



## **INTRODUÇÃO AO ENSINO DAS FUNÇÕES POR MEIO DAS TICS COM A MODELAGEM MATEMÁTICA**

Wiliam Oliveira Rocha

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado  
pelo Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

IFSP  
São Paulo  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Rocha, Wilian Oliveira.

Manual de Elaboração de Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática / Wilian Oliveira Rocha. - São Paulo: IFSP, 2014.

76f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador(es): Rogério Ferreira da Fonseca.

1. Função. 2. Modelagem Matemática. 3. Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs). 4. Ensino-Aprendizagem. 5. Contextualização I. Introdução ao ensino das funções por meio das TICs com a Modelagem Matemática.

---

WILIAN OLIVEIRA ROCHA

INTRODUÇÃO AO ENSINO DAS FUNÇÕES POR MEIO DAS TICS  
COM A MODELAGEM MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 03/07/2014

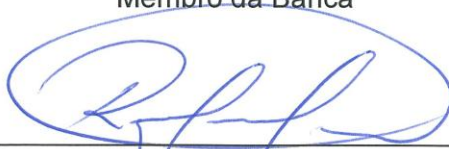
CONCEITO: 100 (dez)



Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Membro da Banca



Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Membro da Banca



Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
Orientador



Aluno: Wilian Oliveira Rocha



*“Lute com determinação,  
Abrace a vida com paixão  
Perca com classe e  
Vença com ousadia.  
O mundo pertence a quem se atreve  
E a vida (...)  
é muito para ser insignificante”.*

*Charles Chaplin*



*Aos meus Pais, a minha pequena,  
aos meus familiares e amigos.*





## **AGRADECIMENTOS**

Há momentos em nossa vida que é de fundamental importância contar com a ajuda de algumas pessoas.

Ao longo desses quatro anos de formação, felizmente pude contar com várias dessas pessoas em meu caminho e são a elas que ofereço os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço primeiramente a Deus que com a força da vida nos dá saúde, sabedoria, humildade e força de vontade para enfrentarmos todos os desafios e assim alcançarmos os nossos objetivos.

Agradeço a minha mãe Maria Marlene Oliveira Rocha e ao meu pai Arnaldo Soares Rocha que sempre estiveram ao meu lado e me proporcionaram, além da vida, a educação, a responsabilidade, o carinho, a bondade, a honestidade e acima de tudo a humildade para observar os diversos caminhos do mundo e me tornar o cidadão que sou hoje.

Agradeço a minha esposa Fernanda Roberta de Lima Silva, que desde o primeiro dia no vestibular até a presente data, enfrentou todos os desafios ao meu lado com muito amor e compreensão, me incentivando a continuar lutando e dar o melhor que posso em todas as etapas deste curso e da minha vida.

Agradeço a todos os professores, que contribuíram para a minha formação desde a pré-escola até a graduação. Em especial, agradeço a orientação do Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca, que além dos seus ricos conselhos, paciência e sabedoria para me auxiliar na construção deste trabalho, também me ofereceu diversos conhecimentos durante aulas ministradas no curso e nos dois anos que participei do PIBID neste instituto; a Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Cristina Lopomo Defendi que me auxiliou na estrutura, edição e revisão de cada capítulo que será apresentado e ao Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho que me aconselhou em muitos aspectos importantes e reflexivos desta pesquisa além de compartilhar com grandes conhecimentos matemáticos e humanos ao longo do curso.

A todos os amigos de classe e companheiros da Matemática que contribuíram de diversas formas em muitos momentos de estudos e amizade ou até mesmo com uma simples conversa descontraída e necessária para fazer daquele momento melhor. Em especial, Marcão, Fabrício, Régis, Thaisinha, Luana, Eder, Fábio, Sérgio, Daiana, Thalita, Dani, Carol, André, Ana Olívia, David, Léo, Rafael (Polési, Coradini e Prado), Orlando, Fiu, Éverton, Paçoca, Leandro, Diego, Elígio, Anderson (Poeta e Perucão), Laura, Elaine, Jorge, Luciano, Valdir, Fernando (Pavan e Danilo) e outros que também fizeram parte de importantes e inesquecíveis etapas do curso.

Agradeço ao Prof. Ms. José Maria Carlini pelos aprendizados nas aulas e também pela oportunidade concedida durante os dois anos de projeto EAD, em que vivi a maravilhosa experiência de auxiliar na elaboração de apostilas de Matemática direcionadas aos alunos do Ensino Médio do IFSP.

Agradeço a Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Graziela Marchi Tiago, que foi a responsável por praticamente todo o meu aprendizado dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. De fato, esses conhecimentos foram essenciais para a minha formação e maturidade matemática conquistada.

Agradeço ao Prof. Ms. Amari Goulart e à Prof.<sup>a</sup> Ms. Fabiane Guimarães Vieira Marcondes que me concederam a oportunidade de ministrar as primeiras aulas da minha vida durante o estágio com os alunos do ensino Médio do IFSP.

A CAPES pela oportunidade de ter sido integrante durante 2(dois) anos do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência (PIBID).

Agradeço também ao Prof. Ms. Cesar Adriano Batista, a Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Iracema Hiroko Iramina Arashiro, ao Prof. Dr. Armando Traldi Júnior, a Prof.<sup>a</sup> Ms. Elisabete Teresinha Guerato, a Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Mariana Pelissari Monteiro de Aguiar Baroni, ao Prof. Ms. Marco Aurélio Granero Santos e ao Prof. Maurício França Silva por terem me oferecido os seus ricos conhecimentos matemáticos, pedagógicos e de vida durante a minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente participaram para que este momento acontecesse.

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso foi elaborado com o objetivo principal de construir uma proposta de atividades que auxilie o discente na compreensão de características fundamentais de uma FUNÇÃO, como o aspecto variacional de uma relação entre grandezas. Para possivelmente favorecer a compreensão dos alunos em um primeiro momento, procuramos construir uma atividade motivadora e contextualizada. Para isso, desenvolvemos uma estratégia de ensino articulada a duas metodologias: a Modelagem Matemática e o uso das TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação). Como principal produto desse trabalho indicamos uma proposta de abordagem que possa vir a auxiliar ou preparar inicialmente o aluno ao aprendizado das funções, além da possibilidade de aprimorar o seu senso-crítico ao perceber que a Matemática pode ser uma ferramenta importantíssima para prever situações futuras e até mesmo mudá-las com possíveis inferências.

**Palavras-chaves:** Função; Modelagem Matemática; Tecnologias da Informação e Comunicação; Ensino-aprendizagem.



## ABSTRACT

This work aims to build an activity proposal that helps students understand the fundamental characteristics of a function, such as the variation aspect of a relationship between quantities. To possibly facilitate the students' understanding at the first moment, we tried to build a contextualized and motivational activity. Therefore, we tried to relate a strategy with two methodologies: mathematical modelling with ICTs (Information and Communication Technologies). As the main consequence of this work we indicate a proposal that can initially help or prepare the student to learn functions and also enable him to improve his critical sense to detect that math can be a very important tool to predict future situations or even change it with possible inferences.

**Keywords:** Function; Mathematical Modelling; Information and Communication Technologies; Teaching-learning.



## LISTA DE FIGURAS

**Pág.**

Figura 1 – Esquema Geral para a Modelagem Matemática .....	47
Figura 2 – Disponibilidade de água por habitante segundo sua situação e região habitada.....	52
Figura 3 – Organização dos dados da tabela na Planilha do programa EXCEL. ....	56
Figura 3.1. – Seleção dos dados referentes a um continente. ....	57
Figura 3.2. – Procedimento para adicionar uma linha de tendência.....	57
Figura 3.3. – Janela para formatar uma linha de tendência. ....	58
Figura 3.4. – Gráfico exponencial e linear dos dados referentes a América Latina...59	
Figura 3.5. – Gráfico exponencial do continente Africano. ....	61
Figura 3.6. – Gráfico exponencial do continente Asiático.....	61
Figura 3.7. – Gráfico exponencial do continente Europeu.....	62
Figura 3.8. – Gráfico exponencial do continente Norte Americano. ....	62
Figura 4 – Gráfico Exponencial referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Licenciatura em Matemática/Física.....	69
Figura 4.1. – Gráfico Linear referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Engenharia na Escola Politécnica. ....	69
Figura 4.2. – Gráfico Linear referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Medicina. ....	70
Figura 4.3. – Gráfico Exponencial referente a Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Licenciatura em Matemática/Física.70	
Figura 4.4. – Gráfico Exponencial referente a Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Engenharia na Escola Politécnica. .71	
Figura 4.5. – Gráfico Exponencial referente a Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Medicina. ....	71





## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 1 - Tabela da disponibilidade de água por habitante em 1000m <sup>3</sup> no decorrer das últimas décadas segundo seu continente .....	52
Tabela 2 - Tabela dos candidatos inscritos na FUVEST segundo alguns cursos no decorrer dos últimos anos.....	63
Tabela 3 - Tabela com a relação candidato-vaga da Fuvest segundo alguns cursos no decorrer dos últimos anos.....	63



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PISA	Programme International Student Assessment
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO .....	23
2 ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES, TICs e MODELAGEM MATEMÁTICA .....	27
2.1. Funções.....	27
2.1.1. Idade Antiga .....	28
2.1.2. Idade Média.....	29
2.1.3. Idade Moderna .....	29
2.2. As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) .....	35
2.2.1. O surgimento das TICs.....	36
2.2.2. As TICs e a pedagogia .....	38
2.3. Modelagem Matemática .....	39
2.3.1. Conceitos e Características.....	40
3 METODOLOGIA E EMBASAMENTO TEÓRICO .....	45
4 PROPOSTA DE ATIVIDADES .....	51
4.1. Atividade 1 – Sustentabilidade .....	51
4.2. Atividade 2 – Profissões .....	63
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	73
REFERÊNCIAS.....	75



## 1 INTRODUÇÃO

Inúmeras são as dificuldades enfrentadas por grande parte dos professores de matemática atualmente, entre elas existe a de tornar compreensível alguns conceitos fundamentais no primeiro contato dos alunos com o tema abordado, principalmente quando o conteúdo se trata de algo vasto e generalizador como é o caso do estudo das funções.

Após a leitura e análise de alguns trabalhos acadêmicos referenciados nesta monografia, percebemos que tais dificuldades podem surgir com o uso inicial de metodologias “teóricas” e “mecanicistas”, como apontam Almeida e Brito (2005) e Rossini (2006) ao mencionarem que na introdução deste conceito, o aluno do Ensino Médio em muitas das vezes não consegue compreender o significado de uma função por meio do ensino generalizador direcionado por definições ou com procedimentos de construção de tabelas como abordam alguns livros didáticos. Outro exemplo neste contexto seria este estudo direcionado a terna “definição, exemplos e exercícios”, ou seja, um conjunto de regras, definições, repetições de exemplos e dispositivos práticos que viabilizam a resolução de uma determinada tarefa proposta em sala de aula.

Como veremos adiante, um exemplo desse mecanicismo pode ser destacado no tratamento das funções como um conjunto de pares ordenados que obedece a uma determinada lei atribuindo diversos valores para “ $x$ ” e encontrando necessariamente valores correspondentes em “ $y$ ”, como aponta Vasco (2003), sustentando que o tratamento do ensino das funções focado exclusivamente por meio de definições como essa, torna este aprendizado estático e desagradável para a maioria dos alunos.

Longe do propósito de defender que as definições não são válidas para o ensino das funções ou que alguns métodos mecanicistas não resultem em efeitos positivos ao processo de ensino e aprendizagem, nossa pretensão é procurar argumentos que nos auxiliem para a construção de algo atrativo, cotidiano e facilitador ao aluno, no que se refere ao seu primeiro contato com este importante objeto de estudo. Eis aqui o surgimento das primeiras indagações inerentes ao problema de pesquisa deste

trabalho: Seria possível desenvolver inicialmente uma atividade atrativa, cotidiana e reflexiva aos alunos, a qual concebesse um aprendizado relacionado a conceitos fundamentais de uma função, como o processo de variação entre grandezas ou a identificação de uma função crescente, constante ou decrescente? Existe a possibilidade de articular diferentes metodologias de ensino para a construção de uma proposta de atividade que possivelmente estimule o senso crítico-reflexivo dos alunos e auxilie no processo de ensino-aprendizagem diante ao conceito das funções? Essa proposta de atividades junto à metodologia adotada poderia servir como base para aulas futuras sobre propriedades, elementos e características mais específicas deste conceito?

Essas indagações e o rumo deste trabalho surgiram a partir de observações relacionadas ao tratamento do ensino das funções em alguns livros didáticos da Educação Básica, como mencionaremos no terceiro capítulo, em sistema de apostilas de rede particulares de ensino e em experiências pessoais ou de colegas de curso, vivenciadas na maioria das vezes por métodos mecanicistas que contradizem algumas sugestões sobre o processo de ensino e aprendizagem das funções, como destacam duas passagens dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM):

Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas (BRASIL, 2002, p.121).

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar, através da leitura e interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia (BRASIL, 2002, p. 43).

Na procura de soluções ao nosso problema de pesquisa e atendendo requisitos fundamentais para auxiliar em melhorias no ensino e aprendizado do conceito de funções, direcionamos assim este trabalho.

No capítulo 2, procuramos estabelecer uma análise histórica e evolutiva dos três eixos que oferecerão base para a construção da proposta de atividades aqui



sugerida. Assim, faremos a apresentação de tais eixos em três seções: Funções, TICs e Modelagem Matemática.

No capítulo 3, para embasarmos as etapas da nossa proposta de atividades, utilizamos a junção e articulação de dois métodos descritos por Bassanezi (2011), ao qual denominamos de Esquema Geral com Esquema Específico.

No capítulo 4, apresentamos duas propostas de atividades nas quais utilizamos o processo de Modelagem Matemática com o uso das TICs, tendo como objetivo principal possíveis melhorias no ensino e aprendizado para a introdução do conceito de função e visando também os seguintes objetivos:

- ✓ Uma análise crítica e reflexiva dos alunos no decorrer das atividades em grupo;
- ✓ O entendimento de ideias fundamentais do conceito como o processo variacional de relação entre grandezas;
- ✓ Previsão de situações e proposta de estratégias de melhorias para a sociedade e ambiente em que vivem a partir dos gráficos construídos;
- ✓ Percepção dos alunos de que a Matemática pode ser uma ferramenta importantíssima para questões cotidianas da sociedade.

Por fim, no capítulo 5, descrevemos as considerações finais deste trabalho, apresentando algumas respostas ao problema de pesquisa e sugerindo possíveis complementações e aplicações da metodologia de ensino apresentada neste trabalho.



## **2 ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES, TICs e MODELAGEM MATEMÁTICA**

Neste capítulo, serão enunciados aspectos históricos com definições e análises dos objetos matemáticos: Funções, TICs e Modelagem Matemática. Para isso, apoiaremos em opiniões de autores, cujas obras e artigos auxiliem a consolidar as ideias principais de cada um desses conceitos. Pretendemos com as três seções dar o suporte necessário para uma articulação entre as duas metodologias de ensino que utilizaremos junto ao embasamento teórico que justificará a proposta de atividades deste trabalho.

### **2.1. Funções**

Nesta seção apresentaremos de um modo cronológico como se deram os principais aspectos evolutivos para a construção do conceito de uma função, observando contribuições de grandes matemáticos neste processo. O objetivo principal é que essa abordagem sirva como parâmetro para indicar as diversas mudanças que ocorreram durante a história deste conceito além de enfatizar sua importância contextualizada ao cotidiano e inserida na própria matemática. Para tanto, utilizaremos as obras de Boyer (1996) e Eves (2004) juntamente com a tese de Rossini (2006) e o artigo de Bueno e Viali (2009), delas decorrerão algumas observações.

