] e^{\lambda_2 t}$$

e a equação equivalente para o circuito *RLC* é dada por:

$$q(t) = \left[\frac{q_0 \lambda_1 + q_0 \frac{R}{L} + i_0}{\frac{2}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4\omega_n^2 L^2} - 1}} \right] e^{\lambda_1 t} - \left[\frac{q_0 \lambda_2 + q_0 \frac{R}{L} + i_0}{\frac{2}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4\omega_n^2 L^2} - 1}} \right] e^{\lambda_2 t}$$

sendo $\lambda_1 = \left(-\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \sqrt{\frac{7}{3}} \right)$ e $\lambda_2 = \left(-\frac{3}{10} - \frac{1}{10} \sqrt{\frac{7}{3}} \right)$ as raízes da equação característica dada por:

$$\lambda^2 + \frac{3}{5} \lambda + \frac{1}{15} = 0$$

Substituindo os valores na função q , temos que a solução do PVI é dada por (com valores arredondados):

$$q(t) = 0,0445 e^{-0,1473 t} - 0,01446 e^{-0,4528 t}$$

Observe que a função q não está em termos de funções trigonométricas, logo a oscilação não formará períodos. Como está em termos de funções exponenciais decrescentes, então à medida que o tempo aumenta, a carga no circuito tende a zero.

O fato acima citado pode ser observado na seguinte representação gráfica da função q .

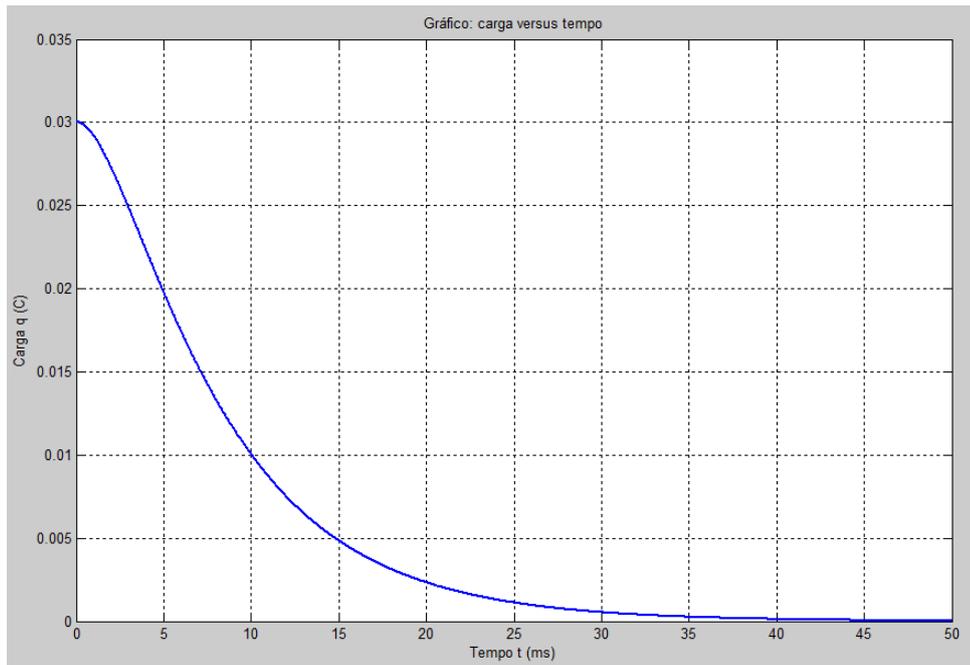


Figura 28 – Gráfico da oscilação superamortecida da carga no circuito RLC .

Podemos determinar, também, a corrente elétrica i neste circuito. Com efeito,

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -0,00655 e^{-0,1473 t} + 0,00654 e^{-0,4528 t}$$

que tem como representação gráfica:

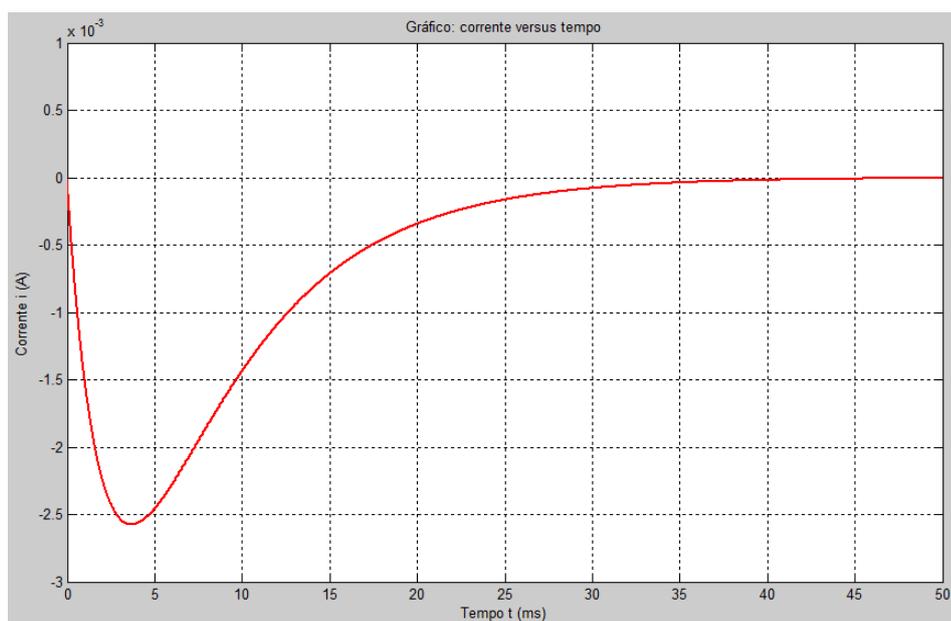


Figura 29 – Gráfico da oscilação superamortecida da corrente no circuito RLC .

Novamente, podemos notar a diferença da categoria de amortecimento entre o *subamortecido* e o *superamortecido*. A corrente, conforme o gráfico acima, apresenta a curva da corrente elétrica que tem como característica um retorno para a origem de uma forma mais lenta e isso se dá pelo fato de conter duas exponenciais decrescentes na função i . Para o movimento *criticamente amortecido*, esse retorno será muito mais rápido que é análogo às propriedades dos osciladores bloco-mola.

Exemplo 4.4.6 (*Circuito RLC*). Considere um circuito *RLC* em série de resistor com resistência $R = \frac{4}{3}\sqrt{15} \Omega$, indutor com indutância $L = 10 \text{ mH}$ e capacitor com capacitância $C = 1,5 \mu\text{F}$. Sabemos que

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{\sqrt{15}}{15} \quad e \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

logo, $\alpha^2 = \omega_n^2$ e, portanto, a oscilação é *criticamente amortecida*. Considerando as condições iniciais $t = 0$, $q(t) = 30 \mu\text{C}$ e $q'(t) = i(t) = 0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{2\sqrt{15}}{15} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{15} q = 0 \\ q(0) = 30 \mu\text{C} \\ q'(0) = i(0) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

Da mesma forma que o exemplo anterior, iremos utilizar a equação em que foi aplicada a *Transformada de Laplace*, equação (4.14), para o movimento criticamente amortecido que também é equivalente para este caso bastando fazer os ajustes necessários dos dados para o circuito *RLC*. A equação (4.14) é:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x_0 + (\omega_n x_0 + V_0) t]$$

e a equação equivalente para o circuito *RLC* é dada por:

$$q(t) = e^{-1/\sqrt{LC}t} \left[q_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} q_0 + i_0 \right) t \right]$$

Substituindo os dados na função q , temos que a solução do PVI é dada por:

$$q(t) = e^{-1/\sqrt{15}t} \left[0,03 + \frac{0,03}{\sqrt{15}} t \right]$$

Note que esta função também não se dá em termos de funções trigonométricas, porém ela é diferente do caso *superamortecido*. Agora, além da função exponencial decrescente, temos, também, um termo linear que, como nos casos dos osciladores bloco-mola, influenciará em um retorno mais rápido ao ponto inicial que o caso *superamortecido*.

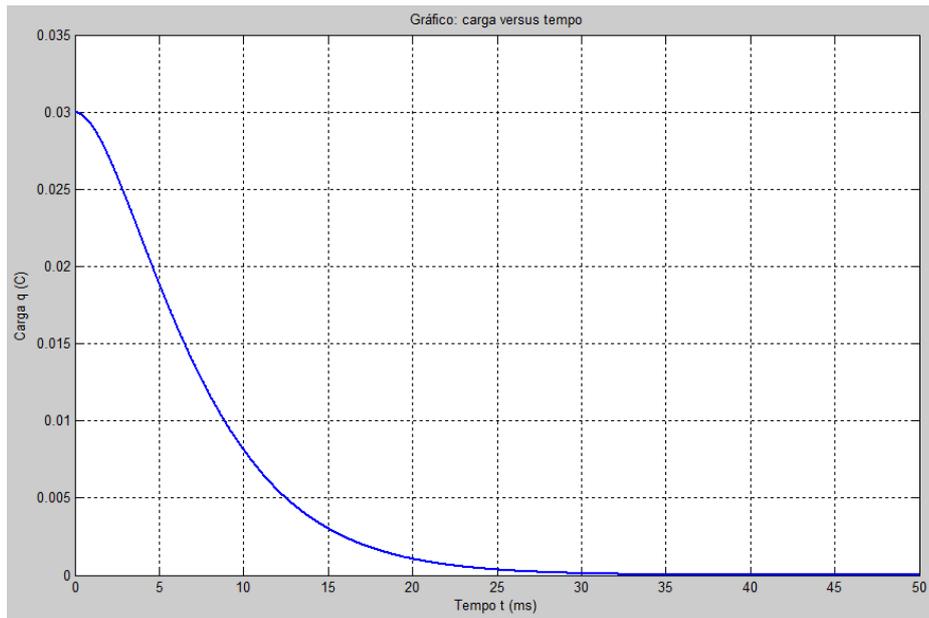


Figura 30 – Gráfico da oscilação criticamente amortecida da carga no circuito RLC .

Graficamente, a função q é representada da seguinte forma:

Podemos determinar, também, a corrente elétrica i neste circuito. Com efeito,

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{0,03}{\sqrt{15}} t e^{-1/\sqrt{15}t}$$

que tem como representação gráfica:

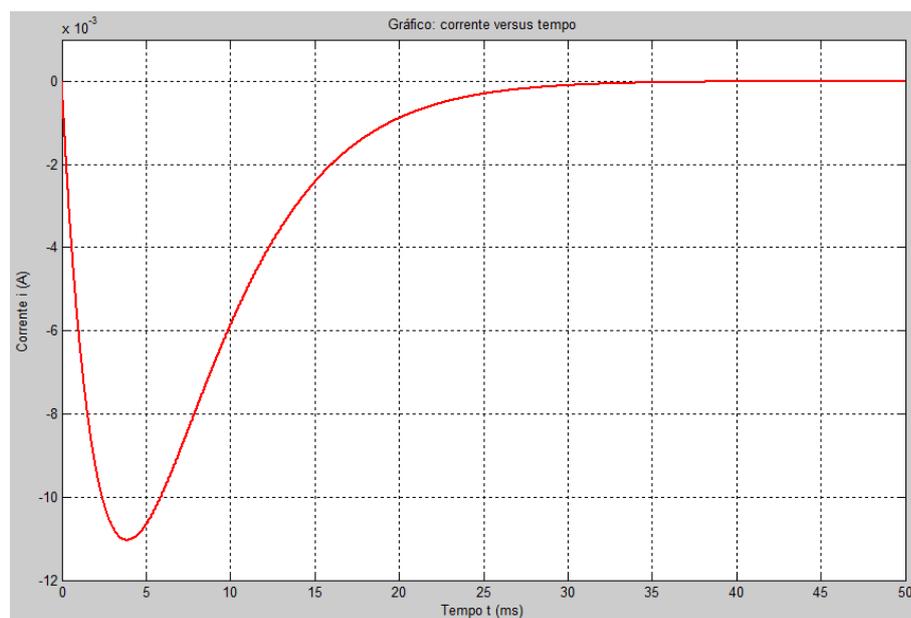


Figura 31 – Gráfico da oscilação criticamente amortecida da corrente no circuito RLC .

Como já dito, a oscilação criticamente amortecida por conter um termo linear faz com que o retorno para a corrente e a carga inicial ocorra mais rapidamente. Comparando com o movimento livre amortecido em sistemas com molas a reação é análoga, o retorno para a posição de equilíbrio é mais rápido do que o movimento superamortecido.

Com isso, apresentamos a aplicação das equações diferenciais ordinárias na Engenharia Elétrica fazendo uma análise de acordo com as etapas para criação de um modelo matemático descritas no [Capítulo 3](#).

5 Modelagem Matemática na Física

5.1 Físicos e matemáticos: a fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral

Quando citamos as palavras Cálculo Diferencial e Integral é possível que, primeiramente, dois nomes surgem em nossa mente: Newton e Leibniz.

A Matemática, no século XVII, se desenvolveu muito devido às pesquisas em novas áreas abrindo-se, assim, um vasto campo de estudo (EVES, 2004). O Cálculo, invenção de Newton e Leibniz, tornou-se objeto de estudo e com sua divulgação transformou-se numa poderosa ferramenta que implica em uma série de aplicações e solucionou diversos problemas, por exemplo, tangentes a uma curva e o estudo de máximos e mínimos sendo estes últimos objetos de publicações de Leibniz em 1684 por meio do artigo *Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes*.

