Estudo do cálculo de áreas de regiões planas e suas possibilidades na Educação Básica

Daiana Conceição da Silva

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientada pela Profª. Drª. Graziela Marchi Tiago

IFSP
São Paulo
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Daiana Conceição da.
Estudo do cálculo de áreas de regiões planas e suas possibilidades na Educação Básica/Daiana Conceição da Silva. - São Paulo: IFSP, 2014.
68f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
Orientadora: Graziela Marchi Tiago.

1. Estimativa Inferior e Superior. 2. Área de Regiões Planas. 3. Cálculo das Estimativas. 4. Educação Básica. 5. Retângulos. Estudo de área de regiões planas e sua possibilidade na educação básica.

DAIANA CONCEIÇÃO DA SILVA

ESTUDO DO CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS E SUAS POSSIBILIDADES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 28/05/2014 **CONCEITO:** 8,50

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Membro da Banca

Mariana P. M. A. Baroni

Profa. Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Membro da Banca

Graziela Marchi Tiago

Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientadora

Daiana Conceição da Silva

Aluna: Daiana Conceição da Silva

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original".

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, ao meu pai e a minha irmã pelo apoio que me deram durante esta caminhada e por sempre me apoiarem nas dificuldades.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte desta longa jornada. Em especial agradeço a professora Graziela Marchi Tiago, pela orientação, pelas ideias e dedicação.

Gostaria de agradecer aos colegas de curso Fábio, Éder, Gabriela, Helaine, Tamires e Jorge pelo apoio e pelas risadas.

Agradeço em especial aos meus amigos Cristiana, Carlos Alberto e Luciene por sempre me apoiarem e me incentivarem no decorrer destes quatro anos.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo apresentar o cálculo das estimativas inferior e superior como uma possibilidade para o professor da Educação Básica desenvolver o conteúdo cálculo de áreas de regiões planas. O cálculo das estimativas pode ser utilizado como uma ferramenta para determinar o valor da medida da área de uma região com contorno regular, por exemplo, um trapézio, ou de uma região com contorno irregular, isto é determinar a área de uma região delimitada por uma parábola e os eixos coordenados. Para desenvolver essa pesquisa buscou-se responder a seguinte questão: Como determinar o valor da medida da área de uma região de contorno curvo? A pesquisa apoia-se em alguns aspectos da Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1986), especificamente a Tipologia das Situações Didáticas.

Palavras-chaves: Estimativas Inferior e Superior; Áreas de Regiões Planas; Cálculo das Estimativas; Educação Básica; Retângulos.

ABSTRACT

This research aimed to provide the calculation of the lower and upper estimates as a possibility for the teacher of Basic Education to develop the topic *calculation for areas of plane region*. The calculation of these estimates may be used as a tool to determine the measurement for areas of regular shape region (a trapezoid, for example) or the measurement of a region with an irregular contour, such as determining the area of a region bounded by a parabola and the coordinate axes. In order to develop such study we sought to answer the following question: How can the measurement for an area of curved countour be determined? This research draws on some aspects of the Theory of Didactic Situations developed by Guy Brousseau (1986), specifically the Typology of Didatic Situations.

Keywords: Lower and Upper Estimates; Areas of Plane Region; Calculation of Estimates; Basic Education; Rectangles.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

Pág.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A ideia principal desse trabalho de conclusão de curso (TCC) surgiu do trabalho desenvolvido na iniciação científica, cujo título era: *O Teorema Fundamental do Cálculo e a Educação Básica*. No trabalho desenvolvido na iniciação científica, foi apresentada uma abordagem diferente do que é normalmente utilizada pelo professor da Educação Básica para se trabalhar o conteúdo cálculo de áreas de regiões planas, utilizando os conceito e procedimentos básicos do Teorema Fundamental do Cálculo.

O intuito não é falar sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e nem demonstrar o teorema. O plano é trabalhar com situações-problema que mostrem que as áreas de figuras planas conhecidas e desconhecidas podem ser encontradas se aproximarmos essa região pela soma de áreas de um conjunto de retângulos. Além disso, conferimos que quanto maior a quantidade de retângulos, maior será a precisão desta aproximação.

O conceito medida de área aparece em diferentes momentos na Educação Básica, como no Ensino Fundamental II, onde o aluno começa a ter os primeiros contatos com a noção do que é a medida da área quando o professor apresenta as primeiras noções sobre medidas e grandezas. No Ensino Fundamental II, o aluno aprende a determinar o valor da medida da área de regiões planas regulares e irregulares utilizando a ideia dos quadrados unitários. No Ensino Médio o assunto é retomado e o professor normalmente desenvolve o conteúdo utilizando os livros didáticos, que abordam o conceito de medida área sendo um número associado a uma superfície e logo passa a trabalhar situações-problema que envolva aplicações de fórmulas para calcular a área de regiões planas com contorno regular.

De uma forma geral, os exercícios propostos nos livros e trabalhados em sala de aula que englobam esse tema, sempre abordam áreas planas cujas fórmulas são deduzidas no decorrer dos livros, por exemplo, um quadrado, que para encontrar a sua área basta elevar a medida do comprimento do lado ao quadrado, de um retângulo, o qual basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura, e de um triângulo, o qual é a metade da medida de sua base vezes a medida da altura.

Todas as regiões planas citadas anteriormente têm uma fórmula para encontrar a medida de sua área. Mas, e se a região que se deseja descobrir a medida da área for uma região de contorno irregular, como por exemplo, de uma região com contorno curvo ou de uma região onde não se tem uma fórmula pré-estabelecida? Como determinar o valor da medida da área de uma região de contorno curvo?

O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem, diferente do que é geralmente utilizada pelo professor da Educação Básica para encontrar o valor da medida da área de regiões planas. O cálculo das estimativas inferior e superior que será utilizado neste trabalho para determinar um valor aproximado para a medida da área de superfícies planas, poderá ser utilizado para encontrar o valor da área de regiões com contorno irregular e de regiões com contorno regular.

A metodologia desse trabalho baseia-se em uma revisão bibliográfica de alguns livros didáticos, trabalhos acadêmicos e artigos científicos. Foi feita uma revisão bibliográfica sobre o cálculo de medidas de áreas de regiões planas, o seu contexto histórico e como os professores e livros da educação básica abordam o tema. As situações-problema analisadas foram adaptadas de livros didáticos.

Utilizando como referencial teórico as principais noções da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (1986), especificamente a Tipologia das Situações Didáticas, procuramos apresentar o cálculo das estimativas como opção para determinar a medida da área de regiões planas. A partir das principais ideias da tipologia que são: ação, formulação, validação e institucionalização, serão analisadas as situações-problema desse trabalho.

No capítulo 3, apresentamos um breve resumo sobre o cálculo de medida de área na antiguidade e como é abordado hoje pelos professores e livros didáticos. Também abordamos o trabalho de Molon (2013), que na sua dissertação de mestrado considera o tema cálculo de área de regiões planas utilizando o método das estimativas para encontrar o valor da área de algumas situações-problema.

No capítulo 4, abordamos algumas situações-problema adaptadas de livros didáticos que envolvem determinar a medida de área de certas regiões de contorno irregular e regular. As soluções dessas situações-problema são analisadas de acordo com a Tipologia das Situações Didáticas. Os gráficos utilizados no processo de desenvolvimento nas soluções dos problemas foram elaborados com auxílio do software Winplot.