Atualmente, diante da análise de diversas situações cotidianas, como a procura de valores aproximados numa certa região em relação à quantidade populacional, a disponibilidade de água ou de uma profissão mais escolhida, todas em função de um determinado tempo, faz-se necessário o auxílio da Matemática, além de sua contribuição para generalizar, analisar, prever, sintetizar, refletir ou até mesmo representar certos acontecimentos para melhor entendimento de inúmeras questões abordadas. Podemos perceber tais aspectos dessas representações com o estudo do conceito das funções, tendo em vista que podemos investigar um determinado fenômeno por meio de diversas formas, por exemplo: com a representação algébrica; por tabelas; gráficos; diagramas; ou até mesmo pela descrição da situação utilizando a língua materna.

Todas essas diferentes formas não só ajudam no entendimento do objeto estudado, como também auxiliam em melhorias na compreensão do próprio conceito de funções, segundo Elia e Spyrou (2006):

Ao se trabalhar com funções, a distinção entre estas e as representações utilizadas para descrever as suas leis é uma das condições essenciais para a compreensão desse conceito. (Elias e Spyrou, 2006 *apud* BUENO & VIALI, 2009, p. 37).

No entanto, o estudo dessas diferentes possibilidades de representações foi surgindo conforme o homem necessitava de auxílio na procura de soluções ou de diversas interpretações, voltadas a problemas de caráter cotidiano ou teórico, inserido na própria Matemática. De fato, o tempo foi um fator determinante ao processo de mudanças e evolução do conceito de funções. Como aponta Rossini (2006):

Na antiguidade, o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades não levou à criação de nenhuma noção geral de quantidades variáveis nem de funções. Na idade Média, na ciência europeia do século XIV, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era trazido por uma descrição verbal ou por um gráfico, mais que por uma fórmula. No período moderno, a partir do século XVI e especialmente durante o século XVII, a classe das funções analíticas tornou-se a principal classe utilizada. (ROSSINI, 2006, p.32).

Encontramos também marcas desse processo evolutivo com Eves (2004), ao indicar que o conceito de função, assim como as noções de geometria, passaram por importantes evoluções.

### **2.1.1. Idade Antiga**

Na idade antiga, mal conseguimos encontrar algum trabalho que descreva a ideia de variação de uma função, mesmo se tratando de suas diversas representações: algébrica, por diagramas, língua materna, por tabelas, etc., com exceção de algumas obras de um grande matemático dessa época, Ptolomeu da Alexandria. Foi a partir de seus “métodos de cordas” que conseguimos observar em suas tabelas trigonométricas uma relação entre duas grandezas: ângulo e a medida da corda.

De acordo com Boyer (1996), o registro de observações feitas por Ptolomeu está compreendido no período de 127 a 151 D.C. e seus estudos pertencem a uma das obras mais importantes dessa época: *O Almagestro*, uma obra voltada para a área

trigonométrica da antiguidade que contém 13 livros escritos pelo próprio Ptolomeu. Esse conceito de função, mesmo de forma superficial, já apresentava uma das principais características do conceito: o aspecto variacional de relação entre grandezas, no qual diferentes medidas de cordas resultavam em ângulos diferentes.

### **2.1.2. Idade Média**

Na idade média foram encontradas representações mais significativas sobre o conceito de uma função. Mesmo não aparecendo uma explicação ou descrição do que é o tema propriamente dito, alguns estudos de Nicolas Oresme (1323-1382) foram de grande relevância para este contexto. Segundo Stillwell (1989):

Oresme foi a primeira pessoa que utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, Oresme marcou pontos, representando instantes de tempo (ou longitudes) e, para cada instante, traçou, perpendicularmente a reta de longitudes, um segmento de retas (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. (STILLWELL, 1989, p.65 *apud* ROSSINI, 2006, p.35).

Nesse contexto já podemos observar uma ideia de interdependência entre duas grandezas, ficando exposta uma representação de função por meio de um modelo similar ao de um gráfico.

### **2.1.3. Idade Moderna**

Esse período foi o que mais contribuiu para uma noção geral do conceito de função, principalmente com o auxílio de grandes matemáticos dessa era. Com as Escolas filosóficas de Oxford e de Paris, que consideravam a Matemática como o principal instrumento para o estudo de fenômenos naturais, a evolução e maturidade de muitos conceitos matemáticos foram se alicerçando com o tempo.

Nessa época o homem já se deparava com muitas dúvidas e questões que lhe incomodavam durante o seu dia-a-dia. Diversas dessas questões encaixavam-se em padrões de uma relação entre grandezas, as quais caracterizam parte do estudo de uma função.

Um desses grandes matemáticos foi o italiano Galileu Galilei, que nasceu em Pisa, em 1564. Galileu era um crítico observador de fenômenos naturais, como menciona Eves (2004), ao citar um fato ocorrido com o matemático. O autor relata em sua obra que no meio de uma multidão de estudantes, professores e religiosos, Galileu deixou cair dois pedaços de metal, um deles com peso dez vezes maior ao do outro, do alto da torre de Pisa. Os dois pedaços chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo tempo, contrariando assim afirmações feitas por Aristóteles, as quais diziam que o corpo mais pesado cairia mais rapidamente.

Com tantas experiências voltadas a fenômenos naturais, Galileu criou uma lei afirmando que a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de sua queda, representando-a pela fórmula  $s = gt^2/2$ . Essa expressão representa algebricamente uma função, sendo a variável independente o “tempo” e a dependente o “espaço”. Cabe salientar que essa função já poderia ser trabalhada com valores reais em seu domínio.

De acordo com Eves (2004):

Devemos a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiências e teoria. Ele fundou a mecânica dos corpos em queda livre, lançou os fundamentos da dinâmica em geral, e sobre esses fundamentos mais tarde Newton foi capaz de construir uma ciência. (EVES, 2004, p.335).

Com tantos estudos, Galileu além de ter contribuído para uma grande ampliação inicial no conceito de função, conseguia transformar experimentos naturais e humanos em Matemática para um melhor entendimento do objeto estudado.

Logo após, grande parte da ciência contou com a participação de dois matemáticos que contribuíram de forma fundamental para o desenvolvimento da geometria analítica: René Descartes (1596 -1650) e Pierre Fermat (1601-1665), que utilizaram como auxílio, a representação simbólica da álgebra, desenvolvida pelo francês François Viète (1540-1603). Toda formalização da Geometria Plana vista de um modo algébrico e analítico foi de tamanha importância para a formalização do conceito de uma função.

Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no séc. XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de

Fermat como a origem essencial do assunto. Só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados (EVES, 2004, p. 383).

Com a construção da Geometria Analítica, ora mais cedo ou ora mais tarde, o francês René Descartes iria se deparar com algumas passagens que o fariam desenvolver, mesmo que de forma parcial ou dissertativa, o conceito de uma função. Com a introdução das ideias do Cálculo Infinitesimal, Yuoschkevitch (1976), aponta as contribuições dos estudos de Descartes:

Pela primeira vez e de forma clara, é sustentado que uma equação em  $x$  e  $y$  é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra (YUOSCHKEVITCH, 1976, p.52 *apud* BUENO & VIALI, 2009, 40).

Por meio de uma representação analítica junto ao conceito de função, Descartes escreveu em uma de suas mais famosas obras, denominada *La Géométrie*, em 1637, a seguinte passagem:

Tomando sucessivamente infinitas grandezas diversas para a linha  $y$ , encontram-se dessa maneira infinitas grandezas diversas para a linha  $x$ , portanto, tem-se uma infinidade de pontos tais que aquele que é marcado  $C$ , por meio do qual se descreve a linha curva requerida (DESCARTES, 1637, p. 86 *apud* YUOSCHKEVITCH, 1981, p.25 *apud* ROSSINI, 2006, p. 38).

No entanto, a necessidade da formalização do conceito de função ficou acentuada no momento em que Fermat contribuiu com o estudo do Cálculo Infinitesimal. As ideias de Diferenciação e Integração de Fermat foram apresentadas de um modo muito similar ao que estudamos atualmente, exigindo uma concepção mais formalizada e específica do conceito.

Ao passar do tempo, com a Matemática girando em torno das ideias do Cálculo Infinitesimal, muitos matemáticos foram se destacando e desenvolvendo diversas melhorias para a ciência. Conceitos se tornaram cada vez mais evoluídos e adquiriram simbologias que facilitaram determinados estudos. Assim, o conceito de função teve um auxílio significativo de um dos matemáticos mais importantes da história da Matemática: Leonhard Euler, um suíço que nasceu na Basileia em 1707 e viveu até o ano de 1783.

De acordo com Boyer (1996), uma das mais importantes simbologias criadas por Euler, foi a notação  $f(x)$ , para uma função de  $x$ . O autor salienta que nossas notações são atualmente desta forma justamente pela importante contribuição deste matemático.

Ao descrever um de seus capítulos em sua tese de doutorado, examinando as diferentes e importantes contribuições de Euler para a construção do conceito de função, Rossini (2006) aponta diversas traduções realizadas por Yuoschkevitch (1981), no que se refere à obra *Introduction à l'analyse infinitésimale d'Euler* (1748), a qual foi publicada em Paris (1797) e constitui variadas definições, propriedades e características a respeito deste conceito.

Tempos após os estudos realizados por Euler, apoiando-se em seu mestre J. Bernoulli, o matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813) concorda com as definições, propriedades e características de uma função. Porém, Lagrange reorganiza e aprimora o conceito. Vejamos:

Chama-se função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não de outras quantidades que podem ser vistas como tendo valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, só se consideram as quantidades que se supõem variáveis; sem nenhuma atenção as constantes que podem ser misturadas (LAGRANGE, 1881, p.15 *apud* YUOSCHKEVITCH, 1981, p.41” tradução nossa” *apud* ROSSINI, 2006, p. 43).

No entanto, nesse mesmo século XVIII, começaram a ocorrer diversas controvérsias sobre o conceito de função. As primeiras discussões foram causadas devido ao famoso problema das cordas vibrantes, o qual apresentava o paradoxo de vibrações infinitamente pequenas de uma corda finita, homogênea e fixa nas duas extremidades. Esse problema gerava uma discussão a respeito de continuidade e descontinuidade das funções.

Segundo Euler (*apud* Bueno e Viali, 2009), funções descontínuas não são, em sua totalidade, analiticamente representáveis. Sendo assim, Euler formula uma nova definição em seu prefácio (*Institutiones calculi differentialis*) para solucionar grande parte das discussões e controvérsias colocadas:



Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então se tem o hábito de nomear essas quantidades funções das últimas; essa denominação tem o mais amplo entendimento e contém em si mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por consequência,  $x$  designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de  $x$ , não importando qual a maneira, ou que são determinadas por  $x$ , são chamadas funções de  $x$  (EULER, 1913 *apud* YUOSCHKEVITCH, 1981, p.49 *apud* ROSSINI, 2006, p.45).

Cabe salientar que com essas discussões foram desenvolvidos diversos auxílios para o conceito de função, seja por um viés elementar (fundamental) ou até mesmo por um grau mais elevado (de maior complexidade). Contribuíram grandes matemáticos como: Lagrange, Jean le Rond D' Alembert (1717-1783), Daniel Bernoulli (1751 – 1834), Gaspard Monge(1746-1718), Pierri Simon Laplace (1749-1827) e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Com o auxílio deles, o grau de entendimento e forma de utilização do conceito de uma função foram ganhando diversos aprimoramentos e aceitações.

No século XIX também houve resultados significativos para a evolução do conceito de função. Ao observar parte do trabalho de Fourier sobre séries de funções, o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) concluiu que nem toda função, mesmo sendo contínua em um dado intervalo, pode ser determinada por sua série trigonométrica, devido ao fato que ela pode divergir em diversos pontos. Podemos analisar um fruto das pesquisas deixadas por Dirichlet(1837) por intermédio de Eves (2004), observando sua definição sobre o conceito de função:

Uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis  $x$  e  $y$  estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a  $x$ , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a  $y$ , então se diz que  $y$  é uma função (unívoca) de  $x$ . A variável  $x$ , à qual se atribuem valores a vontade, é chamada variável independente e a variável  $y$ , cujos valores dependem dos valores de  $x$ , é chamada variável dependente. Os valores possíveis que  $x$  pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por  $y$  constituem o campo de valores da função (DIRICHLET, 1837 *apud* EVES, 2004, p 661).

Na visão do autor, um atual estudante de Matemática pode encontrar alguma relação dessa definição com muitas outras que já viu ao iniciar um curso de Cálculo Diferencial e Integral. E também é enfático ao afirmar que essa definição, por ser dessa maneira ampla e genérica, sem requerer um tratamento analítico por uma expressão, pode ser contextualizada conforme uma relação entre dois conjuntos numéricos.

E assim, com a criação da teoria dos conjuntos, desenvolvida por Georg Cantor (1845-1918), todos os campos da Matemática tiveram um grande impacto e tal ciência pode ser enxergada com outros olhares. De acordo com Eves (2004),

os conceitos básicos de análise, como os de limite, função, continuidade, derivada e integral ganharam uma formulação muito mais conveniente em termos das ideias da teoria dos conjuntos (EVES, 2004, p.659).

Concomitante a época de Cantor, apoiado em muitas de suas ideias da teoria dos conjuntos, o matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831- 1916), segundo as palavras de Dieudonné (1990), generalizou da seguinte forma o conceito de função:

Sendo dados dois conjuntos quaisquer E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei que faz corresponder qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor x é notado de modo geral f(x) para notar uma aplicação f, o que evita muitas vezes ter de introduzir um nova letra, quando por exemplo se escreve x a  $x^2$  para, utiliza-se também bastante na atual escrita das matemáticas as noções ou para precisar o conjunto E onde está definida a função f e o conjunto F onde esta toma seus “valores”. (DIEUDONNÉ, 1990, p.149 *apud* BUENO & VIALI, 2009, p.45).

Contudo, depois de tantas mudanças e evoluções desde a idade antiga até a moderna diante ao conceito de funções, surgiu um grupo de jovens franceses que fundou, em 1935, a Associação Bourbaki. O objetivo principal era organizar toda a Matemática conhecida até aquele presente momento, utilizando para isso as ideias formais do matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Rossini (2006) aponta em sua tese a definição de função colocada por esses jovens, em 1939, no primeiro livro de suas coleções: *Théorie des Ensembles (fascicule de résultats)*:

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja  $x \in E$ ,

existe um elemento  $y$  de  $F$ , e somente um, que seja na relação considerada com  $x$ . Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento  $x$  o elemento  $y$  que se encontra na relação dada com  $x$ , diz-se que  $y$  é o valor da função para o elemento  $x$ , e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAK, 1939, p.6 *apud* MONNA, 1972, p.82 *apud* ROSSINI, 2006, p.52).

E assim, a definição de função foi se aproximando cada vez mais das que observamos em livros didáticos atuais. Por exemplo, podemos citar a definição do conceito, segundo Paulo Boulos (1999), do seguinte modo:

Sendo  $A$  e  $B$  conjuntos, uma função de  $A$  em  $B$  é uma correspondência que cada elemento  $x$  de  $A$ , associa um único elemento  $y$  de  $B$ .  $A$  é chamado domínio da função. Se designarmos por  $f$  a função, o elemento  $y$  é indicado por  $y=f(x)$ . (BOULOS, 1999, p.22 *apud* ROSSINI, 2006, p.62).

Para finalizar todas as reflexões referentes às mudanças e evoluções desse conceito apontadas nesta seção, conseguimos observar a importância que o objeto funções tem na História da Matemática, desde os primórdios até a nossa atualidade. Todas essas evoluções nos fazem constatar que a contribuição deste tema para diversos tópicos da Matemática como também diferentes aspectos cotidianos esteve e provavelmente sempre estará presente no universo acadêmico e real do aluno, seja como estudante ou cidadão. Sendo assim, conforme já dito, um dos objetivos deste trabalho é auxiliar o entendimento do aluno quando tiver seus primeiros contatos com este conceito durante seu período escolar, levando-se em consideração a articulação entre as duas metodologias de ensino junto a um senso-crítico direcionado e contextualizado a situações cotidianas.