Como já citado, Newton e Leibniz são considerados os inventores do Cálculo, mas, historicamente, este assunto já estava implícito em diversos estudos muitos séculos antes. Vale ressaltar que a história do desenvolvimento deste assunto segue em ordem contrária ao que vemos na maioria dos textos didáticos sobre o assunto (EVES, 2004). Normalmente, apresenta-se o conceito de limite, após isso, a derivada de uma função definida como um limite e então a integração. O método de exaustão proposto por Eudoxo é um dos problemas históricos do Cálculo que envolvia obter áreas, volumes e comprimentos de arcos e também a divisão de grandezas.

Arquimedes foi um dos cientistas antigos a ser um precursor do Cálculo Integral. Seu método, chamado de *Método de Equilíbrio* para determinar áreas e volumes, consistia, segundo (EVES, 2004), em seccionar uma região em um número muito grande de tiras paralelas e imaginá-las penduradas na extremidade de uma alavanca, estabelecendo o equilíbrio com uma figura de área ou volume de centróides conhecidos¹.

Passado aos estudos de Arquimedes, o processo de desenvolvimento da integração ficou paralisado, só recebendo novas atenções entre os séculos XV, XVI e XVII. Johann Kepler utilizou este processo “para determinar as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho” (EVES, 2004, p. 424).

¹ Para um detalhamento deste método para obter o volume da esfera encontra-se em Eves (2004, p. 422).

Estes são só alguns exemplos. Existem outros nomes e trabalhos desenvolvidos que recorrem a esse método mesmo sem o rigor que conhecemos hoje.

Em se tratando do Cálculo Diferencial e Integral, não podemos esquecer de dois importantes matemáticos predecessores de Newton: John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677). O primeiro é considerado um dos mais importantes matemáticos do seu tempo produzindo em diversos segmentos inclusive métodos para ensinar surdos e mudos (EVES, 2004). Wallis utilizou sistematicamente as séries em que contribuiu bastante e, assim, Newton pode estudá-la mais a fundo posteriormente. Sua dedicação e contribuição ficou por conta da teoria da integral. Em sua obra *Arithmetica infinitorum*, de acordo com Eves (2004), surge a afirmação da seguinte fórmula de integração

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

em que m pode ser inteiro diferente de -1 ou um número em forma de fração.

O segundo, Isaac Barrow, Professor de Newton, teve suas contribuições mais ligadas ao processo de diferenciação e esse fato encontra-se em sua obra *Lectiones opticae et geometricae* em que tal processo se dá pelo uso do *triângulo diferencial* ou *triângulo de Barrow*. Nesta mesma obra citada, é provado o que conhecemos hoje como *Teorema Fundamental do Cálculo*, pois Barrow percebeu e é isso que o teorema garante que derivar e integrar são operações inversas uma da outra.

Muitos outros matemáticos desta época e anteriores a estes contribuíram para o cálculo, porém faltava uma formalização e simbologia adequada para trabalhar com essa poderosa ferramenta. Nesta questão, os primeiros a darem suporte neste sentido foram Newton e Leibniz de forma independente um do outro que contribuíram para sistematizar simbologia e regras de diferenciação e integração. Newton denominou o processo de diferenciar como *fluxões* sendo que a notação adotada para derivada de uma função x é \dot{x} . Leibniz adotou uma simbologia diferente. Para ele, diferenciar a função y em relação a variável independente x era denotado como $\frac{dy}{dx}$, notação esta muito mais aceita na época.

O símbolo de integração que conhecemos hoje é devido a Leibniz e tinha como objetivo a somatória de partes indivisíveis, ou seja, dx ou dy . E, portanto, estava estabelecido que integrar uma função y com relação a variável independente x se dava por

$$\int y dx$$

Em sua obra *Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes*, apresenta como encontrar tangentes por meio do cálculo diferencial e encontrar quadraturas por meio do cálculo integral. Na mesma obra demonstra propriedades operatórias das derivadas, por exemplo:

$$\frac{d}{dx} [u \cdot v] = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Foi Leibniz que introduziu termos como função, coordenadas, oscilações, entre outros termos e juntamente com os irmãos Bernoulli deu o nome que conhecemos hoje de Cálculo Integral. As notações modernas das operações aritméticas também é devido a Leibniz. É considerado o pai da Lógica Moderna e o precursor da matemática mais avançada do seu tempo.

5.1.1 A era Bernoulli

A partir dos estudos de Leibniz sobre o Cálculo Diferencial e Integral, os irmãos Jacques Bernoulli (1654 - 1705) e Jean Bernoulli (1667 - 1748) foram grandes entusiastas em aprender sobre o tema para compartilhá-lo, uma vez que o cálculo de fluxões de Newton era mais conhecido na Inglaterra (BOYER, 2010).

Da histórica família de cientistas, Jacques Bernoulli é considerado o primeiro a se destacar na Matemática, viajando para outros países para interagir com outros matemáticos e, assim, segundo Boyer (2010), esteve a par de diversos problemas importantes, por exemplo, as equações da *catenária*, *tratriz* e *isócrona* e, por meio desses problemas, percebeu o poder do Cálculo.

A equação de Bernoulli, em homenagem a Jacques, foi uma de suas contribuições no estudo de equações diferenciais ordinárias. Como já mostrado, a substituição $z = y^{1-n}$ transforma a equação $x' + p(t)x = q(t)x^n$ em uma equação diferencial linear do tipo $z' + (1-n)p(t)z = (1-n)q(t)$. Juntamente com Leibniz, Jacques procurava uma solução para a curva *braquistócrona*² e, por fim, provou que tal curva era uma cicloide.

Apresentamos, aqui, uma breve consideração em que matemáticos e físicos deram contribuições para o Cálculo Diferencial e Integral. As investidas para criar essa ferramenta deu-se muito pela necessidade de solucionar problemas científicos da época de cada um destes cientistas. Para uma abordagem mais completa da história do cálculo, recomendamos a leitura de Eves (2004) e Boyer (2010).

² Braquistócrona é o nome que se dá à trajetória de uma partícula sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula que se desloca entre dois pontos no mais curto período de tempo.

5.2 Corpo em queda livre com influência do atrito

A equação que descreve um corpo em queda livre num meio com atrito é dada por

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv^2 \quad (5.1)$$

em que m é a massa do corpo em kg , g é a aceleração devido à gravidade que é aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$, v é a velocidade em m/s , t é o tempo em segundos (s) e c é uma constante de proporcionalidade conhecida como *coeficiente de arrasto* cuja unidade é kg/s . Observemos o seguinte fato na equação (5.1).

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Substituindo esse último termo em (5.1), então

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - cv^2 \Rightarrow mv \frac{dv}{dx} - mg = -cv^2$$

e dividindo toda equação por mv e ajustando-a, temos

$$\frac{dv}{dx} + \frac{c}{m}v = gv^{-1} \quad (5.2)$$

A equação (5.2) é uma Equação Diferencial Ordinária mais conhecida como *Equação de Bernoulli*. A formulação geral desse tipo de equação é dada por

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$$

Para solucionar a equação (5.2), é necessária uma substituição a fim de recairmos em uma EDO Linear de Primeira Ordem e, assim, encontrar o fator integrante.

Comparando essa equação com a *Equação de Bernoulli* temos $n = -1$, então $w = v^{1-n} \Rightarrow w = v^2 \Rightarrow v = w^{\frac{1}{2}}$. Derivando ambos os membros em relação a x , temos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2w^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Substituindo em (5.2), temos

$$\frac{1}{2w^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{c}{m}w^{\frac{1}{2}} = gw^{-\frac{1}{2}}$$

Multiplicando a equação por $2w^{\frac{1}{2}}$, então

$$\frac{dw}{dx} + 2\frac{c}{m}w = 2g \quad (5.3)$$

Com isso, temos uma equação do tipo $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ e podemos resolvê-la encontrando o fator integrante³ $\mu(x)$. Sendo $p(x) = 2\frac{c}{m}$, então

$$\mu(x) = \exp\left(\int 2\frac{c}{m} dx\right) = \exp\left(2\frac{c}{m}x\right)$$

Multiplicando a equação (5.3) pelo fator integrante $\mu(x)$, temos

$$\exp\left(2\frac{c}{m}x\right) \cdot \frac{dw}{dx} + \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) \cdot 2\frac{c}{m}w = \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) \cdot 2g$$

Observemos que o primeiro membro da equação acima é a derivada do produto

$$\frac{d}{dx}\left(w \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right)\right)$$

Então,

$$\frac{d}{dx}\left(w \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right)\right) = \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) \cdot 2g$$

Integrando ambos os membros diferenciando x , temos

$$\int \frac{d}{dx}\left(w \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right)\right) dx = \int \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) \cdot 2g dx$$

$$w \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) = 2g \int \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) dx$$

Como queremos a função w , solução do problema, e resolvendo a integral por substituição, então

$$w \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) = \frac{mg}{c} \cdot \exp\left(2\frac{c}{m}x\right) + K \Rightarrow w = \frac{mg}{c} + K \exp\left(-2\frac{c}{m}x\right)$$

Mas, no início do problema, fizemos a substituição $w = v^2$, então

$$v^2 = \frac{mg}{c} + K \exp\left(-2\frac{c}{m}x\right)$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{mg}{c} + K \exp\left(-2\frac{c}{m}x\right)}, \quad K \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

Logo, a equação (5.4) é a função que representa a velocidade do corpo em queda livre, considerando $v(x) > 0$.

Ao manipularmos a equação inicial, recaímos na forma da *Equação de Bernoulli*. Esse é um dos muitos Modelos Matemáticos existentes que são descritos por EDO cuja solução é resolver uma equação do tipo $y' + p(x)y = q(x)y^n$.

³ Considere, para o fator integrante, $\exp(x) = e^x$.

5.3 Aplicação

Exemplo 5.3.1. Considere um paraquedista em queda livre em que sua massa é $m = 70 \text{ kg}$ e o coeficiente de arrasto é $c = 12,5 \text{ kg/s}$. Sendo a aceleração da gravidade $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, vamos determinar a função velocidade do paraquedista em queda livre sendo que $x(0) = 0 \text{ m}$. Com essas informações, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + 0,1786 v = 9,81 v^{-1} \\ v(0) = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

Da equação (5.4), sabemos que:

$$v(x) = \sqrt{54,94 + K e^{-0,3571x}}$$

e sendo $v(0) = 0 \text{ m/s}$, então a solução do PVI é dada por:

$$v(x) = \sqrt{54,94 - 54,94 e^{-0,3571x}}$$

que tem como representação gráfica:

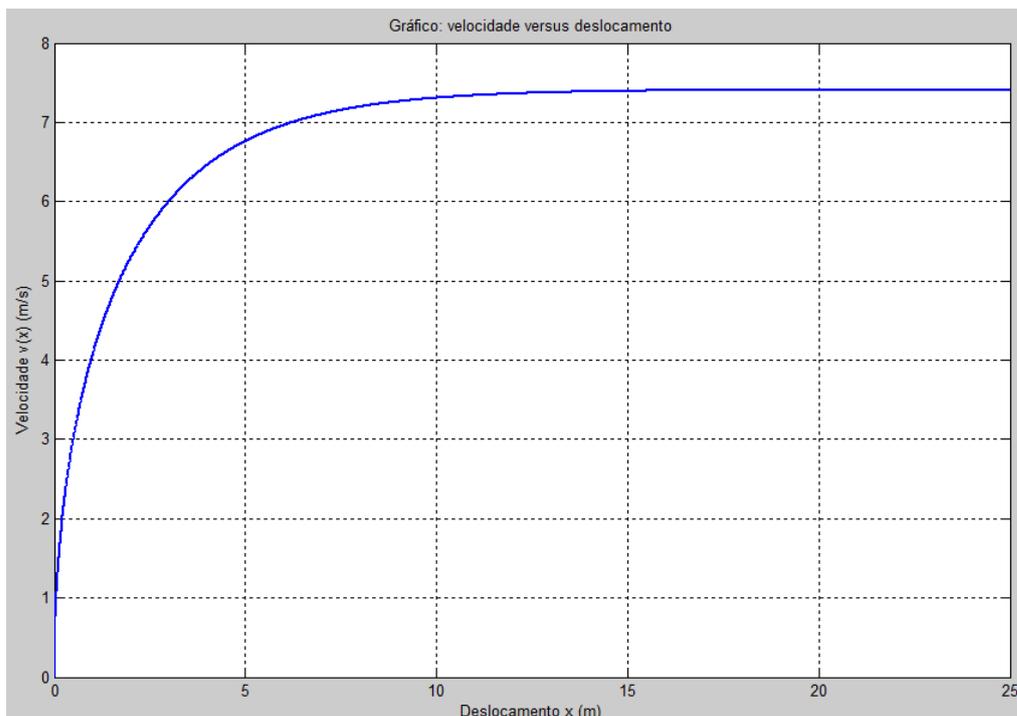


Figura 32 – Gráfico da velocidade em função do deslocamento.

Observe que, para x suficientemente grande, a velocidade do paraquedista tende para o valor $\sqrt{54,94} \approx 7,4122 \text{ m/s}$. Isto significa dizer que, para as condições fornecidas na problemática, a velocidade final do paraquedista próximo à superfície da terra é aproximadamente $7,4122 \text{ m/s}$.