No capitulo 5, apresentamos uma análise reflexiva sobre as situações-problema propostas neste trabalho, e também uma ideia para trabalhos futuros, como desenvolver a proposta apresentada em sala de aula.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nos currículos escolares brasileiros, prevalece o conceito de área como uma grandeza associada à geometria, e é a partir dessa ideia que os professores da Educação Básica desenvolvem o tema. Neste trabalho, buscamos apresentar outra proposta para o ensino do cálculo de medidas de área de figuras planas, tendo como referencial norteador a Teoria das Situações Didáticas.

2.1. Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau e iniciada na década de 1970 na França. Essa teoria apresenta uma proposta para o ensino e aprendizagem em sala de aula interligando professor, aluno e o conhecimento matemático, esses três elementos fundamentais no sistema didático.

Brousseau sustenta como ideia básica aproximar o trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador, no que se refere à investigação e busca por solução de um determinado problema. Este deverá providenciar situações favoráveis para que o aluno aja sobre o saber, transformando-o em conhecimento para si mesmo. Pode-se dizer que na teoria das situações didáticas o foco está centrado no aluno e também na situação didática que relaciona sala de aula, professor, aluno e saber matemático, para uma aprendizagem mais efetiva. Primeiramente faremos um breve resumo a respeito das principais características da Teoria das Situações Didáticas consideradas por nós, que são: situação didática, situação adidática, contrato didático e a Tipologia das Situações Didáticas (FREITAS, 2008).

Daremos ênfase à Tipologia das Situações Didática, pois a partir dela abordaremos o tema cálculo de medida de áreas de regiões planas com base nas classificações que são: ação, formulação, validação e institucionalização.

Brousseau descreve uma situação didática da seguinte forma:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir característica do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROUSSEAU, 1986, apud FREITAS, 2008, p.80).

Uma situação didática ocorre quando há a intenção (implícita ou explícita) de aprendizagem. Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico.

Na verdade, podemos reiterar que uma situação didática envolve professor, aluno e conhecimento. O professor assume o papel de intermediador entre o conhecimento e o aluno.

Uma situação adidática, segundo FREITAS (2008, p.84) caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. Resumidamente, uma situação adidática é uma situação didática em que o aluno deve perceber as características e padrões que o ajudarão a compreender um novo saber, sem interferência do professor. Segundo Brousseau:

> A concepção moderna de ensino vai, portanto, requerer que o professor provoque as adaptações desejadas, por meio de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir, evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e aquele em que ele produz sua resposta, o professor se recusa intervir, como alguém que propõe os conhecimentos que deseja ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para que ele possa adquirir um novo conhecimento, mas também deve saber que esse conhecimento é justificado pela lógica interna da situação e que ele pode constituí-lo sem apelar a razões didáticas. (BROUSSEAU, 1986, apud FREITAS, 2008, p.84).

Na situação adidática, o aluno é responsável pela resolução do problema e em geral se comporta como um pesquisador no processo de aprendizagem. Nessa situação, o professor assume um papel de observador, e o próprio aluno é quem trabalha individualmente ou em grupo, com o objetivo de construir um novo conhecimento.

O contrato didático trata de um conjunto de regras implícitas ou explícitas que regem as responsabilidades dos sujeitos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem, ou seja, professor e aluno. Segundo Freitas (2008), toda situação didática é regida por um determinado tipo de contrato, ou seja, um conjunto de obrigações implícitas e explícitas relativas a um saber interposto entre o professor e os alunos.

Pode-se dizer que o contrato didático é uma forma de organizar a relação professor-aluno. O contrato didático envolve o conjunto de comportamentos do professor que é esperado pelo aluno, e o conjunto de comportamentos do aluno esperado pelo professor. O aluno vê no professor aquele que cria condições para a apropriação de conhecimentos.

Nas situações didáticas, incluindo as situações adidática pode-se identificar as seguintes etapas: ação, formulação, validação e institucionalização. Essas etapas são chamadas de Tipologia das Situações Didáticas, de acordo com Freitas (2008). Ainda, segundo este autor, Brousseau desenvolveu a Tipologia das Situações Didáticas analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática. Nas situações didáticas podem ser identificadas:

(i) **Situação de ação:** os alunos estão empenhados em encontrar a solução de um problema; eles devem tomar decisões para organizar sua solução do problema, ou seja, eles realizam uma ação imediata tentando resolver o problema de uma maneira operacional. O aluno vai refletir sobre a solução do problema e escolherá um procedimento que o ajude a resolver e compreender o problema em questão;

(ii) **Situação de formulação:** é a modificação da linguagem usual; o aluno começa a apresentar a solução do problema de uma forma mais elaborada. O aluno terá que aprofundar as suas atividades, fazer conjecturas e reflexões para resolver o problema. O aluno começará a se questionar sobre uma possível resolução;

(iii) **Situação de validação:** os alunos buscam diferentes formas para validar a solução do problema. A explicação para resolução do problema passa ser teórica, para que o novo conhecimento seja consolidado;

(iv) **Situação de institucionalização**: é quando o saber é instituído e pode ser utilizado pelos alunos na resolução de outros problemas matemáticos. Essa situação tem por função estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento. O conhecimento passa ter característica universal, maior do que o conhecimento utilizado para solução de um só problema. Essa situação caracteriza-se pela sistematização do conhecimento por meio de definições e teoremas, ou seja, uma linguagem matemática mais formal.

Com a Teoria das Situações Didáticas, apresentaremos uma proposta para se trabalhar o tema “Estudo do cálculo da medida de área de regiões planas e suas possibilidades na Educação Básica”, de maneira que o aluno entenda o conceito para que ele consiga refletir, agir, compreender e resolver as situações problemas proposta pelo professor.

O tema cálculo de áreas de regiões planas pode ser apresentado e organizado a partir das ideias principais da *Tipologia das Situações Didáticas*. Utilizando os pontos principais da tipologia, podemos organizar a nossa proposta de abordagem:

i) **Situação de ação**: será apresentada uma situação-problema sobre o cálculo de medida de área de uma região plana. Em seguida, faremos uma discussão sobre o melhor caminho para resolução do problema utilizando ferramentas já conhecidas;

ii) **Situação de formulação**: faremos uma análise reflexiva dos caminhos para se encontrar a solução da situação-problema proposta e os elementos necessários para resolver os problemas serão formulados;

iii) **Situação de validação**: faremos uma apresentação teórica sobre a resolução do problema. Nesta etapa, indicaremos a solução da situação-problema;

iv) **Situação de institucionalização**: nessa fase chegaremos à conclusão que o cálculo das estimativas inferior e superior pode ser utilizado como uma ferramenta matemática para resolver problemas que envolvam determinar a medida da área de uma região plana.

3 ÁREA DE REGIÕES PLANAS

Neste capítulo apresentaremos um resumo sobre a história do cálculo de áreas de regiões planas na antiguidade. Depois faremos uma análise de como o conteúdo cálculo de áreas é abordado pelos professores e livros da Educação Básica. E por fim, apresentaremos outra possibilidade para determinar o valor da medida da área de regiões planas utilizando o cálculo das estimativas inferior e superior.

3.1. Uma breve história sobre o conceito de cálculo de áreas

Quando pensamos de onde surgiu o conceito cálculo de áreas, tentamos buscar respostas na história do surgimento da geometria, pois é a área de conhecimento que trabalha com esse conteúdo. Por isso, neste capítulo, faremos um breve resumo sobre o surgimento do conceito área na geometria.