## **2.2. As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs)**

Nesta seção apresentaremos fatores históricos de como surgiram as TICs, bem como discutiremos fatores da sua relação com a pedagogia, especificamente neste trabalho com a Matemática. Para isso foi estruturada em duas subseções, a primeira tratará do surgimento das TICs com suas características e evolução. A segunda abordará uma relação entre as TICs com a Pedagogia, apontando consequências e

obstáculos dessa contextualização. Tais considerações serão abordadas para sustentar a utilização dessas tecnologias em nosso trabalho, como observaremos na proposta de atividades.

### **2.2.1. O surgimento das TICs**

No início do século XX, com expectativa de uma possível revolução na educação, surgiram as TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação). Segundo Gauthier e Tardif (2010), primeiramente o ensino foi apresentado por meio de filmes e logo após veio juntamente o rádio, a televisão, o vídeo e por programações de computador. Enquanto isso, o americano Thomas Edison realizou o primeiro filme em sala de aula: *The Minute Men* em 1911. Logo após o americano Sidney Pressey produziu uma máquina de perguntas que permitia a progressão do aluno ao responder corretamente uma determinada questão.

Por volta do início do século XIX surgiu o computador, uma máquina essencial para as Tecnologias da Informação e Comunicação, principalmente em dias atuais com a participação em diversas áreas, dentre elas a pedagógica. Ocorreram diversas mudanças nas estruturas, designs e componentes dos computadores. Gauthier e Tardif (2010) apontam em uma tabela os estágios dessa evolução em função do tempo, indicando 25 mudanças entre 1833 e 1984. Destacando os extremos, em 1833, Charles Babbage inventou a Máquina Analítica que ficou conhecida por ser a “primeira calculadora” produzida. Já em 1984, Apple Macintosh produziu o próprio “Apple Macintosh”, inaugurando o primeiro computador com interface gráfica colorida ao usuário.

Já numa visão mais construtivista de aprendizagem com a tecnologia, os autores supracitados apontam que na década de 60, o sul-africano naturalizado americano, Seymour Papert, foi um dos pioneiros neste ramo com a produção do sistema LOGO, em Massachusetts, conseguindo elaborar uma linguagem computacional moldada para o aluno, deixando os princípios de inerência entre a inteligência artificial e a humana.

Assim, as TICs foram evoluindo dia após dia. Em 1979, o primeiro walkman com cassete áudio foi lançado. Vinte e cinco anos mais tarde já existiam mais 30.000 leitores de música MP3, houve a mudança do disco flexível para o disquete, do

disquete para o leitor zip e por fim, do leitor zip para uma “pequena” memória, que mede cerca de 1x1cm, podendo conter tantas informações quanto 4000 disquetes, de acordo com Gauthier e Tardif (2010).

Os autores também ressaltam que em 1968, o engenheiro Ray Tomlinson inventou a primeira internet, denominada Arpanet. Sendo que com este avanço, muitos hábitos da sociedade foram modificados: como pagar contas no banco, escrever aos amigos, ouvir músicas, reservar um quarto no hotel e até ver imagens de uma sonda enviada para Marte. No âmbito educacional também ocorreram mudanças: o docente obteve a possibilidade de passar a corrigir virtualmente o trabalho de um aluno, preencher um boletim de notas e até mesmo utilizá-la para determinada metodologia de ensino, entre outras.

Segundo a opinião de Castells (2003):

a Internet é um meio de comunicação que permite, pela primeira vez, comunicação de muitos com muitos, num momento escolhido, em escala global. Assim como a difusão da máquina impressora no Ocidente criou o que MacLuhan chamou de a Galáxia de Gutenberg, ingressamos agora num novo mundo de comunicação: a Galáxia da Internet. (CASTELLS, 2003, p.8).

Sendo assim, podemos dizer que a internet é capaz de aproximar e tornar estreita a distância de comunicação entre as pessoas, independente de suas localizações, trazendo por consequência uma velocidade no acúmulo de informações e aumentando a capacidade de buscar conhecimentos por meio dessa interação humana.

No entanto, não podemos nos referir somente aos computadores, internet, softwares, TVs, mídias em vídeo, ou outros aparelhos similares quando pensarmos em tecnologia. As TICs também estão classificadas em qualquer ferramenta que facilite o processo de transmissão do conhecimento, como um livro impresso, um lápis, uma borracha ou um quadro negro. Para podermos associar esse modo de pensamento, basta voltarmos ao passado e perceber que a escrita era realizada em

argilas, areia e ossos, como aponta Robson Sá, em seu artigo *Modelagem, Tics e o Ensino da Matemática*<sup>1</sup>.

### **2.2.2. As TICs e a pedagogia**

Na relação entre as TICs com a pedagogia, há discussões que devem ser levadas em consideração, as quais podem apresentar argumentos tanto de dificuldades a respeito dessa relação quanto de melhorias no processo de ensino e aprendizagem.

Entre as dificuldades, podemos citar o fato de muitos professores não estarem preparados para lidar com as TICs em suas metodologias de ensino, uma vez que este docente pode ter aprendido a utilizar somente o sistema de aprendizagem convencional, composto por lousa, giz, livro, caderno, lápis, etc. Com inúmeras transformações no ensino e aprendizagem de diversos tipos de conhecimentos é necessário que os profissionais da educação repensem os seus métodos de ensino, metodologias, técnicas, conceitos, formação, enfim, suas práticas docentes, conforme destaca Robson Sá, artigo referenciado acima.

Entretanto, dessa dificuldade podem surgir outras: muitas vezes o docente pode estar se atualizado com o avanço das TICs, porém precisa da disponibilidade das ferramentas no ambiente escolar, o que não é possível de acontecer caso não haja interesse do governo em viabilizar tais recursos ou até mesmo de outros agentes envolvidos na gestão escolar, decidindo utilizar somente os conceitos de metodologia tradicional ou se moldando em métodos de ensino voltados aos padrões de exigência direcionados a determinados vestibulares.

Aproveitando a ocasião fica uma breve reflexão: Estamos preparando um aluno durante anos para uma única prova que recebe o nome de vestibular? Ou para se tornar um humano cidadão apto a lidar com situações cotidianas que dependem de sua análise, reflexão e senso crítico?

Contudo, na velocidade e modo como os discentes desde crianças recebem as Tecnologias da Informação e Comunicação, com uso dos celulares, redes sociais, tablets, vídeo games, lan houses, etc., o docente e a escola devem estar preparados

---

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://www.infoescola.com/educacao-matematica/modelagem-tics-e-o-ensino-da-matematica/>>. Acesso em 23/02/2014.

para receber esse aluno “informatizado”, fornecendo-lhe uma metodologia de ensino que contemple suas atuais habilidades. Como afirmam Gauthier e Tardif (2010):

Com um número crescente de discentes mergulhados na cultura cada vez mais universal da internet, muitos esperam encontrar na escola a comodidade, rapidez e a facilidade de acesso à informação que a web proporciona.” (GAUTHIER e TARDIF, 2010, p. 342).

Ao contrário do que muitas pessoas acreditam, as TICs não são capazes de substituírem totalmente o ensino tradicional, deixando uma escola sem livros e sem cadernos, como destacam esses autores:

Para serem eficazes, as novas tecnologias, longe de substituir o homem, exigem dele cada vez mais competências, não só técnicas mas também humanas e sociais (comportamento em grupo, capacidade de cooperar e de comunicar-se, vontade de assumir responsabilidades). (JACQUINOT, 1993, p.65 *apud* GAUTHIER e TARDIF, 2010, p.343).

Ou seja, a aliança entre as TICs e a pedagogia podem caminhar lado a lado, auxiliando o docente no momento em que assume o papel de mediador, decidindo qual estratégia será a mais conveniente em determinado momento, seja com auxílio das TICs, do modelo Tradicional, ou com ambos numa determinada aula.

Portanto, pode-se dizer que as TICs são indispensáveis no nosso cotidiano e podem auxiliar de um modo fundamental a prática pedagógica, subsidiando o método de ensino e aprendizagem entre o docente e o aluno. Como opinou Ubiratan D’ Ambrósio (2003), “O grande obstáculo à inovação é uma mesmice resistente”.

### **2.3. Modelagem Matemática**

Nessa última subseção discorreremos brevemente a respeito de algumas definições e características sobre o processo de Modelagem Matemática, ressaltando principalmente seus pontos positivos. Para isso, utilizaremos argumentos defendidos por Rodney Bassanezi, especialista no assunto. Buscamos ressaltar a relevância dessa metodologia para o processo de ensino e aprendizagem de noções matemáticas, mais precisamente no ensino das funções, e apresentar argumentos que sirvam de base para a elaboração da proposta de atividades que iremos sugerir.

### 2.3.1. Conceitos e Características

É de grande dimensão os problemas enfrentados em nosso país no ensino e aprendizagem da matemática, em que ocupamos pouco destaque no cenário global segundo dados do PISA<sup>2</sup>. Os desafios vão desde dificuldades na leitura e interpretação de enunciados até a realização de operações matemáticas elementares e a resolução de problemas. O que muitos alunos têm em mente é que a Matemática resume-se ao simples fato de decorar fórmulas e saber utilizá-las num determinado problema. Isso não é muito produtivo quando o problema exige uma interpretação ou alguma criatividade que necessite do desenvolvimento de um modelo matemático adequado para resolvê-lo, ou mesmo para estimar possíveis soluções.

Nesse sentido, visando favorecer o ensino e o aprendizado de algumas noções de Matemática, surgiu no Brasil o ensino da Modelagem Matemática, que se fortaleceu a partir de 1990. De acordo com Bassanezi (2011):

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2011, p.24).

Em outras palavras, entendemos que é uma forma de fazer com que problemas até então vistos no nosso cotidiano, sejam abordados de uma forma generalizada e sistemática pela Matemática por meio de suas ferramentas, para assim serem produzidas as observações requeridas ou necessárias.

Vejamos também um ponto de vista de D'Ambrósio (1986), apontando algumas dessas características no processo de Modelagem Matemática:

O ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais; codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da matemática, e talvez o objetivo

---

<sup>2</sup> PISA (Programme International Student Assessment) é um indicador que verifica e avalia a qualidade de educação em diversos países.



maior do seu ensino (UBIRATAN D'AMBRÓSIO, 1986, p.44 *apud* ALMEIDA E BRITO, 2005, P.68).

Bassanezi (2011) defende a utilização da Modelagem Matemática para que a disciplina ofereça significados e conhecimentos ao futuro do aluno, utilizando o termo “jogos” para representar situações de aprendizagem voltadas a modos tecnicistas. Neste método dos “jogos”, o aluno fica condicionado à ideia de a Matemática ser uma porção de conhecimentos básicos de cálculo, fórmulas, geometria, estruturas algébricas, ou até mesmo quando o professor se preocupa mais com a formalidade do tema estudado do que com o efetivo aprendizado dos alunos.

No entanto, o autor não concorda que o ensino da Matemática seja formado somente por “aplicações práticas”, sem a utilização do método dos “jogos”, enfatizando que a combinação das duas vertentes seria o mais apropriado:

Não queremos com isso insinuar que a Matemática deva ser abolida do programa escolar ou que seja matéria curricular ensinada somente àqueles que pretendem utilizá-la num futuro. Ao contrário, acreditamos que os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer. Assim o que propomos é a busca da construção de uma prática de ensino-aprendizagem matemática que combine “jogos” com resultados práticos (BASSANEZI, 2011, p.16).

O processo de construir um modelo matemático para representar matematicamente uma situação cotidiana, muitas vezes não é uma tarefa fácil. A Modelagem Matemática consiste em representar uma situação real com auxílio do modelo. Porém, muitas vezes que não conseguirmos um modelo adequado para o objeto de estudo, podemos ir à procura de outro modelo que satisfaça o processo ou até mesmo pensar em outro método de resolução que não seja a modelagem, de acordo com Bassanezi (2011). Caso persistirmos num modelo que não seja o adequado, podemos dificultar ainda mais a situação real apresentada inicialmente. Observemos a visão do autor referente a este aspecto:

A modelagem não deve ser utilizada como uma panaceia descritiva adaptada a qualquer situação da realidade – como o que aconteceu com a teoria dos conjuntos. Em muitos casos, a introdução de um

simbolismo matemático exagerado pode ser mais destrutivo que esclarecedor (seria o mesmo que utilizar granadas para matar pulgas!). O conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser equilibrados e circunscritos tanto ao tipo de problema como ao objetivo que se propõem alcançar. Salientamos que, mesmo numa situação de pesquisa, a modelagem matemática tem várias restrições e seu uso é adequado se de fato contribuir para o desenvolvimento e compreensão do fenômeno analisado (BASSANEZI, 2011, p.25).

Podemos indagar a seguinte questão após essa visão do autor: caso não se encontre um modelo matemático que satisfaça o processo de modelagem numa determinada situação, mesmo depois de tentar procurar diversos modelos e não conseguir êxito na pesquisa, o que fazer? Segundo o autor isso pode acontecer. Porém o discente não deve se sentir culpado em momento algum, muito menos o docente que desenvolveu o papel de mediador no processo, até mesmo porque durante a busca pelo modelo, muitos aspectos positivos podem ser levados em consideração, como destacam Almeida e Brito (2005) nas palavras de Bassanezi:

O mais importante não é chegar num modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado [...]. Mais importante do que os modelos obtidos são o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de plano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive (BASSANEZI, 2002, p.38 *apud* ALMEIDA E BRITO, 2005, p.66).

Assim, podemos perceber que por trás do processo de Modelagem Matemática existem muitos fatores relevantes que podem contribuir para sabedorias e descobertas do aluno como discente e também como um cidadão.

De acordo com Bassanezi (2011), podemos concluir que a modelagem matemática, além de despertar no aluno um senso crítico como estudante e cidadão, também pode abrir um amplo leque para que ele possa investigar e analisar a sua realidade, criando modelos que possam auxiliá-lo a tomar decisões, no sentido de melhorar ou modificar essa realidade em questão. Ainda segundo o autor, ficam constatadas algumas dessas características:

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia a teoria a prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para

agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão: A educação inspirada nos princípios da liberdade e da solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitem utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio (BASSANEZI, 2011, p.17).

Com isso, já podemos ter uma boa noção do quão importante pode ser a Modelagem Matemática para o processo de ensino e aprendizagem de algumas noções matemáticas. Sendo assim, no próximo capítulo discorreremos sobre um possível uso dessa metodologia por meio da Proposta de Atividade sugerida neste trabalho.



### 3 METODOLOGIA E EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos o embasamento à Proposta de Atividades que enunciaremos. Sendo assim, discorreremos um pouco mais sobre a metodologia que adotaremos, apoiando-se nos conceitos e ideias de Bassanezi (2011). Para isso, partiremos da junção de dois esquemas que constituem um processo de modelagem matemática, elaborados pelo próprio autor, utilizando no momento oportuno o auxílio das TICs para complementar a junção dos esquemas. Logo após, iniciaremos a introdução das atividades de um modo circunstanciado, ou seja, apontando análises e reflexões mediante a metodologia de estudo embasada com a pretensão de buscar uma proposta de atividades que possa ser eficaz à introdução de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Cabe salientar que nessas atividades não daremos “exclusivo” enfoque aos processos de modelagem matemática ou ao aspecto tecnológico representado pelas TICs. Com nossa proposta, buscamos favorecer a percepção do aluno em relação à variação entre grandezas, por exemplo, e estimular a construção do seu senso crítico com análises e decisões da vida real, oriundas do auxílio de noções e observações matemáticas.

Grande parte dos livros didáticos e aulas ministradas sobre o conceito de função se iniciam com um caráter mais teórico, focando a sua introdução por meio de tabelas, diagramas, definições, situações que respeitam uma determinada lei ou até mesmo por um modo analítico, concentrando o estudo somente em pares ordenados. Podemos observar algumas dessas características na introdução deste conceito nas obras de Dante (2012) e Souza (2010). Sabemos da importância desses aspectos para um efetivo aprendizado deste conceito, porém ao lidar com funções por este viés nos primeiros contatos, o discente pode não atingir diversos quesitos do processo de ensino-aprendizagem, como o aspecto de senso-crítico que serão observados no processo de modelagem matemática junto a nossa proposta.

