INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

OBRAS DO MATEMÁTICO ÁRABE OMAR KHAYYAM

Anderson Ferreira Costa

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP
São Paulo
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Costa, Anderson Ferreira.
Obras do Matemático Árabe Omar Khayyam/ Anderson Ferreira Costa - São Paulo: IFSP, 2013.
75 f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Henrique Marins de Carvalho.

1. Omar Khayyam. 2. Álgebra. 3. História das Equações. 4. História da Matemática. 5. Resolução de Equações Cúbicas I. Título do trabalho.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

"O que sabemos é pouco. O que não sabemos é imenso"

Pierre-Simon Laplace

À minha mãe e

aos meus avós, com muito afeto.

AGRADECIMENTOS

Certo de que meus agradecimentos por mais faustos que sejam não farão jus ao quanto me foi possível arrebanhar de conhecimento nessa curta e proveitosa caminhada, inicio agradecendo a meu orientador Henrique Marins. Sob sua orientação creio que amadureci em vários aspectos, dentre os quais destaco a postura de observar com extremo cuidado e respeito qualquer forma de conhecimento, em destaque as sutilezas da História da Matemática. E sinto por não haver tempo para mais trabalhos sob sua orientação.

Agradeço com profundo respeito e humildade a esses guerreiros, aos quais acompanhei em tantas batalhas: Filipe (exemplo), Ana Olívia (irmã), Thaís Matos (a mentora), Ana Carolina, Fernando Pavan, Patrícia (minha heroína), Luciano (irmão), Claudia, Fernando Manholer, Douglas, Denis, Elígio, Orlandinho, Diogo (Paçoca, guerreiro), Anderson (Perucão), Toninho, Djalma, Roberto Abrão, David, Alberto, Daiane, Willian, Marcão, Arnaldo, Elaine, Robinho, Tatiane, Rafael Polesi, Fabrício (o Cinderela), Gisele, Diego, André Ávila, Leandro, Cideni (a faz tudo do IFSP), Luciene e Layse (anjinhas), Aninha, Leonardo, Misael, Ana Toschi.

Agradeço a todos os professores do IFSP com os quais pude aprender cada qual a sua maneira e forma de lecionar, são eles: Profª. Ma. Elizabete Guerato, Profª. Drª. Graziela Marchi, Profª. Drª. Mariana Pelissari, Profº. Drº. Rogério Fonseca, Profº. Maurício França, Profº. Drº. Paulo Roberto, Profº. Drº. Armando Traldi, Profª. MS. Fabiane Marcondes, Profº. Ma. Cesar Adriano, Profª. Drª. Iracema Arashiro, Profº. Drº. Amari Goulart, Profº. Ma. Renato Cruz, Profª. Carla Souto.

Agradeço aos professores que compõem a banca, Profº. Ma. José Maria Carlini e Profª. Ma. Valéria Luchetta que muito contribuíram para a construção desse trabalho.

Agradeço de forma especial à Profª Cristina Lopomo por toda a sua intensa dedicação na construção desse trabalho, que com seu olhar apurado e perspicaz me auxiliou em todas as oportunidades possíveis.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus avós que muito contribuíram para o que sou, à minha mãe que tanto me inspira, às minhas tias maravilhosas Beatriz e Juliana, que suprem a enorme falta de minha mãe e avó, pois sem esse apoio certamente não estaria a fazer esse trabalho; e ao meus queridos primos Rodrigo e Renata pela cumplicidade.

E por fim agradeço à minha namorada Lilian que muito se doou para que o pouco tempo disponível que tenho, “sempre” compreendeu meus afazeres estudantis. E com ela veio uma galera do barulho que aprendi a amar: Belinha, Raul e Mariana, seres chatos, manhosos, bravos, mas apaixonantes. E também a meu cunhado Leandro pelo imenso auxílio, tanto nos textos em inglês quanto em francês.

RESUMO

Visando a importância da História da Matemática, este trabalho tem como escopo a obra do matemático árabe Omar Khayyam, um homem à frente de seu tempo, e objetiva desnudar a substancial contribuição que realizou em diversos campos da ciência. Embora seja conhecido no Ocidente como poeta de proeminente agucidade e tenaz nas críticas incutidas em seus versos, suas contribuições científicas são tão abrangentes que necessitam ser explicitadas tanto como seu valor poético. Desse modo, exibiremos o contexto histórico em que Khayyam viveu, quais influências sofreu e exerceu, e o quanto produziu. Exporemos a História da Matemática Árabe, citando os principais matemáticos árabes e suas obras, traçando assim um panorama do início e da derrocada do Império Árabe. Apresentaremos brevemente a História das Equações Algébricas a fim de subsidiar a importância que os árabes tiveram nesse campo da Matemática. Trataremos do trabalho empreendido por Khayyam com as equações cúbicas e os desdobramentos que tiveram ao longo do tempo com o avanço das linguagens científicas desenvolvidas. Expressaremos considerações para o Ensino de Matemática utilizando o método de Khayyam e analisaremos com que frequência Khayyam é mencionado nos livros didáticos. Por fim, evidenciaremos a importância da História da Matemática para o ensino da matemática como forma de compreender seu desenvolvimento histórico.

Palavras chave: Omar Khayyam, Álgebra, História das Equações, História da Matemática, Resolução de Equações Cúbicas.

ABSTRACT

Aiming at the importance of the History of Mathematics, this work is scoped to the work of the Arab mathematician Omar Khayyam, a man ahead of his time, and objective stripping the substantial contribution made in various fields of science. While it is known in the West as a poet voracious prominent and tenacious in critical instilled in his verses, his scientific contributions are so comprehensive that need to be explained both its poetic value. Thus, we will expose the historical context in which Khayyam lived, suffered and which influences exerted and how produced. We will display the History of the Arab Mathematics, citing the main arab mathematicians and its works, thus tracing an overview of the beginning and the destruction of the Persian Empire. Present briefly the history of Algebraic Equations in order to subsidize the importance that the Arabs had in this field of mathematics. Deal of work undertaken by Khayyam with cubic equations and developments that had over time developed with the advancement of scientific languages. We will express considerations for Teaching Mathematics using the method of Khayyam and analyze how often Khayyam is mentioned in textbooks. Finally, we will highlight the importance of the history of mathematics for teaching mathematics as a way to understand its historical development.

Keywords: Omar Khayyam, Algebra, History of Equations, History of Mathematics, Cubic Equation Solver.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 3.1 - Tradução de Franz Wopcke da *Algebra* de Omar Khayyam 34
Figura 3.2 - Quadrilátero de Sacchieri 37
Figura 3.3 - Rubaiyat de Omar Khayyam traduzido por Edward Fitzgerald 39
Figura 4.1 - Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes) 45
Figura 5.1 - Manuscrito da Algebra (*Maqalah fi al-jabra wa-al muqabalah*) 58
Figura 5.2 - Representação gráfica da equação $x^3+ 4x = 8$ 61
Figura 5.3 - Gráficos da parábola $x^2=2y$ e da circunferência $(x-1)^2 +y^2=1$ 62
Figura 5.4 - Representação gráfica da equação cúbica $x^3+12 =4x$. 64
Figura 5.5 - Representação gráfica da parábola $x^2=2y$ e da hipérbole $y^2+3x=x^2$ 65
Figura 5.6 - Representação gráfica da cúbica $x^3+3x =12$ 66
Figura 5.7 - Representação gráfica da parábola $y^2+3x=6$ e da hipérbole $xy = 3$ 67

LISTA DE TABELAS

Pág.

Tabela 3.1 - Divergências nas datas de nascimento e morte de Omar Khayyam.....29

_

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO 23
2 A MATEMÁTICA ÁRABE 25
2.1. Matemáticos Árabes 26
3 CONTEXTO HISTÓRICO DE OMAR KHAYYAM 29
3.1. Produções Matemáticas 32
3.2. Produções Não Matemáticas 38
4 HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS 43
4.1. Pré- História 44
4.2. História Antiga 44
4.3. História Moderna 51
5 O MÉTODO DE OMAR KHAYYAM 57
5.1. Considerações para o Ensino de Matemática 67
5.2. Omar Khayyam nos Livros Didáticos 68
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 71
REFERÊNCIAS 73

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade abordar e analisar os aspectos matemáticos, científicos e culturais da obra de Omar Khayyam[1], que viveu entre os séculos XI e XII. Analisaremos o contexto histórico em que Khayyam está inserido, as transformações históricas que subsidiaram suas aspirações poéticas, suas contribuições astronômicas necessárias para a época e sua enorme proficiência em matemática, chegando a prever o surgimento de áreas inovadoras. O estudo é desenvolvido sob a perspectiva de fomentar e promover reflexões a respeito da importância da História da Matemática, colocando em tela a Matemática Árabe.

Corroboramos então, realizando tal feito, com Iran (2009) quando diz que todo conhecimento produzido pelo ser humano é transversalizado pela história que o precedeu. Por essa razão é tão importante umedecer a cognição com respingos históricos do conhecimento que chegaram até nós por meio das incisões e dos registros seculares gravados nos diferentes suportes que o conservaram ao cargo do tempo como pedras, os papiros, os pergaminhos, dentre outros. Tais incisões e registros nos permitem conhecer parte da nossa história e ajudam a definir alguns padrões de pensar e explicar saberes até hoje importantíssimos e que, por essa razão, continuam sendo usados.

Nossa motivação para esta pesquisa está na importância da herança da Matemática Árabe, e o quanto esse desenvolvimento permeia a matemática europeia da Idade Média e, por conseguinte, a matemática atual. O avanço algébrico realizado pelos árabes, durante séculos, serviu de base para enormes avanços em matemática. Omar Khayyam se destaca por ser um grande algebrista, um expoente astrônomo e um reconhecido poeta, que sintetiza seu tempo com contribuições importantes nessas três áreas.

Explicitaremos, de certa forma, através da História da Matemática Árabe que os matemáticos árabes não apenas traduziram e assimilaram conhecimentos matemáticos dos hindus, gregos e babilônicos como também os organizaram e aperfeiçoaram. Não raro, tem-se a impressão de que eles foram apenas passivos no contato com esses saberes, mas como Khayyam, existiram outros árabes que nos

[1] Grafia presente nas traduções de História da Matemática de Carl F. Boyer feita por Elza Gomide e de Introdução da História da Matemática de Howard Eves feita por Hygino Domingues.

deixaram trabalhos primorosos. Traçaremos para atingir tal intuito um panorama do início ao fim do Império Persa[2], citando os principais matemáticos árabes, suas obras e a importância que as traduções árabes tiveram na história do conhecimento humano.

No campo cultural abordaremos suas obras poéticas, que se caracterizam pelas críticas agudas à sociedade em que viveu, tecendo um emaranhado universo de figuras de linguagens que fornecem um rico ambiente poético. Esse aspecto forneceu um rico panorama para diversas releituras das produções de Khayyam e muitas análises sociais a partir de suas ironias.

Apresentaremos, de forma concisa, a História das Equações Algébricas, com o intuito de expor um esboço do desenvolvimento das ferramentas de resoluções desde os babilônicos, egípcios e gregos, passando pelos hindus e árabes, e finalmente atingindo seu ápice com os europeus.

No campo matemático abordaremos o método de resolução desenvolvido por Khayyan para enfrentar as equações de terceiro grau, tema que durante muito tempo ocupou diversos matemáticos e que despertou uma atenção especial nos árabes. O método algébrico desenvolvido por Khayyam foi de grande importância para os europeus enfrentarem as resoluções de equações de terceiro grau, e delas decorreu a criação da Teoria dos Números.

Exporemos as aplicações do método desenvolvido por Khayyam no Ensino de Matemática através de ferramentas computacionais. E também faremos observações da frequência com que os árabes, em especial Omar Khayyam, são mencionados nos livros didáticos do Ensino Superior e do Ensino Fundamental quando se abordam as resoluções de equações cúbicas.

Por fim, apresentaremos a enorme importância da História da Matemática para o ensino de matemática, nos arvorando na perspectiva histórica da construção do conhecimento humano, tão evidenciado no desenvolvimento do pensamento matemático.

---

[2] Utilizaremos árabe e persa como sinônimos, pois ambas são as línguas predominantes no território dominado pelos árabes entre os séculos VII e XV.

2 A MATEMÁTICA ÁRABE

> "Creio que não é possível compreender as matemáticas de hoje se não se tiver pelo menos uma ideia sumária de sua história"
>
> Jean Dieudonné

A ascensão e o declínio do Império Árabe segundo Eves (2011) constituem um dos episódios mais notáveis da história. Até o século VII os árabes encontravam-se divididos em várias tribos, algumas sedentárias e outras nômades, geralmente hostis entre si. O Império Árabe teve início (BOYER, 2010) por volta de 622 d.C. com o líder religioso e militar Maomé, e mesmo com sua morte em 632 d.C. o Império continuou em franca expansão.

De acordo com Boyer (2010) o primeiro século do Império Árabe fora destituído de realizações científicas, sendo esse período o nadir do desenvolvimento da matemática, pois os árabes ainda não tinham entusiasmo intelectual, e o interesse pela cultura tinha quase desaparecido no resto do mundo.

Por mais de um século os conquistadores árabes lutaram entre si e com seus inimigos, até que por volta de 750 d.C. abrandaram o espírito guerreiro. Nessa época (BOYER, 2010) o califa[3] al-Mansur estabeleceu uma nova capital em Bagdá, cidade que logo se transformaria em um novo centro da matemática.

Houve (STRUIK, 1997) um súbito despertar cultural do Islã na segunda metade do século VIII a.C., e a Bagdá foram chamados estudiosos da Síria e da Mesopotâmia, inclusive judeus e cristãos; sob três grandes patronos da cultura abássida[4], al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum.

Al-Mamum estabeleceu (BOYER, 2010) uma "Casa da Sabedoria" comparável ao antigo Museu de Alexandria e patrocinou traduções diversas obras gregas, entre as quais do *Almagesto* de Ptolomeu e *Os Elementos* de Euclides, fomentando um trânsito de manuscritos gregos com o Império Bizantino. Não fosse o laborioso

---

[3] Titulo que se atribuía ao chefe supremo do islamismo, durantes o período de expansão do Império Árabe entre os séculos VIII e XV.

[4] O Califado Abássida foi fundado pelos descendentes do profeta islâmico 'Abbas ibn 'Abd al-Muttalib, o tio mais jovem de Maomé, em Harran, em 750 d.C. e mudou a sua capital em 762 para Bagdá.

trabalho de tradução dos árabes muito das inúmeras obras científicas dos gregos e hindus teria se perdido, e muito não se chegaria à Europa para traduções para o latim e outras línguas.