Na dissertação de mestrado de Sonia Regina Facco (2003), há a discussão sobre o cálculo de área de regiões planas na antiguidade, abordada como parte da área de conhecimento da geometria. Segundo Facco (2003), as civilizações antigas como a babilônica já conheciam as regras gerais para o cálculo da área de retângulos, triângulo retângulo, triângulo isósceles e do trapézio retângulo. Como mostra o trecho abaixo da dissertação de Facco (2003):

> Há indícios de que ocorreram sociedades avançadas, que se instalaram ao longo dos rios Nilo, no Egito, Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, Indo e Ganges, na região centro-sul da Ásia e, Hwang Ho e Yangizé, na Ásia Oriental. Essas sociedades, conhecidas por suas habilidades em engenharia na drenagem de pântanos e irrigação, construíram obras de defesa contra inundação, grande edifícios e estruturas por meio de projetos que requeriam muita geometria prática. (FACCO, 2003, p.18)

Também na dissertação de mestrado de Baldini (2004), é abordado o conceito de cálculo de áreas relacionado à geometria. Segundo a autora, a geometria surgiu da necessidade da civilização egípcia de medir a terra após as inundações no vale do rio Nilo. Os agricultores egípcios cultivavam as terras que ficavam nas margens do rio Nilo, divididas em lotes. Depois das chuvas o rio Nilo transbordava, consequentemente as marcas dos lotes eram carregadas a cada cheia, o que surgia a necessidade de refazer as demarcações dos lotes, como mostra o trecho abaixo extraído da dissertação de Baldini (2004):

> Boyer (1996) relata que Heródoto subestimou a idade da geometria e acreditava que ela tenha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terra após as inundações no vale do rio Nilo. A necessidade de fazer novas demarcações de terras após as cheias do Nilo fez com que aparecessem os “mensuradores”. (BALDINI, 2004, p.16)

Segundo Baldini (2004), a necessidade de delimitar a terra culminou no surgimento de figuras geométricas como triângulo, retângulo e quadrado, como mostra o trecho abaixo da dissertação de Baldini (2004):

> Segundo Eves (1992), a necessidade de delimitar a terra levou à noção de algumas figuras geométricas, tais como retângulos, quadrados e triângulos, mas a geometria no sentido mais amplo surgiu em tempos mais antigos que a arte de escrever. Os conceitos de área e perímetro, provavelmente, estão relacionados ao problema das medições de terra. (BALDINI, 2004, p.16)

As informações que se têm sobre essa época, segundo Tania Marli Rocha (2007) em seu artigo, provêm de registros históricos antigos, como os papiros de Moscou (também conhecido como papiro Golenishev) de 1850 a.C. e Rhind (conhecido também como papiro Ahmes), de 1650 a.C. Segundo Rocha (2007), esses documentos comprovam os conhecimentos geométricos das antigas civilizações.

Segundo Rocha (2007), as análises desses documentos mostram que os egípcios tinham vários conhecimentos geométricos e resolviam problemas relacionados à geometria.

Resumindo, as civilizações mais antigas trabalhavam com a geometria especificamente para calcular as áreas de inundações do rio Nilo na época das cheias e como uma ferramenta na construção de seus templos e edifícios. Para eles, geometria era uma ferramenta necessária para o desenvolvimento da própria sociedade.

Rocha (2007) aponta indícios de que os egípcios e os babilônicos desenvolveram métodos para calcular área de círculos, triângulos, retângulos e trapézios. Como mostra o trecho abaixo extraído do artigo de Rocha (2007):

> Há também indícios de que egípcios e babilônios dispunham de métodos eficientes para o cálculo da área do círculo e conheciam regras gerais para calcular a área de triângulos, retângulos e trapézios, e as utilizavam para calcular, de forma aproximada, as medidas dos terrenos cultivados, mesmo quando tinham a forma de figuras mais complexas. Em geral a unidade de medida utilizada era um quadrado, mas em algumas situações a estratégia utilizada era decompor a superfície em triângulos ou retângulos e calcular sua área como a soma das áreas das regiões resultantes desta decomposição. (ROCHA, 2007, p.4)

Segundo Rocha (2007), a unidade de medida mais utilizada era um quadrado. Os livros didáticos e os professores da Educação Básica costumam trabalhar o tema área de figuras planas utilizando a ideia do quadrado unitário cuja medida da área vale um e a partir desse quadrado eles deduzem a fórmula para o cálculo de área das demais figuras geométricas como o retângulo, o triângulo, o trapézio, entre outras figuras planas regulares.

Agora indo para Grécia antiga, precisamente no ano de 300 a.C., temos a obra “Os Elementos”, obra produzida por Euclides. Essa obra reuniu de maneira sistematizada as principais descobertas dos precursores de Euclides, como mostra o trecho tirado do artigo de Rocha (2007):

> Na Grécia antiga, por volta do ano 300 a.C., o geômetra grego Euclides produzia sua obra prima intitulada Os Elementos, que reuniu de modo sistematizado os principais conhecimentos de seus precursores. A maior parte do conteúdo da obra se refere à geometria, entretanto também contempla teoria dos números e álgebra elementar ou geométrica. A obra de Euclides tem grande influência na forma como tratamos à geometria nos currículos escolares da Educação Básica. (ROCHA, 2007, p.4)

Ainda segundo Rocha (2007), na obra “Os Elementos”, a ideia de área está associada ao conceito de igualdade de figuras:

> Na obra de Euclides a ideia de área está associada ao conceito de igualdade entre figuras (equivalência). Isto pode ser observado quando enuncia que triângulos com bases iguais, situados entre as mesmas paralelas, são figuras iguais (equivalentes), e que

> paralelogramos com bases iguais situadas entre as mesmas paralelas também são figuras iguais. Ou seja, duas figuras são equivalentes quando têm a mesma grandeza (ou mesma área). (ROCHA, 2007, p.4)

Rocha (2007), também comenta que uma das principais estratégias utilizadas por Euclides nas suas demonstrações era a decomposição de figuras em triângulos e por isso ele deu atenção especial às formas e maneiras de encontrar a sua área. Ele também demonstrou que qualquer figura de lado reto pode ser dividida em triângulos, recurso bastante utilizado na demonstração das áreas de figuras planas.

Já entre 287 a 212 a.C., temos Arquimedes e suas contribuições para determinar a áreas de figuras cilíndricas, parabólicas e elípticas utilizando o método da exaustão (lembrando que o termo "método da exaustão" não era usado pelos gregos antigos, este termo começou a ser utilizado pelos matemáticos modernos). Como descreve Allan de Castro Escarlate (2008):

> O método de exaustão era o método usado na Grécia antiga como solução, principalmente, para se determinar a área de superfícies curvas usando a área de superfícies poligonais, estas mais simples de serem calculadas. Segundo ROQUE, (2008), esse processo também e atribuído a Eudoxo (por volta de 400 a.C.), embora Arquimedes (278-212 a.C.) tenha uma maior notoriedade pelo seu uso para o cálculo de π, entre outros problemas.(ESCALARTE, 2008, p.27)

Segundo Escalarte (2008), um exemplo que mostra uma aplicação do método da exaustão é o cálculo da aproximação do valor do π feita por Arquimedes. Segundo Escalarte (2008):

> Um exemplo que ilustra bem a aplicação do método de exaustão é o cálculo de π, feito por Arquimedes com um bom grau de aproximação. O processo baseia-se na construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo de raio unitário e, por meio de refinamentos, aumentar o numero de lados desses polígonos a fim de aproximar cada vez mais o perímetro desses polígonos do comprimento da circunferência, criando assim duas sequências de perímetros, uma crescente e outra decrescente, que convergem para o valor de π. (ESCALARTE, 2008, p.27)

O uso do método da exaustão foi aplicado por Arquimedes também na quadratura do círculo e da parábola para determinar a medida da área, como descreve Escalarte (2008, pg. 27):

> Este último, atribuído a Arquimedes, trata do problema de comparar a área da superfície compreendida entre uma parábola e um segmento de reta que a intercepta em dois pontos com a área de um triângulo inscrito nessa superfície, tendo o segmento de reta como base. O método de exaustão é utilizado para mostrar que a área do segmento parabólico é equivalente a 4/3 da área do triângulo em questão.