Nas atividades que iremos propor apontaremos a importância do aspecto prático deste conceito, acreditando que iniciando o estudo das funções com este viés, consigamos um ensino e aprendizagem de maior teor. Deste modo ressaltamos a

discussão dos dois vieses, segundo Almeida e Brito (2005), para destacar a opinião de Vasco (2003), o qual aponta uma parcela de perda do aspecto variacional quando tratado o conceito de função voltado ao campo teórico.

Essa dicotomia sinaliza a necessidade de se levar em conta conceituações intermediárias do conceito de função entre seu uso prático e uso teórico. Esses dois aspectos da noção de função nos remetem a duas possibilidades de significação desse conceito. A primeira pode ser expressa nas definições mais formais em que esse conceito é apresentado como um conjunto de pares ordenados. E a segunda, mais ligada ao contexto de seu uso “prático” e vinculada com a ideia de correspondência entre variáveis (ALMEIDA E BRITO, 2005, p.71).

Pareceria que las funciones, em particular las funciones cuyo argumento es el tiempo  $t$ , reflejan matematicamente las variaciones de la realidad espacio-temporal. Pero pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada. Eso estaria bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada (VASCO, 2003, p.6 apud ALMEIDA E BRITO, 2005, p. 72).

Assim, não pretendemos com a nossa proposta de atividades, almejar que um discente saiba todas as propriedades e características de uma função no primeiro contato com o assunto. Pelo contrário, buscaremos que o mesmo não fique preso apenas aos aspectos mais formais que possam inicialmente servir de obstáculos ao seu aprendizado, deixando-o “estático” na construção das ideias.

Como esta proposta necessitará de uma metodologia que nos ampare para prosseguir-la, decidimos utilizar os conceitos e métodos sugeridos por Bassanezi (2011). Tal decisão se ancora no fato de que, em sua obra, o autor consegue esclarecer por diversos parâmetros o processo de Modelagem Matemática e construir uma esquematização que pode ser adequada a nossa proposta. Além disso, as atividades também contemplarão os processos de Modelagem Matemática juntamente ao uso das TICs, objetivando auxiliar o aluno no processo de aprendizagem em seus primeiros contatos com o conceito de função.

Destacaremos dois esquemas produzidos pelo autor que embasarão as atividades. O primeiro, que denominaremos de “esquema geral”, trata-se de um esquema que generaliza o processo de Modelagem Matemática de um modo amplo e que pode

servir de base para qualquer objeto de estudo inserido neste processo. Já o segundo é elaborado de um modo mais específico para auxiliar em diversos trechos do processo e ainda pode sofrer algumas transformações, dependendo do caminho que será desenvolvido junto ao processo de modelagem. Nomearemos este de “esquema específico”.

No “esquema geral”, Bassanezi (2011) produz a seguinte figura, com a finalidade de uma melhor representação e interpretação do leitor:

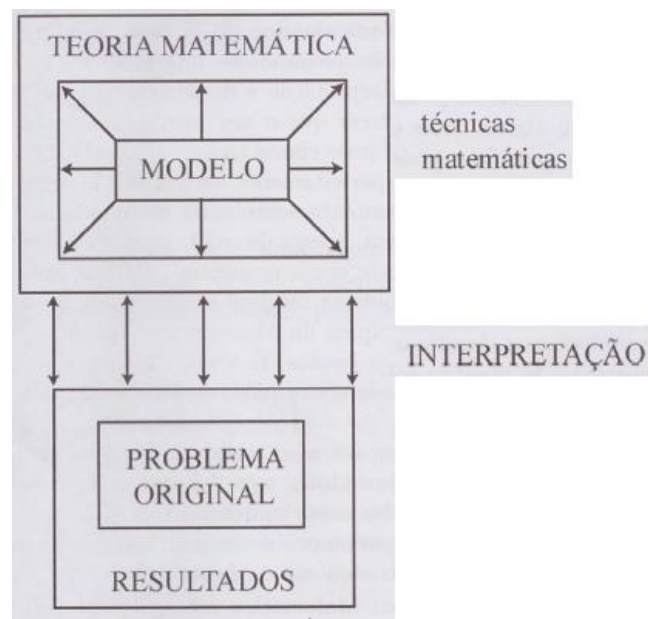


Figura 1 – Esquema Geral para a Modelagem Matemática

Fonte: BASSANEZI, 2011, p.25

De acordo com Bassanezi (2011), nesse esquema, partimos de uma determinada situação inserida num contexto real, a qual receberá o nome de “PROBLEMA ORIGINAL”, para iniciar o processo de modelagem.

Após uma necessária análise deste PROBLEMA, seguimos no objetivo de criar um modelo matemático que “INTERPRETE” o “PROBLEMA ORIGINAL”, por alguma linguagem matemática. O autor nomeia esse modelo matemático por apenas “MODELO” e neste processo são utilizadas técnicas, ferramentas ou “TEORIAS MATEMÁTICAS” para auxiliarem a sua produção.

Por fim, volta-se ao "PROBLEMA ORIGINAL" com o propósito de discutir os RESULTADOS, apoiando-se no auxílio da Matemática com o intuito de "INTERPRETAR" as cabíveis conclusões numa linguagem usual do universo que contém o problema.

O autor sintetiza o esquema com as seguintes palavras:

Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema. (BASSANEZI, 2001, p.25).

No segundo esquema o qual denominaremos de "ESQUEMA ESPECÍFICO", utilizaremos uma síntese do método descrito em (BASSANEZI, 2011, p.27). Seguiremos somente com os pontos específicos deste método, do mesmo modo que o próprio autor indicou em Bassanezi (2002).

O esquema é formado pelas seguintes fases: Experimentação, Abstração, Formulação do Modelo; Resolução, Validação, Modificação e Aplicação. De acordo com o autor, a modelagem matemática é um processo dinâmico para se produzir modelos e essas etapas se complementam para a construção do mesmo. Sendo assim, define as etapas do seguinte modo:

**Experimentação:** Quando se tem um tema de estudo, a obtenção de dados experimentais ou empíricos são fundamentais para a compreensão do problema e ajudam na estruturação, formulação e modificações eventuais dos modelos. Além disso, os dados experimentais decidem a validação dos modelos.

**Abstração:** É o processo de seleção das variáveis essenciais responsáveis pela evolução do fenômeno estudado. Nesta fase são formuladas as hipóteses e "leis" que deverão ser testadas na validação do modelo. A analogia entre sistemas é fundamental para a formulação destas leis e simplificação dos modelos.

**Formulação do modelo:** O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem matemática. A construção do modelo segue de perto o uso de um dicionário que traduz as palavras em alguma linguagem matemática.

**Resolução:** A resolução de um modelo está sempre vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação e muitas vezes só pode ser viabilizada através de métodos computacionais, dando uma solução numérica aproximada.



**Validação:** É o processo de aceitação ou não do modelo proposto – Nesta etapa, os modelos, juntamente com às hipóteses que lhe são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação.

**Modificação:** Se na validação do modelo o grau de aproximação desejado não é atingido devemos inserir novas variáveis no modelo ou modificar a lei de formação, e assim o modelo original deve ser modificado iniciando novamente o processo. A formulação de novos modelos mais complexos, baseados em modelos simples é uma boa estratégia de ensino-aprendizagem.

**Aplicação:** A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças (BASSANEZI, 2002 p.13-14).

Em nossa proposta de atividades nos apoiaremos na ideia do ESQUEMA GERAL, utilizando assim que necessário, como auxílio, algumas etapas do ESQUEMA ESPECÍFICO, sendo que a etapa de “FORMULAÇÃO DO MODELO” será representada com o uso das TICs por meio do programa MICROSOFT EXCEL (WINDOWS), com este pretendemos trabalhar na construção, interpretação e a análise dos gráficos para tirar conclusões do problema original, ou seja, para dar suporte a etapa da APLICAÇÃO.

Com isso, apoiando-se nas ideias defendidas por Bassanezi (2011) e na construção dos esquemas oriundos de sua obra, desenvolveremos 02 (duas) propostas de atividades que possam ser mais vantajosas e/ou complementem grande parte dos métodos convencionais ensinados aos alunos, no que se refere aos primeiros contatos dos discentes com o ensino das funções.



## **4 PROPOSTA DE ATIVIDADES**

Neste capítulo deixaremos como sugestão duas atividades que possam ter um caráter contextualizado ao cotidiano de muitos alunos, tentando contemplar uma articulação entre duas metodologias de ensino: as TICs e a Modelagem Matemática. O objetivo principal será construir uma proposta de atividades facilitadora, possibilitando melhorias no ensino e aprendizagem do conceito de funções diante aos primeiros contatos do discente com o tema.

A primeira atividade tratará do tema SUSTENTABILIDADE, abordando dados da variação da água no decorrer do tempo e a segunda estará relacionada às PROFISSÕES, apresentando dados de como está variando o número de inscritos (vestibulandos) em relação a alguns cursos da FUVEST ao passar dos anos. Ambas terão como objetivo estimular o aluno a analisar e refletir sobre os dados fornecidos, para posteriormente, com auxílio da metodologia empregada, capacitá-lo a estimar consequências futuras e possivelmente oferecer sugestões que possam modificá-las.

Assim, pretendemos propor uma introdução informal ao estudo das funções, focando o seu aspecto variacional de relação entre grandezas, juntamente a algumas características fundamentais como analisar dados e prever situações futuras.

### **4.1. Atividade 1 – Sustentabilidade**

De acordo com os dados abaixo, utilizando o auxílio do seu professor e integrantes do seu grupo, analise e discuta a tabela, a figura e o texto abaixo. Em seguida responda as questões.

Tabela 1 – Tabela da disponibilidade de água por habitante em 1000m<sup>3</sup> no decorrer das últimas décadas segundo o continente.

Região	1950	1960	1970	1980	2000
África	20,6	16,5	12,7	9,4	5,1
Ásia	9,6	7,9	6,1	5,1	3,3
América Latina	105,0	80,2	61,7	48,8	28,3
Europa	5,9	5,4	4,9	4,4	4,1
América do Norte	37,2	30,2	25,2	21,3	17,5
Total	178,3	140,2	110,6	89,0	58,3

Fonte: <<http://www.sanasa.com.br>>

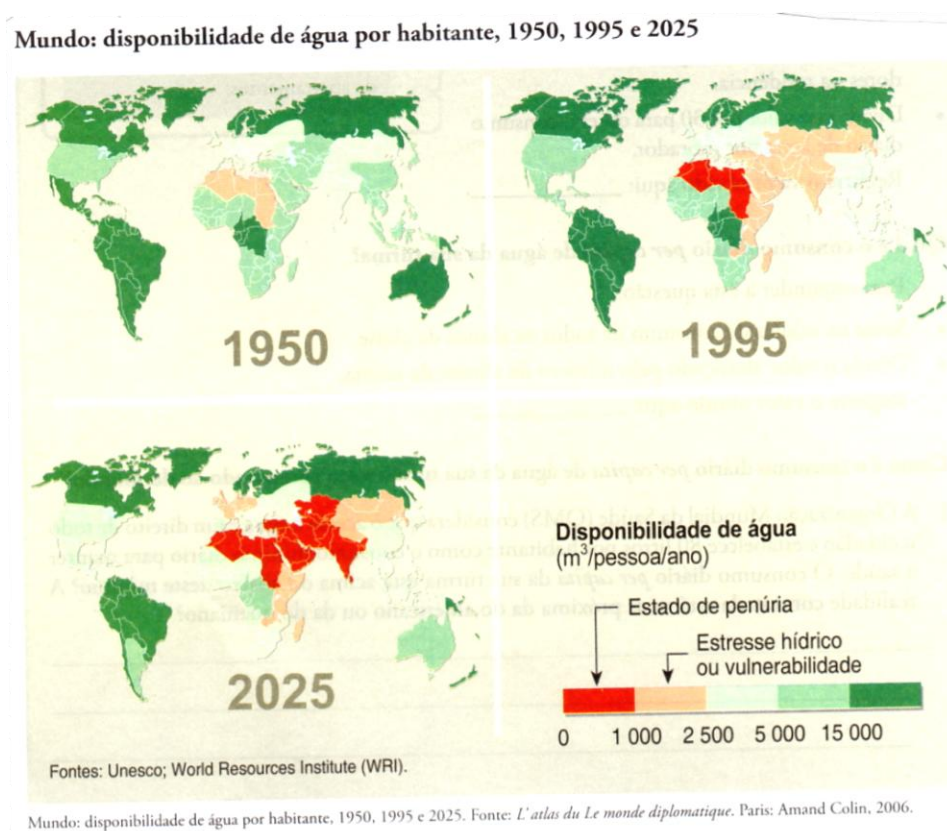


Figura 2 – Disponibilidade de água por habitante segundo sua situação e região habitada.

Fonte: <http://profwladimir.blogspot.com.br>

### TEXTO 1 – E se a água potável acabar?

O texto a seguir foi extraído da revista Super Interessante e escrito por Rafael Soeiro, em junho de 2012.

## O QUE ACONTECERIA SE A ÁGUA POTÁVEL DO MUNDO ACABASSE?

*As teorias mais pessimistas dizem que a água potável deve acabar logo, em 2050. Nesse ano, ninguém mais tomará banho todo dia. Chuveiro com água só duas vezes por semana. Se alguém exceder 55 litros de consumo (metade do que a ONU recomenda), seu abastecimento será interrompido. Nos mercados, não haveria carne, pois, se não há água para você, imagine para o gado. Gastam-se 43 mil litros de água para produzir 1 kg de carne. Mas não é só ela que faltará. A Região Centro-Oeste do Brasil, maior produtor de grãos da América Latina em 2012, não conseguiria manter a produção. Afinal, no País, a agricultura e a agropecuária são, hoje, as maiores consumidoras de água, com mais de 70% do uso. Faltariam arroz, feijão, soja, milho e outros grãos.*

*A vida nas metrópoles será mais difícil. Só a Grande São Paulo consome atualmente 80,5 bilhões de litros por mês. A água que abastece a região virá de Santos, uma das grandes cidades do litoral que passarão a investir em dessalinização. O problema é que para obter 1 litro de água dessalinizada são necessários 4 litros de água do mar, a um custo de até US\$ 0,90 o m<sup>3</sup>, segundo a International Desalination Association. Só São Paulo gastaria quase R\$ 140 milhões em dessalinização por mês. Como resultado, a água custaria muito mais do que os R\$ 3 por m<sup>3</sup> de hoje. Mas há quem não concorde com esse cenário caótico. "A água só acaba se você acabar com o ciclo dela", diz Antônio Félix Domingues, da Agência Nacional de Águas. "Tudo é questão de custo. Com dinheiro, você pode tornar até sua urina potável." Mas, se ela acabasse, a água seria um bem disputado, motivo de guerras e de exclusão social. "Poucas pessoas teriam acesso, provavelmente as mais abastadas. A água poderia virar um elemento segregador", diz Glauco Freitas, coordenador do Programa Água para a Vida, da ONG WWF-Brasil.*

- 1) No que se refere aos dados acima, discuta com o seu grupo e responda às seguintes questões:
  - a) Qual é o assunto tratado na atividade?
  - b) Qual é a sua interpretação referente às informações contidas na TABELA?
  - c) Qual é a sua interpretação referente às informações contidas na FIGURA?
  - d) Como você pode relacionar a TABELA e a FIGURA com o TEXTO?
  - e) De que forma esses dados e informações podem influenciar na sua vida?
  - f) Qual importância tem a água na sua vida?
  - g) Relate como seria a sua vida em casa, na escola e no seu bairro sem água?

**Neste primeiro exercício procuramos fazer com que o discente conheça diversas características do contexto que envolve o objeto de estudo. Essa**

**seria a etapa da EXPERIMENTAÇÃO, em que exploramos ao máximo os dados fornecidos da situação real apresentada.**

- 2) Agora que você já está mais familiarizado com o assunto, responda:
- Qual é a relação entre os dados apresentados na TABELA com as informações contidas na FIGURA?
  - Analisando os dados fornecidos, em qual ano aproximadamente você acredita que poderemos estar na faixa do estado de penúria (0–1000 m<sup>3</sup> de água por habitante no ano). Ou seja, praticamente sem água para atender nossas necessidades fundamentais?
  - Como você faria para prever em qual situação o seu futuro filho estaria em relação à quantidade aproximada de água disponível no ano de 2050?
  - Você acredita que algum método da Matemática pode ajudar a solucionar os itens (b) e (c) deste exercício? Em caso positivo, explique esse método com suas palavras, caso contrário justifique a sua opinião.