De acordo com as etapas para formulação de um modelo apresentadas no [Capítulo 3](#) baseadas em [Bassanezi \(2002\)](#), como hipótese para testar o modelo utilizamos a equação que descreve a velocidade de um corpo em queda livre com influência do atrito, porém uma velocidade que depende do tempo. Essa etapa é a *abstração*. Como *formulação do modelo*, a partir da equação (5.1), a manipulamos para obter a descrição da velocidade do corpo dependendo do espaço percorrido e, com isso, chegamos numa EDO do tipo Bernoulli e, com essa ferramenta, a *resolução* foi obtida por transformá-la numa equação diferencial linear de primeira ordem. E como última etapa, apresentamos uma *aplicação*.

5.4 Tratamento numérico para EDO e questão do corpo em queda livre

Diversos problemas encontrados em diversas áreas do conhecimento são formulados através de equações diferenciais e alguns exemplos são mostrados neste trabalho. Como já vimos, podemos resolver esses problemas analítica ou numericamente, porém, segundo [Franco \(2006\)](#), a grande maioria das equações que descrevem situações reais não são solucionadas por métodos analíticos o que nos remete a empregar soluções numéricas para tais equações.

Historicamente, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz e Leonhard Euler foram os pioneiros em se tratando de solução numérica para equações diferenciais. A partir dos trabalhos, principalmente, de Euler os estudos desses métodos foram impulsionados nos quais conhecemos hoje. Um dos trabalhos que Euler publicou consistia em um método interativo que permitia aproximar um problema de valor inicial em um determinado ponto conhecido hoje como *Método de Euler*.

Matemáticos como Cauchy e Lipschitz impulsionaram melhorias e um tratamento rigoroso nesse estudo e a consequência direta dessa importância dedicação foram as dedicações nas melhorias das soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias por Karl Heun, Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta que apresentaram métodos bastante precisos e de fácil utilização.

A balística é uma ciência que estuda o movimento de projéteis e na época começou a exigir resultados através de tratamento numérico. Os problemas que surgiam eram muito complexos e exigiam uma grande quantidade de cálculos que eram necessários através da ajuda dessas ferramentas.

Assim como o Cálculo Diferencial e Integral e os números reais mereceram uma atenção especial através da Análise Matemática, os métodos numéricos foi e vem recebendo atenção especial através da Análise Numérica. Com o avanço da tecnologia diversos matemáticos tem trabalhado de forma contínua para a melhoria dessa poderosa ferramenta que fornece resultados para sistemas onde a solução analítica dos problemas ainda não foram descobertas pelos estudiosos.

A solução numérica dos problemas nos garante informações precisas sobre o modelo matemático estudado. Neste capítulo apresentaremos de forma sucinta quatro métodos para resolver equações diferenciais de primeira ordem: *método de Euler*, *Euler melhorado*, *Heun* e *Runge-Kutta de quarta ordem*.

5.4.1 Método de Euler

Segundo Zill e Cullen (2001) esse método, conhecido também como método das tangentes, é considerado um dos mais simples métodos para aproximar soluções de Equações Diferenciais Ordinárias. A expressão geral do Método de Euler consiste em:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (5.5)$$

onde y_{n+1} é a aproximação para a solução exata no passo $n + 1$, n é o número de divisões no intervalo $[a, b]$ e h é chamado passo de integração. Para encontrar o valor de h , seja o intervalo definido $[a, b]$ no domínio da função, então:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

5.4.2 Método de Euler melhorado

Consiste em uma técnica mais precisa do que a anterior para encontrar soluções numéricas. A expressão geral do método de Euler melhorado é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \right), \quad (5.6)$$

em que

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

5.4.3 Método de Heun

O Método de Heun é uma das técnicas mais conhecidas para os Métodos de Runge-Kutta de ordem três e três estágios. A expressão geral desse método é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_3), \quad (5.7)$$

em que

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2\right)\end{aligned}$$

Nesse caso note que o termo k_2 não aparece explicitamente no método, porém ele deve ser calculado a cada passo na resolução do problema.

5.4.4 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

O Método de Runge-Kutta de quarta ordem é uma das técnicas mais precisas para se encontrar soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias. De acordo com Franco (2006), a obtenção desse método consiste de um sistema de onze equações e treze incógnitas, porém a expressão abaixo é uma das infinitas soluções do sistema:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.8)$$

sendo:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3)\end{aligned}$$

onde k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são os estágios obtidos através do desenvolvimento da Série de Taylor em torno do ponto (x_n, y_n) .

5.5 Aplicação: o movimento de queda livre

A aplicação que apresentaremos será baseada na modelação matemática de um corpo em queda livre. O problema consiste em apresentar uma função que melhor representa a velocidade de um corpo em queda livre e assim estimar sua velocidade próxima à superfície da Terra. De acordo com os objetivos deste trabalho, tal modelo é representado por uma equação diferencial ordinária. De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos

$$F = ma \quad (5.9)$$

em que F é a força resultante que age no corpo em newtons (N), m é a massa do corpo em quilogramas (Kg) e a é a aceleração dada em m/s^2 .

Podemos reescrever a equação (5.9) da seguinte forma

$$a = \frac{F}{m} \quad (5.10)$$

Através da equação (5.10), modelaremos nosso sistema para determinar a já citada velocidade terminal do corpo próxima à superfície da Terra. Em termos de taxa de variação instantânea, sabemos que a aceleração de um objeto é dada pela derivada da função velocidade em relação ao tempo, logo a equação (5.10) é dada por

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (5.11)$$

em que v é a velocidade (m/s) e t é o tempo (s). Caso a força resultante que atua sobre o corpo for positiva, ele irá ter uma aceleração e caso for negativa, ele terá uma desaceleração.

Para um corpo em queda livre sob a gravidade da Terra, duas forças opostas resultam em F : a força gravitacional para baixo F_D e a força de resistência do ar, oposta a gravitacional F_U . Logo a equação da resultante é

$$F = F_D + F_U \quad (5.12)$$

sendo os termos que compõe a equação (5.12)

$$F_D = mg \quad (5.13)$$

$$F_U = -cv \quad (5.14)$$

em que g é a constante gravitacional e seu valor é aproximadamente $9,81 (m/s^2)$ e c é a constante de proporcionalidade conhecida como *coeficiente de arrasto* (kg/s) devido à resistência do ar. Combinando as equações de (5.11) até (5.14), obtemos a seguinte equação

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \quad (5.15)$$

e simplificando a equação, temos

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (5.16)$$

A equação (5.16) está em termos da taxa de variação instantânea dv/dt , com isso ela é chamada de equação diferencial ordinária na variável que estamos interessados em estudar, isto é, a velocidade do corpo.

Obteremos a solução dessa equação através do PVI (problema de valor inicial) abaixo

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-(c/m)t}\right) \quad (5.17)$$

A partir da (5.17) utilizaremos os diferentes métodos numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias e compararemos os resultados obtidos com os fornecidos pela solução analítica. A partir de então, analisaremos os erros absolutos dos métodos descritos neste capítulo. O software utilizado nas simulações numéricas foi o Matlab®. O problema em estudo considera para os cálculos $c = 12,5 \text{ kg/s}$ e $m = 68,1 \text{ kg}$ nos primeiros quinze segundos.

5.5.1 Tabela para os métodos numéricos

Abaixo, apresentaremos a comparação entre a solução exata e o método de Euler e o erro absoluto entre ambos.

Tabela 3 – Velocidades (m/s) - Método de Euler e solução exata.

Tempo (s)	Solução exata	Método de Euler	Erro Absoluto
1	8,95318	9,8	0,84682
2	16,40498	17,80117	1,39619
3	22,60717	24,33371	1,72654
4	27,76929	29,66717	1,89787
5	32,06577	34,02165	1,95589
6	35,64175	37,57685	1,93510
7	38,61807	40,47949	1,86142
8	41,09528	42,84933	1,75405
9	43,15708	44,78418	1,62709
10	44,87314	46,36389	1,49075
11	46,30142	47,65363	1,35221
12	47,49019	48,70663	1,21644
13	48,47961	49,56635	1,08674
14	49,30312	50,26827	0,96516
15	49,98852	50,84135	0,85283

Podemos observar que o Método de Euler não é muito preciso, mas consegue representar de forma satisfatória a velocidade do corpo em queda livre. Note que se aumentarmos o tempo de análise tal método se aproximará da solução exata, pois o erro absoluto diminui cada vez mais para tempos suficientemente longos.

A próxima tabela apresenta uma melhoria no método de Euler. Isso poderá ser reparado ao analisarmos o erro absoluto entre a solução exata e tal método.

Tabela 4 – Velocidades (m/s) - Método de Euler Melhorado e solução exata.

Tempo (s)	Solução exata	Método de Euler	Erro Absoluto
1	8,95318	8,90059	0,05259
2	16,40498	16,31738	0,08760
3	22,60717	22,49773	0,10943
4	27,76929	27,64778	0,12151
5	32,06577	31,93927	0,12649
6	35,64175	35,51534	0,12641
7	38,61807	38,49525	0,12282
8	41,09528	40,97838	0,11690
9	43,15708	43,04756	0,10952
10	44,87314	44,77179	0,10135
11	46,30142	46,20858	0,09284
12	47,49019	47,40584	0,08435
13	48,47961	48,40351	0,07609
14	49,30312	49,23487	0,06825
15	49,98852	49,92763	0,06089

Observe que ao analisarmos as colunas da solução exata e do método apresentado, a velocidade do paraquedista em queda livre encontra-se na mesma casa dos inteiros diferentemente da [Tabela 3](#) em que a diferença se dava logo na casa dos inteiros aumentando, assim, o erro absoluto.

À medida que o tempo aumenta, observa-se que o erro absoluto diminui gradativamente. Para tempo suficientemente grande, tal erro tenderá a zero. Podemos notar que o Método de Euler Melhorado se comporta muito melhor que o Método de Euler.

A seguir, apresentaremos uma comparação entre a solução exata e o Método de Heun por meio da [Tabela 5](#). Os métodos de Runge-Kutta são considerados mais precisos e isso poderemos notar na coluna do erro absoluto considerado.

O Método de Heun é chamado, também, de Runge-Kutta de terceira ordem porque

contém três estágios.

Tabela 5 – Velocidades (m/s) - Método de Heun e solução exata.

Tempo (s)	Solução exata	Método de Euler	Erro Absoluto
1	8,95318	8,95562	0,00243
2	16,40498	16,40903	0,00405
3	22,60717	22,61223	0,00506
4	27,76929	27,7749	0,00562
5	32,06577	32,07161	0,00584
6	35,64175	35,64759	0,00584
7	38,61807	38,62374	0,00567
8	41,09528	41,10067	0,00539
9	43,15708	43,16213	0,00505
10	44,87314	44,87780	0,00467
11	46,30142	46,30569	0,00427
12	47,49019	47,49407	0,00388
13	48,47961	48,48311	0,00349
14	49,30312	49,30625	0,00314
15	49,98852	49,99132	0,00279

Observe que a diferença, em sua grande maioria, se dá na segunda casa decimal o que faz com que o erro absoluto seja menor que os métodos anteriores. Nota-se que à medida que aumentamos a ordem do método aumenta-se a precisão do mesmo tornando-o bastante eficaz em estudos em que a equação diferencial não possui solução analítica.

É importante ressaltar que quanto maior a ordem do método mais numerosos são os cálculos de f nos k estágios considerados, então, como o Método de Runge-Kutta de quarta ordem é bastante preciso, não é necessário ir além desta ordem. A [Tabela 6](#) a seguir apresenta a comparação entre a solução exata e o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, considerado um dos métodos mais precisos e mais simples e possui precisão dos Métodos de Taylor.

Tabela 6 – Velocidades (m/s) - Método de Runge-Kutta de 4ª ordem e solução exata.

Tempo (s)	Solução exata	Método de Euler	Erro Absoluto
1	8,95318	8,95309	0,00008
2	16,40498	16,40483	0,00015
3	22,60717	22,60698	0,00019
4	27,76929	27,76908	0,00021
5	32,06577	32,06555	0,00022
6	35,64175	35,64153	0,00022
7	38,61807	38,61786	0,00021
8	41,09528	41,09508	0,00019
9	43,15708	43,15689	0,00019
10	44,87314	44,87297	0,00017
11	46,30142	46,30569	0,00016
12	47,49019	47,49005	0,00014
13	48,47961	48,47948	0,00013
14	49,30312	49,303	0,00012
15	49,98852	49,98842	0,00010

Nota-se que a diferença na velocidade, em sua grande maioria, encontra-se na quarta casa decimal o que mostra a grande precisão do método. Neste caso, este método converge para a solução exata mais rapidamente que os apresentados anteriormente.

As tabelas acima foram apresentadas na ordem de precisão dos métodos. Notemos que o método de Euler é o menos preciso e em compensação o método de Runge-Kutta de quarta ordem é o mais preciso sendo seus erros absolutos dados na quarta ou quinta casa decimal. Todos os métodos apresentados aproximam-se satisfatoriamente da velocidade calculada pela solução exata.

A velocidade terminal do corpo é dada quando fazemos $t \rightarrow \infty$ na equação (5.17). Logo, a equação se reduz em

$$v(t) = \frac{mg}{c} \quad (5.18)$$

e de acordo com as condições iniciais, a velocidade terminal será

$$v(t) = \frac{68,1 \cdot 9,81}{12,5} = 53,44 \text{ m/s}$$

Abaixo, apresentaremos um gráfico comparativo entre a solução exata, o método de Euler e o de Runge-Kutta de quarta ordem.