Pode-se dizer que os gregos transformaram os conhecimentos egípcios e babilônicos antigos em um conhecimento sistemático, baseado em demonstrações e argumentações os quais são utilizados até hoje ao se fazer matemática.

Indo para China, século I d.C., encontramos a obra *Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática*, um dos textos chineses mais antigo. O cálculo de área aparece em diversos problemas nessa obra. Como cita Rocha (2007):

> Entre os chineses, o cálculo de área aparece em diversos problemas contidos na obra "*Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*", do Séc. I d.C. O conteúdo dessa obra contempla problemas de mensuração, engenharia, impostos, cálculo, soluções de equações e geometria, e trata também de áreas de figuras planas a partir da manipulação de peças como um quebra-cabeça da mesma natureza do Tangran. (ROCHA, 2007, p.5)

Ao manipular as peças do quebra-cabeça parecido com o Tangran (quebra-cabeça chinês antigo, composto por sete peças, sendo elas um quadrado, cinco triângulos e um paralelogramo), obtemos várias figuras distintas sem alterar a área ao dispor as peças de maneiras diferentes.

No século XVII, no Renascimento, as obras gregas foram estudadas e traduzidas pelos matemáticos da época e o método de Arquimedes (método da exaustão) para determinar a área do círculo e da parábola passou a ser conhecido na Europa. Segundo Escalarte (2008), Cavalieri (1598-1647) um pouco antes da metade do século XVII desenvolveu um novo método para o cálculo de quadraturas. Segundo Escalarte (2008):

> No Renascimento, as obras gregas foram traduzidas e o método de Arquimedes para o cálculo das quadraturas passou a ser conhecido na Europa. Um pouco antes da metade do século XVII, Cavalieri (1598-1647) publicou um método inovador para o cálculo de quadraturas, no qual propõe a divisão da figura em tiras, que ele chama de indivisíveis, de modo que a área da figura seja igual a soma das áreas dessas tiras que eram muito numerosa e por isso

> muito estreita. O argumento segue com o fato de que quando as larguras das tiras diminuem infinitamente, o número de tiras também aumenta infinitamente. (ESCARLATE, 2008, p.28)

Facco (2003) na sua dissertação menciona que no século XVII os matemáticos trabalhavam com problemas sobre determinar a medida da área envolvendo problemas de quadratura, que se baseavam em comparar, segundo suas áreas, duas figuras planas, cuja área de uma é supostamente conhecida. Como mostra o trecho abaixo, extraído da dissertação de Facco (2003):

> Para BALTAR, o conceito de áreas por intermédio dos problemas de quadratura é essência de discussão sobre os métodos em Matemática e sobre os conceitos fundamentais referentes a infinito e continuidade. Para ele, atrás da noção de indivisível, reencontram-se os problemas de dimensão análoga de alguma forma aos problemas que se encontram entre os conceitos de áreas e perímetros. (FACCO, 2003, p.22 e 23)

De uma forma implícita, o problema de quadratura está ligado ao tema deste TCC, pois a ideia principal desta pesquisa é abordar o cálculo das estimativas (inferior e superior), que consiste em encontrar área de regiões planas aproximando-as em áreas de conjuntos de áreas de retângulos.

Finalmente, neste breve resumo histórico, podemos perceber que o tema área sempre despertou um grande interesse na humanidade, primeiramente nos egípcios pela necessidade de medir a terra, pois na época a região do rio Nilo sofria com constantes inundações. Também pelos povos antigos por necessidade de delimitar a terra e nas construções de templos e edifícios. O estudo também demonstrou o interesse dos chineses que utilizavam o método da manipulação de áreas de figuras planas para encontrar outras áreas

3.2. Cálculo de área de regiões planas na Educação Básica

O conceito medida de área aparece em diferentes momentos na Educação Básica, por exemplo, no Ensino Fundamental onde o aluno começa a ter os primeiros contatos com a noção do que é a medida da área. No Ensino Médio quando o assunto é retomado, e o professor geralmente desenvolve o conteúdo utilizando os livros didáticos, que abordam o conceito medida de área sendo um número associado a uma superfície e logo passa a trabalhar situações-problema envolvendo aplicações de fórmulas para calcular a medida da área de regiões planas com contorno regular.

Na Educação Básica, a área de conhecimento que aborda o conceito de medidas de área é a geometria. No Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas tecnologias (2010), o conteúdo área de regiões planas é apresentado como parte dos blocos temáticos: Geometria e Relações. Segundo o Currículo, o cálculo de área é o caso mais visível da relação métrica, pois a contagem de quadrados unitários culmina na formalização de expressões que traduz medidas e as relações entre medidas. O Currículo também deixa claro que o conteúdo cálculo da medida da área de regiões planas deve ser apresentado ao aluno no 6º ano, e ele deve desenvolver a habilidade de calcular a medida da área utilizando os recursos de composição e decomposição de figuras.

A ideia de medida de área é apresentada ao aluno nos primeiros anos da Educação Básica, mas é no Ensino Fundamental II que o aluno começa a desenvolver a ideia do significado do que é determinar a medida da área de certa região. No Ensino Fundamental II, geralmente os professores e os livros didáticos costumam abordar o assunto medida de área quando começam a trabalhar com unidades de medidas de comprimento. Alguns livros didáticos, geralmente definem a medida de área de uma figura plana como sendo o número que expressa à medida da superfície dessa figura, numa certa unidade, ou seja, a medida de uma superfície é denominada área.

Os livros didáticos costumam abordar o assunto definindo primeiro o que seria a medida de uma superfície. Em *Matemática e Realidade 6º ano* (Iezzi, Dolce, Machado, 2009, pg. 259) define a medida de uma superfície como: “Medir uma superfície significa compará-la com outra, tomada como unidade, e estabelecer quantas vezes a unidade cabe na superfície medida.” Bianchini (2006), resalta que para medir uma superfície, devemos compará-la com outras superfícies, tomada como medida. Já Bonjorno e Olivares (2006, p.214), definem a medida da área como: “Área é a medida da superfície de uma figura geométrica plana limitada e é expressa por um número seguido de uma unidade”.

Alguns livros didáticos introduzem o conceito de medida de área estabelecendo como unidade de medida de área uma região quadrada de medida de lado um e medida de área um, ou seja, podemos chamar de região quadrada unitária. Como define Dante (2007, p.183): “Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada de região quadrada unitária”.

Logo, para encontrar a medida da área de outras regiões planas é levado em conta o número de quadrados de lado um que preenchem a região. Depois que os professores apresentam a ideia de medida de área aos alunos, eles então começam a deduzir algumas fórmulas para determinar a medida da área de regiões planas regulares como retângulo, triângulo, paralelogramo, losango, trapézio entre outras regiões planas regulares. Geralmente o professor costuma trabalhar com exercícios de livros didáticos que abordam o cálculo de medida de área de regiões planas de regulares, ou seja, os exercícios costumam trabalhar com o cálculo de medida de área de regiões cujas fórmulas já são conhecidas.

Para encontrar a medida da área de regiões planas de contorno irregular, ou seja, regiões que não tem uma fórmula pré-estabelecida para encontrar a medida de sua área, os professores e os livros didáticos costumam trabalhar com figuras de contorno irregulares desenhadas numa malha quadriculada. Para determinar a área dessa figura desenhada na malha quadriculada, basta contar o número de quadrados que cabem dentro da região de contorno irregular.