**Essa questão é norteadora à etapa da “ABSTRAÇÃO”. Acreditamos que ao começar a raciocinar para respondê-las, o aluno vai estimulando sua própria formulação de hipóteses que pode servir de base para criar o modelo matemático ou, até mesmo, para melhor entendê-lo quando for desenvolvido na atividade seguinte.**

- 3) No laboratório de informática, com o auxílio do seu professor, coloque os dados da TABELA na planilha do EXCEL. Em seguida siga o roteiro orientado por ele para colocar esses dados em um gráfico. Por fim, responda às alternativas solicitadas, discutindo com o seu grupo cada uma delas.
- Explique com as suas palavras o que significa cada ponto indicado no gráfico.
  - Quando o tempo está aumentando, o que está acontecendo com a quantidade de água disponível por habitante em todos os continentes?
  - Qual dos dois gráficos construídos você acredita ser mais adequado para representar os dados das FIGURAS: A reta ou a curva exponencial? Explique o motivo.
  - Observe o gráfico da CURVA EXPONENCIAL representando os dados da AMÉRICA LATINA. Agora responda, qual foi a variação da QUANTIDADE DISPONÍVEL DE ÁGUA entre os anos de 1950 a 1970 e 1980 a 2000?

- e) Em relação ao item anterior, mesmo sendo o intervalo de tempo entre essas datas iguais a 20 anos, apresente argumentos que justifiquem porque os intervalos da disponibilidade de água foram tão diferentes.
- f) Quais diferenças você observou entre os dados apresentados na TABELA com os dados representados pelos GRÁFICOS construídos? Cite algumas dessas diferenças explicando qual representação você acredita ser a mais vantajosa.

***Neste exercício, consolidamos a etapa da FORMULAÇÃO DO MODELO. Isso é notável quando substituímos o Problema Original pelo Modelo Matemático constituído pelos GRÁFICOS construídos. No contexto das TICs, escolhemos o programa MICROSOFT EXCEL, pois além de atender as necessidades exigidas pela atividade, pensamos numa maior disponibilidade no que se refere aos computadores das escolas. Além disso, já estamos tentando trabalhar o senso-crítico e reflexivo do aluno com auxílio do professor para preparar o aluno a próxima e última etapa: a Resolução e Aplicação.***

NOTAS PARA O PROFESSOR:

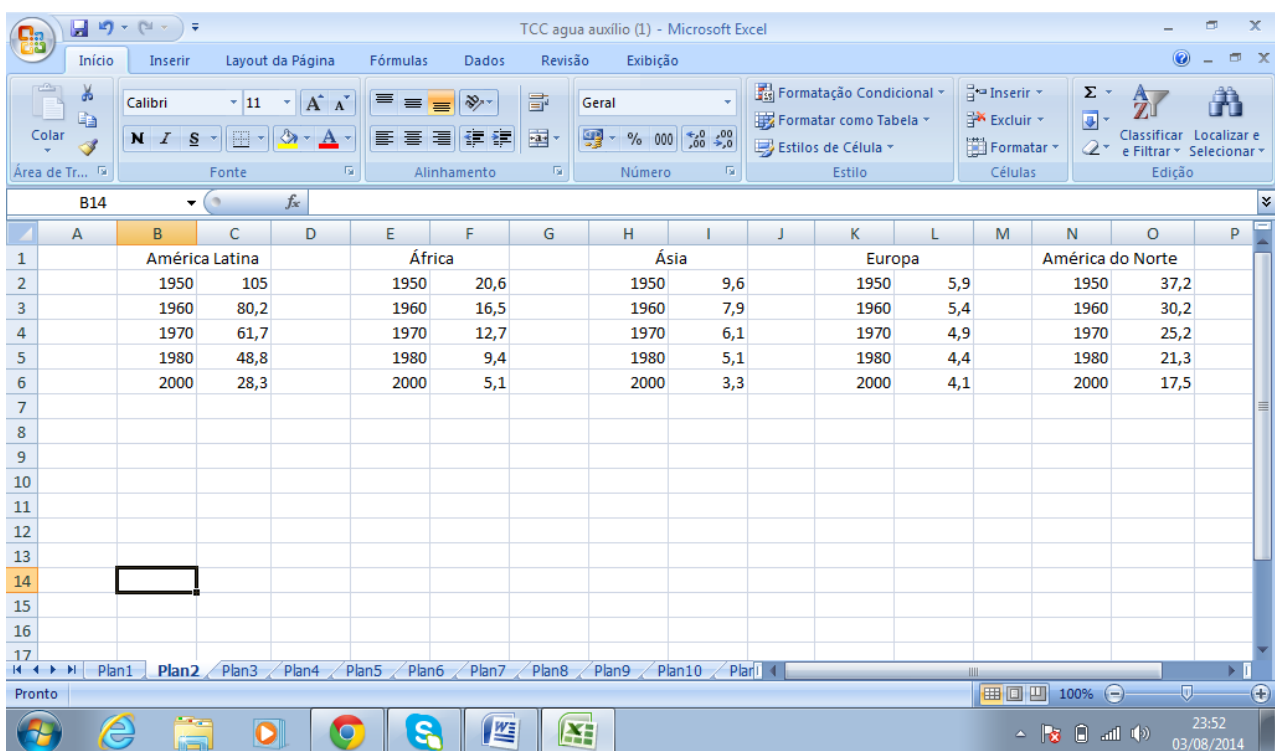
- ✓ *Nas alternativas d) e e), em relação à queda tão significativa na variação de água disponível, mesmo se tratando de intervalos de tempo iguais, podem ser discutidos alguns fatores, como: o avanço de tecnologias para a reutilização da água em diversos setores; a globalização cada vez mais intensa com a distribuição das informações para a conscientização no uso da água, a preocupação das pessoas quando sentem a falta de água por questões de racionamento ou pela própria escassez, etc.*
- ✓ *No ítem b), já se pode introduzir características fundamentais de uma função como o conceito de uma função crescente ou decrescente.*
- ✓ *No item f), o professor pode perguntar aos alunos, a partir do gráfico construído, o que eles acham a respeito das previsões que foram solicitadas nos itens b) e c) do exercício 2. Assim, ficaria evidente um aspecto mais vantajoso dos dados representados pelos gráficos ao invés da TABELA. Essa discussão poderá servir para a exploração do MODELO MATEMÁTICO*

construído e servirá de apoio para o próximo exercício que tratará da etapa da RESOLUÇÃO E APLICAÇÃO.

SEGUE ABAIXO O PROCEDIMENTO PARA A CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO, COM AUXÍLIO DAS TICS POR MEIO DO PROGRAMA MICROSOFT EXCEL:

1º passo: Abrir uma planilha do EXCEL.

2º passo: Colocar os dados da TABELA na planilha, sendo que cada continente constará de duas colunas: uma para os “valores do tempo” e a outra para a “disponibilidade de água por habitante”.



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "TCC agua auxilio (1) - Microsoft Excel". The spreadsheet contains data for four continents: América Latina, África, Ásia, Europa, and América do Norte. Each continent has two columns: one for the year (1950, 1960, 1970, 1980, 2000) and one for the water availability value. The data is organized as follows:

	América Latina		África		Ásia		Europa		América do Norte	
1950	105		1950	20,6	1950	9,6	1950	5,9	1950	37,2
1960	80,2		1960	16,5	1960	7,9	1960	5,4	1960	30,2
1970	61,7		1970	12,7	1970	6,1	1970	4,9	1970	25,2
1980	48,8		1980	9,4	1980	5,1	1980	4,4	1980	21,3
2000	28,3		2000	5,1	2000	3,3	2000	4,1	2000	17,5

Figura 3 – Organização dos dados da tabela na planilha do programa EXCEL.

Fonte: Própria autoria.

3º Passo: Selecionar duas colunas correspondentes a um dos continentes, ir ao MENU INSERIR, logo após clicar na aba DISPERSÃO e por fim, escolher a opção DISPERSÃO SOMENTE COM MARCADORES.



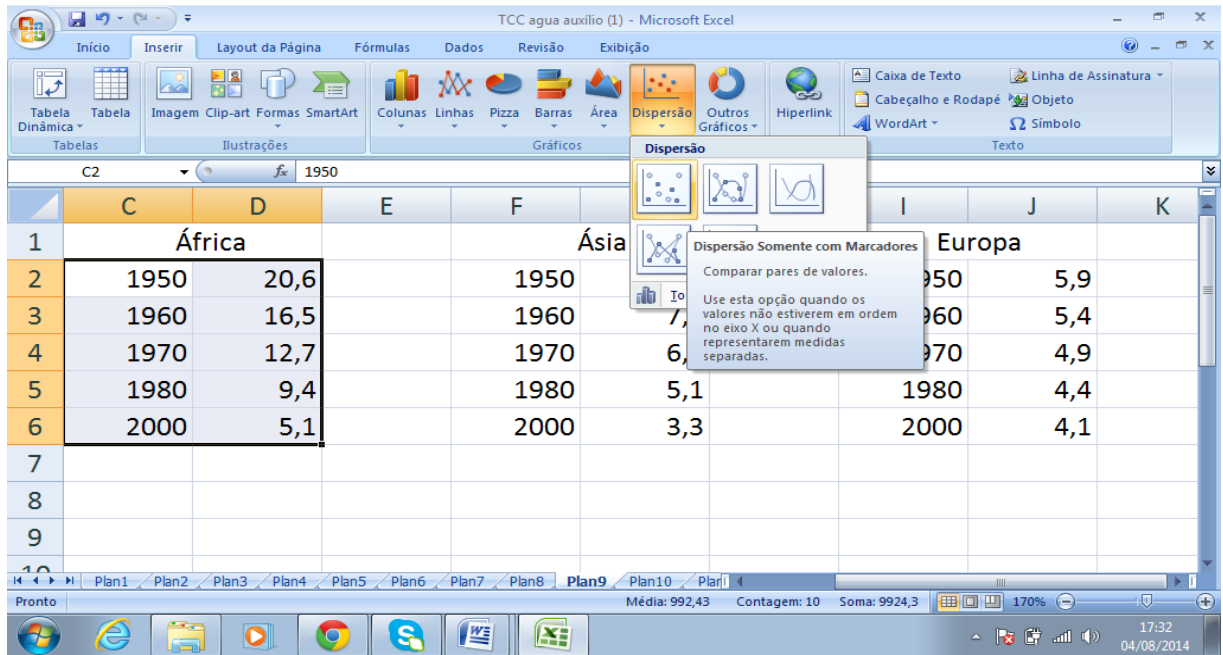


Figura 3.1. – Seleção dos dados referentes a um continente.

Fonte: Própria autoria

4º Passo: Com os pontos que surgem no plano, clique com o botão direito do mouse num ponto qualquer e escolha a opção **ADICIONAR LINHA DE TENDÊNCIA**.

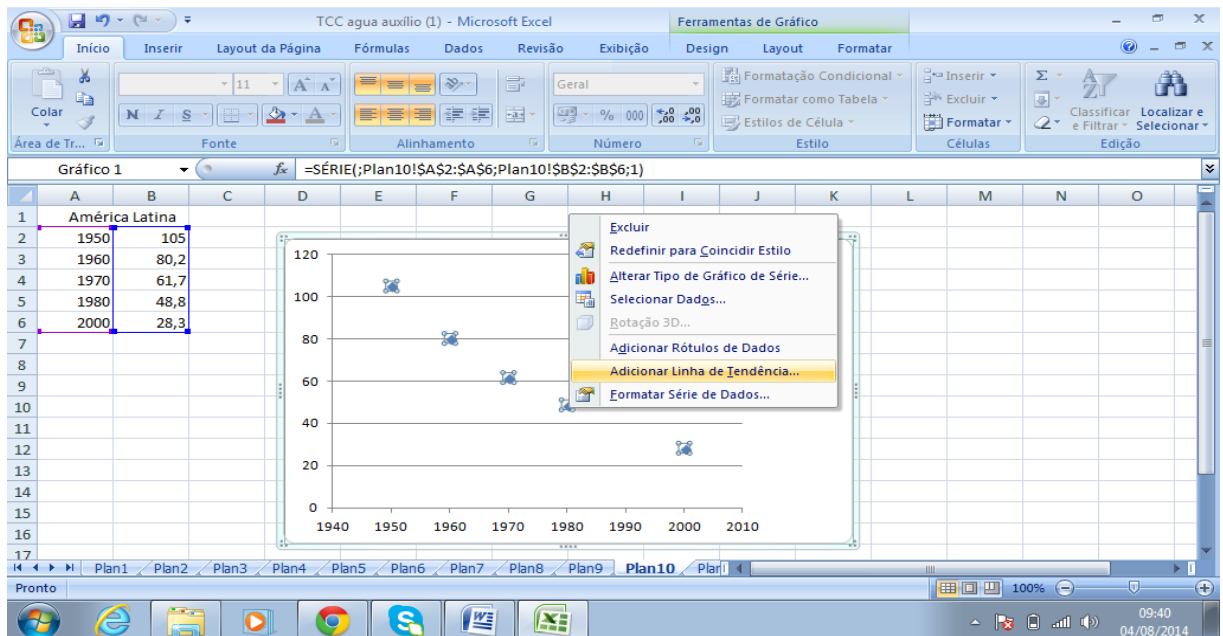


Figura 3.2. – Procedimento para adicionar uma linha de tendência.

Fonte: Própria autoria

5º Passo: Na janela “FORMATAR LINHA DE TENDÊNCIA”, especificamente no campo OPÇÕES DE LINHA DE TENDÊNCIA, escolher primeiramente a opção LINEAR e logo após no campo PREVISÃO, avançar 50 períodos, pois o exercício cobrará do aluno análises de resultados de tempos futuros. Por fim, basta clicar em finalizar e depois repetir o processo com a opção de linha de tendência EXPONENCIAL. Assim, pode-se fazer a comparação de qual gráfico é o mais conveniente para o objeto de estudo.

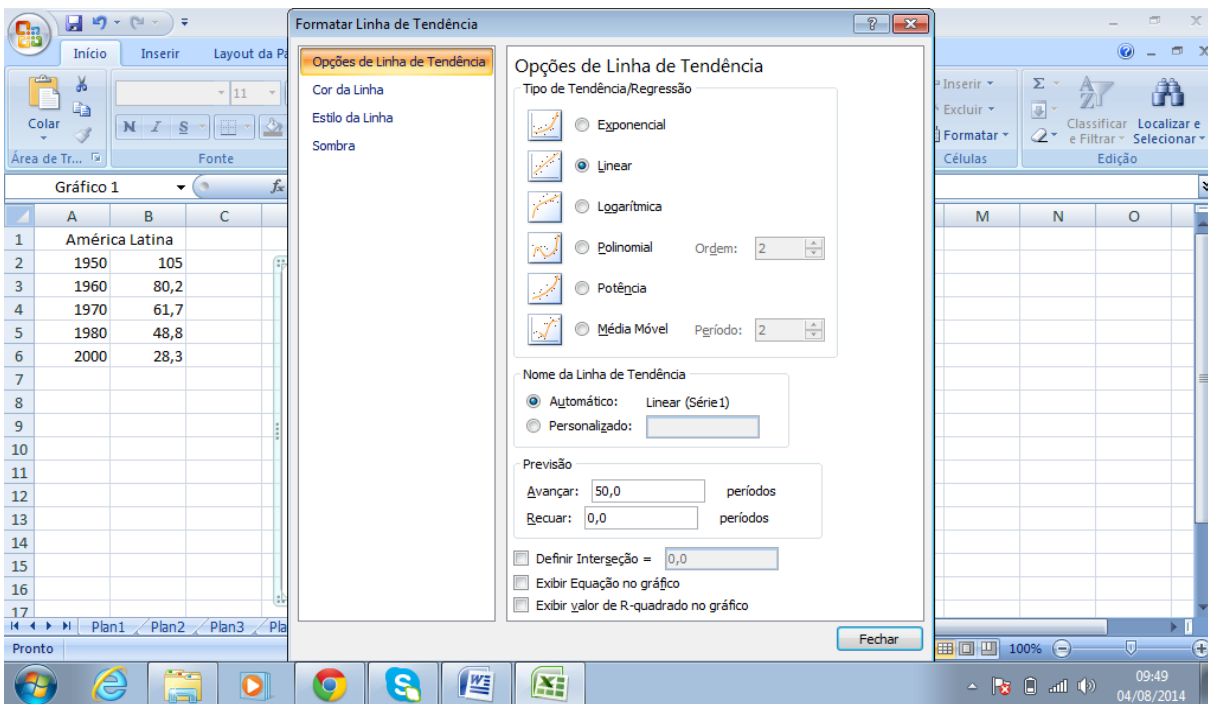


Figura 3.3. – Janela para formatar uma linha de tendência.