Embora em franca expansão houve um cisma entre os Impérios do Oriente e do Ocidente, pois a unidade do Império era mais econômica e religiosa do que política, e esse fato teve influência na escrita adotada pelos matemáticos. Podemos citar que A'bul Wefa e al-Kharki, que pertenciam ao Império do Ocidente, escreveram aritméticas nas quais os números eram representados por meio de palavras enquanto isso se dava de forma diferente no Império do Oriente.

Eves (2011) relata que por volta do ano 1000 o Império Árabe começa a ser ocupado pelos turcos seldjúcidas[5]. Em 1258 os mongóis tomaram Bagdá, o califa do Império Árabe do Oriente foi derrubado do poder e o declínio se instalou. Em 1492 a Espanha derrotou o último dos mouros e os árabes perderam seu domínio na parte da Europa que exerciam seu poder.

2.1. Matemáticos Árabes

Sob o reinado do califa al-Mamum no século VIII d.C. muitos intelectuais escreveram sobre matemática, dentre (EVES, 2011) os quais destacamos al-Khowarizmi, que escreveu um livro de álgebra e outro sobre a numeração hindu apoiado nos escritos de Brahmagupta, esses trabalhos exerceram uma enorme influência na Europa quando foram traduzidos.

Através de sua aritmética, Boyer (2010) afirma que o nome de al-Khowarizmi tornou-se uma palavra vernácula e através de seu livro mais importante, *Al-jabr Wa'l Muqabalah*, ele nos deu uma palavra ainda, o termo álgebra. A álgebra de al-Khowarizmi de acordo com Eves (2011) é inteiramente expressa em palavras, nada como a simbologia usada por gregos e hindus é encontrado, a falta de uma notação simbólica limitava seus trabalhos.

Temos em al-Khowarizmi um exemplo de ecletismo, o que para Boyer (2010) será observado em outros matemáticos árabes, e que apesar de sua falta de notação

[5] O nome seljúcida provém de Seljuque, fundador desta civilização. Entre as principais características deste povo, destacam-se a divisão em tribos e o nomadismo.

simbólica não há como negar elementos inconfundíveis dos gregos em suas obras, dentre as quais vale destacar seu tratamento e aprimoramento do problema de Heron abordando o Teorema de Pitágoras. Boyer (2010) aponta que a sua obra *Álgebra* é considerada a primeira obra sobre o assunto.

Thabit ibn Qurra, viveu no século IX e ficou conhecido com o Papus dos árabes, entre seus feitos (EVES, 2011) podemos citar a fundação de uma escola de tradutores, a tradução de os *Elementos* de Euclides e das *Secções Cônicas* de Apolônio. Boyer (2010) comenta ser Thabit ibn-Qurra um exemplo de que os árabes não foram apenas servis imitadores dos gregos, já que o mesmo propôs uma reformulação do trabalho astronômico de Hiparco, abrindo assim caminho para a astronomia de Copérnico.

Abd-al-Hamid ibn-Turk, que também viveu século IX, com sua obra *Necessidades lógicas em Equações Mistas* que se assemelha muito com a álgebra de al-Khowarizmi, sendo em partes (BOYER, 2010) até mais completa, pois utiliza-se de figuras para provar que se o discriminante de uma equação quadrática é negativo não tem solução, fato que por muito tempo foi aceito como verdadeiro.

Abu'l–Wefa, do século X, se destacou pela tradução das obras de Diofanto, por introduzir (BOYER, 2010) a função tangente em trigonometria e elaborar uma tábua de senos e tangentes e forneceu soluções geométricas para algumas equações quárticas. Eves (2011) afirma que Abu'l-Wefa mostrou como localizar os vértices do poliedro regular na esfera que se inscreve, com um compasso aberto, esse problema ele possivelmente coletou em suas traduções dos gregos.

Ainda no século X, o Império Árabe nos brindou com os matemáticos Abu Kamil e Alhazen. Coube a Abu Kamil comentários da álgebra de al-Khowarizmi o que posteriormente foi usado por Fibonacci (1202). Alhazen, por sua vez, teve seu nome preservado (BOYER, 2010) devido ao chamado *problema de Alhazen* que enunciamos: *Traçar, por dois pontos do plano de uma circunferência dada, duas que se interceptam num de seus pontos e que formam ângulos iguais com a circunferência no ponto de intersecção*, esse problema aparece na sua obra prima *Óptica.*

Omar Khayyam, do século XI, produziu (EVES, 2011) a mais profunda e original contribuição na resolução de uma equação cúbica, também trabalhou com equações quadráticas e (BOYER, 2010) deixou contribuições à geometria não euclidiana ao tentar demonstrar o postulado das paralelas.

No século XI ainda, al-Karkhi, adepto de Diofanto, produziu (EVES, 2011) uma obra de álgebra denominada *Farhri*, mas diferentemente de al-Khowarizmi (BOYER, 2010) ele não se restringiu a trabalhar apenas com equações quadráticas. Boyer (2010) destaca que são atribuídas a al-Karkhi as primeiras soluções de equações da forma $ax^{2n} + bx^n = c$, fato que seria retomado nos primeiros anos da matemática na Renascença.

Nasir ed-din, século XIII, realizou o primeiro trabalho de trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia. Segundo Eves (2011), Sacchieri (1667-1733) iniciou seu trabalho em geometria não euclidiana a partir dos escritos de Nasir ed-din sobre o postulado das paralelas e credita-se a ele uma demonstração original do Teorema de Pitágoras.

Al-Khasi viveu a época onde o declínio árabe dava mostras irreversíveis, deu importantes contribuições (Eves, 2011) para as frações decimais e realizou aproximação admirável do valor de π. Com sua morte em 1436 aproximadamente o mundo árabe mergulha em um colapso cultural.

Num pano de fundo cientificamente estéril da época do Império Árabe, temos que estar gratos aos árabes por suas contribuições, mesmo que pequenas em determinadas áreas e principalmente pela custódia que fizeram de grande parte do patrimônio cultural existente (EVES, 2011, p. 267) até que os europeus acordassem do marasmo da Alta Idade Média.

3 CONTEXTO HISTÓRICO DE OMAR KHAYYAM

Iniciaremos realizando uma breve exposição do período histórico em que Omar Khayyam viveu e quais as funções desempenhou na sociedade. Relataremos o cenário político e social, e como os acontecimentos influenciaram sua vida e o quanto refletiu em suas obras. Abordaremos suas contribuições, mencionando seu maior feito matemático, o método de resolução de equações cúbicas, o que posteriormente analisaremos com o devido cuidado.

De acordo com O'Connor e Robertson (1999), Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim al-Nisaburi al-Khayyami nasceu em 18 de maio de 1048, em Nishapur, Pérsia (atual Irã) e faleceu em 04 de dezembro de 1131, no mesmo local de nascimento. Há divergências sobre as datas de nascimento e morte de Omar Khayyam, uma vez que em nossa pesquisa nos deparamos com discrepâncias. Podemos citar exemplos dessa divergência de datas de nascimento e morte:

FONTES	***NASCIMENTO***	***FALECIMENTO***
BOYER (2010)	Cerca de 1050	Cerca de 1122
CAJORI (2007)	Por volta de 1045	Por volta de 1123
KHAYYAM (2004)	Cerca de 1050	Cerca de 1123
LIMA (1999)	1050	1130
STRUIK (1997)	Entre 1038/48	Entre 1123/24
CONTADOR (2006)	1043 d. C.	Por volta de 1131 d. C.
BERLINGOFF e GOUVÊA (2008)	Aprox. 1048	Aprox. 1131
LINTZ (2007)	Por volta de 1044	Por volta de 1123
Site do Centro de Estudos e Divulgação do Islam	Em torno de 1044	1123

Tabela 3.1 – Divergências nas datas de nascimento e morte de Omar Khayyam

Como se pode perceber, a maior discordância se encontra em Struik (1997, p.124) em que a data de nascimento varia entre 1038 e 1048 e a de óbito entre 1123 e 1124. Em Ball (1960) e Eves (2011) não há informações a respeito das datas desejadas.

Uma tradução literal do nome de al-Khayyam (ou al Khayyami) significa “fabricante da tenda” e isso se deve ao fato de seu pai Abraão ser um comerciante. Nesse período os árabes mantinham inúmeras rotas comerciais, esse fato pode ter facilitado o contato de Khayyam com muitos viajantes, e talvez seu interesse pelo conhecimento produzido por outros povos.

Boyer (1996) afirma que Omar Khayyam viveu o fim do período denominado a hegemonia árabe, época notável da história humana principalmente pelas contribuições para o desenvolvimento da cultura mundial. A hegemonia árabe durou aproximadamente oito séculos e devido ao período medieval da Europa a matemática e outras ciências tiveram seu desenvolvimento futuro assegurado graças aos mulçumanos. Um esclarecimento deve ser feito, denominamos aqui árabes ou mulçumanos o povo que habitava a região dominada pelos mulçumanos durante o período da hegemonia árabe, independente da língua ou crença.

Os acontecimentos políticos e sociais do século XI tiveram um papel importantíssimo no curso da vida de Khayyam. Os constantes conflitos culminados em conquistas territoriais ocasionavam uma efervescência cultural dos diversos povos dominados e facilitava o trânsito de obras, principalmente dos hindus para os árabes.

Os turcos seljúcidas eram tribos que invadiram a sudoeste da Ásia no século XI e fundaram um império que incluía a Mesopotâmia, Síria, Palestina e a maior parte do Irã. Os seljúcidas ocuparam as terras de pastagem e, depois, entre 1038 e 1040, eles conquistaram todo o norte do Irã Oriental.

O governante seljúcida Toghril Beg proclamou-se sultão em Nishapur em 1038 e entrou em Bagdá em 1055. Foi nesse império instável, com disputas militares e também com inúmeros problemas religiosos na tentativa de estabelecer um Estado Islâmico Ortodoxo que Khayyam cresceu.

Em 1070 Khayyam mudou-se para Samarkand, no Uzbequistão, que é uma das mais antigas cidades da Ásia Central. Khayyam foi apoiado financeiramente por Abu Tahir, um notável jurista de Samarkand, e isso lhe permitiu escrever sua obra mais famosa *Algebra* (ou *Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Álgebra*).

Em 1073, Malik-Shah, neto de Toghrïl Beg, tornou-se o governante de Esfahan, a capital do império seljúcida, e convidou Khayyam para criar na cidade um Observatório Astronômico. Nesse Observatório permaneceu por 18 anos, produzindo trabalhos de excelente qualidade ao lado de outros pesquisadores. Foi um período de paz durante o qual a situação política permitiu-lhe oportunidade de dedicar-se inteiramente ao seu trabalho acadêmico.

Em 1092, os acontecimentos políticos terminaram o período de existência pacífica para Khayyam. Malik-Shah morreu em novembro do mesmo ano, um mês após seu vizir[6] Nizam-al-Rahman ser assassinado na estrada de Esfahan a Bagdá, pelo movimento terrorista chamado Assassinos.

Malik-Xá[7], a segunda esposa de Nizam-al-Rahman, assumiu o cargo de governante por dois anos, mas ela teria discutido com o Nizam al-Mulk e assim perdeu apoio daqueles que a haviam lhe dado sustentação, ocasionando instabilidade política. O financiamento para executar o Observatório foi cessado e a reforma do calendário foi suspensa temporariamente.

Khayyam também sofreu inúmeras críticas dos muçulmanos ortodoxos que julgavam sua mente questionadora não estar em conformidade com a fé islâmica. Essa inquietação crescente em Khayyam se revela em suas obras poéticas e foram acompanhadas de perto por seus críticos.

Apesar de não tomar partido de nenhum dos lados, Omar Khayyam permaneceu no Tribunal de Justiça e tentou recuperar seu prestígio. Ele produziu um trabalho no qual descrevia os ex-governantes do Irã como homens de honra, que tinham apoiado as obras públicas, educação e ciência.

[6] Título usado em alguns países muçulmanos para designar autoridades como ministros de Estado.
[7] Xá era o título dos monarcas da Pérsia e que, muitas vezes, fazia parte dos nomes por que eram conhecidos.

Malik-terceiro, filho de Shah Sanjar, que foi governador do Khorasan[8], tornou-se o governante do império global dos seljúcidas em 1118. Algum tempo depois Khayyam deixou Esfahan e viajou para Merv (agora Mary, Turquemenistão) que Sanjar fez a capital do império seljúcida. Sanjar criou um grande centro de estudos islâmicos em Merv, onde Omar Khayyam escreveu mais trabalhos sobre matemática.

Quando Omar Khayyan morreu no séc. XII, a ciência árabe já dava mostra de declínio. Boyer (2010) afirma que isso se deve em parte aos excessos de facciosismo político e religioso. Porém ainda surgiram dois matemáticos de destaque, Nasir Edin no séc. XII e al-Khasi no séc. XV que realizaram trabalhos em geometria, trigonometria e astronomia. Com a morte deste último a matemática árabe entrou em colapso como toda cultura árabe.

3.1. Produções Matemáticas

> "O maior benefício que você pode conferir em mim é deixar-me viver em um canto, sob a sombra de sua fortuna, para espalhar grandes as vantagens da ciência". Omar Khayyam

Khayyam descende de uma linha de matemáticos altamente qualificados, entre eles, encontramos matemáticos como al-Kowarizmi, Thabit ibn-Qurra, Abu Kamil, al-Karrhi, Abu'l-Wefa, al-Biruni e Alhazen e precede Nasir Eddin e al-Kashi. Khayyam concebe seus trabalhos na esteira de produções matemáticas de seus pares, que lutaram para estruturar e organizar os conhecimentos absorvidos dos hindus e dos gregos. Há que se pontuar que não foi encontrada em nossas pesquisas nenhuma referência a traduções feitas por Khayyam.

Herdando inúmeros aprimoramentos e desenvolvimentos algébricos, trigonométricos e geométricos de seus predecessores, Khayyam utilizou-se de traduções concisas dos gregos e dos hindus para dar vazão ao seu talento, atuando em diversas áreas do conhecimento. Neste contexto de acordo com Eves (2004, p. 261), foi o

[8] O nome *Khorasan*, que significa "terra do sol nascente" em persa, foi dado à maior província oriental do Império Persa.

responsável pela “talvez mais profunda e original contribuição algébrica árabe”, a resolução geométrica de uma equação cúbica.

Khayyam estudou filosofia em Naishapur e de acordo com O’Connor e Robertson (1999) um de seus colegas certa vez escreveu que ele era dotado de agudeza de espírito e os mais altos poderes da natureza. No entanto, não vivia vida fácil para os estudiosos, a menos que fossem apoiados por um governante, ou um dos muitos juízes de tribunais.