No Ensino Médio o assunto cálculo de medida de área é retomado no 2º ano e geralmente os professores costumam trabalham com o conteúdo utilizando como apoio os livros didáticos, que abordam o assunto medida de área sendo um número associado a uma superfície. Em *Matemática: ciência e aplicações, 2* (Iezzi, Degenszajn, Almeida, 2010), a medida da área de uma superfície plana é apresentada como sendo a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão pré-estabelecida pelo Sistema Internacional de Medidas (SI).

Em seguida são apresentadas as fórmulas já conhecidas para encontrar a medida da área de figuras planas como o retângulo, quadrado, losango entre outras. Em geral os trabalhos desenvolvidos na sequência costumam tratar de atividades que envolva a composição e decomposição de figuras que são propostas no estudo da geometria e que ajudam a compreender a utilização das fórmulas.

De uma forma geral, os professores da Educação Básica e a maioria dos livros didáticos sempre trabalham com áreas de figuras de contorno regulares, porque as fórmulas para determinar a medida da área dessas figuras são conhecidas. Porém, nem sempre o aluno no seu cotidiano vai se deparar com situações que envolvam o cálculo de medida de áreas de regiões planas de contorno regular, normalmente ele se depara com áreas de regiões planas de contorno irregulares, como de uma região com contorno curvo. Para estas regiões planas com contorno irregular, não existe uma fórmula geral que possa ser aplicada para encontrar a medida da sua área.

3.3. Cálculo das estimativas inferior e superior

Os problemas que abordam o cálculo de áreas não apresentam grandes dificuldades se a figura plana for um triângulo, um retângulo ou um paralelogramo. No entanto, quando a figura em questão trata-se de uma região com o contorno irregular como, uma região limitada por uma curva à tarefa não é tão simples, pois não existe uma fórmula pré-definida.

Como já foi apresentado no decorrer deste trabalho, uma das preocupações dos gregos antigos era descobrir procedimentos para determinar a medida da área de regiões com diferentes contornos. Utilizando como ferramenta as transformações geométricas, que relacionava figuras com áreas equivalentes, eles se dedicaram ao cálculo da medida da área limitado por segmentos de retas e arco de círculo, pela redução a figuras conhecidas.

Segundo Flemming (2007, p.256) “A medida da área de qualquer região plana pode ser calculada aproximando as figuras por polígonos, cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos da geometria elementar". No próximo capítulo deste trabalho, vamos abordar situações-problema que possam exemplificar como a medida da área de uma região limitada por uma curva pode ser encontrada se aproximarmos a região em questão por soma da medida da área de um conjunto de polígonos.

A medida da área de uma região limitada por uma curva, assim com outras áreas de figuras planas pode ser encontrada se aproximarmos essa região pela soma da medida da área de um conjunto de retângulos. Quanto maior a quantidade de retângulos, maior será a precisão desta aproximação.

A dissertação de Mestrado de Jaqueline Molon (2013) apresenta uma proposta para se trabalhar com cálculo da medida da área no Ensino Médio utilizando o software Geogebra. Molon (2013), em sua dissertação comenta sobre limites, derivadas e integrais e apresenta situações-problema que exemplificam esses conteúdos. Antes de desenvolver o conteúdo sobre integral, ela apresenta a ideia intuitiva sobre determinar a medida da área de figuras planas de regiões limitadas por uma curva, aproximando a medida da área da região na medida da área de um conjunto de retângulos, como mostra o trecho abaixo extraído da dissertação de Molon (2013):

> Finalmente, na última etapa, buscou-se estender o conceito de área de figuras planas para área de regiões delimitadas por gráficos de funções e aproximar o valor dessas áreas. Esse conceito foi abordado utilizando comandos específicos do Geogebra que possibilitaram o entendimento do processo de aproximação da área por retângulos. Esse recurso possibilitava inserir um número finito de retângulos inscritos de bases iguais sob a curva e somar a área desses retângulos. Ao repetir esse processo, na medida em que o número de retângulos vai aumentando cada vez mais, a soma das áreas dos mesmos vai se aproximando cada vez mais do valor da área exata que se pretende calcular. (MOLON, 2013, p.17)

Molon (2013) comenta que o aluno no Ensino Médio com seus conhecimentos geométricos é capaz de calcular a medida da área de figuras planas regulares, então ela propõe apresentar a esse aluno o cálculo da área de regiões limitadas por uma curva:

> O terceiro problema gerador das ideias fundamentais do cálculo é o da área. O aluno na primeira série do Ensino Médio, com seus

> conhecimentos geométricos, é capaz de calcular áreas de figuras planas regulares como retângulos, quadrados, triângulos, trapézios e círculos. Algo curioso, talvez desafiador, nessa etapa seria propor a esse aluno que efetuasse o cálculo de áreas de regiões irregulares, como por exemplo, regiões curvas limitadas pelo gráfico de uma função em um determinado intervalo. (MOLON, 2013, p.32 e 33)

No capítulo 5 da dissertação de Molon (2013), é apresentada uma situação-problema, precisamente a atividade 18, que trata de determinar a medida da área da região limitada por uma parábola $f(x) = x^2$ no intervalo [0,4]:

> Na Atividade 18 o objetivo era aproximar a área sob a curva da função $f(x) = x^2$, limitada pelo eixo OX no intervalo [0,4]. Primeiramente, no item (A) utilizando o comando "Soma Superior" do software Geogebra (versão 6.3), e a soma das áreas de 4 retângulos, de base 1 e com altura determinada pela ordenada do ponto de intersecção do retângulo criado com o gráfico da função. Neste caso, a área foi aproximada, por excesso. No item (B) dessa atividade, os alunos foram orientados a utilizar o comando "Soma Inferior" para aproximar por falta a área descrita, também utilizando 4 retângulos, de modo análogo ao item anterior.(MOLON, 2013, p.89)

O capítulo 5 da dissertação de mestrado, Molon (2013) apresenta uma abordagem diferente para o cálculo da medida da área de regiões limitadas por uma curva utilizando o cálculo das estimativas inferior e superior que também é a proposta deste TCC.

Na sua dissertação de mestrado, Molon (2013) propõe trabalhar com o Cálculo Diferencial e Integral aplicado em situações-problema voltadas para o Ensino Médio utilizando o software Geogebra. Diferente do trabalho desenvolvido por Molon (2013), a nossa proposta é trabalhar com o cálculo das estimativas inferior e superior, sem utilizar as definições do Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, no próximo capítulo deste TCC vamos trabalhar com situações-problemas consideradas em livros que aborde o assunto, determinar a medida da área. As situações-problema serão resolvidas utilizando o cálculo das estimativas inferior e superior e com o auxílio do software Winplot.

4 APLICANDO O CÁLCULO DAS ESTIMATIVAS NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Neste capítulo trabalharemos com situações-problema que envolva o cálculo de medida de áreas regiões planas propostas em livros didáticos. A partir dessas situações, apresentaremos uma abordagem diferenciada para resolução, ou seja, o cálculo das estimativas (inferior e superior) que pode ser utilizado pelo professor de matemática na Educação Básica, precisamente no Ensino Médio, para se ampliar o conceito área. Os gráficos apresentados neste trabalho foram desenvolvidos com auxílio do programa Winplot, desenvolvido por Rick Parris e disponibilizado por *Philips Exter Academy*.

Todas as situações-problema propostas neste trabalho serão analisadas de acordo com as classificações da Tipologia das Situações Didáticas. E é importante resaltar que para resolver as situações-problemas, será necessário utilizar como recurso tecnológico o software Winplot, pois ele nos auxiliará na construção dos gráficos e nos cálculos das estimativas inferior e superior.