Fonte: Própria autoria.

A seguir deixamos como exemplo, plotados paralelamente, os gráficos da curva exponencial e de uma reta que representam os dados fornecidos pelo continente da América Latina:

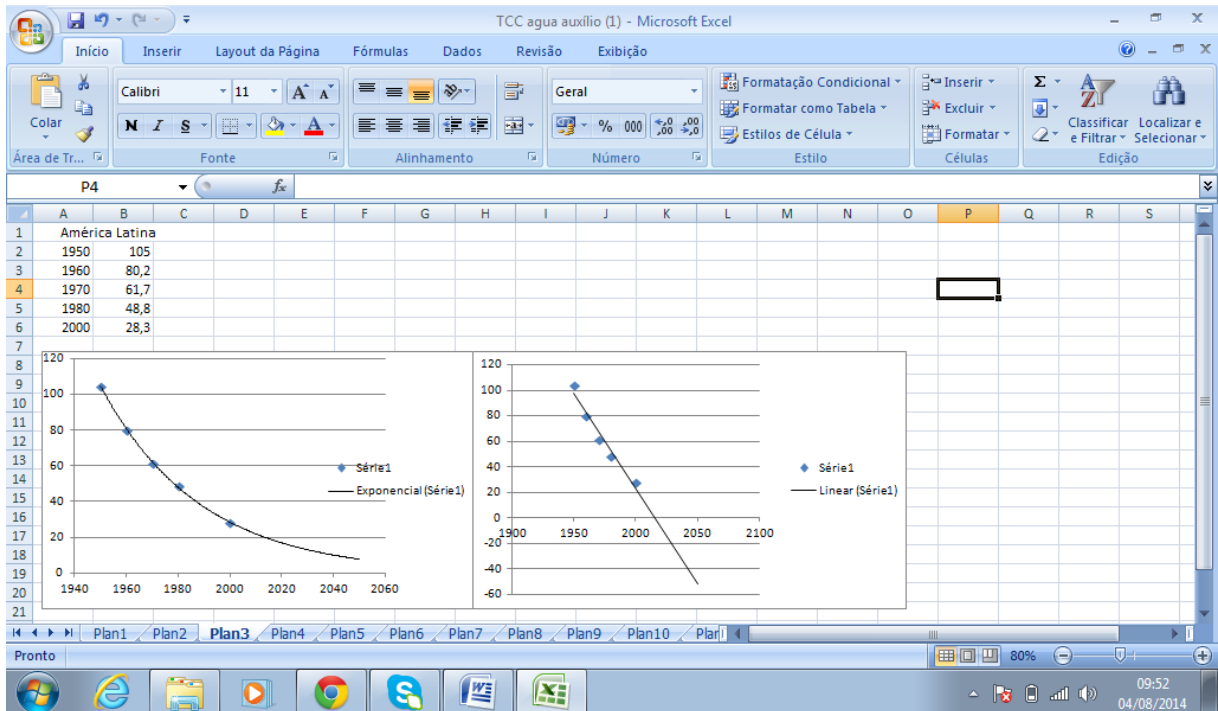


Figura 3.4. – Gráfico exponencial e linear dos dados referentes a América Latina.

Fonte: Própria autoria.

Cabe lembrarmos que não entramos com o mérito das leis que regem as funções, pois nesse viés introdutório ao conceito das funções, o nosso objetivo pauta-se principalmente ao aspecto variacional de relação entre as grandezas de um modo visual aos gráficos construídos. Porém, não se descarta a hipótese de nesse momento ou futuramente, o professor fornecer a lei das funções, trabalhando também essa variação por um viés algébrico.

4) Utilizando como auxílio os dados fornecidos pelos gráficos da curva EXPONENCIAL, responda:

- Continuando nesse ritmo de decrescimento, em que ano aproximadamente cada continente estará no “estado de penúria” com uma situação precária de água para sobrevivência?
- Com as informações coletadas no item anterior, apresente razões que poderiam acelerar a falta de água na América Latina no decorrer do tempo.

- c) Em 2050, como estaria aproximadamente a situação de água disponível em cada continente? Faça uma projeção de como estarão as cores do MAPA MUNDI, utilizando como auxílio os dados da FIGURA com os resultados dos gráficos.
- d) Assista a um pequeno vídeo<sup>3</sup> colocado pelo seu professor e discuta com o seu grupo debatendo possíveis relações desse filme com a atividade estudada.
- e) Com auxílio dos gráficos e dos conhecimentos adquiridos nessa atividade, um integrante de cada grupo, com a ajuda dos demais, explicará ao restante dos alunos quais informações podemos retirar desses gráficos e quais atitudes e decisões podem ser tomadas para reduzir os impactos que as gerações presentes e futuras poderão sentir com a falta de água.

***Com este exercício, fica constituída a etapa final do processo de Modelagem Matemática dentro dessa atividade, ou seja, a etapa da RESOLUÇÃO E APLICAÇÃO, momento em que o aluno começa a usar a linguagem matemática exposta pelo MODELO MATEMÁTICO para fazer análises e tomar decisões de situações cotidianas, presentes ou futuras, na linguagem usual do problema estudado. Buscamos nesse exercício, atender essas necessidades e também utilizar mais uma vez o auxílio das TICs para alcançarmos os objetivos da atividade.***

NOTAS PARA O PROFESSOR:

- ✓ *No item b), uma situação que poderia acelerar a falta de água na América Latina poderia ser uma guerra pela água, uma vez que, com a necessidade, diversos países poderiam recorrer ao nosso continente em busca de água para a sobrevivência.*
- ✓ *Em grande parte deste exercício o professor poderá intervir como mediador para trabalhar o senso crítico dos alunos junto aos conhecimentos matemáticos adquiridos.*

---

<sup>3</sup> Vídeo: Carta do ano 2070 – Advertência a humanidade. Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=VTc9UPtW2ts>

A seguir, apresentaremos a plotagem dos gráficos referentes aos continentes: Africano, Asiático, Europeu e Norte-Americano. De fato, para auxiliar na realização dessa atividade, os alunos deverão produzi-los e interpretá-los.

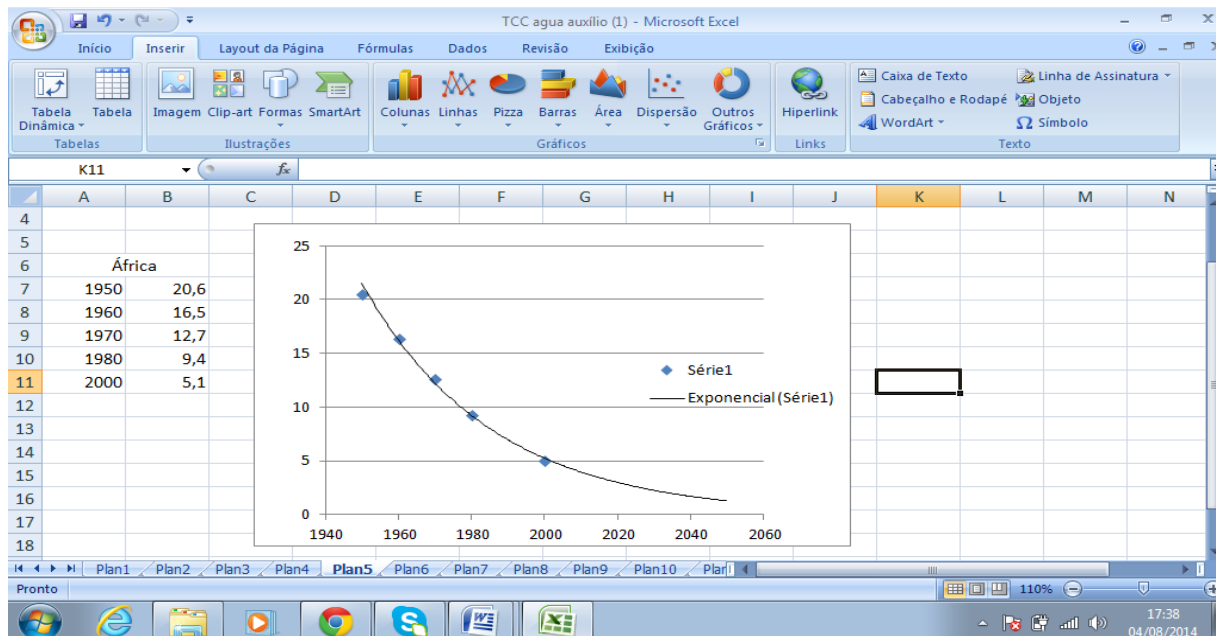


Figura 3.5. – Gráfico exponencial do continente Africano.

Fonte: Própria autoria.

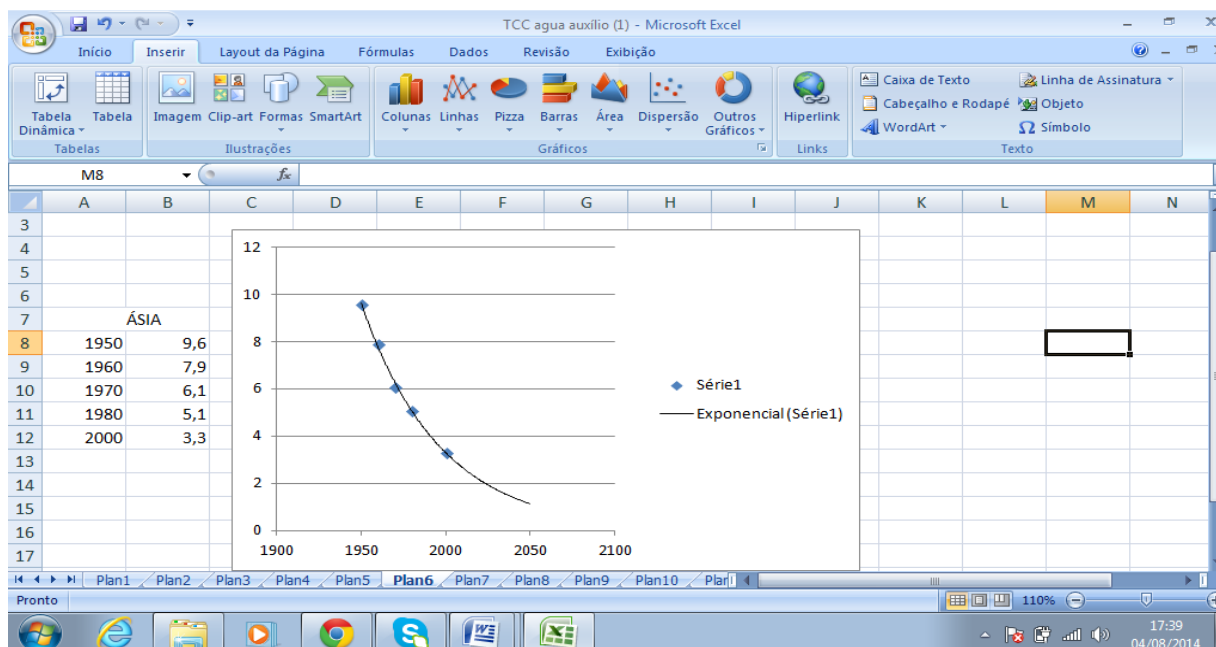


Figura 3.6. – Gráfico exponencial do continente Asiático.

Fonte: Própria autoria.

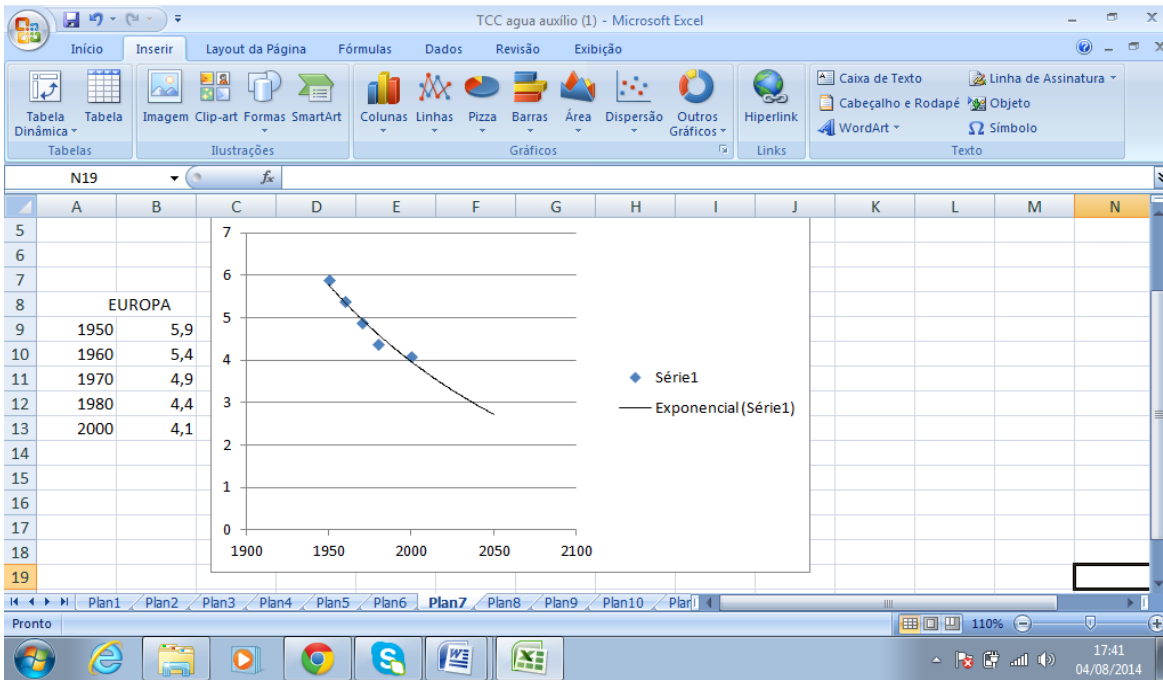


Figura 3.7. – Gráfico exponencial do continente Europeu.

Fonte: Própria autoria.