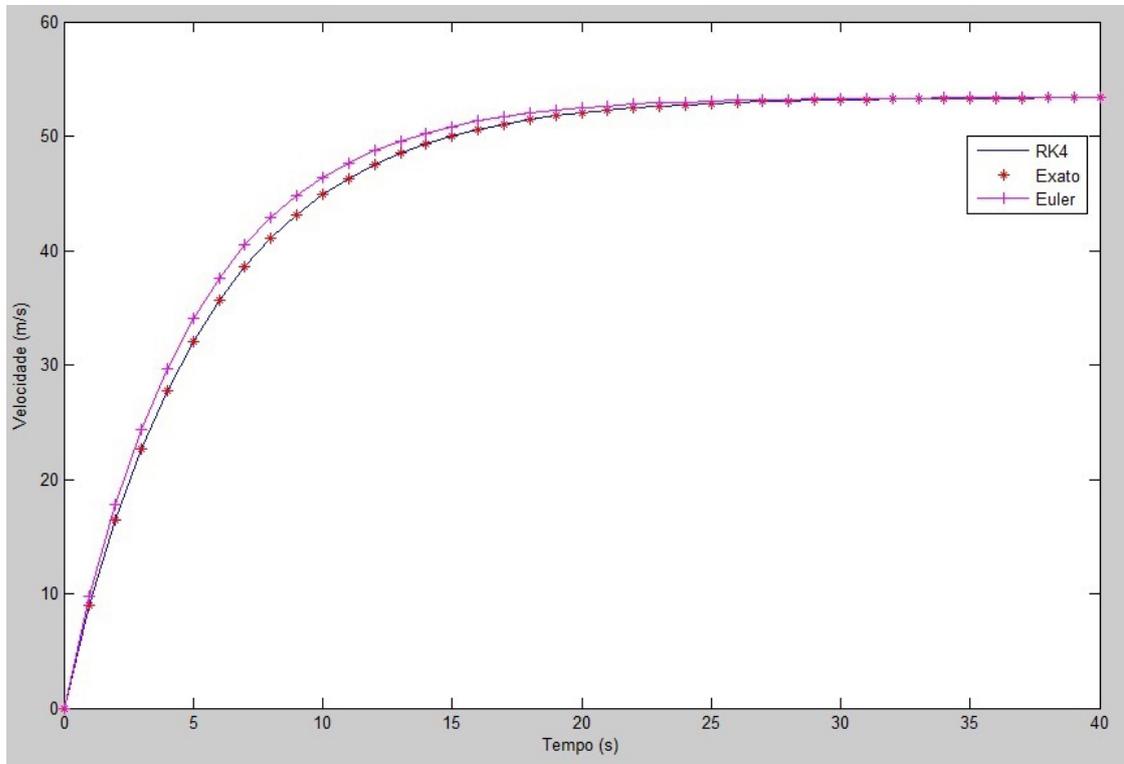


Figura 33 – Comparação das velocidades do corpo em queda livre

De fato, podemos notar por meio da [Figura 33](#) que o método de Runge-Kutta de quarta ordem está muito bem ajustado com a solução exata e em conjunto com a [Tabela 6](#) por intermédio do cálculo do erro absoluto nota-se que a diferença é muito pequena.

6 Modelagem Matemática na Biologia

6.1 Dinâmica de crescimento de um tumor

Tumor é um aumento de tamanho em algum tecido do corpo causada por um desequilíbrio no sistema de divisão celular causando uma multiplicação excessiva das células. O mecanismo de divisão tornam-se inoperantes e as células passam a proliferar-se anormalmente sem que as necessidades do organismo controlem tal proliferação. O tumor pode ser considerado benigno (não cancerígeno) ou maligno (cancerígeno).

Segundo o Instituto Nacional do Câncer - [INCA \(2008\)](#), o câncer é responsável por cerca de 13% de todas as causas de óbito no mundo e isso representa que cerca de sete milhões de pessoas vão a óbito por causa dessa doença, segundo dados retirados da *União Internacional Contra o Câncer (em inglês International Union Against Cancer - UICC)*. No Brasil, as principais causas de morte por câncer são: pulmão, próstata e estômago nos homens e mama, pulmão e intestino nas mulheres.

De acordo com os dados do [INCA \(2008\)](#), o percentual tão alto deve-se à maior exposição desses indivíduos aos fatores de risco cancerígeno, por exemplo, padrão de vida em relação a nutrição, trabalho, hábitos nocivos à saúde tal que o consumo de tabaco e álcool, entre outros hábitos.

Alguns pesquisadores modelaram o processo de crescimento de tumores, por exemplo, Murray Eden do Massachusetts Institute of Technology, Josef Smolle juntamente com Haro Stettner do Departamento de Dermatologia da Universidade de Graz (Graz and Institute of Mathematics) e Benjamin Gompertz, matemático inglês do século XIX membro da Sociedade Real de Londres. Há outros modelos também como os contínuos que envolvem equações diferenciais envolvendo condições iniciais e de contorno, modelos com formação de padrão fractal, por exemplo, crescimento de tumores malignos no cérebro e assim por diante.

6.1.1 Modelo de Gompertz para o crescimento de tumores

O modelo de Gompertz, segundo [Domingues \(2011\)](#), é dado por

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \left(\frac{K}{N} \right) \quad (6.1)$$

em que

- $N(t)$ é a população de células tumorais no instante t ;

- t é o instante considerado para cada quantidade de população de células;
- r é a constante positiva de crescimento interno da célula;
- K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis, ou seja, nossa capacidade de suporte.

Para solucionar (6.1), temos que fazer uma mudança de variável. De fato,

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln\left(\frac{N}{K}\right)$$

seja

$$u = \ln\left(\frac{N}{K}\right) \Rightarrow N = Ke^u$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = Ke^u \frac{du}{dt} \quad \text{substituindo em (3.1)}$$

$$Ke^u \frac{du}{dt} = -ruKe^u \Rightarrow \frac{du}{dt} = -ru$$

$$\frac{du}{u} = -r dt \Rightarrow \int \frac{du}{u} = - \int r dt$$

$$\ln(u) = -rt + C \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{K}\right) = e^{-rt} e^C$$

$$N = Ke^{e^{-rt} e^C} \quad \text{e tendo } N(0) = N_0, \text{ então}$$

$$N(t) = Ke^{-e^{rt} \ln\left(\frac{N_0}{K}\right)} \quad (6.2)$$

que é a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \ln\left(\frac{K}{N}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

De acordo com os estudos de [Friberg e Mattson \(1997\)](#), a carga letal de células tumorais está entre $10^{12} - 10^{13}$ células porque as populações de células não normais e não

metastáticas não podem ser excedidas por esse limite suporte. Então, iremos considerar, para os cálculos, que nossa capacidade de suporte será $K = 10^{13}$ células.

Os parâmetros da solução da equação de Gompertz serão baseados no estudo de [Domingues \(2011\)](#), onde $r = 0,0060$, $K = 10^{13}$ e $N_0 = 10^9$. Logo, a equação (6.2) com esses valores declarados torna-se:

$$N(t) = 10^{13} e^{-e^{-0,0024 \ln(10) t}}$$

que tem como representação gráfica:

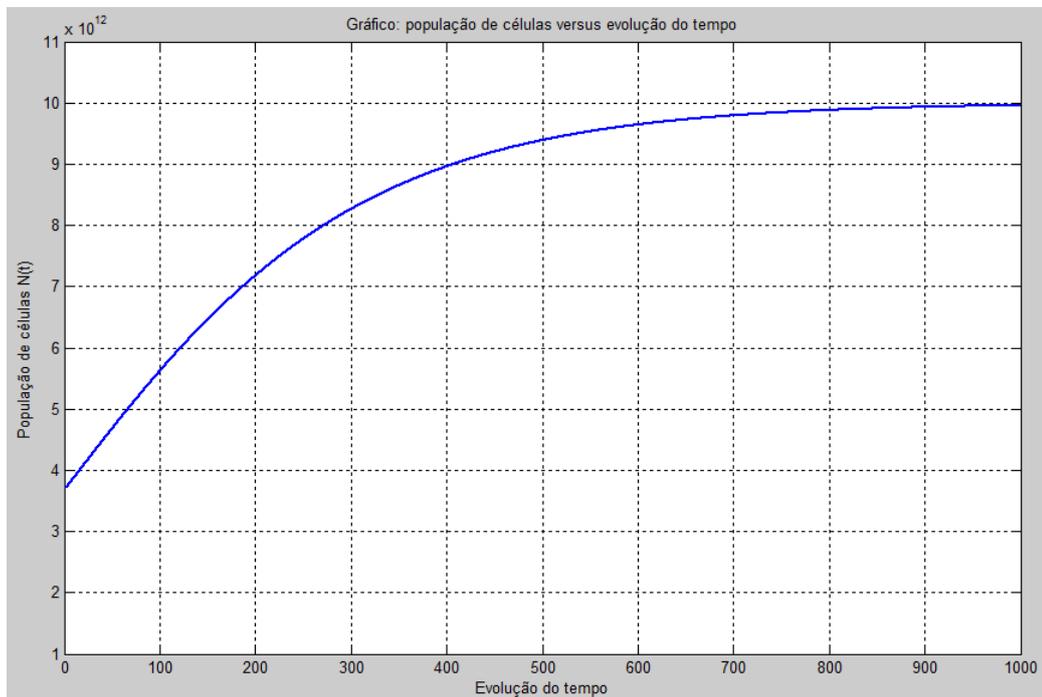


Figura 34 – Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais.

É importante ressaltar que o crescimento do tumor, ao passar do tempo, está sendo considerado sem algum tipo de tratamento contra o mesmo. [Domingues \(2011\)](#) realizou um estudo computacional onde é inserido um fator de tratamento baseado em *endostatina* e percebe-se que tal fator, teoricamente, impede o crescimento acelerado das células, mas para um determinado tempo t suficientemente grande, mesmo com o tratamento, alcançará a capacidade suporte.

6.1.2 Modelo Logístico para o crescimento de tumores

O modelo de crescimento logístico, apresentado por Pierre François Verhulst em 1838, nos moldes de nosso estudo é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \quad (6.3)$$

que complementa a equação do crescimento populacional exponencial proposto por Malthus que produz taxas infinitas de populações com o crescimento do tempo que pode vir a descrever bem inicialmente, mas para tempos suficientemente grandes foge da realidade das populações reais. O crescimento de tumor pelo estudo de Malthus seria

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (6.4)$$

que tem como solução, por separação de variáveis, e sendo as condições iniciais $N(0) = n_0$, a função

$$N(t) = n_0 e^{rt} \quad (6.5)$$

De acordo com os dados propostos por [Domingues \(2011\)](#), a equação (6.5) fica da seguinte forma:

$$N(t) = 10^{13} e^{0,006t}$$

mas, observe que para $t \rightarrow \infty$, $N(t) \rightarrow \infty$ que para o crescimento tumoral não é real para tempos indefinidamente grandes. Porém, para o modelo logístico, isso não acontece e veremos esse fato ao resolvermos a equação. Sendo $N(0) = n_0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

De fato,

$$\frac{dN}{dt} = r \left(\frac{K-N}{K}\right) N \implies \frac{K}{N(K-N)} dN = r dt$$

Por frações parciais, temos que

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$$

daí, integrando ambos os membros da equação, temos que

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right) dN = \int r dt$$

$$\int \left(\frac{1}{N}\right) dN + \int \left(\frac{1}{K-N}\right) dN = rt + C$$

$$\ln N - \ln(K-N) = rt + C$$

$$\ln \left(\frac{N}{K-N}\right) = rt + C$$

$$\begin{aligned} \frac{N}{K-N} &= e^{rt} \cdot e^k \implies N = (K-N)e^{rt} \cdot e^C \\ \implies N &= K e^{rt} \cdot e^C - N e^{rt} \cdot e^C \\ \implies N + N e^{rt} \cdot e^C &= K e^{rt} \cdot e^C \\ \implies N(t) &= \frac{K e^{rt} \cdot e^C}{1 + e^{rt} \cdot e^C} \end{aligned}$$

e, das condições iniciais e fazendo os ajustes necessários, a solução do PVI é dada por

$$N(t) = \frac{K N_0}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}} \quad (6.6)$$

Com os dados já citados anteriormente, a equação (6.6) fica da seguinte forma:

$$N(t) = \frac{10^{22}}{10^9 + (10^{13} - 10^9) e^{-0,006 t}}$$

que tem como representação gráfica

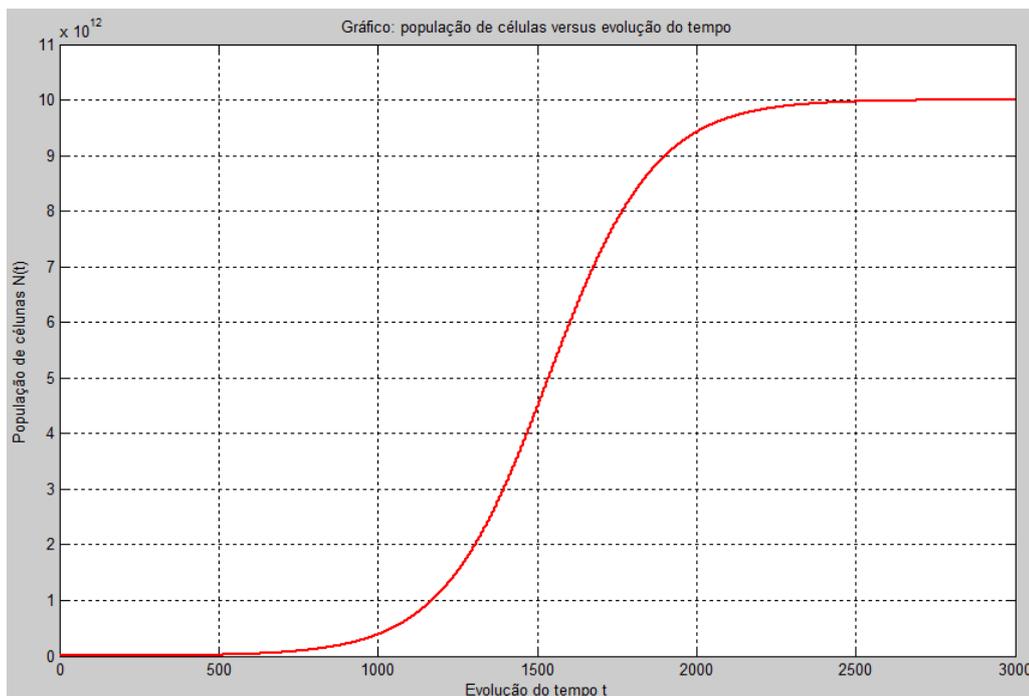


Figura 35 – Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais - Modelo logístico.