<u>Problema 1:</u> (Adaptado de DOCA, 2010, p.58) A velocidade escalar de um automóvel variou com o tempo conforme o gráfico abaixo. Qual a distância percorrida pelo automóvel no intervalo de tempo de 0 a 4 segundos?

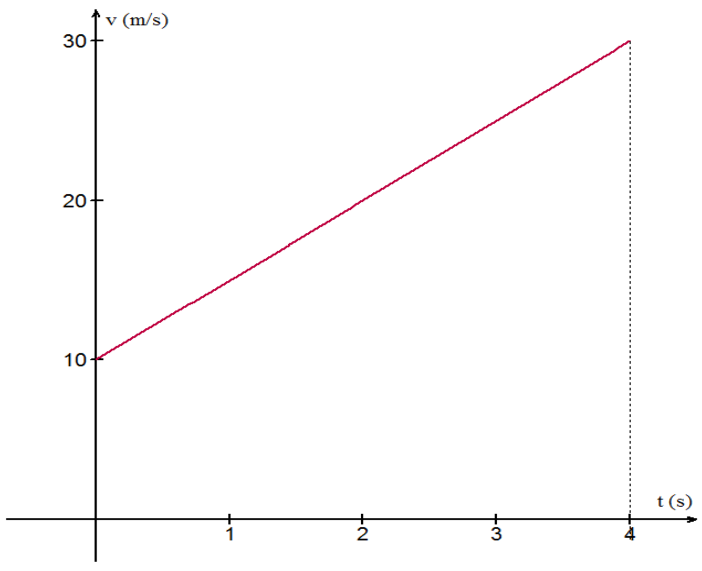


Figura 4. 1 - Variação da velocidade

Analisando o gráfico, pode-se perceber que a distância percorrida pelo automóvel será a área representada no gráfico abaixo da reta *v(t)*. Agora vamos dividir em etapas a resolução desta situação. Para resolver este problema vamos dividir o processo da resolução em etapas. Em cada etapa será analisado a resolução do problema levando em conta a Tipologia das Situações Didáticas (ação, formulação, validação e institucionalização).

Etapa 1: Ação

Para encontrar a distância percorrida pelo automóvel será necessário calcular a medida da área abaixo da reta *v(t)* limitada pelo eixo das abscissas no intervalo de 0 a 4 segundos. Considerando o gráfico representado na Fig. 4.1, podemos notar que a região em questão trata-se de um trapézio cuja fórmula para encontrar a medida da área é igual: $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, onde B é a medida da base maior, b é a medida da base menor e h é a mediada da altura. Utilizando a equação temos: $A = \frac{(10+30)\cdot 4}{2} = 80$ m.

Então, ao utilizar a equação, chegamos ao resultado de 80 m para distância percorrida pelo automóvel no intervalo de 0 a 4 segundos. Utilizando o cálculo das estimativas para resolver esse problema, será que encontraremos o mesmo valor para distância percorrida pelo automóvel?

Nessa etapa encontramos a área do trapézio, ou seja, a distância percorrida pelo automóvel no intervalo de 0 a 4 segundos, utilizando ferramentas conhecidas que é a fórmula do trapézio. De acordo com Tipologia das Situações Didáticas elaboramos uma possível resolução da situação-problema e questionamos sobre a possibilidade de outra resolução, o que caracteriza a ação.

Etapa 2: Formulação

Nessa etapa vamos resolver a situação-problema aplicando o cálculo das estimativas (inferior e superior). Primeiro vamos ter que encontrar a equação da reta, pois não temos uma equação já fornecida pelo problema. Utilizando a fórmula da equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, encontramos o coeficiente angular m igual a 5.

Logo, a equação que representa a reta é $y = 5x + 10$. Como o gráfico anterior representa a velocidade escalar pelo tempo, então trocando y por $v(t)$ e x por t, obtemos a equação: $v(t) = 5t + 10$.

Para encontrar a distância percorrida pelo automóvel, vamos calcular a área no intervalo de 0 a 4 segundos, dividindo o intervalo em 8 subintervalos, ou seja, a variação do tempo será de 0,5 segundos que é base dos retângulos. A altura será dada por $v(t) = 5t + 10$, como mostra a Tabela.

Tabela 4. 1 - Valores de *v* em função de *t* considerando 8 subintervalos

tempo(s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$v(t) = 5t+10$	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30

Os dois gráficos abaixo representam a região cuja medida da área deseja-se encontrar, dividida em 8 retângulos. A Fig. 4.2 representa a região que foi dividida em 8 retângulos, considerando as extremidades à esquerda dos subintervalos e as extremidades à direita dos subintervalos.

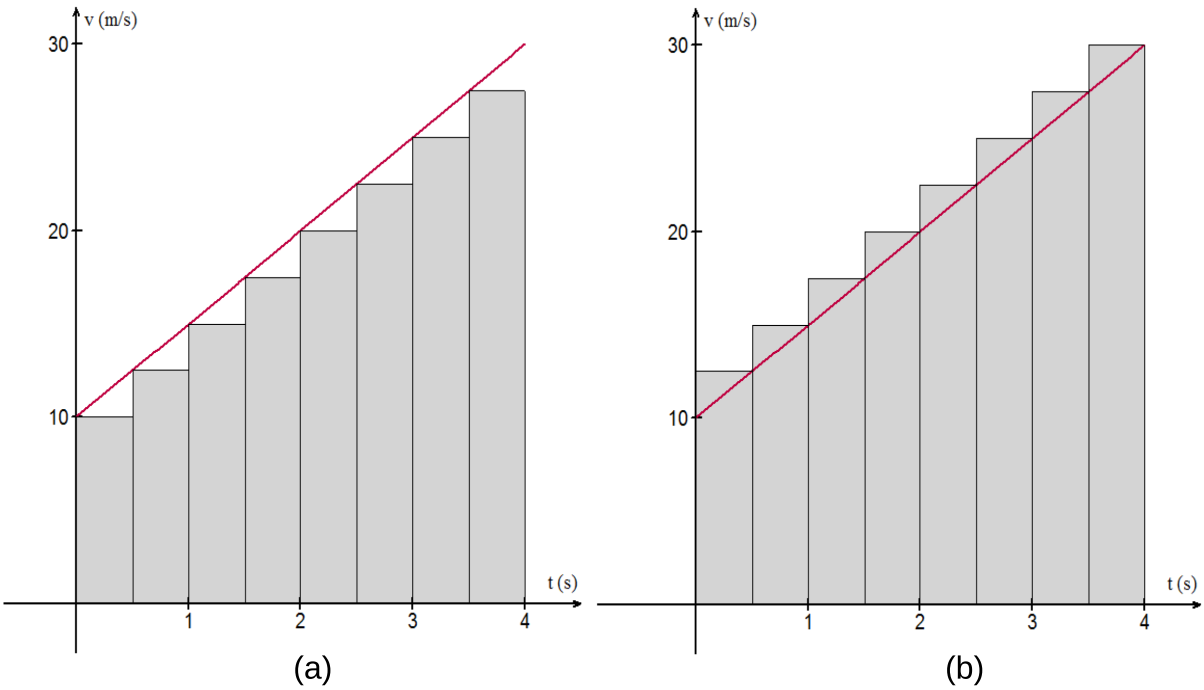


Figura 4. 2 – (a) Extremidades à esquerda (b) extremidades à direita considerando 8 subintervalos

Nessa etapa apresentamos uma função que melhor representa à reta *v(t)* e os dados necessários para calcular as estimativas. De acordo com a Tipologia das Situações Didáticas, conseguimos uma formulação para resolução do problema ao apresentar o cálculo das estimativas como outra possibilidade para determinar a medida da área da região em questão.