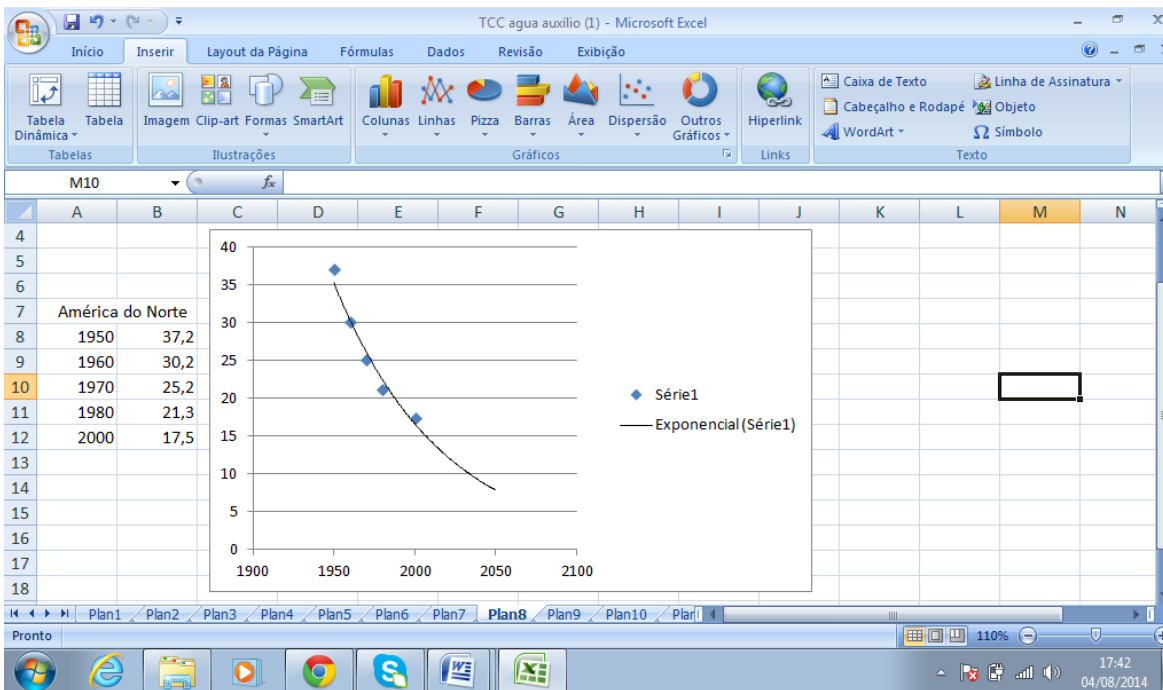


Figura 3.8. – Gráfico exponencial do continente Norte Americano.

Fonte: Própria autoria.

## 4.2. Atividade 2 – Profissões

Observe e discuta com o seu grupo os dados abaixo para depois responder as questões propostas.

Tabela 2 – Tabela dos candidatos inscritos na FUVEST segundo alguns cursos no decorrer dos últimos anos (2007 a 2013).

FUVEST	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Administração	5.644	5.107	1.703	1.575	1.576	1.777	1.518
Direito	10.022	11.309	10.519	10.294	10.668	10.621	11.304
Medicina	12.341	12.973	13.379	11.574	13.545	14.074	15.517
Engenharia (Politécnica)	8.562	10.917	12.343	10.475	10.683	11.933	12.680
Letras	5.688	5.116	4.434	3.223	3.333	3.303	3.299
Matemática/Física (Licenciatura)	1.156	988	866	711	749	690	730
<b>Total de Inscritos (todos os cursos)</b>	<b>142.999</b>	<b>140.999</b>	<b>138.242</b>	<b>128.144</b>	<b>132.993</b>	<b>146.892</b>	<b>159.609</b>

Fonte: <<http://www.fuvest.com.br>>

Tabela 3 – Tabela com a relação candidato-vaga da Fuvest segundo alguns cursos no decorrer dos últimos anos.

FUVEST	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Administração	26,46	23,85	16,01	14,89	15,01	16,92	14,46
Direito	21,5	19,83	18,45	18,23	19,05	18,97	20,19
Medicina	32,43	33,99	34,97	41,73	49,25	51,18	56,43
Engenharia (Politécnica)	9,74	13,43	15,11	12,98	14,24	15,91	15,46
Letras	6,65	5,95	5,11	3,76	3,93	3,89	3,89
Matemática/Física (Licenciatura)	4,4	3,76	3,12	2,55	2,88	2,65	2,81
<b>Total de Inscritos (todos os cursos)</b>	<b>142.999</b>	<b>140.999</b>	<b>138.242</b>	<b>128.144</b>	<b>132.993</b>	<b>146.892</b>	<b>159.609</b>

Fonte: <<http://www.fuvest.com.br>>

### Texto 1 - **CONHEÇA AS PROFISSÕES QUE SERÃO MAIS PROMISSORAS NOS PRÓXIMOS ANOS**

A passagem do texto a seguir foi extraída do “Guia do Estudante – Abril” e escrito por Guilherme Deadro, em agosto de 2011.

*Na hora de escolher uma profissão, os jovens se preocupam em encontrar carreiras que lhes traga satisfação e prazer, mas também que garanta bons empregos e salários. O cenário econômico brasileiro atual e suas tendências podem indicar que profissões serão promissoras nas próximas duas décadas. (...)*

Veja as tendências de cada área e quais profissões estarão em alta nos próximos anos:

### **ENGENHARIA**

**Cenário:** Com a Copa do Mundo em 2014 e as Olimpíadas em 2016, muito coisa terá de ser construída: estádios a hotéis. Também é preciso construir muitos imóveis e também melhorar a infraestrutura de portos, ferrovias, estradas e do setor energético. De acordo com o Ipea (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada), faltam 38.500 profissionais qualificados na área.

**Profissões:** Engenharia Civil, Arquitetura, Construção de Edifícios, Engenharia de Agrimensura, Engenharia Hídrica, Engenharia Naval, Logística e Transporte.

### **SAÚDE**

**Cenário:** A expectativa de vida está aumentando, provocando um envelhecimento da população. Com a população também aumentando, há forte demanda por mais hospitais, centros de saúde e profissionais da área.

**Profissões:** Medicina, Gerontologia, Educação Física, Esporte e Lazer, Fisioterapia, Nutrição, Fonoaudiologia, Musicoterapia, Enfermagem, Farmácia.

### **ENSINO**

**Cenário:** Com o aumento da classe C, há demanda por educação e qualificação. A necessidade de o país inovar e empreender requer também investimentos em pós-graduação e especializações. Surge a necessidade de mais instituições privadas e investimento do governo na formação de educadores.

**Profissões:** Pedagogia, Educomunicação e licenciaturas. (Letras, História, Matemática, Química, Física, Biologia) (...)

## **TEXTO 2 - MENOS JOVENS BUSCAM CURSOS DE LICENCIATURA E PEDAGOGIA NO PAÍS**

A passagem do texto a seguir foi extraída do jornal “O Estado de São Paulo” e escrito por Márcia Vieira, em maio de 2009.

*Cada vez menos alunos têm se interessado pela carreira de professor no Brasil, o que vem resultando em uma queda no número de formandos em cursos de licenciatura. Essa redução vai na contramão do crescente número de estudantes cursando graduação no País - hoje em cerca de 5 milhões.*

*Em 2007, último dado disponível no Ministério da Educação (MEC), 70.507 brasileiros se formaram em cursos de licenciatura, o que representa 4,5% menos do que no ano anterior. De 2005 a 2006, a redução foi de 9,3%. E a situação é mais complicada em áreas como Letras (queda de 10%), Geografia (menos 9%) e Química (menos 7%). Em alguns Estados, faltam professores de Física, Matemática, Química e Biologia. (...)*



- 1) Discuta com o seu grupo, para responder às seguintes questões:
  - a) O que você entendeu e quais informações você consegue retirar dos dados das tabelas? Explique com as suas palavras.
  - b) Qual relação você consegue fazer entre as tabelas com os textos apresentados?
  - c) Com o passar do tempo, considerando os dados das tabelas, você acredita que poderemos ter algum tipo de problema no futuro? Com o auxílio do seu grupo, aponte e explique um possível problema.

***Como nos primeiros itens da ATIVIDADE 1, esta etapa também consiste na EXPERIMENTAÇÃO, uma vez que as questões elaboradas estimulam os alunos a explorarem alguns aspectos e características do “PROBLEMA ORIGINAL”.***

- 2) Agora que você e o seu grupo já se familiarizaram com o assunto dessa atividade, responda:
  - a) O que está acontecendo com o número de vestibulandos de cada curso no decorrer do tempo? Explique apoiando-se nos dados oferecidos.
  - b) Escolha duas profissões entre as cinco apresentadas e indique possíveis relações entre elas, apontando as principais semelhanças e diferenças, segundo os dados apresentados nas tabelas.
  - c) Você acha que podemos utilizar a Matemática como auxílio para prever futuras informações a partir dos dados das tabelas? Qual parte da Matemática você acredita que pode ser útil nesse contexto? Discuta com o seu grupo e com o professor para elaborar essa resposta.

***Neste exercício fica evidenciada a etapa da ABSTRAÇÃO, direcionada para o aluno observar as variáveis e formular hipóteses de como a Matemática pode ser utilizada para representar esta situação. Mesmo que o aluno não consiga realizar tais formulações de modelo, fica como sugestão que o professor seja o mediador, estimulando e mostrando possíveis caminhos que sirvam como orientação para o aluno perceber que este assunto pode ser matematizado, por exemplo, com a construção de um gráfico. E assim, prepará-lo para próxima etapa do processo, a FORMULAÇÃO DO OBJETO.***

- 3) No laboratório de informática, com o auxílio do seu professor, coloque os dados das Tabelas em uma planilha do EXCEL. Em seguida, siga os roteiros orientados por ele para plotar esses dados em um gráfico. Por fim, discutindo com o seu grupo, responda às questões apresentadas.
- a) A partir dos gráficos elaborados, considerando o passar do tempo, o que você observa que está acontecendo com o número de vestibulandos inscritos em cada um dos cinco cursos? Explique com suas palavras.
  - b) No que se refere aos gráficos da “relação de candidato por vaga” em relação ao tempo, aponte as características observadas e tente explicar o que está acontecendo em cada curso.
  - c) Quais diferenças você observou entre os cursos de ENGENHARIA com o de LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E FÍSICA? Tente citar e explicar algumas diferenças encontradas, apontando algumas consequências que isso pode trazer no futuro.
  - d) Em relação aos cursos do item anterior, você acha que seria mais adequado o gráfico Exponencial ou Linear para fazer estimativas de resultados futuros? Discuta com o seu grupo para responder, caso necessário, solicite auxílio para o professor.
  - e) Cite algumas diferenças que você notou ao observar os dados nas tabelas e depois com a representação gráfica.

***Acreditamos que com essa etapa fique consolidada a fase da FORMULAÇÃO DO MODELO, pois, com o auxílio das TICs para explorar e indicar o MODELO MATEMÁTICO, e conseqüentemente traduzir o PROBLEMA ORIGINAL para uma “Linguagem Matemática”. As questões são norteadoras para os alunos se familiarizarem com o processo de VARIAÇÃO ENTRE GRANDEZAS e também conseguirem perceber possíveis vantagens ou desvantagens de determinadas representações, em especial entre gráficos e tabelas.***

#### NOTAS PARA O PROFESSOR

*Os procedimentos utilizados para a elaboração dos gráficos com o programa MICROSOFT EXCEL serão os mesmos descritos na atividade 1 e algumas representações gráficas necessárias para a resolução deste exercício como o próximo, serão apresentadas no final dessa atividade. Cabe salientar que na*

*alternativa d) o professor pode enfatizar aos alunos que o modelo EXPONENCIAL talvez não seja o mais conveniente para o curso de ENGENHARIA e sim o modelo linear, uma vez que a função é crescente e a mesma apresentaria uma taxa de variação muito elevada com o passar do tempo, já com o modelo LINEAR os resultados ficariam mais próximos de valores que possam representar uma real situação. Entretanto, para o curso de LICENCIATURA EM MATEMÁTICA/FÍSICA o modelo mais adequado poderia ser o EXPONENCIAL, sendo que o número de vestibulandos está se aproximando de zero e não estaria condizente se assumisse valores negativos como ficariam os dados no modelo LINEAR. Relembrando que o foco dessa atividade não é encontrar um modelo matemático ideal, a maior preocupação é apresentar aos alunos uma situação real que pode ser matematizada e também fazer com que eles percebam o aspecto variacional das grandezas apresentadas entre outras características de uma função, para assim prepará-lo ao estudo inicial deste conceito por um viés direcionado à análises, reflexões e senso crítico do assunto abordado.*

- 4) Sabendo-se que agora você possui as informações iniciais da atividade, representadas graficamente, responda as seguintes questões utilizando este auxílio.
  - a) Você acredita que em 2030 haverá mais inscritos em Engenharia ou em um curso de Licenciatura em Matemática/Física? Indique aproximadamente os valores correspondentes a essa diferença hoje (2014) e daqui a 20 anos (2034).
  - b) Faça uma comparação de qual era a “diferença” entre o número de inscritos para os cursos de MEDICINA e LETRAS em 2004, 2008 e 2012. Como você espera que essa diferença esteja em 2030? Essa diferença está aumentando ou diminuindo?
  - c) Como você considera que seria o mundo com pouquíssimos professores e muitos profissionais de outras áreas? Isso seria possível? Quais seriam as principais consequências na vida das pessoas e em nossa sociedade?

- d) Quais seriam os possíveis motivos para que os cursos de formação de professores sejam menos concorridos, em relação aos outros cursos? Justifique sua resposta.
- e) O que você acha que poderia acontecer, com o passar do tempo, com cada vez mais engenheiros formados e menos professores na área de exatas?
- f) Com base nos gráficos construídos e nos textos apresentados, um integrante de cada grupo, com auxílio dos demais componentes, deverá relatar ao restante dos alunos os seguintes tópicos:
- ✓ Quais informações conseguiram retirar dos gráficos;
  - ✓ Quais podem ser as consequências dessas informações para a sociedade;
  - ✓ Quais ações poderiam ser utilizadas para alcançarmos resultados futuros que diminuíssem as consequências negativas dessas informações.

***Nesta última atividade ficaram constatadas as etapas da RESOLUÇÃO E APLICAÇÃO. Podemos notar a etapa da RESOLUÇÃO nos itens a) e b), os quais exigem do aluno a utilização do MODELO CONSTRUIDO para determinar e prever alguns resultados numéricos do contexto explorado. Já os demais itens finalizam a atividade com a etapa da APLICAÇÃO, estimulando o discente a pensar, refletir e tomar decisões que possam ser úteis a um determinado fim, de acordo com o tema abordado.***

**NOTAS PARA O PROFESSOR:**

*A seguir, para representar alguns dos gráficos que serão utilizados nessa atividade, deixaremos como exemplo alguns gráficos lineares e exponenciais referentes ao número de inscritos e da relação candidato por vaga dos cursos de ENGENHARIA e LICENCIATURA EM MATEMÁTICA/ FÍSICA. Para serem produzidos os demais gráficos, pode-se utilizar o mesmo procedimento descrito e indicado na atividade anterior.*

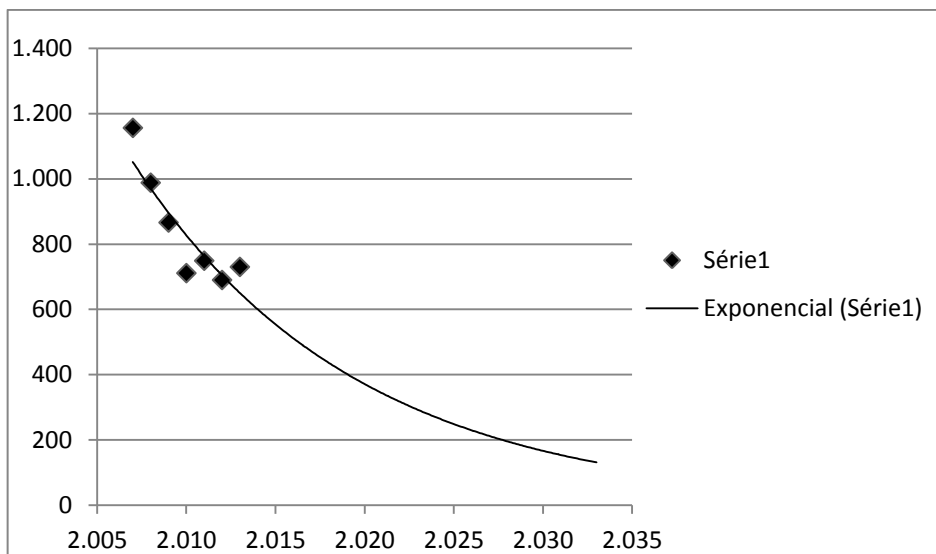


Figura 4 – Gráfico Exponencial referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Licenciatura em Matemática/Física.

Fonte: Própria autoria.