Ele mesmo descreveu as dificuldades que os homens estudiosos viviam durante esse período, na introdução de sua *Álgebra*:

> Eu era incapaz de me dedicar ao aprendizado desta álgebra e à concentração em cima dele, por causa dos obstáculos aos caprichos do tempo que me impediu, porque temos sido privados de todo o povo de conhecimento, exceto por um pequeno grupo, em número, com muitos problemas, cuja preocupação na vida é para agarrar a oportunidade, quando o tempo está dormindo, para dedicar-se, entretanto, à investigação e à perfeição de uma ciência. (Wopcke,1851,p. 28)

No entanto Khayyam foi um proeminente matemático e astrônomo e, apesar das dificuldades que ele descreveu, compôs várias obras antes de completar 25 anos de idade.

Omar Khayyam escreveu um artigo inicial de Álgebra antes de sua famosa obra *Álgebra*. Neste, ele considera o problema:

> Encontrar um ponto em um quadrante de um círculo de tal modo que quando o normal é cair sob o ponto de um dos raios delimitador, comprimento do rácio[9] entre o normal para a do raio é igual à proporção dos segmentos determinados pelo pé do normal. (Wopcke,1851,p 28)

---

[9] *Rácio: Relação entre duas grandezas, proporção.*

Figura 3.1 - Tradução feita por Franz Wopcke em 1851 da *Álgebra* de Omar Khayyam
Fonte: site American Libraries

Khayyam mostra que este problema é equivalente a resolver um segundo problema:

> Encontrar um triângulo com a propriedade que a hipotenusa é igual à soma de uma perna além da altitude sobre a hipotenusa. (Wopcke,1851,p. 29)

Esse problema, por sua vez levou Khayyam a resolver a equação cúbica $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ e encontrou uma raiz positiva por considerar a intersecção de uma hipérbole retangular e um círculo. Uma solução aproximada numérica foi então encontrada por interpolações em tabelas trigonométricas. Talvez ainda mais notável seja o fato de que as soluções cúbicas requerem o uso de seções cônicas, e que não pode ser resolvido apenas com o uso régua e compasso, um resultado que não viria a ser demonstrado por outros durante os próximos 750 anos.

Khayyam também afirmou ter a expectativa de dar uma descrição completa da solução de equações cúbicas em um trabalho posterior:

> Se surgir a oportunidade e eu possa discorrer, darei todas estas formas de quatorze com todos os seus ramos e casos, e como distinguir o que é possível ou impossível, para que um documento, contendo elementos que são muito úteis para esta arte será preparado. (Wopcke,1851,p. 30)

Sua obra *Algebra* contém uma classificação completa das equações cúbicas com soluções geométricas encontradas através da intersecção de cônicas. Na verdade Khayyam apresenta um interessante relato histórico no qual ele afirma que os gregos não haviam deixado nada sobre a teoria das equações cúbicas. Portanto, as contribuições de autores anteriores, como al-Mahani e al-Khazin foram para traduzir os problemas geométricos em equações algébricas, algo que era praticamente impossível antes do trabalho de Al-Khwarizmi. No entanto, Khayyam parece mesmo ter sido o primeiro a conceber uma teoria geral de equações cúbicas. Sobre isso escreveu:

> Na ciência dos problemas de uma álgebra encontros dependem de determinados tipos de teoremas extremamente difíceis prejudicial, cuja solução não foi bem sucedido para a maioria dos que tentaram. Como para os Antigos, não trabalho com eles lidar com o assunto tem chegado até nós, talvez, depois de ter olhado para as soluções e tendo examinado, eles não foram capazes de entender suas dificuldades, ou talvez as suas investigações não exigir tal exame, ou finalmente, as suas obras sobre o assunto, se existiram, não foram traduzidos para nosso idioma. (Wopcke,1851,p 35)

Outra conquista do livro *Algebra* de Khayyam é a constatação de que uma equação cúbica pode ter mais de uma solução. Ele demonstrou a existência de equações com duas soluções, mas infelizmente não descobriu que uma equação cúbica possui três soluções iguais ou diferentes. Ele nutria a esperança de que as soluções aritméticas poderiam ser encontradas um dia, quando ele escreveu:

> Talvez alguém que vem depois de nós pode encontrá-lo fora do caso, quando não são apenas os três primeiros tipos de poderes conhecidos, ou seja, o número, a coisa e o quadrado. (Wopcke,1851,p. 35)

Nessa fala ele prenuncia, de certa maneira, o grande trabalho desenvolvido pelos matemáticos italianos Del Ferro, Tartaglia e Ferrari no século XVI. Fato que descortinou a Europa para um período de grandes avanços matemáticos, assumindo a vanguarda da matemática e nos brindando com grandes especialistas no assunto.

Khayyam deixou-nos um texto onde alegava haver descoberto um método para encontrar as potências quarta, quinta, sexta e mais altas de um binômio, mas essa obra se perdeu. Refere-se ao triângulo de Pascal, que aparece ao mesmo tempo na China, e aparentemente de formas independentes. Segundo Boyer (2010), havia uma rota da seda ligando a China e a Pérsia, e alguma informação poderia ter passado por ela. Essas rotas comerciais antigas proporcionaram muitas trocas de conhecimentos, em especial foi importantíssima para o florescimento da matemática na Europa.

Na verdade, podemos estar razoavelmente certos de que Khayyam utilizou um método de encontrar as raízes enésimas baseado na expansão binomial e, portanto, sobre os coeficientes binomiais. Porém não foi o primeiro a fazê-lo, uma vez que, al-Karaji já havia discutido em uma obra o triângulo de Pascal anteriormente. Isso decorre do seguinte trecho em que tece comentário sobre os hindus:

> Os hindus possuem métodos para localizar os lados dos quadrados e cubos com base em tal conhecimento das praças de nove figuras, que é o quadrado de 1, 2, 3, etc, e também dos produtos formados, multiplicando-os por si, ou seja, o produto de 2, 3 etc. Eu tenho um trabalho composto para demonstrar a eficácia destes métodos, e provo que eles levam para o objetivo pretendido. Tenho, além disso, aumentado a espécie, ou seja, eu tenho mostrado como encontrar os lados do quadrado quadrados, quatro - cubo, cubo-cubo, etc para qualquer duração, que não foi feito até agora. As provas que eu dei nessa ocasião são provas apenas com base na média aritmética das partes aritmética de Euclides os "Elementos". (Wopcke,1851,p. 41)

Os árabes se sentiam mais atraídos pela álgebra e pela trigonometria, mas se mostravam fascinados pela prova do Quinto Postulado de Euclides, um tema geométrico. Como muitos matemáticos gregos, os árabes se embrenharam na tarefa de tentar demonstrar o quinto postulado[10]. Alhazen de acordo com Boyer (2010) começou por um quadrilátero trirretângulo e julgou ter provado que o quarto ângulo tinha que ser reto. Em sua "prova", Alhazen utilizou a ideia de um ponto que se move por uma reta, o que foi criticado por Khayyam argumentando que Aristóteles havia condenado o uso do movimento.

[10] Em geometria, o postulado das paralelas, também chamado de quinto postulado de Euclides, é um axioma independente da geometria euclidiana. O trabalho de muitos matemáticos para provar esse postulado levou-os á criação de uma nova geometria, a geometria não Euclidiana.

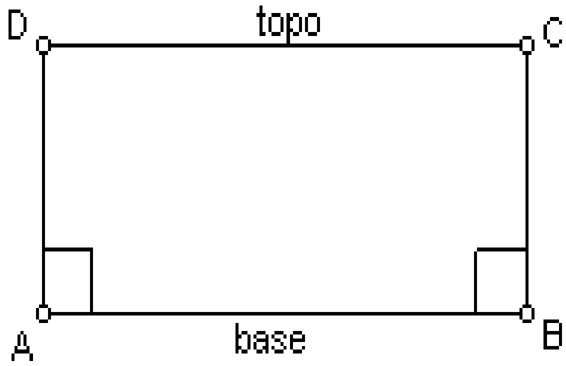

Figura 3.2 – Quadrilátero de Sacchieri

Khayyam conforme Boyer (2010) partiu de um quadrilátero com dois lados iguais, ambos perpendiculares à base e perguntou como seriam os ângulos superiores do quadrilátero, que são necessariamente iguais um ao outro (congruentes). Temos assim três possibilidades: 1) agudos, 2) retos, ou 3) obtusos. Khayyam exclui a terceira possibilidade alegando estar apoiado em Aristóteles, que diz que duas retas convergentes devem cortar-se, obtendo um enunciado equivalente ao quinto postulado de Euclides.

O quadrilátero da figura 3.2 recebe o nome de Quadrilátero de Sacchieri, devido aos esforços do padre e matemático Girolamo Saccheri (1667-1733). Em seu trabalho Sacchieri se dedicou muito a tentar demonstrar o Quinto Postulado de Euclides e deu um passo largo no caminho das geometrias não euclidianas. Temos aqui uma convergência na tentativa de demonstração de Sacchieri e Khayyam, e podemos asseverar que as geometrias euclidianas de certa forma tiveram a contribuição dos árabes.

Khayyam também apresentou resultados importantes sobre as proporções neste livro. A importância da contribuição de Khayyam é que ele examinou a definição de igualdade de proporções (a primeira proposta por Eudoxo) como apontada anteriormente por matemáticos islâmicos como a al-Mahani, que foi baseado em comparação de frações. Khayyam provou que as duas definições são equivalentes. Ele também levantou a questão de um rácio ser considerado um número, mas deixa a pergunta sem resposta.

3.2. Produções Não Matemáticas

“Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco de poeta.” Karl Weierstrass

Omar Khayyam é considerado um expoente na poesia persa medieval; o fato de ser conhecido no Ocidente como poeta se deve em parte à tradução feita pelo inglês Edward Fitzgerald no século XIX. Rubaiyat é o título dado pelo inglês para a seleção de poemas traduzidos, originalmente escritos em persa e atribuídos a Omar Khayyam. Um ruba'i (ou o plural rubaiyat) é uma estrofe de duas linhas, com duas partes cada, daí o termo Rubaiyat (derivado da palavra árabe "quatro").

Há que salientar que muitos tradutores e historiadores contestam a autoria de Khayyam de certos poemas, alegando que muitos dos quartetos aparecem em manuscritos medievais com o nome de outros autores. Neste aspecto ponderam acontecer como em muitos casos da história, tais como Pitágoras e seus discípulos pitagóricos. Embora se paire certa dúvida, enquanto não houver provas em contrário os versos permaneceram sendo atribuídos a Khayyam.

A poesia de Khayyam na concepção Souza (1949) incorpora opiniões filosóficas que sobrevivem até os nossos dias e dizem respeito à ontologia[11], a conceitos universais, ao livre arbítrio, à predestinação e às obrigações morais. Também nela se percebem claras referências às relações do ser humano para com o Criador e deste para com o Homem, em uma reciprocidade de responsabilidades e cuidados.

Segundo Edward Fitzgerald (1899) é interessante notar que o poeta, assim como outros proeminentes pensadores Islâmicos, embora tenha sofrido influências da filosofia Grega, especialmente Aristóteles, não absorveu os aspectos mais abstratos daquele modo de pensar. Khayyam preferiu expressar-se mediante figuras de uma

[11] Ontologia significa “estudo do ser”. A palavra é formada através dos termos gregos “*ontos*” (ser) e “*logos*” (estudo, discurso). Consiste em uma parte da filosofia que estuda a natureza do ser, a existência e a realidade, procurando determinar as categorias fundamentais e as relações do “ser enquanto ser”.

retórica epicureana[12] que, embora audaciosa para o seu tempo, o fez tornar-se obscuro em vida e esquecido, anos após sua morte, em sua própria terra.

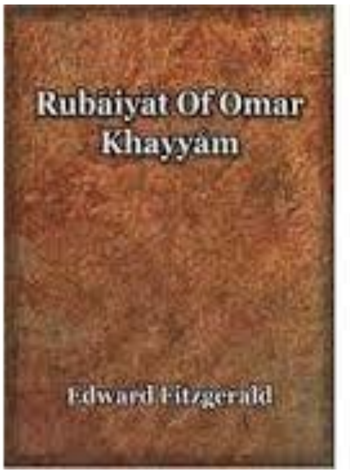

Figura 3.3 - Rubaiyat de Omar Khayyam traduzido por Edward Fitzgerald
Fonte: Site do Centro de Estudos e Divulgação do Islam

Transcrevemos abaixo alguns poemas de Khayyam traduzidos por Octávio Tarquínio de Souza de 1949. Sua tradução deriva prioritariamente da versão feita pelo francês Franz Toussaint:

I

Que a tua sabedoria não seja uma humilhação para o teu próximo. Guarda domínio sobre ti mesmo e nunca te abandones à tua cólera. Se aspiras à paz definitiva, sorri ao Destino que te fere: não firas ninguém.

II

Perderei ainda muito tempo, querendo encher o mar com pedras? Desprezo igualmente os libertinos e os devotos. Khayyam, quem te poderá assegurar que irás para o Céu ou para o Inferno?... Conheces alguém que já tenha visitado esses países misteriosos?

---

[12] *Epicuro (341a.C— 271a.C) foi um filósofo grego. Epicuro formou a sua teoria tendo com um dos pontos mais importantes, o prazer. Para ele, a vida deveria ser a busca do prazer, o estado de Aponia, que era a ausência de dor física. A dor da alma deveria, segundo ele, ser combatida com as boas lembranças*.

III

Na primavera, gosto de sentar-me à orla de um campo florido. Bebo o vinho que me oferece uma linda rapariga e não cuido de minha salvação. Se tal pensamento me ocupasse, eu valeria menos que pobre cão.

IV

Ninguém desvenderá o que é misterioso. Ninguém poderá ver o que se oculta debaixo das aparências. Todas as nossas moradas são provisórias, salvo a última, no coração da terra. Bebe o vinho! Basta de palavras supérfluas.

Cabe observar as datas das traduções, enquanto Wopcke realizou a tradução de *Algebra* para o francês em 1851, Edward Fitzgerald traduz Rubaiyat para o inglês em 1899. Embora Khayyam fique muito mais conhecido como poeta no Ocidente, vemos que os europeus se preocuparam primeiramente com seus trabalhos algébricos.

No campo da Astronomia Khayyam desenvolveu um árduo e profícuo trabalho. Recebeu a incumbência do Xá Malik e de seu vizir Nizam Mulk para supervisionar e dirigir a criação de um Observatório juntamente com outros astrônomos. Durante dezoito anos, Khayyam levou muitos cientistas para o Observatório e produziram trabalhos de excelente qualidade.

Durante esse tempo, Khayyam trabalhou para compilar tabelas astronômicas e também contribuiu para a reforma do calendário em 1079. Quando o Xá Malik determinou a reforma do calendário, Khayyam foi um dos oito homens empregado para fazê-lo, o período foi a época Jalali (assim chamado por Jalal-ud-din, um dos nomes do rei) .

A respeito desse cômputo Gibbon (1776) diz ultrapassar a precisão do Calendário Juliano e se aproxima da precisão do Calendário Gregoriano. O resultado encontrado da medição do comprimento do ano foi de 365,24219858156 dias. Podemos tecer dois comentários sobre este resultado. Primeiro, ele mostra uma confiança incrível para tentar dar o resultado a este grau de precisão. Em segundo lugar, a precisão é incrível, pois nos dias de hoje, amparados em tanta tecnologia sabemos que o comprimento ano é de 365,242190 dias.