Observe que, diferente do modelo de crescimento exponencial, quanto $t \rightarrow \infty$, $N(t) \rightarrow 10^{13}$, ou seja, para um tempo suficientemente grande, a população de células tumorais tende para a capacidade de suporte K . Novamente, ressaltamos que o modelo não contém um fator de tratamento que, como já dito, impede o crescimento acelerado das células.

Note que ambos modelos, para $t \rightarrow \infty$, a população de células tende à capacidade suporte. Porém, graficamente, observamos que há diferenças em como as células tumorais estão evoluindo com o tempo. No modelo logístico, a população de células cresce bem mais lentamente do que o modelo de Gompertz. Ambos, porém, para um tempo suficientemente grande, tendem à capacidade de carga. O gráfico abaixo apresenta ambos modelos plotados no mesmo plano.

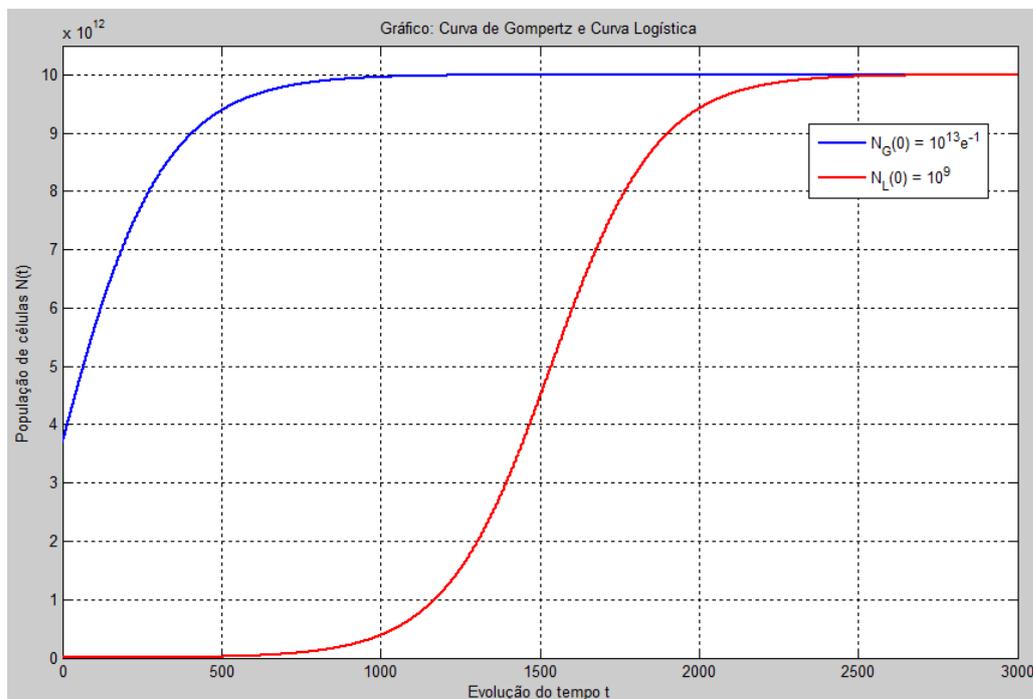


Figura 36 – Gráfico da evolução temporal: Modelo de Gompertz e Modelo logístico.

Observe que, logo de início, o modelo de Gompertz tem crescimento rápido, já o modelo logístico forma uma curva chamada *sigmóide*, onde para tempos iniciais o crescimento é mais lento. Outro ponto importante é que o modelo logístico, ao analisar graficamente, demora, praticamente, duas vezes e meia a mais que o modelo de Gompertz para chegar à capacidade suporte.

Em comparação com o estudo de [Domingues \(2011\)](#) para o modelo que está inserido um fator de tratamento, o modelo logístico está mais próximo desse fato, mesmo não considerando tal fator. De acordo com a análise do mesmo autor, a inserção do fator

de tratamento “representaria um ganho de tempo e de qualidade de vida ao paciente” (DOMINGUES, 2011, p. 111).

Para ambos os modelos apresentados neste capítulo, não partimos de hipóteses iniciais e nem levantamento de dados conforme as etapas descritas por Bassanezi (2002) apresentadas no Capítulo 3, estas denominadas *experimentação* e *abstração*. Apresentamos a problemática já modelada.

Com os modelos descritos por equações diferenciais ordinárias, passamos a resolvê-lo analiticamente com as técnicas para resolver equações diferenciais apresentadas no Capítulo 2, etapa esta denominada *resolução*. E como *validação*, comparamos ambos modelos com o estudado por Domingues (2011) e, por fim, a *aplicação*, nos permitiu fazer reflexões acerca da situação tanto algebricamente quanto graficamente.

Para uma situação como essa, a *aplicação* gera dados importantes para a tomada de decisões, principalmente em melhores maneiras de fornecer um tratamento adequado para o paciente ou até mesmo executando mudanças de variáveis no modelo para melhor atendê-lo.

Na próxima seção, apresentaremos um outro modelo interessante que explica matematicamente o funcionamento da absorção de drogas no organismo. Com este estudo é possível entender o motivo para o qual tomamos uma medicação de tempos em tempos, por exemplo, de oito em oito horas e assim por diante. Veremos que a taxa de queda do efeito da medicação se dá por uma função exponencial decrescente.

6.2 Modelo matemático para absorção de drogas (medicamentos)

Da mesma forma que na dinâmica de crescimento de um tumor, nossa proposta para uma abordagem no ensino superior é mostrar e tentar diminuir as inquietações acerca da motivação de estudar o Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Biologia. Nesse contexto, apresentaremos um outro modelo muito importante: a absorção de drogas no sangue.

A área que estuda a absorção e o tempo de absorção de drogas no organismo é a *farmacocinética* que tem como objetivo estudar o caminho percorrido pelo medicamento no organismo desde sua administração até sua eliminação. Isso já nos remete a refletir no decaimento do efeito da droga no organismo.

O processo é simples: através da via de administração o corpo (1) absorve a droga, após isso (2) distribui pelo organismo, (3) ocorre a chamada biotransformação e por último (4) a excreção. Estes fatores estão intimamente associados à dose fornecida que determinam a concentração do composto nos seus locais de ação.

A farmacocinética é muito importante no estudo para determinar a posologia adequada, pois para cada ser e faixa etária é necessário doses distintas e até mesmo reajustes quando necessário. Segundo a Professora Ivy Alcoforado Felisberto¹ esse estudo nos fornece uma melhor compreensão da ação do medicamento, como por exemplo, a intensidade do efeito, duração do efeito no organismo e sua toxicidade.

O funcionamento do modelo é simples. A primeira dose aplicada no instante t_0 tem como concentração de droga no sangue zero e a consequência é a distribuição no organismo. Disso ocorre a biotransformação ou metabolização aumentando a concentração da substância no organismo. Porém, há um determinado momento em que a concentração para de aumentar havendo, assim, um declínio do efeito. Passado esse determinado instante de tempo, precisamos, no instante t_1 tomar uma nova dose da droga e o processo virá um ciclo. Diante desse fato é que os médicos indicam de quanto em quanto tempo precisamos tomar certo medicamento.

Caso não tivermos essa regulamentação precisa para ingerir a medicação podemos correr diversos perigos se não respeitarmos os instantes de tempo corretos, como por exemplo, insuficiência renal e hepática, respostas clínicas não adequadas, entre outras situações mais graves.

Portanto, o interesse do modelo farmacocinético é nos inferir das seguintes situação:

- estudar o tempo entre a entrada e “saída” de um medicamento no organismo;
- verificar o pico de concentração máxima da droga no sangue e a partir disso analisar o decaimento do efeito no organismo;
- comparar as respostas dos diferentes tipos de aplicações da droga (oral, sublingual, intravenosa, intramuscular, entre outras);
- estudar os possíveis acontecimentos caso ocorra o esquecimento de tomar a medicação ou tomá-la antes do tempo correto;
- entre outras situações que possam ocorrer.

Apesar de existirem diversos modelos, cada um com sua área de interesse, nosso modelo é simples baseando-se apenas no decaimento do efeito da droga no sangue em função do tempo. Supondo que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração existente na corrente sanguínea em cada instante t e sabendo que a dosagem (da concentração) inicial seja $C(0) = C_0$, então,

$$\frac{dC}{dt} = -\gamma C \quad (6.7)$$

em que,

¹ Reflexão obtida em sua nota de aula denominada *Farmacocinética*.

- $C(t)$ é a concentração de droga (medicamento) no sangue;
- C_0 é a dosagem inicial ministrada absorvida pelo sangue;
- t é o tempo de ação da concentração;
- $-\gamma$ é a constante de proporcionalidade negativa (devido ao decaimento da concentração da droga no sangue).

Da mesma forma que o modelo anterior, a solução se dá por separação simples de variáveis. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = -\gamma C &\implies \int \frac{dC}{C} = \int_{t_0}^t -\gamma dt \\ &\implies \ln(C) = -\gamma(t - t_0) + k \\ &\implies C(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot e^k \quad \text{mas, como } C(0) = C_0 \\ &\implies C(t) = C_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \end{aligned} \tag{6.8}$$

que é a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = -\gamma C \\ C(0) = C_0 \end{cases}$$

Para encontrar o valor de γ é necessário saber o tempo de meia-vida $t_{1/2}$ biológico que é o tempo em que a concentração do fármaco cai pela metade do seu valor inicial. Então, em (6.8) $C(t) = \frac{1}{2}C_0$ obtemos

$$t_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\gamma}.$$

Como exemplo, o *Fenobarbital*, princípio ativo do Gardenal[®], tem como tempo de meia-vida entre 50 – 140 minutos em uma pessoa adulta. De acordo com os estudos farmacológicos, entre 4 e 6 meias-vidas o medicamento quase atinge sua concentração máxima plasmática e quanto mais curta for a meia-vida, mais rápido alcança-se a concentração máxima.

É evidente que a cada dose aplicada do medicamento ele possui um período de tempo de ação no organismo e sendo eliminado durante tal período. Vamos analisar agora

a ação do *Fenobarbital* com uma concentração inicial $C_0 = 0,03\text{mg/ml}$ em um adulto de acordo com a bula do medicamento e $\gamma = -0,007296$ por intermédio de um tempo de meia-vida de 95 minutos nos fornecendo a seguinte equação

$$C(t) = 0,03 e^{-0,007296(t-t_0)} \quad (6.9)$$

onde t_0 é o tempo inicial do intervalo na primeira dose da medicação ou na dose após a queda do efeito da mesma. Por exemplo, para o intervalo de tempo em minutos $[0, 480[$, $t_0 = 0$ e para o intervalo $[480, 960[$, $t_0 = 480$ e assim por diante.

O gráfico da função C é representado pela figura abaixo:

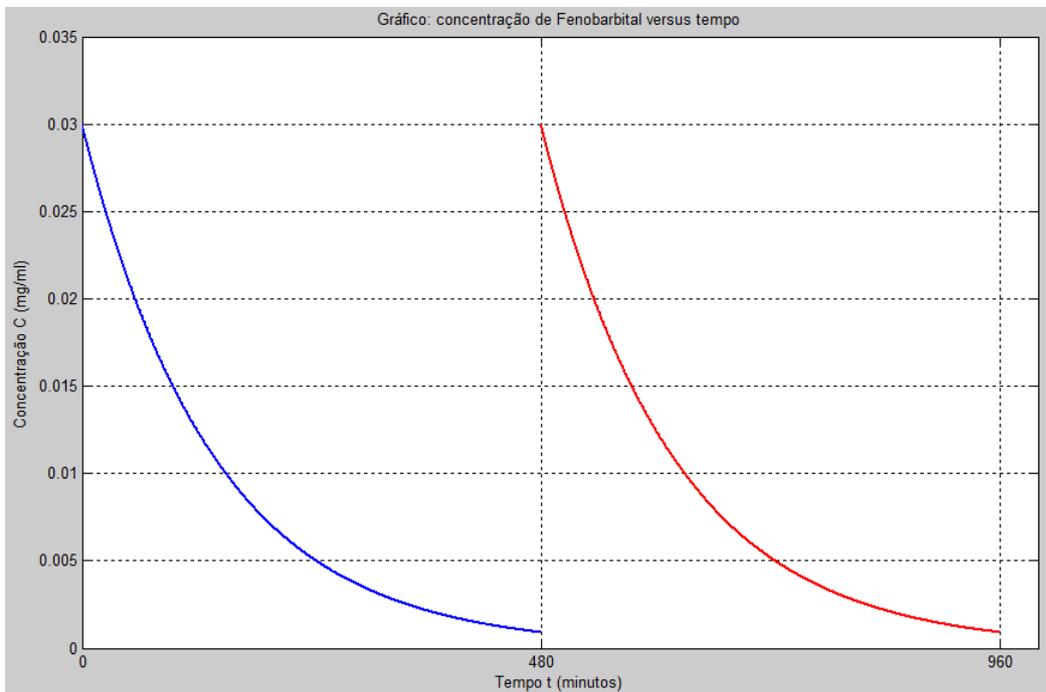


Figura 37 – Gráfico: concentração *versus* tempo.