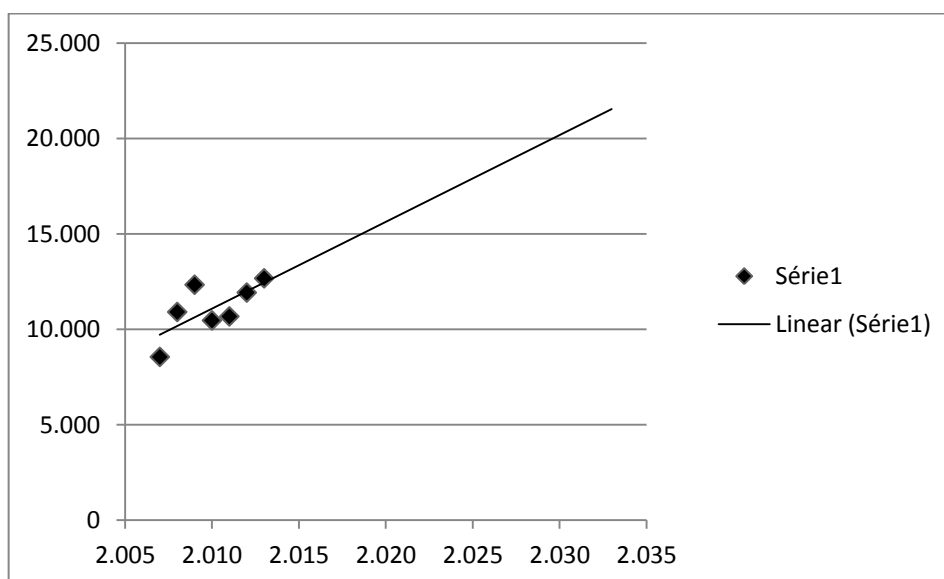


Figura 4.1. – Gráfico Linear referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Engenharia na Escola Politécnica.

Fonte: Própria autoria.

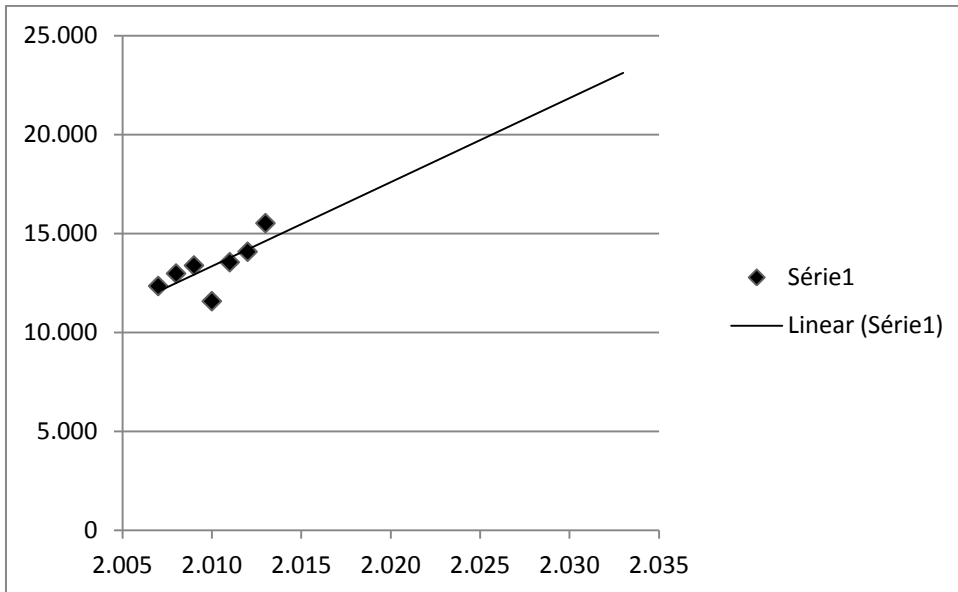


Figura 4.2. – Gráfico Linear referente ao número de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Medicina.

Fonte: Própria autoria.

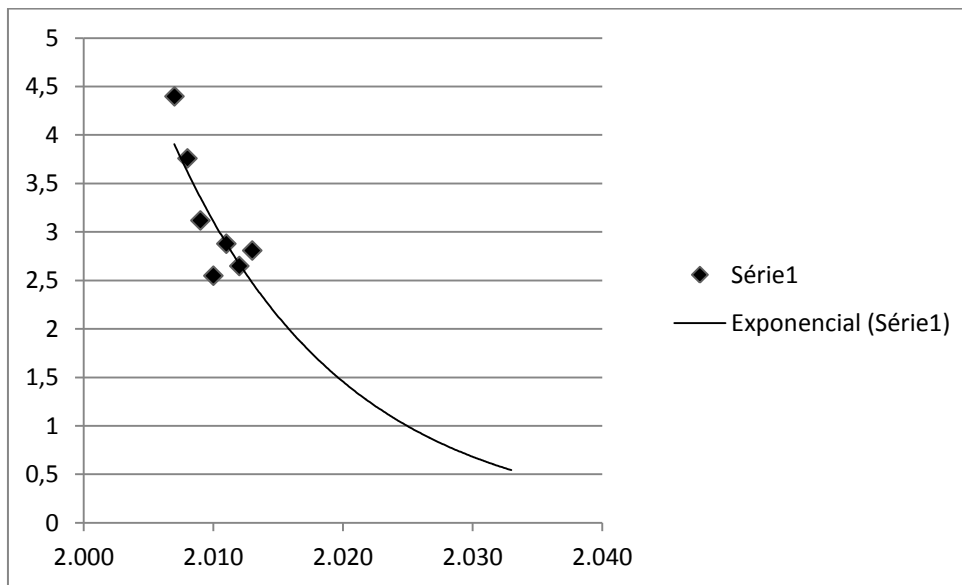


Figura 4.3. – Gráfico Exponencial referente à Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Licenciatura em Matemática/Física.

Fonte: Própria autoria.

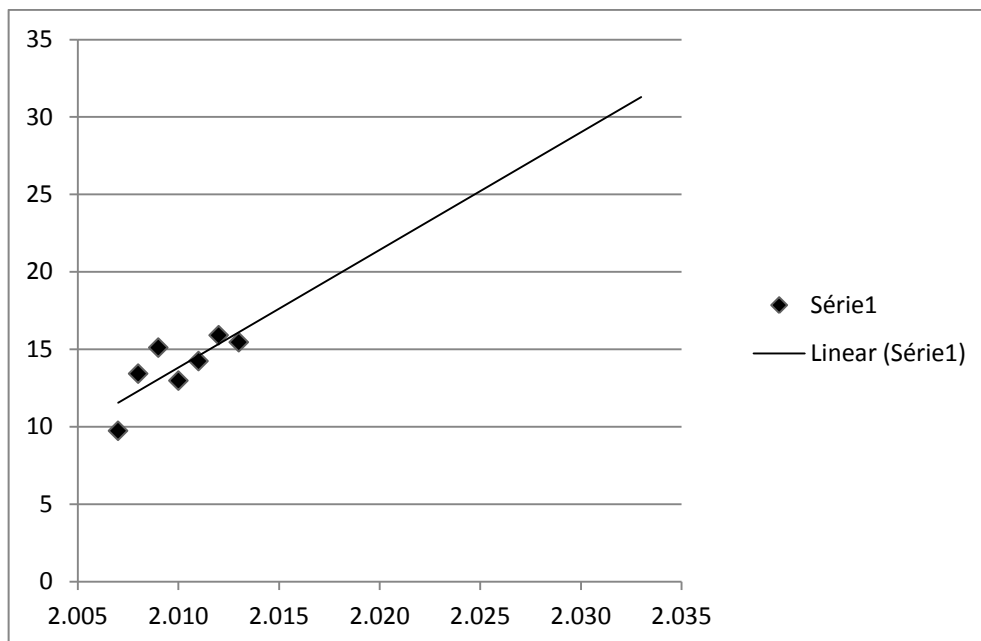


Figura 4.4. – Gráfico linear referente à Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Engenharia na Escola Politécnica.

Fonte: Própria autoria.

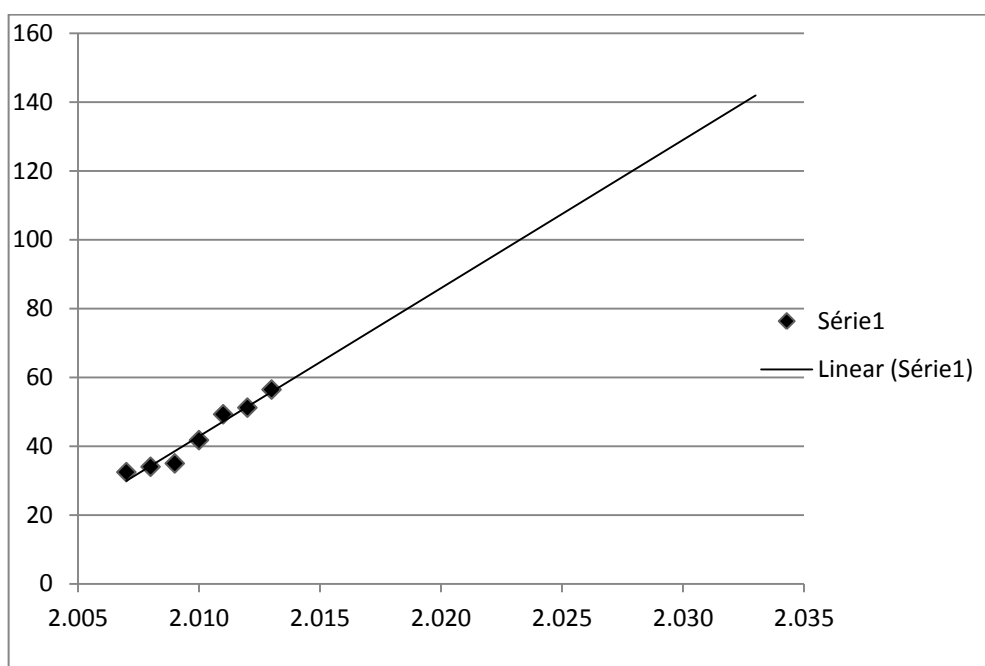


Figura 4.5. – Gráfico linear referente à Relação Candidato-Vaga de inscritos da FUVEST, segundo o curso de Medicina.

Fonte: Própria autoria.

É importante ressaltar que durante a construção dessas atividades, além de tentarmos desenvolver uma relação entre duas metodologias que podem auxiliar na melhor compreensão do aluno em seu primeiro contato com o estudo das funções, procuramos elaborar as questões com indagações e ideias que estimulem o senso crítico e reflexivo do discente, auxiliando em sua formação como um cidadão que observa os problemas ao seu redor e utiliza seus conhecimentos para tentar solucioná-los.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento desta monografia, procuramos principalmente elaborar uma proposta didática que pudesse auxiliar o aluno no entendimento das características essenciais para o aprendizado e estudo das Funções, como também propor uma sugestão para a elaboração de futuras pesquisas acadêmicas sobre o tema.

Visando essa proposta nos primeiros contatos do aluno com este objeto de estudo, levamos em consideração o aspecto variacional de relação entre grandezas juntamente a um contexto de duas metodologias de ensino que possibilitassem o ensino e aprendizado de um modo prático e direcionado ao cotidiano do aluno. Para isso, desenvolvemos uma proposta de atividades que contemplasse a articulação entre duas metodologias de ensino (Modelagem Matemática concomitante ao uso das TICs) procurando um modo de auxiliar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem das Funções.

Entendemos que por meio do embasamento teórico de Bassanezi (2011) para a construção das atividades, alcançamos o desenvolvimento de uma proposta que poderá servir de auxílio tanto para produção de trabalhos acadêmicos relacionados a este tema, como para a utilização desta atividade por graduandos em Matemática ou docentes da área que procuram por novas metodologias para o ensino e a aprendizagem da Matemática, mais especificamente para o ensino das funções.

Com o roteiro descrito nas atividades, esperamos que o trabalho possa auxiliar os docentes em possíveis aplicações, uma vez que em diversas escolas já existem os laboratórios de informática.

Com isso conseguimos responder à principal questão do nosso problema de pesquisa, pois com o desenvolvimento deste trabalho percebemos que é possível conciliar e iniciar o ensino das funções a partir de duas metodologias de ensino que possibilitem simultaneamente uma atividade atrativa e que atenda situações relacionadas ao contexto de vida dos alunos. Sendo assim, além de cumprir o objetivo principal deste trabalho, ao elaborarmos uma atividade possível de trazer melhorias para o ensino e aprendizagem das funções, não moldada exclusivamente

em padrões mecanicistas, também acreditamos que cumprimos os objetivos secundários, uma vez que o aluno poderá perceber a importância das ferramentas matemáticas para a resolução de problemas e tomada de decisões no seu dia-a-dia, ao matematizar uma situação real por meio do processo de Modelagem Matemática junto ao uso das TICs.

Acreditamos que durante as possíveis discussões em grupo, o aluno poderá construir uma visão mais ampla das características fundamentais de uma função ao necessitar do seu senso crítico, reflexivo e cooperativo com seus colegas na resolução de alguns tópicos das atividades propostas. Além disso, estará se preparando para lidar com diversas situações que envolvam o seu cotidiano. Por fim, como sugestões de melhorias ao universo acadêmico, deixamos em aberto o campo para utilização deste trabalho em futuras aplicações, como também para a elaboração de outros trabalhos que possam complementá-lo com as demais propriedades de uma função e com diferentes metodologias, seja por meio de softwares matemáticos ou outros recursos que possam modelar situações e estimular o aluno ao aprendizado, contextualizando o seu dia-a-dia com o auxílio da própria Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W; BRITO, D. S. **O conceito de função em situações de Modelagem Matemática**. Revista de Educação Matemática Zetetiké, Campinas, v.13 – n.23 – jan./jun. 2005.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BASSANEZI, Rodney C. **Equações Diferenciais Ordinárias. Um curso introdutório**. São Paulo: UFABC, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Biucher, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN e Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BUENO, R. W. d. S.; VIALI, L. **A Construção Histórica do Conceito de Função**. Educação Matemática em Revista – Sociedade Brasileira de Educação em Matemática (SBEM), Rio Grande do Sul, v.1, n.10, p. 37-47, Dez. 2009.

CASTELLS, Manuel. **A Galáxia da internet: Reflexões sobre a internet, os negócios e a sociedade**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2003.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Tecnologias da Informação e Comunicação: reflexos na matemática e no seu ensino**. Disponível em:  
<<http://mestremarcomota.blogspot.com.br/2011/>> Acesso em: 15 jun 2014.

DEARO, Guilherme. **Conheça as profissões que serão promissoras nos próximos anos**. Revista Guia do Estudante – 10 agosto de 2011. Disponível em:  
<<http://guiadoestudante.abril.com.br/vestibular-enem/conheca-profissoes-serao-mais-promissoras-proximos-anos-636294.shtml>> Acesso em: 17 mai 2014.

DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, v.2, 2012.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GAUTHIER, Clemont; TARDIF, Maurice. **Pedagogia: Teorias e práticas da Antiguidade aos nossos dias**. Petrópolis: Vozes, 2010.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

SÁ, Robson. **Modelagem, TICs e o Ensino da Matemática**. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/educacao>> Acesso em 23 abr 2014.

SOEIRO, Raphael. **E se a água do mundo acabar?** Revista Super Interessante – junho de 2012. Disponível em: <<http://super.abril.com.br/cotidiano/se-agua-potavel-acabar-690370.shtml>> Acesso em: 17 mai 2014.

SOUZA, Joamir. **Matemática – Coleção Novo Olhar**. São Paulo: FTD, v.1, 2010.

VASCO, Carlos E. **El pensamiento variacional y la modelación matemática**. Anais eletrônicos do CIAEM – *Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Blumenau, 2003.

VIEIRA, Marcia. **Menos jovens buscam cursos de licenciatura e pedagogia no País**. O Estado de São Paulo – 31 maio de 2009. Disponível em: <<http://www.estadao.com.br/noticias/vidae,menos-jovens-buscam-cursos-de-Licenciatura-e-pedagogia-no-pais,379932,0.htm>> Acesso em: 17 mai 2014.