Etapa 3: Validação

Agora vamos estimar a medida da área da região abaixo da reta *v(t*) e limitada pelo eixo no intervalo de [0,4] segundos, ou seja, à distância (D) percorrida pelo automóvel, e será necessário utilizar informações da Tabela 4.1 da etapa 2. Primeiro vamos calcular a estimativa considerando as extremidades à esquerda dos subintervalos:

$$D = 0{,}5 \cdot (10 + 12{,}5 + 15 + 17{,}5 + 20 + 22{,}5 + 25 + 27{,}5) = 75 \text{ m}$$

Depois vamos calcular a estimativa considerando as extremidades à direita dos subintervalos:

$$D = 0{,}5 \cdot (12{,}5 + 15 + 17{,}5 + 20 + 22{,}5 + 25 + 27{,}5 + 30) = 85 \text{ m}$$

No primeiro caso o valor da medida da área encontrada, ou seja, à distância (D) percorrida pelo automóvel foi D = 75 m, menor do que a distância real, ou seja, uma soma inferior, pois todos esses retângulos estão abaixo da reta. Já no segundo caso dividindo a área em 8 subintervalos encontramos uma aproximação para medida da área, ou seja, uma aproximação para distância (D) percorrida pelo automóvel de D = 85 m, maior do que a distância real, ou seja, uma soma superior, pois o cálculo foi feito considerando a altura de cada retângulo como o ponto máximo de *v(t)*. Logo, podemos afirmar que a medida da área do trapézio no intervalo de [0,4] está entre as somas inferior e superior. Então a medida da área do trapézio, ou seja, a distância percorrida pelo automóvel está entre: $75 \text{ m} < D < 85 \text{ m}$.

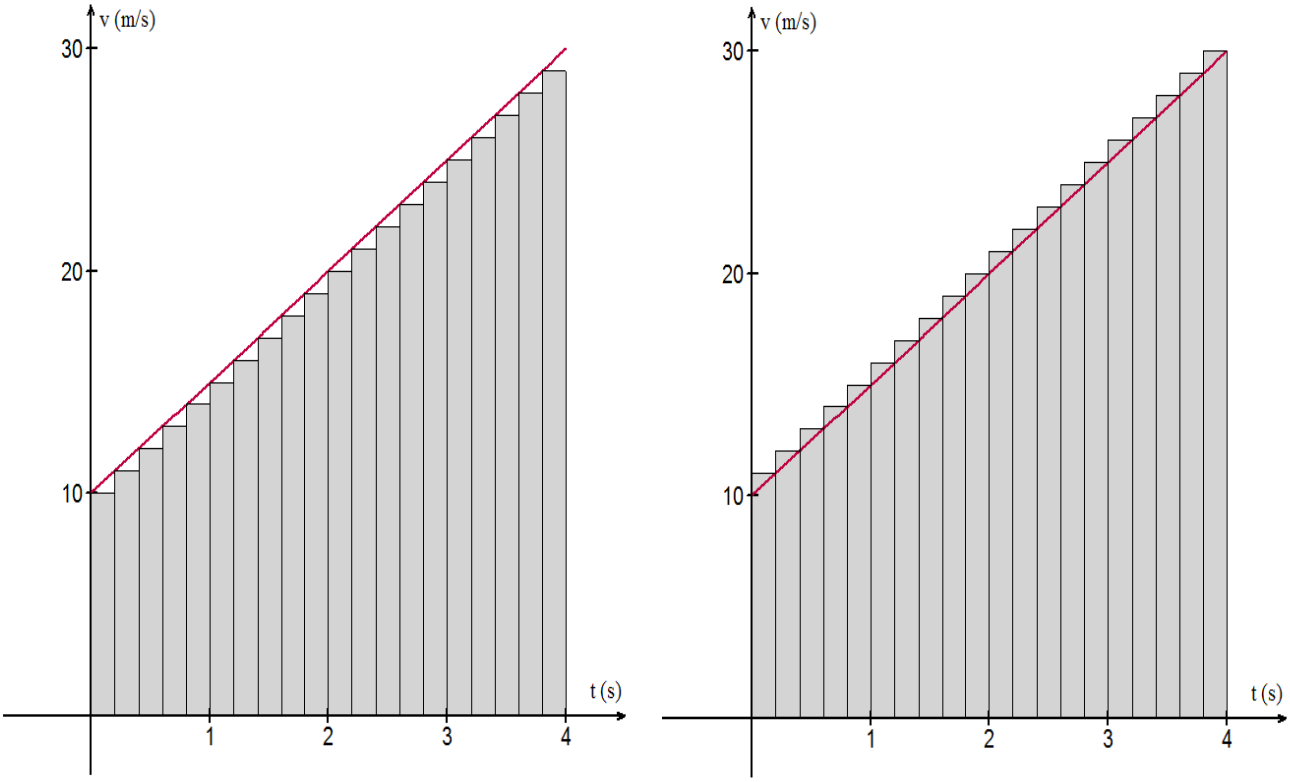
Agora vamos dividir o intervalo de [0,4] do trapézio em 20 subintervalos, ou seja, em 20 retângulos. A base de cada retângulo agora vale 0,2, e a altura será dada pela função *v(t)*.

Tabela 4. 2 - Valores de *v* em função de *t* considerando 20 subintervalos

tempo (*s*)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
v(t) = 5*t*+10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Tabela 4. 2 – Continuação

tempo (*s*)	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
v(t)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30



(b)

Figura 4. 3 – (a) Extremidades à esquerda (b) extremidades à direita considerando 20 subintervalos

Repetido os cálculos anteriores encontramos uma estimativa da distância percorrida pelo automóvel inferior (considerando as extremidades à esquerda dos subintervalos) de 78 m, e superior (considerando as extremidades à direita dos subintervalos) de 82 m. Logo, a distância percorrida pelo automóvel está entre 78 m < D < 82 m.

Comparando com o primeiro resultado, ou seja, quando dividimos o intervalo de [0,4] segundos em 8 subintervalos, encontramos a estimativa inferior de D = 75 m, menor do que 78 m. Também encontramos uma estimativa superior de 85 m maior do que 82 m.

Ao representar o processo de desenvolvimento da solução do problema e ao se discutir os resultados encontrados para distância percorrida pelo automóvel, conseguimos, de acordo com a Tipologia das Situações Didáticas, desenvolver uma validação do conhecimento.

<u>Etapa 4: Institucionalização</u>

No processo de desenvolvimento da situação-problema proposta, conseguimos encontrar duas estimativas para o valor da distância percorrida pelo automóvel. A primeira estimativa para o valor da distância percorrida pelo automóvel dividindo o intervalo de [0,4] em 8 subintervalos encontramos uma estimativa para distância entre 75 m < D < 85 m. A segunda estimativa que encontramos foi 78 m < D < 82 m, considerando 20 subintervalos. A distância percorrida pelo automóvel igual a 80 metros, como foi encontrado na primeira etapa, calculando a medida da área da região abaixo da reta utilizando a fórmula do trapézio. Comparando os resultados encontrados das estimativas com o resultado encontrado utilizando a fórmula do trapézio, chegaremos à conclusão que à medida que o número de subintervalos aumenta, mais próximo chegaremos a 80 metros, isso pode ser notado na Tabela 4. 3.