Podemos notar que a cada 480 minutos (8 horas) uma nova dose de *Fenobarbital* é aplicada, ou seja, o tempo inicial de aplicação é a cada 480 minutos e a partir de então a concentração da medicação decai em função do tempo.

Observe que para t suficientemente grande, a concentração da medicação tende a concentração inicial, então o paciente, no tempo designado, tem que tomar uma outra dose, criando, assim, um ciclo até o fim do tratamento estipulado pelo médico responsável.

Em se tratando das etapas descritas por Bassanezi (2002) apresentadas no Capítulo 3, também não partimos de levantamento de dados e hipóteses iniciais e sim da problemática já modelada, ou seja, partimos com a *formulação do modelo* pronta e, assim, passamos a resolvê-lo partindo da etapa *resolução*.

Com os resultados obtidos, passamos a verificar a *validação* a partir da *aplicação* por comparar a solução do modelo com a bula do medicamento que indica que a concentração plasmática máxima ocorre, em adultos, dentro de aproximadamente oito horas.

7 Modelagem Matemática na Química

7.1 Função de onda

As leis da mecânica clássica estabelecidas por Isaac Newton tinham como principal objeto de estudo o movimento dos objetos e planetas em que suas velocidades eram consideradas “baixas”. No final do século XIX muitos experimentos mostraram que, para partículas tão pequenas quanto o elétron, as leis da mecânica clássica não se aplicavam. A consequência disso foi o surgimento de conceitos e equações de uma nova mecânica para a descrição do movimento dessas partículas chamada *mecânica quântica*.

No contexto proposto nesta pesquisa que é apresentar modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias, a função de onda é uma aplicação $\Psi(x)$ (estamos considerando a função independente do tempo, ou seja, dependendo apenas da posição x da partícula) solução da EDO de segunda ordem conhecida como *Equação de Schrödinger*.

7.1.1 Mecânica clássica *versus* Mecânica quântica

As três principais formulações da mecânica clássica são: *Mecânica Newtoniana*, *Mecânica Lagrangeana* e a *Mecânica Hamiltoniana*. Esses estudos estão concentrados na análise do movimento, variações da energia e as forças que atuam num determinado corpo. A *mecânica newtoniana* pode ser analisada por meio de três etapas que descrevem suas bases:

1. o vetor velocidade é a taxa de variação instantânea do vetor posição em relação ao tempo, isto é,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

2. O vetor momento linear é o produto da grandeza escalar massa pela grandeza vetorial velocidade, isto é,

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

3. Força é a taxa de variação instantânea do momento linear em relação ao tempo, isto é,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

No item 3, é possível observar que, sabendo que a aceleração é a taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo, então

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}\end{aligned}$$

ou seja, a grandeza vetorial força é o produto da massa pela grandeza vetorial aceleração que é a segunda lei de Newton.

É importante aqui ressaltar o campo de validade da Mecânica Newtoniana. As três leis de Newton são válidas em sistemas com velocidades baixas em comparação com a velocidade da luz e para corpos com massa grande em comparação com partículas elementares e suas massas (NETO, 2004).

Neto (2004), em sua obra *Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana*, apresenta uma tabela referente aos campos de atuação das teorias físicas. Quando a velocidade do corpo estudado é muito menor do que a da luz, encontramos em um domínio newtoniano para massas muito maiores que a massa do elétron e no domínio da teoria quântica não relativística quando a massa do corpo é de mesma grandeza que a massa do elétron. Porém, quando a velocidade do corpo é de mesma grandeza que a da luz, encontramos na teoria relativística para massas muito maiores que a massa do elétron e na teoria quântica relativística para massas de mesma grandeza que a massa do elétron.

A *Mecânica Newtoniana* descreve muito bem movimentos de corpos com velocidades bem inferiores a da velocidade da luz, porém, por meio de observações experimentais, as leis de Newton forneciam resultados incoerentes quando se tratava de velocidades grandes. Por volta de 1905, Einstein apresentou a *Teoria da Relatividade* propondo equações para substituir as conhecidas equações da Mecânica Newtoniana que descreviam os movimentos de partículas em velocidades grandes e que estavam em conformidade com os dados experimentais realizados. A Mecânica Newtoniana é um caso particular da Mecânica Relativística quando tratamos de velocidades de partículas bem abaixo da velocidade da luz.

A *Mecânica Lagrangeana* é uma outra formulação da mecânica clássica. Nesta formulação, as leis de Newton não são mais o ponto inicial, mas sim o *Princípio de Hamilton* também conhecido como *princípio da mínima ação*. Este princípio, nesta mecânica, é o equivalente à segunda lei de Newton e está interessado em estudar a evolução de um sistema do instante t_1 para o instante t_2 .

Segundo Neto (2004), o sistema é caracterizado por uma função escalar L que depende de n coordenadas e n velocidades generalizadas que, de forma compacta, é

representada da seguinte forma:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (7.1)$$

denominada como a *lagrangeana* do sistema em que q_i podem ser

grandezas sem qualquer relacionamento com os sistemas de coordenadas usuais, eles são chamados de *coordenadas generalizadas*. Inclusive, essas coordenadas não precisam ser necessariamente ângulos e comprimentos. Podem ser quantidades gerais realmente, como, por exemplo, amplitudes numa expansão em série de Fourier (NETO, 2004, p. 256).

É chamado de *espaço das configurações* este espaço que é formado pelas coordenadas generalizadas em que as derivadas de primeira ordem de tais coordenadas são denominadas *velocidades generalizadas*.

Nesta formulação a *ação* é definida pela seguinte integral em um intervalo fechado $[t_1, t_2]$, ou seja

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (7.2)$$

A função lagrangeana a qual dissemos ser uma função escalar e, considerando uma única partícula no sistema, ou seja, $i = 1$, é dada pela diferença entre a energia cinética T e a potencial V , isto é,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 - V(x)$$

que, por conseguinte, gera, de forma generalizada, as equações de Lagrange para um sistema com i partículas, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \implies m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{dV(x_i)}{dx_i} \quad (7.3)$$

em que são as equações equivalentes às de Newton para um sistema com i partículas.

A outra formulação da Mecânica Clássica é a *Mecânica Hamiltoniana*. Neste caso, haverá a substituição da lagrangeana L por uma função H denominada *função hamiltoniana* e, da mesma forma, terá como ponto de partida o *princípio da mínima ação*.

Tanto a *Mecânica Lagrangeana* como a *Hamiltoniana* trabalham com os rudimentos do *Cálculo variacional* ou também conhecido como *Cálculo das variações*. Esta teoria preocupa-se em determinar extremos, ou seja, máximos ou mínimos de funcionais. Um funcional é uma aplicação de um espaço de funções ao invés de um espaço vetorial n dimensional. Assim, o cálculo variacional é a seguinte aplicação:

$$E : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

em que \mathcal{F} é um espaço de funções. A grosso modo, o funcional associa uma função de uma determinada classe a um número real.

Um exemplo clássico de um funcional é a distância entre dois pontos num plano ao longo de uma curva S escrita como $y = y(x)$. A ideia é determinar o menor comprimento de curva que passa por tais pontos, x_1 e x_2 . Considerando ds é um comprimento infinitesimal de S , então, pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \implies ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &\implies ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx\end{aligned}$$

e, portanto, o comprimento da curva considerada entre dois pontos é um funcional da função $y = y(x)$ dada por

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

De uma forma geral, um funcional pode ser escrito da seguinte forma:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$$

e que no caso do comprimento da curva a função f é $f = \sqrt{1 + (y')^2}$. Logo, a problemática consiste em encontrar uma função tal que $J[f]$ assumam um valor extremo, ou seja, um máximo ou mínimo. Numa situação simples, os problemas podem ser solucionados ao resolver a *Equação de Euler-Lagrange* a seguir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (7.4)$$

Voltando à formulação de Hamilton para a Mecânica Clássica, a substituição da lagrangeana L se dá pela função hamiltoniana definida por $H = H(q, p, t)$ em que q são as *coordenadas generalizadas*, p é chamado de *momento conjugado* ou *momento canônico* dado por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ para um sistema com i partículas e t é a variável temporal. A função H pode ser escrita da seguinte forma:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (7.5)$$

A mecânica de Hamilton é descrita por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem dadas por:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (7.6)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (7.7)$$

em que estas equações são chamadas de *Equações de Hamilton*. Para obtê-las é necessário fazer o uso da *Equação de Euler-Lagrange* (NETO, 2004).

A *Mecânica Hamiltoniana* tem como vantagem a “parte formal da teoria, principalmente no que se refere à passagem para a mecânica quântica” (NETO, 2004, p. 331). Em nossa apresentação das equações diferenciais ordinárias aplicadas à Química, analisamos a *Equação de Schrödinger* para determinar a função de onda, equação esta dada por $\hat{H}\Psi = E\Psi$ em que \hat{H} é chamado de *operador Hamiltoniano*. De fato, a mecânica formulada por Hamilton tornou-se uma ponte para a *Mecânica Quântica*.

Inicialmente, pensava-se que o movimento de partículas microscópicas poderia ser expresso a partir da formulação da Mecânica Clássica em relação às leis de Newton. Erwin Schrödinger, por intermédio de observações experimentais, evidenciou que as partículas em sistemas microscópicos deveriam obedecer às leis do movimento ondulatório. E a partir desse fato foi necessário formular uma mecânica que descrevesse o movimento das partículas na escala atômica, ou seja, a teoria proposta por Schrödinger

é uma generalização, que inclui a teoria de Newton como um caso particular no *limite macroscópico*, assim como a teoria da relatividade de Einstein é uma generalização, que inclui a teoria de Newton como um caso particular no limite de *baixas velocidades* (LIMA, 2009, p. 3).

A teoria de Newton é considerada um caso particular porque “experimentos cuidadosos [...] mostraram que a mecânica clássica falha ao analisar as transferências de quantidades muito pequenas de energia e os movimentos de corpos com massa muito pequena” (ATKINS; PAULA, 2008, p. 219). A Mecânica Clássica é determinística, ou seja, está preocupada, em um dos seus estudos, em determinar a posição de uma partícula em função do tempo, porém, a Mecânica Quântica é probabilística, ou seja, abandona-se a noção de trajetória e preocupa-se estatisticamente com a probabilidade de a partícula encontrar-se numa região do espaço. Então, a teoria quântica surgiu para descrever, também, sistemas físicos em que as dimensões são iguais ou abaixo da escala atômica. Alguns cientistas que trabalharam na base dessa nova mecânica são Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Max Planck, Albert Einstein, entre outros.

Nesta seção, apresentamos uma breve explicação da formulação da Mecânica Clássica dada por Newton, Lagrange e Hamilton e da formulação da Mecânica Quântica. Para um aprofundamento do estudo da Mecânica Clássica, recomendamos a leitura de Neto (2004). Nesta obra, o autor apresenta a formulação dessa mecânica do ponto de vista comparativo e aplicativo em relação aos três cientistas mencionados.

7.1.2 A equação de Schrödinger

A equação que apresentaremos a seguir foi modelada pelo físico Erwin Schrödinger e seu objetivo era determinar a função de onda de qualquer sistema. Estudaremos o caso

em que a equação não depende da variável temporal t , pois a equação tornaria-se uma EDP (equação diferencial parcial) que está fora dos limites desta pesquisa, porém, como curiosidade, apresentaremos sua forma tridimensional sem a resolução do problema em questão. Sejam m e E , massa e energia de uma partícula, respectivamente, então a *Equação de Schrödinger* é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi \quad (7.8)$$

em que $V(x)$ é a energia potencial no ponto x , E é a soma das energias potencial e cinética e \hbar é uma constante definida da seguinte forma

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457 \times 10^{-34} J_s$$

tal que h é a constante de Planck cujo valor é aproximadamente $6,626069 \times 10^{-34} J_s$.

A equação (7.8) descreve sistemas unidimensionais. Para sistemas tridimensionais, temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = E\Psi$$

em que ∇^2 (lê-se “nabla dois”) é dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

E de uma forma mais geral, podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

em que \hat{H} é o operador Hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V.$$

Como veremos a seguir, a solução da equação diferencial para sistemas unidimensionais é complexa, ou seja, há um fator i imaginário que nos remete a concluir que não é possível visualizar experimentalmente a posição da partícula pois seu movimento é totalmente imprevisível e isso teve como consequência um princípio muito importante na mecânica quântica que é o *princípio da incerteza de Heisenberg*: “é impossível especificar, simultaneamente e com a precisão que se quiser, o momento e a posição de uma partícula” (ATKINS; PAULA, 2008, p. 243).

7.1.3 Partícula na caixa unidimensional

Este problema consiste em analisar uma partícula com massa m confinada em uma caixa entre duas paredes no intervalo $[0, L]$. Segundo Atkins e Paula (2008), “esse modelo

é uma idealização da energia potencial de uma molécula na fase gasosa que é livre para se mover num recipiente unidimensional” (ATKINS; PAULA, 2008, p. 250).