Encontramos na discografia do músico clássico árabe Abed Azrié (1999), em homenagem a Omar Khayyam, a menção a um livro de música, provavelmente uma coletânea de músicas de sua cultura, mas esse livro se encontra perdido, o que nos impossibilita de argumentar sobre a contribuição de Khayyam nessa área.

4 HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste estudo sobre a História da Matemática, particularmente sobre as equações algébricas, pretendemos salientar a forma como os matemáticos foram trabalhando ao longo dos séculos. Faremos um esboço da História das Equações Algébricas, portanto não esgotaremos o tema, visando construir um quadro histórico das soluções de equações algébricas.

A palavra *equação* foi livremente utilizada por escritores medievais. Ramus (1.515-1.572) usou a palavra “Aequatio” em sua *‘Aritmética*”(1.567). A palavra equação aparece em inglês em 1.570 na tradução de Henry Billingsley da obra *“*Elementos”de Euclides:*“muitas réguas da álgebra, com as equações... usada nisso.”* Aparece também no prefácio da tradução, por John Dee: *“....* que Arithmeticall grande Arte de Aequation: álgebra geralmente chamada.*”* François Viète define o termo equação no capítulo 8 de “Isagoge do Analyticem *do* Artem ” em 1591. (Citado em SMITH, 1958)

Quaisquer problemas que possam ser solucionados utilizando números, certamente serão tratados direta ou indiretamente por meio de equações; sendo estas equações, as expressões algébricas, trigonométricas, diferenciais, exponenciais ou de qualquer outra natureza onde aparece em sua escrita o símbolo de igualdade. O nosso interesse está em apresentar, de forma concisa, a rica História das Equações Algébricas.

Equacionar um problema é geralmente entendido como colocá-lo dentro de um mecanismo do qual ele poderá ser resolvido. Resolver uma equação sempre foi um desafio desde os inícios dos conhecimentos matemático, como podemos apreciar nos papiros de Moscou (1.890 a.C), de Rhind (1.650.a.C) e outros.

Para a resolução destes problemas houve sempre um enorme esforço, no sentido de procurar esquematizá-los, por forma a obter mais facilmente as soluções. No decorrer do tempo em várias sociedades os problemas matemáticos, contextualizados ou não, foram motivo de preocupação de mentes brilhantes.

4.1. Pré- História
Papiros, equação do 1º grau (gregos, babilônios, egípcios)

Iniciamos nossa investigação pela matemática dos babilônios, dos egípcios e dos gregos. Em seguida traremos as descobertas dos árabes e dos hindus, e finalmente, as contribuições que os europeus trouxeram para um dos maiores problemas que permearam a matemática até o século XIX: a busca pela resolução das equações de grau n ≥ 5.

Um traço substancialmente forte na matemática babilônica refere-se a uma geometria de caráter puramente algébrico, derivando de problemas de situações do dia-a-dia expressos em terminologia geométrica, mas que não passavam de problemas algébricos não triviais. Eves (2011) afirma que é impressionante a diversidade e a profundidade dos problemas considerados por eles, tais como a equação cúbica $x^3 + x^2 = b$ resultante de vários problemas, os quais podem ser resolvidos usando a tábua dos valores de $n^3 + n^2$.

Eves (2011) sustenta que por volta do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica parecia já ter evoluído para uma álgebra retórica desenvolvida. Eles resolviam equações lineares e quadráticas com duas incógnitas, tanto pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, como pelo método de completar quadrados. Os babilônios também já discutiam a resolução de algumas equações cúbicas e bi quadráticas.

O fato dos babilônios se atentarem às equações cúbicas foi facilitado pelo fato de terem um gosto computacional e por aceitarem aproximações de soluções irracionais das equações (BOYER, 2010, p. 21). Encontramos em Eves (2011) a afirmação de que os babilônicos eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria.

Destacamos juntamente com a Babilônia o Egito, berço de uma das mais antigas civilizações da humanidade. A maioria dos problemas abordados pelos egípcios era de origem prática, com questões sobre quantificação de pão, cerveja, o balanceamento de rações para o gado e as aves, ou produção de papiros.

Muitos desses problemas eram resolvidos por uma equação linear com uma incógnita. Além de problemas de origem prática, os egípcios também apresentavam alguns problemas de natureza teórica. Suas soluções conforme Eves (2011) não exigiam grandes métodos e raciocínios, sendo que o mais empregado, o da falsa posição, assemelha-se bastante com o conhecido hoje como "método das tentativas[13]".

Figura 4.1- Papiro de Rhind (ou de Ahmes)
Fonte: http://www.britishmuseum.org/

Outro fato importante a se destacar é que, nos papiros encontrados[14], as resoluções de equação eram (BOYER, 2010) sempre seguidas de instruções do tipo "faça isto", "faça aquilo", "este é o resultado", sem qualquer tipo de justificativa lógica. Este ponto de vista, ainda é reconhecido muitas vezes nos dias atuais quando se trata de uma perspectiva de ensino-aprendizagem baseada na manipulação de regras e algoritmos sem muita preocupação com a discussão dos significados das ideias matemáticas.

[13] Consiste em atribuir coeficientes algébricos à equação para serem futuramente determinados por meio da resolução de um sistema. É em geral bastante eficaz, mas pode vir a tornar-se bastante trabalhoso dependendo do número de espécies envolvidas na equação.

[14] O conhecimento que temos hoje sobre a matemática egípcia baseia-se principalmente em dois grandes documentos: o papiro de Rhind e o papiro de Moscou. Outros documentos importantes são os papiros de Berlim, de Kahun e do Cairo.Estes papiros são compostos por exposições de problemas triviais e suas resoluções. Na verdade, o que distingue a matemática egípcia da matemática babilônica e, mais tarde, da grega é o fato de não exibirem demonstrações nem serem conhecidas as origens das fórmulas utilizadas. O que se encontra são exemplos comprobatórios; nunca demonstrações.

Quanto aos gregos, pode-se asseverar (BOYER, 2010) que a influência da civilização grega no desenvolvimento da matemática deu-se com o surgimento de um grande número de matemáticos preocupados com os problemas que trouxeram desenvolvimento para a geometria. Nesse período, a álgebra aritmética foi substituída por uma álgebra geométrica.

Em sua álgebra geométrica, os gregos, de acordo com Eves (2011) utilizavam dois métodos principais para a resolução de equações lineares e quadráticas, o método das proporções e o da aplicação de áreas, métodos esses que parecem ter suas origens nos escritos pitagóricos. O método das proporções permite que se construa um segmento de reta *x*, dado por $a : b = c : x$ ou por $a : x = x : b$, em que a, b, c são segmentos de reta e reta. Esse método fornece soluções geométricas para equações do tipo $ax = bc$ e $x^2 = ab$.

Os gregos normalmente, segundo Eves (2011), distinguiam grandezas de dimensões diferente em uma, duas ou três. Suas discussões giravam em torno de situações em que surgia a necessidade de se adicionar tais grandezas, pois isso somente poderia ocorrer entre grandezas de mesma dimensão. Tais discussões demandavam de problemas originados da pergunta: como encontrar o segmento *x* em equações do tipo:

$$x^2 = a^2 + b^2; \quad ax = bc; x^2 = ab .$$

Após o século III a.C. segue-se um longo período de declínio interrompido apenas entre 250 a 350 d.C. em que surge o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria. Diofanto (EVES, 2011) escreveu uma importante obra intitulada *Arithmetica*, a qual trouxe enormes contribuições para o desenvolvimento da álgebra, principalmente no que se refere à simbologia.

Entre os gregos, o papel que Diofanto exerceu, relata Eves (2010), foi de grande importância no desenvolvimento da álgebra e de grande influência sobre os europeus que se dedicaram posteriormente à Teoria dos Números. Em particular, Boyer (2010) afirma que Fermat foi levado ao seu célebre teorema quando tentou generalizar um problema que tinha lido em *Arithmetica* de Diofanto: dividir um quadrado em dois quadrados.

A noção de equação utilizada por essas civilizações, principalmente pelos egípcios, tinha um caráter pragmático e procurava, de forma intuitiva, igualar duas quantidades com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida.

Percebe-se durante essa (BOYER, 2010) fase da história das equações que, na maioria das vezes, a busca pelas soluções relacionava-se a equações particulares para resolver problemas específicos. Os métodos utilizados, em sua maior parte, estavam ligados a ideias aritméticas e não tinham como preocupação a busca por soluções gerais para esses tipos de equações.

Por outro lado, os gregos para Eves (2011) não estavam procurando resolver equações que tinham sido originadas de problemas de ordem prática. A noção de equação utilizada por eles contemplava um caráter geométrico e, de forma dedutiva, suas resoluções repousavam em manipulações geométricas, como percebemos no método das proporções, por exemplo.

Outro ponto importante a se destacar é a diferença na concepção de equação. Enquanto para os babilônios e egípcios as equações eram concebidas como uma igualdade entre duas quantidades, isso era inconcebível para os gregos, pois as operações com segmentos e figuras geométricas não permitiam que se igualassem grandezas de dimensões diferentes.

Percebemos então que, mesmo com a mudança de concepção acerca da álgebra nesse período, da álgebra aritmética, nos babilônios e egípcios, para a álgebra geométrica, nos gregos, a busca pelas soluções ainda estavam relacionadas a equações particulares e não a métodos gerais.

Pode-se concluir, sem perda de generalidade, que as civilizações pré-helênicas, egípcia e babilônica, trabalhavam basicamente com equações originárias de problemas de ordem prática – como aqueles ligados à agricultura e divisão de terras. Porém Boyer (2010) acentua que os babilônios foram superiores aos egípcios por tratarem de resoluções de equações quadráticas e cúbicas. Os gregos por sua vez, com sua álgebra geométrica, influenciaram muito os hindus e os árabes em suas álgebras como veremos posteriormente.

4.2. História Antiga
Árabes e Hindus – equações do 2º e 3º graus

No mundo árabe, al-Khwarizmi foi um dos maiores expoentes em sua época. Na primeira metade do séc. IX escreveu *Ilm al-Jabr Wa al Muqabalah* que pode ser entendida como "restauração por transposição de termos de um lado da equação para o outro" (BOYER, 2010, p.156). Nesse livro aparecem pela primeira vez regras para resolver equações de 1º e 2º graus com coeficientes numéricos. Pode-se dizer que essas regras são semelhantes àquelas utilizadas hoje em dia para resolver as equações do 1º grau.

A álgebra de al-Khwarizmi (BOYER, 2010) nos deixa como herança duas expressões que tomaram significados muito fortes e que estão presentes na resolução de equações: *al-Jabr* e *al Muqabalah*. Supõe-se que *al-Jabr* significa "restauração" ou "completação" e refere-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação e *muqabalah* significa "redução" ou "equilíbrio" e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

Boyer (2010) examina que a obra de al-Khwarizmi utiliza-se de termos como *coisa*, por um lado, e *tesouro*, *raiz* e *número simples*, por outro, termos estes que são representações de elementos de natureza diferente: a *cosa* serve para representar quantidades desconhecidas (e para poder operar com ela) e, *tesouro, raiz* e *números simples*, representam tipos ou espécies de números. Essa distinção não se fazia, por exemplo, na álgebra babilônica.

Percebe-se na obra de al-Khwarizmi uma preocupação na busca pelas formas canônicas possíveis para se resolver qualquer tipo de equação quadrática. Struik (1997) cita Omar Khayyam como outro matemático árabe que contribuiu para a teoria das equações algébricas, encontrando uma solução geométrica para a equação cúbica do tipo $x^3 + ax = b$ utilizando a intersecção do círculo $x^2 + y^2 = qx$ com a parábola $x^2 = py$.

Struik (1997) também relata que Omar Khayyam trabalhou com a cúbica do tipo $x^3 = ax + b$ utilizando a intersecção da parábola $x^2 = \sqrt{a}y$ com a hipérbole equilátera $x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$. Posteriormente explicitaremos com a devida profundidade o método de Khayyam, explorando sua aplicação em métodos computacionais.

A matemática hindu, por outro lado, compreendia problemas significativos juntamente com problemas insignificantes do ponto de vista matemático. Boyer (2010) afirma que parte do que era bom, era magnificamente bom e que matemática hindu era frequentemente descrita como uma matemática intuitiva.

Os matemáticos hindus tinham uma predileção em trabalhar com números nas operações aritméticas ou na resolução de equações, utilizando frequentemente os métodos da falsa posição ou de inversão, no qual se trabalha “de trás para frente”, a partir dos dados do problema.

Eves (2011) aponta que os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática tem duas raízes formais. Unificaram as resoluções pelo método de completamento de quadrados, o qual é hoje muitas vezes conhecido como *método hindu*.

Brahmagupta, cita Boyer (2010), nos deixou altas contribuições algébricas, dentre as quais destacamos a de ter encontrado um método de solução geral para a equações diofantinas, determinando duas raízes, inclusive sendo uma delas negativa. Esse fato ser torna muito relevante, pois até mesmo Diofanto havia se contentado com uma solução particular. Observa-se uma influência da matemática grega em sua obra.

Percebe-se também uma organização dos trabalhos (BOYER, 2010) em álgebra já existentes em seus escritos, pois ele, assim como os hindus, utilizava-se da justaposição para indicar a adição; um ponto sobre o subtraendo para indicar a subtração; bha para indicar a multiplicação; $y\bar{a}$ para denotar a incógnita; dentre outras.

Boyer (2010) comenta que o mais importante matemático hindu do século XII foi Bháskara, que preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta e conseguiu representar, através de sua obra, um culminar das contribuições hindus anteriores. A sua obra mais conhecida*, Lilavati,* é uma compilação de problemas de Brahmagupta, dentre outros, que continha muitos outros sobre progressões aritméticas e geométricas, equações lineares e quadráticas.

Utilizando-se do conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Brahmagupta, Struik (1997) sustenta que Bháskara unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método de complemento de quadrados, hoje em dia conhecido por método hindu. Essa importante fórmula geral para a resolução da equação de 2º grau $ax^2+bx+c=0$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,que é conhecida nos dias atuais no Brasil como Fórmula de Bháskara.

Pode-se perceber que tanto árabes como hindus trabalhavam com equações originárias de problemas de ordem prática, assim como os babilônios e os egípcios já tinham feito, além de situações que recaíam em interpretações e manipulações geométricas, como os gregos já o faziam.

Contudo, é notório que as questões investigadas por árabes e hindus parecem dar à noção de equação, cada vez mais, um caráter algébrico. O registro das expressões que se sabe resolver passa do específico constituído pela acumulação de problemas resolvidos, técnicas e procedimentos de resolução particularizadas para um registro de todas as formas canônicas possíveis.