Como exemplo de aplicações, esse modelo pode ser base para estudo da estrutura eletrônica dos metais e também em termodinâmica estatística (movimento translacional das partículas).

7.1.3.1 Soluções aceitáveis

Na região entre as paredes da caixa (no intervalo $[0, L]$) a energia potencial $V(x)$ é nula. Então, a equação de Schrödinger é escrita da seguinte forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi \quad (\hat{H}\Psi = E\Psi) \quad (7.9)$$

em que $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2}$ é o operador Hamiltoniano e $E_k = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$ é a soma das energias cinética e potencial.

Note que a equação (7.9) é uma EDO de segunda ordem homogênea e podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_k\Psi = 0$$

e abaixo segue o desenvolvimento de sua solução:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{k^2\hbar^2}{2m}\Psi = 0 \implies \frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0$$

cuja equação característica e sua solução é

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{-k^2}$$

e, portanto, as raízes são $\lambda_1 = ik$ e $\lambda_2 = -ik$ em que k é um número inteiro positivo. Logo, pelo Teorema 2.4.2 a solução geral é dada por

$$\Psi_k(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (7.10)$$

e pela relação de Euler $e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i\sin(kx)$ podemos reescrever a equação (7.10)

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = A(\cos(kx) + i\sin(kx)) + B(\cos(kx) - i\sin(kx)) \\ &= (A + B)\cos(kx) + (A - B)i\sin(kx) \end{aligned}$$

e sendo $C = A + B$ e $D = (A - B)i$, então a solução geral é dada por $\Psi_k = C\sin(kx) + D\cos(kx)$, $C, D \in \mathbb{R}$.

Em se tratando de uma partícula livre, qualquer valor de $E_k = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$ é uma solução aceitável. De acordo com [Atkins e Paula \(2008\)](#), quando a partícula não está livre, isto é, ela está confinada numa determinada região do espaço, as funções $\Psi(x)$ aceitáveis devem satisfazer certas condições de contorno.

Impostas as condições de contorno à função $\Psi(x)$, a energia da partícula em uma caixa unidimensional é quantizada de forma que ela se torne uma função de onda aceitável. Na próxima seção, apresentaremos a aplicação da partícula na caixa bidimensional que é modelada matematicamente por uma equação diferencial parcial em duas variáveis, x e y , uma independente da outra sendo possível a sua solução por separação de variáveis.

7.1.4 Partícula na caixa bidimensional

Agora, vamos analisar a partícula confinada em uma superfície retangular com comprimento L_1 na direção x e L_2 na direção y . Novamente, a energia potencial $V(x)$ é nula em todos os pontos com exceção nas paredes a qual é infinita.

A diferença na equação é que temos que considerar duas variáveis, uma vez que estamos em um espaço bidimensional; logo a *equação de Schrödinger* é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = E\Psi \quad (7.11)$$

Temos que resolver uma *Equação Diferencial Parcial*. Para isso, utilizaremos o método da separação de variáveis. Esse método consiste em dividir a equação inicial em duas ou mais equações diferenciais ordinárias, uma para cada variável.

7.1.4.1 Resolução por separação de variáveis

No caso da caixa bidimensional, a solução é simples. Escreveremos a função de onda como um produto de duas funções: uma dependendo apenas da variável x e a outra da variável y .

A separação consiste em escrever a função de onda da seguinte forma:

$$\Psi(x, y) = \chi(x)\varphi(y)$$

que resultará nas seguintes equações, cada uma para sua respectiva coordenada

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = E_x \chi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = E_y \varphi$$

$$E = E_x \chi + E_y \varphi$$

Como χ independe de y e φ independe de x torna-se viável a separação das variáveis por meio de um produto de funções. Então, por propriedades das derivadas parciais, podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi \varphi}{\partial x^2} = \chi \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

e também

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \chi \varphi}{\partial y^2} = \varphi \frac{d^2 \chi}{dy^2}.$$

Substituindo ambas as equações em (7.11), temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\chi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi \frac{d^2 \chi}{dy^2} \right) = E \chi \varphi$$

e, dividindo ambos os membros da equação por $\chi \varphi$ obtemos a seguinte expressão

$$\frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dx^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Notemos que o segundo membro da equação é uma constante, não variando, assim, independente dos valores de x e y no primeiro membro da equação. Se variarmos x apenas o termo que depende dessa variável altera-se e como o termo do segundo membro é uma constante podemos escrevê-la como $-\frac{2mE_x}{\hbar^2}$. E como raciocínio análogo, podemos realizar o mesmo para y escrevendo-o como $-\frac{2mE_y}{\hbar^2}$. Portanto, $E = E_x + E_y$. Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dx^2} &= -\frac{2mE_x}{\hbar^2} \\ \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} &= -\frac{2mE_y}{\hbar^2} \end{aligned}$$

que, como podemos observar, são duas equações diferenciais ordinárias cada uma para sua respectiva coordenada.

Esse processo resultou em equações diferenciais ordinárias semelhantes à equação de *Schrödinger* para a partícula numa caixa unidimensional. É possível fornecer o mesmo tratamento algébrico para uma partícula em uma caixa tridimensional separando suas respectivas variáveis e encontrando três equações diferenciais ordinárias.

A seguir, apresentaremos uma aplicação da função de onda que é o processo de tunelamento no qual é um fenômeno que a partícula atravessa a barreira de potencial.

7.1.5 Processo de tunelamento

Tunelamento quântico ou também chamado efeito túnel ocorre quando uma onda, em seu percurso, encontra uma barreira de potencial. A intensidade da onda não decresce a zero no obstáculo mas sim exponencialmente após o contato.

No estudo da mecânica clássica, um elétron com uma determinada energia E encontra uma barreira com energia P , ele reflete-se totalmente (para $P > E$). Porém, na mecânica quântica existe uma certa probabilidade de o elétron atravessar a barreira. É possível observar esse fenômeno por intermédio de experimentos e suas aplicações são inúmeras, como por exemplo, os diodos túnel que é um semicondutor extremamente rápido em que sua operação é na casa dos GHz , microscópios de varredura por sonda, transístores de efeitos de campo, entre outros.

Através da Equação de Schrödinger é possível calcular a probabilidade de tunelamento de uma partícula com massa m ao encontrar um obstáculo. Da equação (7.2) cuja solução é $\Psi_k = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ e $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} \Rightarrow k\hbar = (2mE)^{1/2}$ descreve a onda antes da incidência na barreira finita. Para a região da barreira, no intervalo $[0, L]$, a energia potencial V é constante, então a equação de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi = E\Psi.$$

Considerando que as partículas tenham as somas das energias potencial e cinética E menores do que a energia potencial V constante ($E < V$), então podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (V - E)\Psi = 0$$

De fato, nessas condições, $V - E$ resulta em energia positiva, então de acordo com o Teorema 2.4.1 (i) a solução é dada por

$$\Psi = Ce^{kx} + De^{-kx} \quad C, D \in \mathbb{R}$$

$$k\hbar = [2m(V - E)]^{1/2}$$

Observe que se $E > V$ a solução torna-se complexa de acordo com o Teorema 2.4.2. Com efeito,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (V - E)\Psi = 0 \implies \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0$$

sendo a equação característica dada por

$$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V) = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$. Fazendo $\varphi = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$, temos, como solução geral de acordo com o Teorema 2.4.2, a seguinte função:

$$\Psi(x) = A \cos(\varphi x) + B \sin(\varphi x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Há uma série de aplicações do efeito túnel e um exemplo são os diodos túneis descoberto em 1973 pelo físico Leo Esaki. Este tipo de semiconductor funciona somente na área de resistência negativa que, ao diminuir a tensão tem como consequência o aumento da corrente, porém apenas quando tais tensões estão próximas de zero. Ao trabalhar com tensões fora dessa região considerada, o diodo túnel funciona como um diodo comum.

Na próxima seção, apresentaremos o oscilador harmônico simples para a mecânica quântica. No [Capítulo 4](#), analisamos os osciladores em sistemas mecânicos e elétricos, porém o estudo a seguir estudaremos esse tipo de oscilação para sistemas microscópicos.

7.2 Oscilador harmônico simples (quântico)

No estudo da Mecânica Clássica, em algum momento, estudamos o oscilador harmônico simples. Neste trabalho, o estudamos no [Capítulo 4](#) fazendo uma análise por meio da Lei de Hooke. A descrição desse tipo de sistema é dado por uma energia potencial tal que

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.12)$$

onde k é a constante elástica da mola e x é o deslocamento em relação ao equilíbrio do sistema.

Vimos, também, que as soluções da equação diferencial $mx'' + kx = 0$, são funções que oscilam à medida que o tempo varia de acordo com a frequência natural $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Porém, é importante ressaltar que esse tipo de oscilador não está presente apenas em um sistema massa-mola. Estudamos as oscilações dos circuitos elétricos e há, por exemplo, as oscilações de um pêndulo e de fluidos.

Considere uma partícula de massa m que está sob a ação de um potencial V conforme a expressão (7.12). Observe que esta expressão tem a forma de uma função polinomial do segundo grau, ou seja, graficamente esta representa uma parábola, disso decorre que a característica da energia potencial deste tipo oscilador também é denominada como *energia potencial parabólica* (ATKINS; PAULA, 2008). Sabemos que $k = m\omega^2$, então

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (7.13)$$

A relevância para a mecânica quântica está nos níveis de energia para sistemas microscópicos, como nas vibrações das moléculas em gases e também em sólidos, em que a solução da Equação de Schrödinger para este tipo de potencial é importante. Vale ressaltar que esta não envolve a força que age sobre a partícula, mas sim a energia potencial sobre todo o sistema. Então, a constante k pode ser entendida como um valor que indica o quanto a energia potencial do sistema aumenta, sendo o valor de referência $V = 0$ e $x = 0$.

Sabendo que $k = m\omega^2$, então a Equação de Schrödinger (7.8) independente do tempo pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi = E\Psi \quad (7.14)$$

onde substituímos (7.12) em (7.8).

Em se tratando da expressão (7.12), a figura abaixo representa graficamente a energia potencial parabólica do sistema.

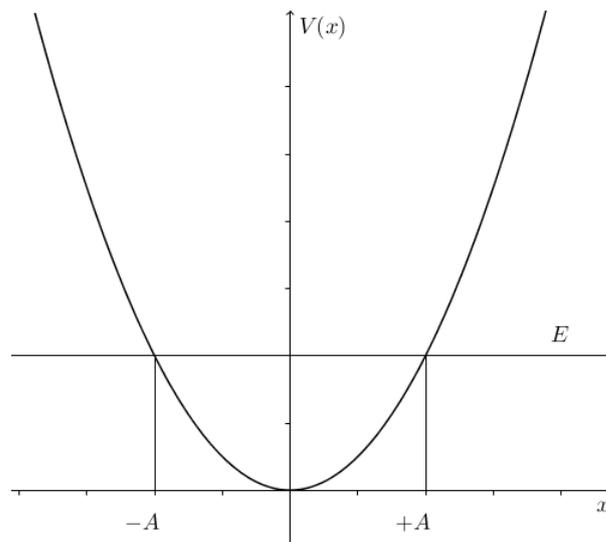


Figura 38 – Energia potencial V em função do deslocamento x .

Quando a partícula é afastada da posição inicial $x = 0$, a mesma passa a oscilar no intervalo $[-A, +A]$ e E é o nível de energia quando $x = \pm A$ e nestes pontos a energia cinética é nula sendo a energia total igual a energia potencial.

Para solucionar a Equação de Schrödinger para o oscilador harmônico, temos que fazer algumas substituições convenientes. Mas, antes disso, sabemos que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\Psi - E\Psi = 0$$

e, colocando na forma padrão, temos que

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{kmx^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0$$

Daí, sejam $\rho = \frac{\sqrt{km}}{\hbar} \implies \rho^2 = \frac{km}{\hbar^2}$ e $\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}$, então

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (\lambda - \rho^2 x^2) \Psi = 0$$

e, assim, seja $\xi = \sqrt{\rho} x$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= \frac{d\Psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \implies \frac{d\Psi}{dx} = \sqrt{\rho} \frac{d\Psi}{d\xi} \\ &\implies \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \rho \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \end{aligned}$$

sendo esta última implicação obtida ao observar as derivadas de ordem superior como sendo aplicação de operadores diferenciais. Com essa mudança de variável, a equação de Schrödinger é reescrita na variável ξ da seguinte maneira:

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} + (\rho - \xi^2)\Psi(\xi) = 0 \quad (7.15)$$

Na equação acima, fazemos $\Psi(\xi) = e^{-(\xi^2/2)} \eta(\xi)$, então

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\xi)}{d\xi} &= -\xi e^{-(\xi^2/2)} \eta(\xi) + e^{-(\xi^2/2)} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} \\ \implies \frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} &= e^{-(\xi^2/2)} \frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi e^{-(\xi^2/2)} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} + (\xi^2 - 1) e^{-(\xi^2/2)} \eta(\xi) \end{aligned}$$

que é o resultado, também, obtido por [Donangelo e Capaz \(2009\)](#). Agora, substituindo o resultado acima na equação (7.15), temos a seguinte equação diferencial de segunda ordem do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2\eta(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} + (\rho - 1)\eta(\xi) \quad (7.16)$$

conhecida como *Equação de Hermite*. As soluções dessa equação diferencial são chamadas de *Polinômios de Hermite*.