Boyer (2010) acentua que a noção de equação que os árabes e hindus utilizaram já apresentava uma concepção mais estrutural, no sentido de se observar as características e propriedades definidas em uma classe de equações e não mais em equações relacionadas a situações particulares.

Assim, com os objetivos presentes na álgebra dos árabes e hindus, percebe-se (EVES, 2011) que a busca pelas formas gerais caminha no sentido de que se elabore um procedimento no qual seja possível resolver todas as formas canônicas. Exemplo disso vemos em al-Khwarizmi, ao estabelecer todas as possibilidades para o que conhecemos por trinômios de grau não superior a dois.

Desta forma notamos que antes de al-Khwarizmi, sabia-se resolver problemas quadráticos com procedimentos típicos, e depois dele tornou-se possível resolver qualquer problema quadrático. Notamos na obra de Omar Khayyam uma concepção de equação mais relacionada a um caráter geométrico, quando ele utiliza procedimentos geométricos para interpretar as equações e suas soluções como a intersecção de curvas geométricas.

4.3. História Moderna
(Italianos e demais europeus, Abel, Galois) equação 4º e grau ≥ 5

Na Europa o descortinar da Álgebra se deve á obra do françês Chuquet (1455-1500)[15], mas Lucca Pacioli (1445-1514) descreve Boyer (2010) com sua obra *A Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, concluída em 1487, discute aritmética, geometria, álgebra e contabilidade e de certa forma obscurece o trabalhos de Chuquet. Na parte da Álgebra, Pacioli apresenta uma resolução usual de equações lineares e quadráticas.

Nessa época (BOYER, 2010, p.191) as letras *p (piu)* e *m (meno)* eram usadas na Itália para indicar a adição e a subtração. Pacioli usou as abreviaturas *co*, *ce* e *ae* para *cosa* (incógnita), *censo* (quadrado da incógnita) e *aequalis* (igualdade), respectivamente. Pacioli estava convencido de que as equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente, partilhando assim da mesma opinião de Khayyam.

Apesar disso, vimos que, provavelmente, um dos maiores e mais extraordinários feitos matemáticos ocorridos no século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. Esse avanço aguçaria a dedicação de inúmeros matemáticos a se embrenharem em novos desenvolvimentos algébricos.

Na esteira desse progresso algébrico, Eves (2011) assegura que por volta de 1535 o matemático que conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3+mx=n$, parece ter sido o bolonhês Scipione del Ferro (1465-1526), provavelmente com inspirações nos árabes. Em torno de 1535, Nicolo Fontana (1500-1557), mais conhecido por Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Tempos depois, Tartaglia também conseguiu resolver a equação cúbica desprovida do termo quadrático.

Eves (2011) descreve que o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) estudou as equações cúbicas e em 1545 publicou-as em sua obra *Ars Magna*. Cardano utilizou nesta obra conhecimentos algébricos confidenciados por Tartaglia

---

[15] Pela facilidade de registro observada em nossas pesquisas informaremos as datas de nascimento e morte dos personagens citados neste tópico.

sob juramento de segredo, o que ocasionou um grande atrito entre ambos. Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi[16] propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica. Embora Cardano não tivesse conseguido resolver essa equação, seu discípulo Ferrari o fez, e Cardano publicou essa resolução também em sua obra *Ars Magna*.

François Viète (1540-1603) é considerado por muitos como precursor da álgebra simbólica, foi o primeiro algebrista a demonstrar as vantagens no uso de letras para designar quantidades desconhecidas, ou incógnitas. Struik (1997) relata que Viète tratou o desenvolvimento do simbolismo algébrico, introduzindo uma convenção extremamente importante para a escrita das equações na forma geral, pois, para representar uma quantidade, supostamente desconhecida ou indeterminada, usava uma vogal, e para representar uma grandeza ou números supostamente conhecidos ou dados, uma consoante.

Encontramos em Eves (2011) a afirmação de que apesar de ter adotado esta simbologia, a álgebra de Viète consistia fundamentalmente em palavras e abreviaturas, como: x^3, Viète representava por x *cubus*; x^2, ele representava por x *quadratus*; o sinal de $=$, Viète representava por *aequalis*; a multiplicação, por in; a divisão Viète representava por ***I***.

A respeito de René Descartes (1596-1650), matemático francês, pode-se dizer que suas maiores contribuições deram-se na continuidade do desenvolvimento da linguagem algébrica, o que possibilitou a construção de seu método cartesiano para resolução de equações. Descartes inicia (Boyer, 2010, p.232) uma análise em sua obra *La géométrie*, onde passa a tomar as próprias equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas no sentido de propor um movimento vertical, que necessita de novos meios para sua organização.

A partir da ideia: se a é uma raiz da equação, $x - ,a$ divide o polinômio correspondente, Descartes (STRUIK,1997) explora o número de raízes das equações, o efeito que tem sobre as raízes o fato de trocar x por $y - a$, etc. Embora Cardano e Viète já tivessem se debruçado sobre tais ideias, Descartes afirmou que

[16] A respeito desse matemático não foi possível precisar seu nascimento e morte.

sua Álgebra inicia-se justamente onde parou a de Viète em sua obra *De emendatione oequatotionum*.

Descartes, de forma diferente dos matemáticos gregos, rompe (BOYER, 2010) com a vinculação geométrica dos nomes das espécies ao mostrar, logo no início de sua obra *La géométrie*, que o produto de uma linha por uma linha pode ser representada por outra linha e não como uma superfície, fazendo assim que as espécies “quadrados” ou “cubos” deixem de ser heterogêneas.

Viète combina as letras para representar as quantidades desconhecidas (e conhecidas) com os números que Chuquet (cerca de 1450 - cerca de 1500) e Rafael Bombelli (1526–1572) desenvolveram para representar as espécies; foi necessária para que ambas as categorias estivessem representadas de maneira diferenciada e eficiente para o cálculo sintático, possibilitando assim que se fechasse um sistema de signos para a álgebra simbólica, sistema esse utilizado por Descartes e, posteriormente, por Euler.

Leonhard Euler (1707-1783), (KATZ, 1993) a partir de seu trabalho com os números complexos desempenhou um papel muito importante na teoria das equações algébricas, pois, quando buscava resposta à questão de como extrair uma raiz enésima de um número complexo, descobriu que qualquer número complexo não nulo (inclusive os reais) tem exatamente n raízes enésimas.

Tal resultado despertou os ânimos de muitos matemáticos da época, pois desde Cardano já se sabia que as equações de 3º grau tinham 3 raízes e as de 4º grau, 4 raízes. Com os resultados descobertos por Euler, muitos passaram a fazer conjecturas, sem conseguir provar que as equações polinomiais de grau n tinham exatamente n raízes.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) de acordo com Boyer (2010) deu sua maior contribuição para a teoria das equações com a primeira demonstração plenamente satisfatória que deu para o Teorema Fundamental da Álgebra – toda equação polinomial com coeficientes complexos e de grau n, $n > 0$, tem pelo menos uma raiz complexa – demonstração esta produzida em sua tese de doutoramento em Matemática.

A partir da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (BOYER, 2010) puderam ser deduzidas relações muito importantes entre os coeficientes e as raízes de qualquer equação algébrica, como por exemplo, que toda equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, pois como a equação tem exatamente n raízes e n é ímpar, sabendo-se que as raízes complexas sempre aparecem aos pares, pelo menos uma raiz é real.

Desde que as equações cúbicas e quadráticas foram resolvidas no século XVI, as equações de quinto grau vinham sendo objeto de estudo e pesquisa por diversos matemáticos, desde Bombelli até Viète.

Niels Henrik Abel (1802-1829) (KATZ, 1993) ainda enquanto estudante na Noruega pensou ter encontrado a solução geral das equações de quinto grau, contudo, ele mesmo percebeu um erro em sua demonstração e, em 1824, publicou o artigo “Sobre a resolução de equações algébricas”, no qual deu a primeira prova de que era impossível estabelecer a solução da equação quíntupla por meio de radicais.

Ao mesmo tempo em que Abel buscava (BOYER, 2010) a solução das equações de quinto grau, outro grande matemático, o francês Évariste Galois (1811-1832) também o fazia. O objetivo principal das pesquisas de Galois era justamente o de determinar quando as equações polinomiais eram resolúveis por radicais.

Galois vislumbrou os alicerces de uma forma revolucionária de se abordar as equações algébricas. Segundo Eves (2011) inspirado pela prova de Abel sobre a irresolubilidade por radicais das equações de quinto grau, e nos trabalhos de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) sobre as permutações das raízes de uma equação polinomial. Galois desenvolveu a teoria dos grupos, que permite investigar a possibilidade de resolução das equações quíntuplas, por meio de radicais.

A teoria de Galois fornece (Boyer, 2010) um método para determinar se as raízes de uma equação algébrica podem ser expressas por radicais, contudo, a ênfase dada por esse método na teoria das equações geralmente se volta mais para a estrutura algébrica do que para o tratamento de casos específicos.

Podemos concluir que nesse período da História das Equações Algébricas, assim como já havia ocorrido com os árabes e hindus, principalmente com al-Khwarizmi e

Omar Khayyam, as equações eram vistas dentro de um sistema estrutural com propriedades e características definidas.

5 METÓDO DE RESOLUÇÃO DE KHAYYAM

> “Nada é mais é mais importante que examinar as origens da invenção, que são a meu ver, mais interessantes que a própria invenção”. Gottfried W. Leibniz

Discutiremos, nesta seção[17] do trabalho, o método de resolução de equações cúbicas desenvolvido por Omar Khayyam e sua resolução utilizando o software *Geogebra*. Sua maior contribuição em Álgebra foi o método para resolver equações cúbicas pela intersecção de uma parábola com um círculo, que viria a ser retomada séculos depois por Descartes. O contexto histórico em que este se insere é comentado por Burton (2006, p. 251) quando acentua que no século XVII, observamos um avanço algébrico relevante em relação à Pérsia (atual Irã).

Omar Khayyam, como todos os matemáticos árabes, aproveitou trabalhos anteriores dos gregos e de outros árabes para engendrar sua tentativa de resolução das equações cúbicas. Historicamente para Boyer (2010), a ideia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Khayyam deu um passo importantíssimo ao generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau que tinham raízes positivas.

Há que se ressaltar que (BOYER, 2010) nas antigas soluções geométricas gregas das equações cúbicas os coeficientes eram segmentos de retas enquanto na obra de Khayyam eram números específicos. Nesse sentido temos aqui um avanço da matemática árabe em relação à matemática grega.

Outros árabes se destacaram na tentativa de criar métodos de resoluções de equações algébricas. Al-Khwarizmi cujo trabalho inspirou a criação do vocábulo álgebra, de acordo com Boyer (2010) deu contribuições no tratamento de equações quadráticas. Vale lembrar também o matemático Saraf al-Din al-Tusi, mencionado por Dalmedico & Peiffer (1986, p. 96), que foi responsável por um método de aproximação numérica para raízes da cúbica e que proporcionou a continuidade dos trabalhos do árabe Al Quhi.

[17] Esta seção do trabalho traz uma releitura do seminário Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática (Sociedade Brasileira da História da Matemática).

Figura 5.1-Manuscrito de *Algebra* (*Maqalah fi al-jabra wa-al muqabalah*) de Omar Khayyam
Fonte: http://www.maa.org/ (Mathematical Association of America)

Omar Khayyam tentou resolver equações do terceiro grau por meio de outra abordagem, semelhantemente ao que efetivou com equações do segundo grau; e não encontrando uma solução, declarou sua não existência (TABAK, 2004, p. 57). Entretanto, as ideias geométricas aplicadas por ele à Álgebra apresentam certo caráter de modernidade para a época.

Segundo Tabak (2004), Khayyam não trabalhava diretamente com grandezas negativas; além disso, subdividia as equações em grupos e, em outra parte de seu tratado, Omar Khayyam investigou os casos de equações trinomiais quadráticas, equações cúbicas redutíveis a equações quadráticas, e as equações cúbicas trinomiais.

> O processo que Omar Khayyam aplicou tão tortuosamente – e orgulhosamente – às equações cúbicas pode ser anunciado com brevidade muito maior em notação e conceitos modernos como segue. Seja a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2 x + c^3 = 0$. Então se nessa equação substituirmos x^2 por $2py$ obtemos (lembrando que $x^3 = x^2.x$) o resultado $2pxy + 2apy + b^2 x + c^3 = 0$. Como a equação resultante representa uma hipérbole, e a igualdade $x^2 = 2py$ representa uma parábola, é claro que se traçarmos a parábola e a hipérbole sobre o mesmo conjunto de eixos e coordenadas, então as abscissas dos pontos de intersecção das duas curvas serão as raízes da equação cúbica. (BOYER, 2010, p. 165)

Derbyshire (2006, p. 55) cita que dos 14 tipos de cúbicas listadas por Khayyam, quatro eram resolvidas por meio de construções geométricas que envolviam a intersecção de linhas e curvas. Em alguns casos, com base em enunciados de situações geométricas, obtém cúbicas interessantes.

Observamos um exemplo extraído de Derbyshire (2006, p. 55):

> “Desenhando-se um triângulo retângulo, construímos uma perpendicular a partir do ângulo reto para a hipotenusa. Se o comprimento desta perpendicular mais o comprimento do comprimento do menor lado deste triângulo for igual ao comprimento da hipotenusa, o que podemos afirmar sobre a forma do triangulo?”.

Derbyshire (2006) aponta a seguinte equação, originada a partir do enunciado anterior $2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$. O autor comenta que o único real que é raiz desta equação é o valor 0,647798871...,que é um número irracional muito próximo do racional $103/159$.

Derbyshire (2006) acrescenta que Khayyam passou a empregar outros métodos indiretos para superar obstáculos envolvendo grandezas irracionais, por exemplo, os de natureza geométrica. Empregando uma notação algébrica moderna a um dos problemas atacados por Khayyam pode ser descrito por encontrar uma solução positiva para $x^3 + px = q$, com $p,q > 0$.

Nos manuscritos de Khayyam identifica-se o argumento de multiplicação por “x” $(x \neq 0)$, em ambos os lados, obtendo-se $x^4 + px^2 = qx$. Em seguida, ele tomou a parábola de equação descrita por $x^2 = \sqrt{p}y$, que, substituída na equação anterior, resulta:

$$x^4 + px^2 = qx \leftrightarrow (x^2)^2 + px^2 = qx \leftrightarrow \left(\sqrt{p}y\right)^2 + px^2 = qx \leftrightarrow py^2 + px^2 = qx \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y^2 + x^2 = \frac{q}{p} \cdot x \quad \therefore \quad x^2 + y^2 = \frac{q}{p} \cdot x.$$

Notamos que podemos escrever ainda a expressão $x^2 + y^2 = \frac{q}{p} \cdot x$, do seguinte modo:

$$x^2 + y^2 - \frac{q}{p} \cdot x = 0 \leftrightarrow \left(x^2 - 2.x.\frac{q}{2p} + \frac{q}{4p^2}\right) + y^2 = \left(\frac{q^2}{4p^2}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x - \frac{q}{2p}\right)^2 + (y-0)^2 = (\frac{q}{2p})^2. \textbf{(1)}$$

Reparamos que a equação acima descrita em **(1)**, representa uma circunferência de centro $(\frac{q}{2p}, 0)$, tangente ao eixo Oy. Destarte, o ponto de interseção destas duas curvas representa a solução da equação cúbica inicial dada por $x^3 + px = q$.