Definição 7.2.1 (*Polinômios de Hermite*). Os Polinômios de Hermite são definidos da seguinte forma:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} \quad (7.17)$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Temos também que,

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t) \quad (7.18)$$

o que significa dizer que se n é par, H_n é par e se n é ímpar, H_n é ímpar.

A partir de então, podemos definir os cinco primeiros Polinômios de Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \\ H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12 \end{aligned}$$

A equação (7.16) pode ser reescrita da seguinte maneira quando $\rho = 2n + 1$:

$$\frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2n\eta(\xi) \quad (7.19)$$

As soluções da equação acima são dadas por:

$$H_{2k}(\xi) = \sum_{i=0}^k c_i \xi^{2i} \quad \text{no caso par} \quad (7.20)$$

$$H_{2k+1}(\xi) = \sum_{i=0}^k d_i \xi^{2i+1} \quad \text{no caso ímpar} \quad (7.21)$$

em que c_i e d_i são os coeficientes. Estes são dados, segundo Donangelo e Capaz (2009), conforme a seguinte relação de recorrência:

$$c_{i+1} = \frac{4(i-k)}{2(i+1)(2i+1)} c_i \quad \text{para os polinômios de grau } 2k. \quad (7.22)$$

$$d_{i+1} = \frac{4(i-k)}{2(i+1)(2i+3)} d_i \quad \text{para os polinômios de grau } 2k+1. \quad (7.23)$$

Para um aprofundamento do estudo do oscilador harmônico simples e as soluções das equações de Hermite, sugerimos a leitura de Donangelo e Capaz (2009).

Neste capítulo, apresentamos a *Equação de Schrödinger* que tem como solução a função Ψ denominada função de onda. Primeiramente, mostramos a partícula na caixa unidimensional e, como soluções aceitáveis, a energia potencial é nula na região entre as paredes da caixa. Para este caso a *abstração* do modelo está em considerar como hipótese inicial a equação (7.5) e, a partir daí, a *formulação do modelo* tem como consequência a *Equação de Schrödinger* considerando a energia potencial V nula e, portanto, a equação dada é $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + E_k \Psi = 0$. Tendo a equação modelada, passamos à etapa *resolução*, neste caso, analiticamente, de acordo com o Teorema 2.4.2. Apresentamos como *aplicação* o processo de tunelamento que é conhecido, também, como efeito túnel. Esse efeito pode ser encontrado nos semicondutores chamados *diodos túneis*.

Para a partícula na caixa bidimensional, mostramos a *Equação de Schrödinger* para um espaço de duas dimensões. Apesar deste trabalho estar concentrado nas equações diferenciais ordinárias, este modelo é dado por equações diferenciais parciais, porém, de sorte, a resolução deste modelo é dada por separação de variáveis que consiste em transformar o problema inicial em duas EDO uma para cada variável, isto é, uma dependendo de x e a outra de y . Este par de equações diferenciais é dado por:

$$\frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = -\frac{2mE_x}{\hbar^2}$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\frac{2mE_y}{\hbar^2}$$

Como última aplicação, apresentamos o oscilador harmônico simples. Como *abstração*, utilizamos como hipótese a equação (7.8) e, sabendo que a energia potencial é $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$, substituímos esse valor na equação mencionada e, portanto, temos a *formulação do modelo* descrito na equação (7.16). Como *resolução*, transformamos a equação (7.16) numa equação denominada *equação de Hermite* cuja solução é dada pelos *polinômios de Hermite*.

8 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos modelos matemáticos descritos por Equações Diferenciais Ordinárias para diferentes áreas do conhecimento. A análise dos modelos foi dada a partir das etapas propostas por Bassanezi (2002) para a obtenção de um modelo matemático.

No Capítulo 2, foram apresentados alguns conceitos e teoremas sobre as Equações Diferenciais Ordinárias que foram utilizados para descrever e solucionar os modelos mostrados nos capítulos subsequentes. Para um aprofundamento do estudo desses tipos de equações sugerimos a leitura de Boyce e DiPrima (2006) e Zill e Cullen (2001) que também trazem outros modelos matemáticos diferentes dos apresentados neste presente trabalho.

No Capítulo 3, apresentamos o conceito de modelo matemático segundo Bassanezi (2002) e as etapas que ele descreve para obter o modelo estudado para assim adequá-las a cada situação apresentada nos modelos estudados.

No Capítulo 4, as vibrações livres amortecidas e não-amortecidas foram apresentadas como aplicações das EDO na Engenharia Mecânica bem como os circuitos elétricos RC, RL, LC e RLC na Engenharia Elétrica. Podemos, também, analisar os modelos matemáticos de ambas as áreas por meio de comparações. Apesar de serem áreas distintas, os modelos focalizados têm princípios muito comuns que é a oscilação do sistema mecânico e do sistema elétrico e então foi possível utilizar uma única análise para fornecer respostas para dois modelos aparentemente distintos. As Tabelas 1 e 2 apresentaram um conjunto de comparações neste sentido. É importante ressaltar que procuramos fornecer as resoluções de maneiras distintas, por exemplo, solucionando os problemas de valores iniciais tanto pela *Transformada de Laplace* quanto pelos teoremas apresentados no Capítulo 2 que também contém um breve estudo das transformadas. Um olhar tanto algébrico quanto gráfico foi utilizado para nos mostrar visões distintas dos fenômenos analisados e após as aplicações resumimos brevemente as etapas para a obtenção de um modelo proposto por Bassanezi (2002).

No Capítulo 5, apresentamos um modelo matemático aplicado à Física a respeito do movimento de queda livre com influência do atrito. Primeiramente, foi trazida uma abordagem histórica do Cálculo Diferencial e Integral que foi inventado para explicar e solucionar fenômenos naturais. Sua formalização deu início com Newton e Leibniz, mas sabemos que seus primórdios estão concentrados, como já citado, nos trabalhos de Eudoxo e Arquimedes, por exemplo. Esse modelo é abordado sem a resistência de um fluido, por exemplo, o ar, porém demos um enfoque com essa influência na qual recai numa EDO de Bernoulli.

No [Capítulo 6](#), foram apresentados dois modelos matemáticos, sendo o primeiro, o Modelo de Gompertz para crescimento de tumores comparando-o com uma abordagem via Modelo Logístico e o segundo, Modelo matemático para absorção de drogas. No primeiro, procuramos abordar o crescimento de tumores de acordo com o estudo de [Domingues \(2011\)](#) e uma nova abordagem com os mesmos dados pelo Modelo Logístico. A partir disso, tendo ambos os dados, procuramos compará-los e observar as diferenças existentes. No segundo modelo, abordamos a queda da concentração da medicação na corrente sanguínea via modelo simples em que sua solução dá-se por separação de variáveis. Para uma aplicação, buscamos informações do medicamento *Fenobarbital* e estudamos algebricamente e graficamente a queda de concentração desta medicação na corrente sanguínea.

No [Capítulo 7](#), um estudo de modelos matemáticos na Química foi apresentado. Estudamos a função de onda de acordo com a Equação de Schrödinger para qualquer sistema. Primeiramente, mostramos as soluções aceitáveis da partícula na caixa unidimensional e após isso, apresentamos a partícula na caixa bidimensional; modelada matematicamente por uma equação diferencial parcial a qual resolvemos por separação de variáveis transformando, assim, o problema em duas equações diferenciais ordinárias, uma para cada variável em questão. O processo de tunelamento foi uma outra aplicação apresentada. O efeito túnel consiste em uma partícula que atravessa uma barreira de potencial não ficando totalmente confinada dentro da caixa como as aplicações da partícula na caixa unidimensional e bidimensional. O diodo túnel é um semicondutor rápido que trabalha na casa dos *GHz* e é um tipo de aplicação do efeito túnel. Finalmente, apresentamos o oscilador harmônico simples na mecânica quântica que analisa a oscilação em sistemas microscópicos. Por exemplo, o movimento de vibração de dois átomos em uma molécula diatômica pode ser representado por esse tipo de oscilador. A modelagem desse sistema é dada pela Equação de Schrödinger sendo a energia potencial deste sistema fornecida por $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Dado que a função V é um polinômio de grau dois, então tal energia é denominada de “energia potencial parabólica”. A solução da equação diferencial que descreve este sistema é dada pelos *polinômios de Hermite*.

Como já dito anteriormente, procuramos, nesta pesquisa, apresentar alguns modelos matemáticos em cada área do conhecimento abordada. Sugerimos uma continuação da pesquisa por meio de outros modelos em outras áreas ou até o aprofundamento nas áreas apresentadas aqui. Há a possibilidade de fornecer, também, um tratamento numérico para solucionar as equações diferenciais ordinárias que descrevem os fenômenos apresentados e não apenas um tratamento analítico como foi mostrado. Trabalhamos com modelos contínuos, porém há a possibilidade de trabalhar com modelos discretos, por exemplo, o modelo logístico de diferença dado por $y_{t+1} = y_t(r - dy_t)$, aplicações de sistemas lineares e não lineares de diferenças para determinar a interação entre duas espécies em que há um sistema hospedeiro e um parasita. No caso de sistemas de equações diferenciais no caso contínuo é possível trabalhar concomitantemente com os conceitos de Álgebra

Linear, como auto-valores e auto-vetores tanto no caso real como no complexo. Um modelo matemático descrito por um sistema de equações diferenciais é o predador-presa que descreve a interação de duas espécies diferentes de animais em um mesmo ambiente ou até mesmo os chamados modelos de competição em que duas espécies de animais que ocupam o mesmo ecossistema competem não entre si, mas pela mesma fonte de recursos, por exemplo, alimentos e habitat.

Por intermédio de nossas questões iniciais, principalmente aquela que verte na utilização dos conceitos matemáticos profissionalmente, apresentamos modelos descritos por equações diferenciais que explicam fenômenos que são estudados por profissionais de cada área. A conceitualização matemática e a sua possível intervenção prática por meio da modelagem de sistemas fornece ao estudante possíveis subáreas em que há a possibilidade de estudar projetos e aplicá-los. Um exemplo é o circuito *RLC* em que é possível observar, em um osciloscópio, o comportamento da oscilação por causa da dissipação de energia no resistor, ou seja, por meio de um aparelho usado na prática é possível confirmar e comparar os cálculos realizados teoricamente.

Do que apresentamos nesta pesquisa, sugerimos, para cada modelo nas áreas do conhecimento abordadas, a criação de sequências didáticas para o ensino de EDO por meio da Modelagem Matemática. Como dito na Introdução, não estamos defendendo o ensino deste tópico matemático sem seu enfoque formal, mas que tenha a possibilidade de apresentar aplicações das equações diferenciais, pois elas surgiram para resolver problemas de outras ciências.

Referências

- ATKINS, P.; PAULA, J. de. *Físico - Química*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Emanped*, Caxambú, 2001.
- BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Biomatemática*, Campinas, n. 9, p. 9–22, set. 1999.
- BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório*. 1. ed. São Paulo: UFABC, 2002.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino - aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- BATTAGLIN, P. D.; BARRETO, G. Revisitando a história da engenharia elétrica. *Revista de Ensino de Engenharia*, Campinas, v. 30, n. 2, p. 49–58, 2011.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BOYER, C. A. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2010.
- BURAK, D. *Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série*. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Neto” - UNESP - Câmpus Rio Claro, Rio Claro, 1987.
- CARVALHO, H. M. de. *Modelagem matemática: elementos históricos sobre seu desenvolvimento em cursos de pós-graduação*. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Universitária) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Neto” - UNESP, Rio Claro, 2010.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- DOMINGUES, J. S. Análise do modelo de gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. *Biomatemática IMECC - Unicamp*, Campinas, n. 21, p. 103–112, 2011.
- DONANGELO, R. J.; CAPAZ, R. B. *Introdução à Mecânica Quântica*. vol. 3. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.
- FICHERA, G.; LACAGNINA, M.; PETRONE, F. Modelling of torsion beam rear suspension by using multibody method. *Multibody System Dynamics*, Netherlands, v. 12, n. 4, p. 303–316, 2004.

- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- FRIBERG, S.; MATTSON, S. On the growth rates of human malignant tumors: implications for medical decision making. *Journal of Surgical Oncology*, Stockholm, n. 65, p. 284–297, abr. 1997.
- GILLESPIE, T. D. *Fundamentals of vehicle dynamics*. Warrendale: Society of Automotive Engineers Inc, 1992.
- HALLIDAY, D.; WALKER, J.; RESNICK, R. *Fundamentos de física*. vol. 2. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- HALLIDAY, D.; WALKER, J.; RESNICK, R. *Fundamentos de física*. vol. 3. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- INCA. *Ações de enfermagem para o controle do câncer: uma proposta de integração ensino-serviço*. 3. ed. Rio de Janeiro: INCA, 2008.
- KENNETT, B. *A short history of suspension*. 2000. Disponível em: <<http://www.citroenet.org.uk/miscellaneous/suspension/suspension2.html>>. Acesso em: 22 mar. 2014.
- KRAIGE, L.; MERIAN, J. *Mecânica Dinâmica*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1997.
- LIMA, C. *Mecânica Quântica de Schrödinger*. Edição de janeiro de 2009. Minas Gerais: Notas de Aula, 2009.
- MODELO. In: DICIONÁRIO da Língua Portuguesa. São Paulo: iDicionário Aulete, 2014. Disponível em: <http://aulete.uol.com.br/site.php?mdl=aulete_digital&op=loadVerbete&pesquisa=1&palavra=modelo>. Acesso em: 25 mar. 2014.
- NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. Rio de Janeiro: Pearson - Prentice Hall, 2003.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.