Com relação a tal feito, Burton (2006) destaca que Khayyam assumia ser dele a primeira solução de toda cúbica possuindo uma raiz positiva, e como não considerava números negativos, necessitou separar 14 tipos de cúbicas que não seriam passíveis de ser reduzidas a equações lineares ou quadráticas, a partir da divisão por x ou x^2. As equações cúbicas, citadas por Derbyshire, tratadas por Khayyam são:

Uma equação binômio

$x^3 = c$

Seis equações trinômios

$x^3+bx=c$	$x^3+c=bx$	$x^3=bx+c$
$x^3+ax^2=c$	$x^3+c=ax^2$	$x^3=ax^2+c$

Sete equações quadrinômios

$x^3+ax^2+bx=c$	$x^3+ax^2+c=bx$	$x^3+bx+c=ax^2$
$x^3=ax^2+bx+c$	$x^3+ax^2=bx+c$	$x^3+bx=ax^2+c$
$x^3+c=ax^2+bx$		

Entretanto, Khayyam descreveu alguns critérios interessantes. De fato, no seu estudo, observou que podem ocorrer uma, duas ou três soluções positivas ou de nenhuma (as cônicas não se interceptam) e (ESTRADA, 2000, p. 432) impõe as condições que os coeficientes devem verificar, correspondentes a cada caso.

Para ilustrar a argumentação anterior, vamos tomar $x^3 + 4x = 8$. Neste caso temos $p = 4$ e $q = 8$. Na sequência, escrevemos: $x^3 + 4x = 8 \leftrightarrow x^4 + 4x^2 = 8x$, e tomaremos a parábola de equação $x^2 = \sqrt{4}y = 2y$; segue que:

$$\left(\sqrt{4}y\right)^2 + 4x^2 = 8x \quad \leftrightarrow \quad 4y^2 + 4x^2 = 8x \leftrightarrow y^2 + x^2 = \frac{8}{4} \cdot x \therefore x^2 + y^2 = 2x.$$

Por fim, chegamos à circunferência de equação descrita por: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

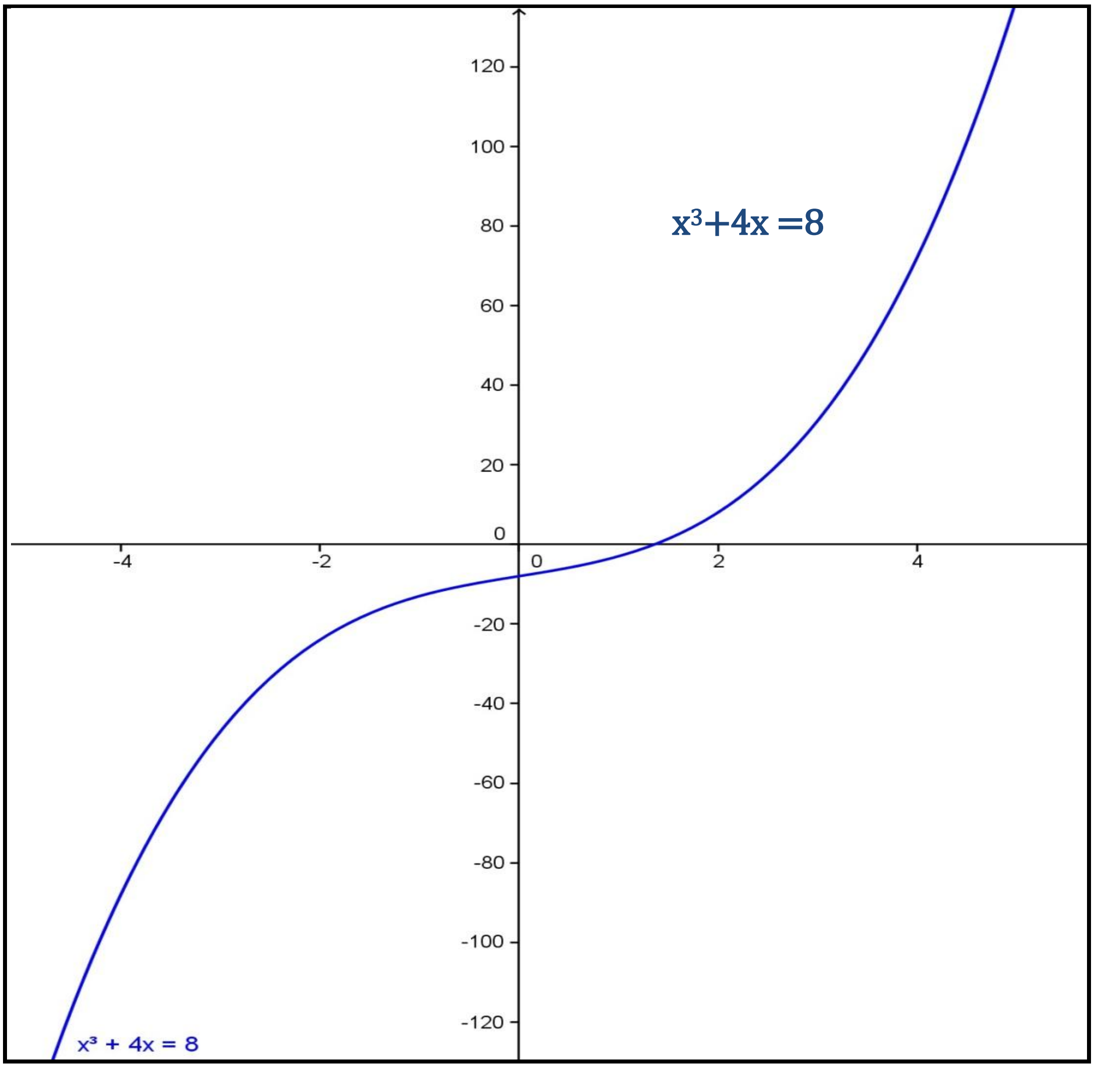

Figura 5.2 – Representação gráfica da equação **x^3+ 4x = 8**.

Na figura 5.2 vemos o gráfico da cúbica inicial fornecida pelo *Geogebra* e na figura 5.3, próxima página, vemos o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a circunferência de centro (1,0). Na mesma figura vemos dois pontos de interseção;

todavia, Omar Khayyam trabalhou com a condição $x \neq 0$,portanto descartamos o ponto (0,0).

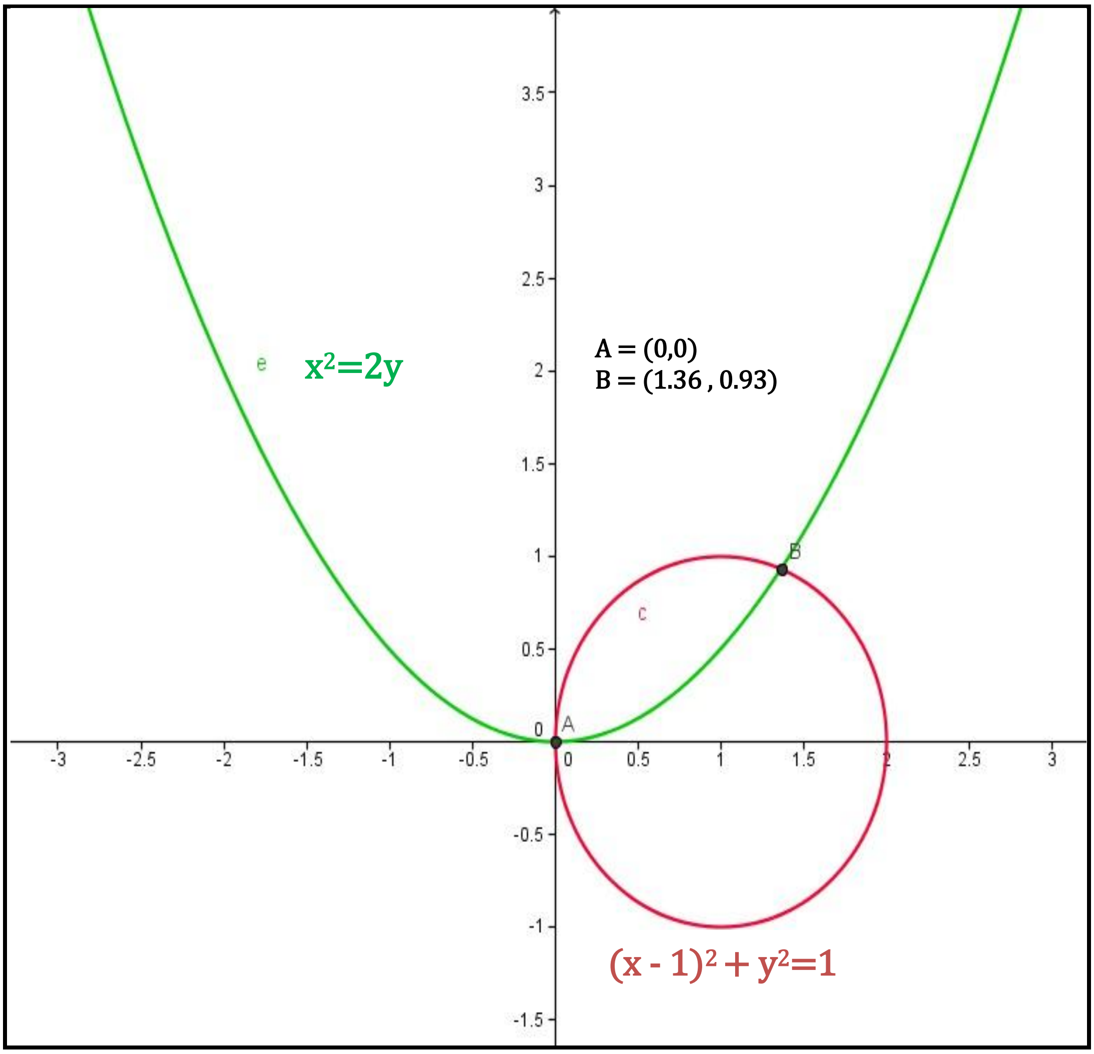

Figura 5.3 – Gráficos da parábola **x^2=2y** e da circunferência **$(x-1)^2 + y^2$=1**.
Um ponto de intersecção das curvas (lado direito) indica apenas uma raiz real

Lima (1999, p. 15) destaca que o Khayyam acreditava ser impossível fornecer algumas soluções aritméticas (em razão das dificuldades com os irracionais) para equações cúbicas; por isso, suas soluções são apenas geométricas. Lima (1999, p. 15) explica ainda outra forma de raciocínio geral devido a Omar Khayyam do seguinte modo:

> Dada uma cúbica de equação $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, substituímos x^2 por $2py$, o que resulta na equação $2py.x + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ que é uma

> hipérbole. Mas como $x^2 = 2py$ é uma parábola, traçando estas duas curvas em um mesmo plano cartesiano, teremos a interseção delas como uma raiz real da equação cúbica dada inicialmente.

Burton (2006, p. 267) nos diz que as equações $x^3 + b^2c = b^2x$ e $x^3 + c = ax^2$, como mencionadas anteriormente, foram também resolvidas por Omar Khayyam usando métodos geométricos semelhantes. No primeiro caso, temos $x^3 + b^2c = b^2x$, e substituindo $x^2 = by$, teremos a seguinte expressão($x \neq 0$):

$$x^3 + b^2c = b^2x \leftrightarrow x^4 + bcx = b^2x^2 \leftrightarrow (x^2)^2 + b^2cx = b^2x^2 \leftrightarrow (by)^2 + b^2cx =$$

$$= b^2x^2 \leftrightarrow b^2y^2 + b^2cx = b^2x^2 \therefore y^2 + cx = x^2 \text{ (hipérbole)}$$

Deste modo, encontrando a solução da interseção entre as curvas $x^2 = by$ e $y^2 - x^2 = -cx$, solucionamos a equação inicial. Enquanto isso, no segundo caso, para $x^3 + c = ax^2$, fazemos então:

$$xy = c \therefore x = \frac{c}{y} \rightarrow x^3 + c = ax^2 \leftrightarrow \left(\frac{c}{y}\right)^3 + c = a\left(\frac{c}{y}\right)^2 \leftrightarrow \frac{c^3}{y^3} + c = a \cdot \frac{c^2}{y^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow c^2 + y^3 = acy \leftrightarrow x^2y^2 + y^3 = acy \leftrightarrow x^2y + y^2 = ac \leftrightarrow xy.x + y^2 = ac \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y^2 + cx = ac \leftrightarrow xc = ac - y^2$$

Reparamos que obteremos as raízes de $x^3 + c = ax^2$, a partir da interseção de hipérbole $xy = c$ com a parábola $y^2 + cx = ac$.

Vejamos como tais modelos funcionam em casos particulares. Tomamos primeiramente a equação cúbica $x^3 + 12 = 4x$ $(b = 2, c = 3)$, seguimos o método de Khayyam, neste primeiro caso. Na figura 5.4 (na página seguinte) vemos o gráfico da cúbica fornecida pelo software *Geogebra*:

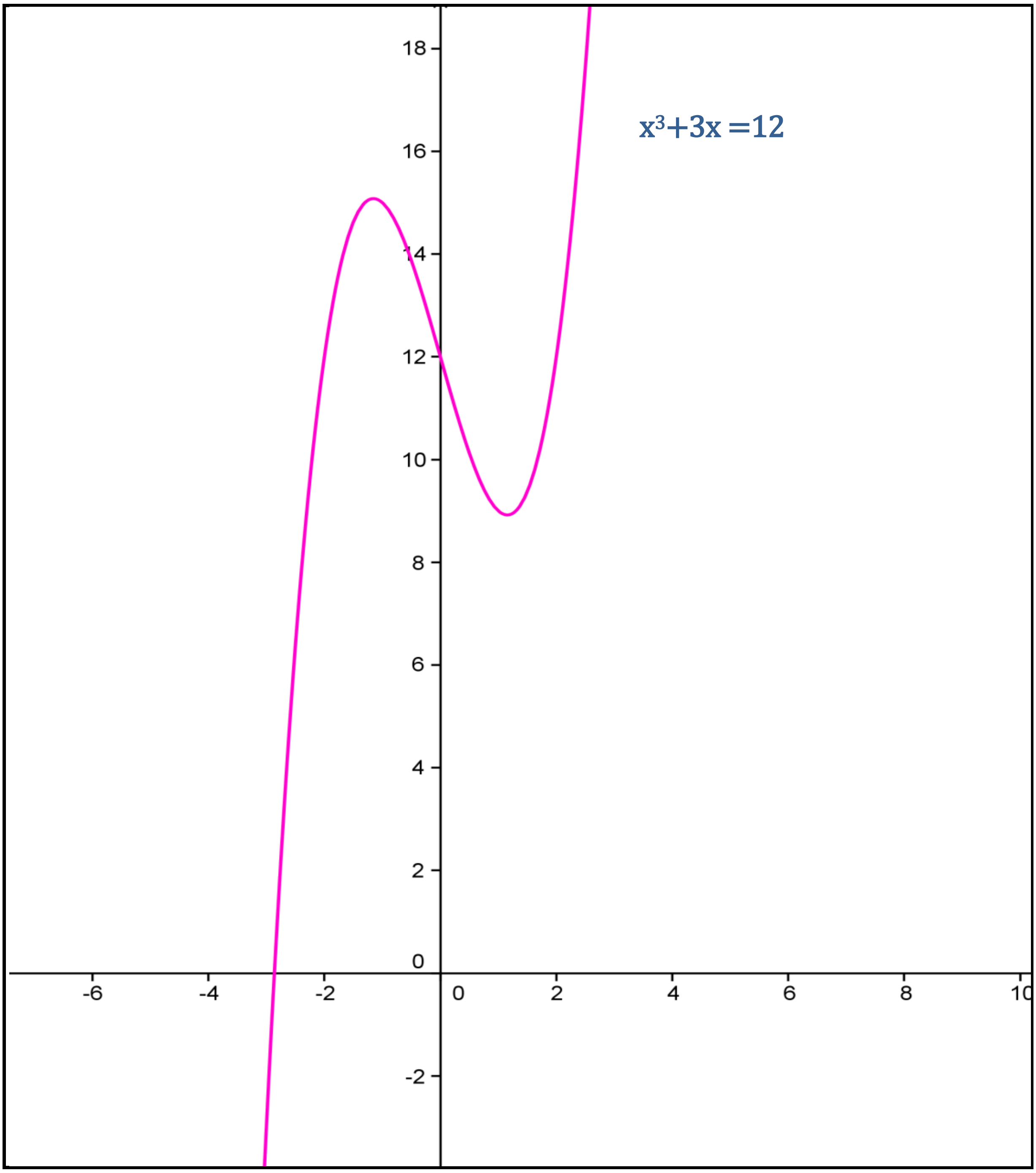

Figura 5.4 – Representação gráfica da equação cúbica $x^3+3x = 12$

Para aplicação do método de Khayyam admitimos a parábola de equação:

$$x^2 = 2y \;\therefore\; x^3 + 12 = 4x \;\leftrightarrow\; x^4 + 12x = 4x^2 \;\leftrightarrow\; 4y^2 + 12x = 4x^2 \;\leftrightarrow\; y^2 + 3x = y^2.$$

Observaremos pela figura 5.5, da página seguinte, que ocorre apenas um ponto de interseção da parábola com a hipérbole. Assim, a cúbica inicial possui apenas uma raiz real, já que a raiz $\mathbf{x = 0}$ não era considerada.

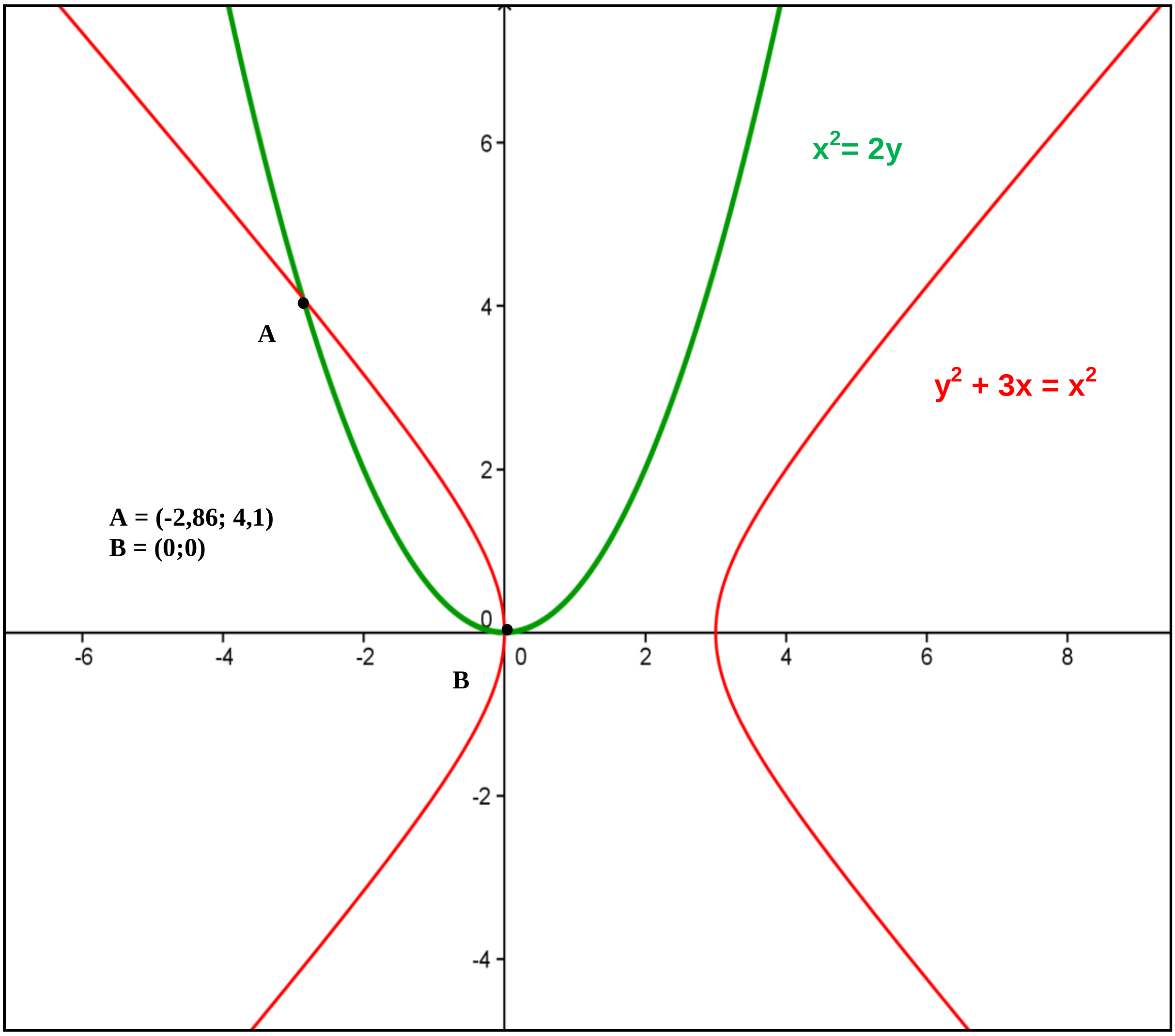

Figura 5.5 – Gráficos da parábola $\mathbf{x^2 = 2y}$ e da hipérbole $\mathbf{y^2 + 3x = x^2}$
Um ponto de intersecção das curvas indica apenas uma raiz real

Tomando a equação $x^3 + 3 = 2x^2$ $(c = 3, a = 2)$, para esta condição temos que:

$$xy = 3 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{y} \quad \rightarrow \qquad \rightarrow x^3 + 3 = 2x^2 \leftrightarrow y^2 + 3x = 6.$$

Neste caso, por meio do método empregado por Omar Khayyām, não temos condições de prever o comportamento das outras raízes da equação cúbica $\mathbf{x^3 + 3 = 2x^2}$, portanto faz-se necessário o uso de um *software*.

Observamos, nas páginas seguintes, as representações gráficas da equação cúbica $x^3 + 3 = 2x^2$ (figura 5.6) e da parábola $y^2 + 3x = 6$ e da hipérbole $\boldsymbol{xy = 3}$ (figura 5.7), e que há apenas um ponto de intersecção na figura 5.7.

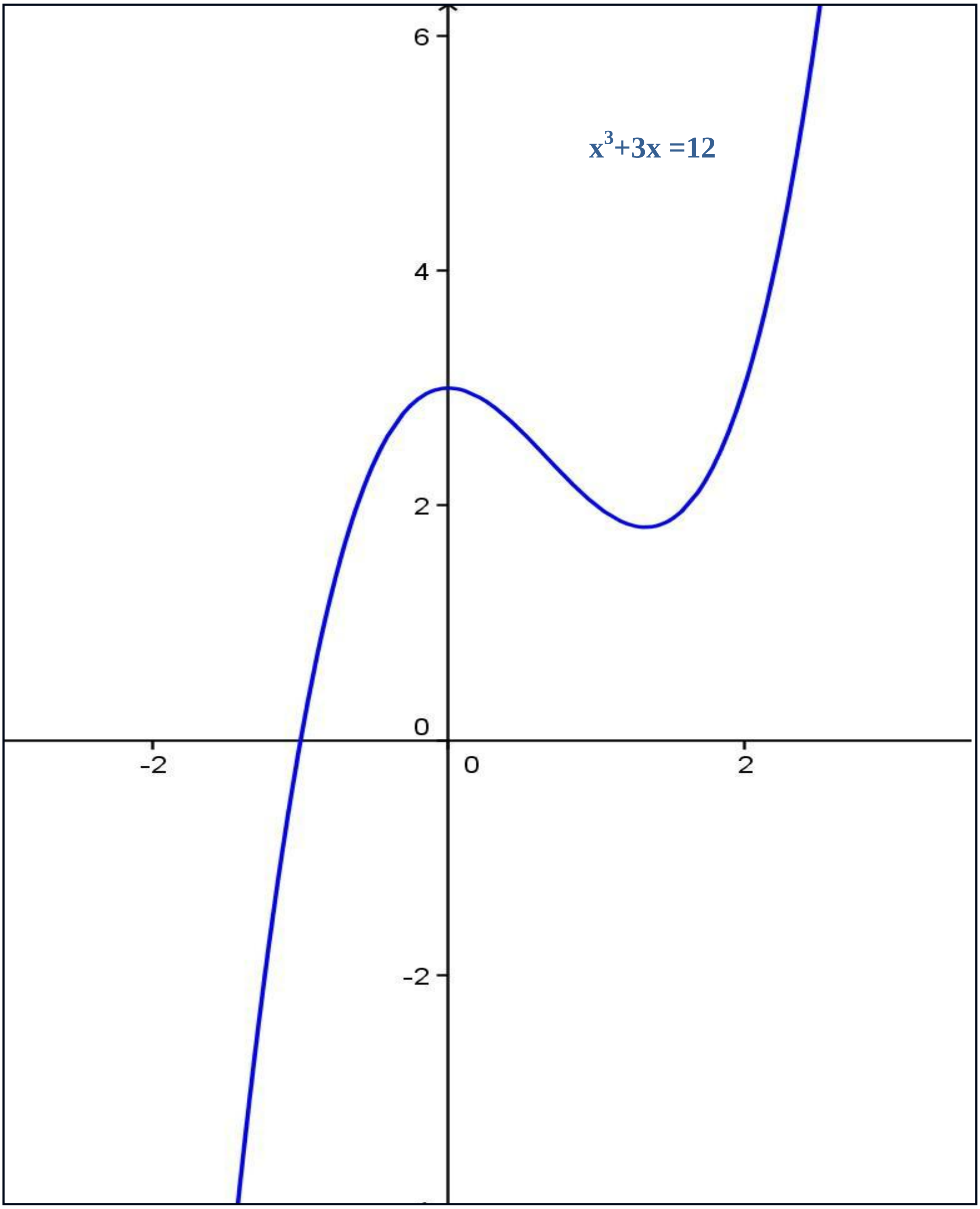

Figura 5.6 – Representação gráfica da cúbica **x^3+3x =12**

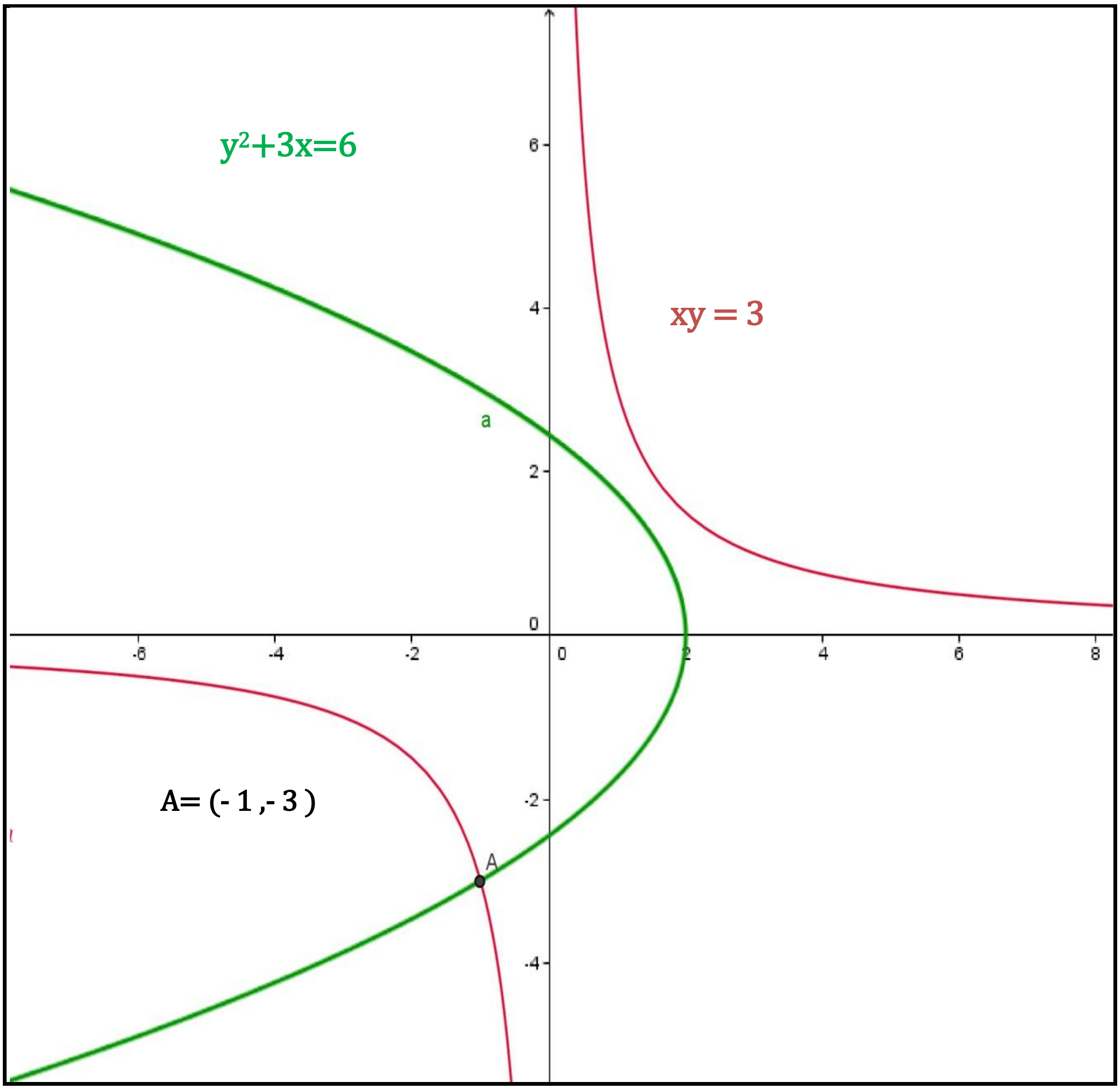

Figura 5.7 – Representação gráfica da parábola **y^2+3x = 6** e da hipérbole **xy = 3**

Vale destacar o fato de que muitos trabalhos árabes tentaram fundamentar sua matemática em sólidas bases, de sorte que, seu raciocínio dedutivo preserva forte influência que os mesmos possuíam da geometria grega (TABAK, 2004, p. 52)

Neste sentido, Escofier (2001, p. 13) reforça tal argumentação, quando menciona:

> Os gregos tentaram resolver equações cúbicas por meio da interseção de: elipses, parábolas e hipérboles. A mais velha solução é devida a Menechme (375-325 – A.C.), que obteve a solução de $x^3 = a^2b$, considerando a interseção de $x^2 = ay$ e $xy = ab$ [...] Entretanto, os gregos não resolveram o problema da duplicação do cubo com régua e compasso ($x^3 = 2a^3$).

Boyer (2010, p.165) narra que Khayyam estava muito a frente de seu tempo, e sintetiza a empreitada que Descartes empreendeu séculos depois: “Quem quiser que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados.”

Por outro lado, no âmbito da análise dos métodos empregados pelos árabes, identificamos o fato de que o próprio momento incipiente da linguagem algébrica daquela época funcionou como entrave para a evolução de muitas ideias. Se dúvida, vemos que os modelos de pensamento grego foram empregados de modo decisivo para a disseminação dos resultados matemáticos, tanto de Omar Khayyam como para os outros árabes mencionados ao longo do trabalho.

A evolução da linguagem algébrica e dos métodos algébricos empreendidos nos trabalhos de Cardano e Tartaglia, merecem destaque no sentido de terem desenvolvido instrumentos conceituais que puderam prever o comportamento de raízes complexas, propiciando um avanço algébrico inicial que em pouco tempo se tornaria extraordinário pela enormidade de trabalhos nesta área da matemática.

Há que se considerar que as contribuições dos árabes foram decisivas para que os europeus se aplicassem nas tentativas de resoluções das cúbicas, com ferramentas algébricas ainda incipientes e insatisfatória notação simbólica.

5.1. Considerações para o Ensino de Matemática

Em nossa pesquisa nos deparamos com estudos de grande valia para nosso intuito, entre os quais destacamos a pesquisa de campo realizada por Lima (1999) utilizando o software *Cabri-géomètre* para a resolução de equações do 3º grau. Os métodos apresentados pela pesquisadora são: fórmula de Cardano, dispositivo de Briot-Ruffini, construtor universal de equações e método de Omar Khayyam.

O objetivo que se norteia, nesta pesquisa de campo, é se esses métodos apresentados são suficientes para que o aluno tenha uma visão geral de resolução de cúbicas e qual dos métodos em uma sequência didática melhor reflete os anseios do alunado.

Lima (1999) acentua que o Método de Khayyam foi o escolhido pelos alunos como o de uso garantido, caso as tentativas algébricas de resolução não funcionem, sendo possível saber o número de raízes reais que uma equação possui e encontrar um intervalo que as contenha.

A respeito do método de Khayyam, Lima (1999) aponta que esse nos possibilita verificar a existência de raízes reais da equação cúbica que se quer resolver, nos mostra quantas elas são, e permite que se obtenha um intervalo que as contém. Vale salientar, entretanto, que, com esse método, não podemos obter as soluções da equação de terceiro grau inicial, já que estamos trabalhando com um método geométrico, e esse tipo de método nos dá apenas aproximações para as raízes.

Sublinhamos que a exploração de algum *software* matemático com a intenção de potencializar e proporcionar um melhor entendimento para os estudantes mostra-se promissora. Apesar da escassez na área, encontramos autores (HOLME, 2010; RHODES, 2005) que desenvolvem uma abordagem na área de História da Matemática com o auxílio tecnológico constante.

Seu uso pode impulsionar e motivar a compreensão dos estudantes, desde que o professor consiga efetivar abordagens diferenciadas, como aconselha Grugnetti (2000, p. 35). Nesta perspectiva podemos ponderar que ferramentas inovadoras introduzidas no ensino de matemática além de nos ajudar a compreender comportamentos matemáticos, nos possibilitando discussões a cerca das barreiras históricas que foram superadas com seu desenvolvimento.

Portanto, um ensino de matemática por meio de sua História, apoiado em recursos computacionais, semelhantemente ao que buscamos delinear ao longo deste capítulo do trabalho, poderá modificar e transformar um simples mecanismo de motivação "em *um real instrumento compreensivo de instrução"*. (FOSSA, 2001, p. 59)

5.2. Omar Khayyam nos livros didáticos

Ao se propor sincopar parte da História da Matemática para introduzir determinado conteúdo, ou conceitos matemáticos, há que se ter a preocupação em não omitir informações cruciais para a compreensão histórica de como esse conceito se desenvolveu e quais povos (ou civilizações) contribuíram para o desenvolvimento ou aprimoramento desse conceito.

Faz-se indubitável, que qualquer livro didático de matemática que se proponha a mencionar a História da Matemática para realçar o conteúdo que se apresenta, não contemplará toda a história pertinente ao assunto. Essa constatação se dá pela enorme quantidade de dados históricos que acumulamos ao longo da história em diversas épocas. Embora seja necessário um cuidado para não se cometer injustiças históricas.

Contudo, apesar da importância dos estudos matemáticos de Omar Khayyam, muitas vezes os livros didáticos de matemática, tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica quando tratam da resolução de equações cúbicas, restringem-se apenas a mencionar contribuições de nomes não pertencentes ao mundo árabe, como Girolamo Cardano, Nicolo Fontana de Brescia (o Tartaglia), Paolo Ruffini e Albert Girard.

Devido ao exposto neste trabalho se justifica o interesse pelo método de resolução desenvolvido por Khayyam. Para explanar e justificar nossa argumentação, apresentamos os livros didáticos que consultamos do Ensino Superior IEZZI (1998) e LATHI (2004), onde não encontramos nenhuma menção aos árabes e nem a Omar Khayyam quando trataram de equações cúbicas.

Na Educação Básica consultamos os livros didáticos de MACHADO (1994), GENTIL (1996) e GRECO e GRECO (1996), que também não fazem nenhuma citação às contribuições de Khayyam e dos matemáticos árabes. Porém em Dante (1999) encontramos menção a al-Khowarizmi e aos hindus, mas não a Omar Khayyam.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, procuramos justificar a importância da História da Matemática colocando em tela um matemático árabe e suas contribuições para essa ciência. É inegável a importância e utilidade da matemática para o homem, seja para explicar teoricamente os feitos científicos, isto é, pela sua praticidade em resolver situações problemáticas de seu dia-a-dia ou pelo valor intelectual que há no pensamento matemático.

É certo, então, que a História da Matemática, com o seu desenrolar, encontra-se descrita em vários livros, por diversos e diferentes autores ao alcance de qualquer um de nós. Cada autor pormenoriza os avanços matemáticos de sua época, faz releituras ou traduções de desenvolvimentos matemáticos de povos com os quais teve contato, ou dos quais obteve manuscritos.

A álgebra aparece tardiamente, e se desenvolve com a invenção dos algarismos árabes, criados pelos hindus, assim chamados porque foram os árabes que lhes atribuíram utilidade ao acrescentar o símbolo 0 (zero). Uma grande parte das ciências baseava-se no cálculo, destacando-se o comércio, e sem a criação dos algarismos arábicos e da álgebra, boa parte delas não teriam se desenvolvido.

A humanidade levou milhares de anos para descobrir a solução da equação de 3° grau, mas um aspecto interessante e atraente para estudo e discussão entre alunos e professores que vêm perdendo o significado e a sua potencialidade, é o aspecto histórico. Os processos de resolução da equação de grau 3, que desenrolaram um grande cenário notável dentro da história, necessitam ser resgatados, pois, os progressos matemáticos que antecederam à solução, conseguiram chegar ao limite do conhecimento matemático da época.

Na esteira dessa necessidade podemos afirmar que a ciência não se basta pelos fatos, embora esses tenham grande importância, ela deve ser compreendida de uma maneira bem extensa, abrangendo não só a experiência matemática, como, também, todo o ambiente político, social, enfim, cultural que a propiciou.

Boyer nos diz que “Quando parece haver uma descontinuidade, devemos primeiro considerar a possibilidade de que o salto aparente possa se explicado pela falta de documentação”. Podemos aqui também dizer que a necessidade de uma sociedade, de certa forma, pode explicitar um novo conhecimento, talvez não encadeado às necessidades prementes da época, mas nos é evidente que por vezes a matemática avança e produz conhecimentos que apenas futuramente, ou muito futuramente, terão aplicação no contexto social.

Nesse sentido, cabe-nos, hoje, compreender a História da Matemática de uma maneira mais ampla, analisando qual o modelo matemático que influenciava os pensadores de uma determinada época, qual a relação dessas ideias matemáticas existentes com o contexto cultural e político apresentado e como a sociedade apropria-se de tais conhecimentos que são, assim, transmitidos.

Acreditamos que ao se aliar a História da Matemática a alguma atividade de Ensino que preparamos ou gestamos, estamos mostrando implicitamente ao aluno que aquele método ou conteúdo carrega consigo uma bagagem histórica, talvez seja essa a melhor forma de homenagearmos todos os personagens históricos que, por ventura, contribuíram para desenvolvimento de tal área da matemática.

De acordo com D’Ambrosio (1999, p.97), “Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas.” Em face dessa afirmação, podemos assegurar que qualquer forma de conhecimento, imprescindivelmente a matemática, é indissociável de sua história. E que através dessa inserção da História da Matemática com todas suas sutilezas, podemos contribuir para um desenvolvimento crítico do alunado.

Por fim, cabe ressaltar que como docentes, que somos ou iremos nos tornar, nós travamos um diálogo com a História da Matemática, construindo e reconstruindo os fatos, objetivando não apenas o papel da matemática como justificativa, mas também como forma de fomentar o conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV. A. D.; KOLMOGOROV. A. N. & LAVRENT´V. M. A**. Mathematics: it´s Content. Method and Meaning.** Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1956.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, departamento de Matemática.

BALL, Walter William Rouse. **A Short Account of the History of Mathematics**. New York: Dover, 1960.

BARONI, Rosa Lucia Sverzut; NOBRE, Sergio Roberto. **A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática.** In: BICUDO, Maria Aparecida

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. Tradução ELZA F. GOMIDE. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BURTON, David. M. **The History of Mathematics.** New York: Mc-Graw Hill, 2006.

CAJORI, Florian. A . **History of Mathematics**. 2a ed. New York, The MacMillan Company,1919, 516 p.

COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las Matemáticas**. Traducción de Pilar González Gayoso. Mexico, Siglo Veintiuno, 1986, 2 v.

DALMEDICO. Amy. D. & PEIFFER. Jean. **Une Histoire des Mathematiques.** Paris: Éditions du Seuil, 1986

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da Teoria a Prática**. 14ª ed. Campinas – SP: Papirus, 2007. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1ª Ed. vol3. São Paulo: Ática, 1999.

DERBYSHIRE. John. **Unknown quantity: a real and imaginary history of algebra**. Washington: Joshep Henry Press, 2006.

ESCOFIER. Jean-Pierre. **Galois Theory.** New York: Springer-Verlag, 2001.
EVES, Howard Whitley. **Introdução a História da Matemática.** (Título original: An introduction to the history of mathematics). Trad. Hygino H. Domingues. 3ª edição. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2011.

ESTRADA. Maria. F. et al. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000

FOSSA. John. A. **A história da Matemática como uma fonte de atividades matemáticas. In:** FOSSA. John. A. ***Ensaios sobre a Educação Matemática*****.** Pará: Editora da Universidade EDUEPA, p. 57-65, 2001.

GIBBON, Edward. **The History of the Decline and Fall of the Roman Empire.** London, Lightning Source Inc , 1776.

GRUGNETTI. Lucia. **The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems.** In: KATZ. Victor. J. ***Using History to teach mathematics: an international perspective*****.** New York: The Mathematical Association of America, p. 29-37, 2000.

HOLME. Audun. **Geometry: our cultural heritage**. New York: Springer. 2010.

KATZ, Victor J. A **History of Mathematics: an Introduction**. 2. ed. Addison-Wesley, 1998.

LIMA. Rosana. N**. Resolução de Equações de terceiro grau através de cônicas**. (dissertação).

SMITH, D. E. ***History of Mathematics***. vol II. Nova Iorque: Dover Publications, 1958.

STRUIK, Dirk Jan. **História Concisa das Matemáticas.** 3. ed. Trad. JOÃO COSME SANTOS GUERREIRO. Lisboa: Gradiva, 1997.

TABAK. John. **Algebra: sets, symbols, and the language of the thought**. New York: Facts On File, 2004.

WOEPCKE. F.. **L´algebre D´Omar Alkhayyami.** Paris: Benjamim Duprat, 1951.

LIMA. Rosana. N. Resolução de Equações de terceiro grau através de cônicas. (dissertação).

REFERÊNCIAS DE PESQUISAS DA INTENET

http://portugues.free-ebooks.net/ebook/Rubaiyat#ixzz2d0koixk5 Acesso 15/08/2013

http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Khayyam Acesso 22/08/2013

http://www.britannica.com/EBchecked/topic/428267/Omar-Khayyam Acesso 23/08/2013

http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Khayyam Acesso em 20/03/2013

O'CONNOR,J.J.;EFROBERTSON,E.F.

http://www.abed-azrie.com/ Acesso em 06/07/2013

http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/ acesso em 21/09/2013

http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Omar_Khayy%C3%A1m.html Acesso 06/05/2013

http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Khayyam Acesso em 06/07/2013

http://wwwhistory.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html. 2000. Acesso 31/03/2013