Tabela 4. 3 - Valores estimados da distância percorrida pelo automóvel

Números de subintervalos	Valor estimado da distância
8	75 m < D < 85 m
20	78 m < D < 82 m
40	79 m < D < 81 m
60	79,33 m < D < 80,67 m
80	79,50 m < D < 80,50 m
100	79,40 m < D < 80,60 m

Os valores estimados da distância percorrida pelo automóvel apresentado na Tabela 4.3 foram calculados com o auxílio do software Winplot, pois aumentamos consideravelmente o número de subintervalos e sem ajuda do software seria inviável encontrar as estimativas inferior e superior.

Ao aumentar o número de subintervalos, encontramos uma estimativa para distância percorrida pelo automóvel mais próximo do valor real da distância que é igual a 80 metros. Podemos notar que, quando aumentamos o número de subintervalos para 100, chegamos numa estimativa 79,40 m < D < 80,60 m, um valor estimado bem próximo de 80 metros. Logo, podemos concluir que realmente o cálculo das estimativas inferior e superior pode ser utilizado para estimar a medida da área de qualquer região plana e que à medida que o número de subintervalos aumenta, mais próximo chegamos do valor real da área que se deseja encontrar. Com essa etapa, institucionalizamos a resolução do problema ao comparar o resultado estimado da distância percorrida pelo automóvel com o valor da distância real e que, realmente, quando o número de subintervalos aumenta, mais preciso será o valor estimado.

Problema 2: (Adaptado de HUGHES-HALLETT, 2012, p. 119) Durante um período de 20 horas, uma população de bactérias aumenta a uma taxa dada por $f(t) = 3 + 0{,}1t^2$ milhões de bactérias por hora, onde t está em horas desde o início do período. Faça uma estimativa inferior e superior para variação total no número de bactérias usando $\Delta t = 4$ horas e $\Delta t = 2$ horas.

Etapa 1: Ação

Para resolver a situação-problema vamos representá-la graficamente, pois o gráfico nos ajudará a interpretar o problema e nos auxiliará na resolução.

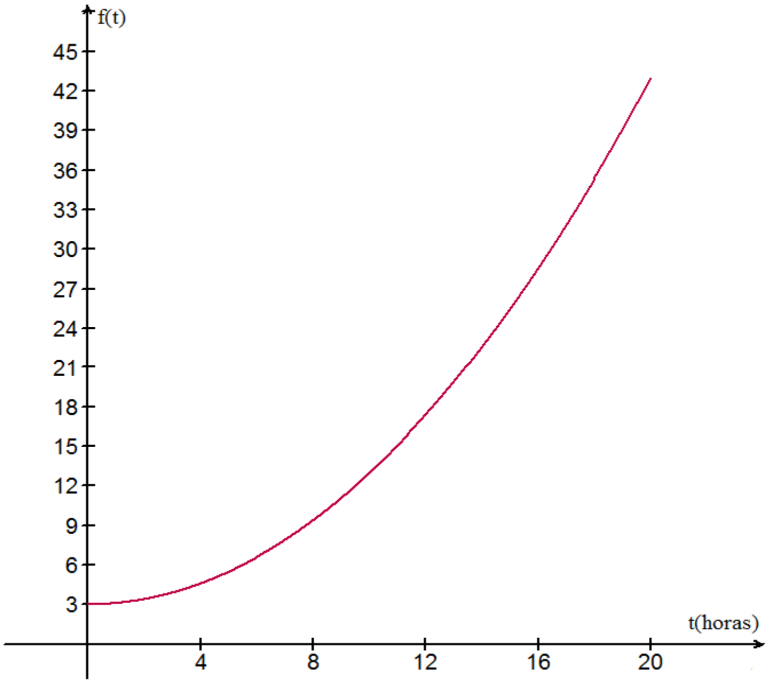


Figura 4. 4 - Variação total no número de bactérias

Se notarmos bem, para determinar as estimativas inferior e superior para a variação total no número de bactérias no intervalo de 0 a 20 horas, será necessário determinar o valor da medida da área limitada pela curva *f(t)* e pelo eixo *t*. Como não conhecemos uma fórmula pré-definida para determinar a medida da área da região limitada por uma curva, será necessário encontrar outra maneira para determinar a medida da área em questão. Conhecemos as fórmulas da área de algumas regiões regulares então vamos aproximar a medida da área da região abaixo da curva pela medida da área de uma região cuja fórmula seja conhecida. Logo, para determinar o valor da medida da área da região limitada pela curva *f(t)* e pelo eixo *t*, vamos aproximar a medida da área dessa região pela medida da área de retângulos, precisamente pela soma de um conjunto de retângulos.

Para calcular as estimativas inferior e superior para a variação total no número de bactérias no intervalo de 0 a 20 horas, o problema pede para que utilizemos Δt = 4 horas e depois Δt = 2 horas, ou seja, o intervalo de tempo será medido primeiro a cada 4 horas e depois a cada 2 horas. Logo, o número de subintervalos (n) quando consideramos Δt = 4 horas, será determinado por $n = \frac{20}{4} = 5$, ou seja, o número de subintervalos será 5. Quando consideramos Δt = 2 horas o número de subintervalos aumenta para 10. Agora para encontrar as estimativas inferior e superior para variação total no número de bactérias no intervalo tempo [0,20] usando Δt = 4 horas e Δt = 2 horas, basta dividir o intervalo no primeiro caso em 5 subintervalos e no segundo caso em 10 subintervalos.

Nessa etapa, representamos a situação-problema graficamente e discutimos sobre a resolução. Podemos classificar como ação a conclusão que chegamos sobre a resolução da situação proposta, ou seja, para estimar a variação total no número de bactérias no intervalo de 0 a 20 anos será necessário determinar o valor da medida da área limitada pela curva $f(t)$ e pelo eixo t. No entanto, o problema pede que encontremos as estimativas inferior e superior considerando Δt = 4 horas e depois Δt = 2 horas. Quando consideramos Δt = 4 horas o número de subintervalos que dividiremos o intervalo de [0,20] será 5 e quando considerados Δt = 2 horas o número de subintervalos aumenta para 10. Logo, para resolver a situação-problema vamos aproximar a medida da área da região em questão pelo valor da medida da área de um conjunto de retângulos, tomando Δt = 4 horas o número de retângulos será 5 e tomando Δt = 2 horas o número de retângulos aumenta para 10.

Etapa 2: Formulação

Concluímos na primeira etapa que para encontrar as estimativas inferior e superior para variação total do número de bactérias, seria necessário determinar uma estimativa para o valor da medida da área da região limitada pela curva $f(t)$ e pelo eixo t. Como o problema pede para que a estimativa seja determinada considerando Δt = 4 horas e Δt = 2 horas, o número de subintervalos no primeiro caso será 5 e no segundo caso será o dobro, ou seja, 10 subintervalos.

Agora vamos encontrar uma estimativa para variação total do número de bactérias considerando Δt = 4 horas. Quando usamos Δt = 4 horas medimos a variação total do número de bactérias a cada 4 horas, logo número de subintervalos (n) será $n = \frac{20}{4} = 5$, ou seja, dividiremos o intervalo [0,20] em 5 subintervalos. Portanto, a base dos retângulos será 4 e altura será dada por $f(t) = 3 + 0{,}1t^2$ como mostra a Tabela 4.4.

Tabela 4. 4 - Variação total do número de bactérias com Δt = 4

***t* (horas)**	0	4	8	12	16	20
***f(t)* (milhões de bactérias/ hora)**	3,0	4,6	9,4	17,4	28,6	43,0

Agora conhecendo a altura dos retângulos vamos encontrar uma estimativa inferior para o valor da medida da área da região limitada pela curva $f(t)$ e pelo eixo t, ou seja, vamos estimar a variação total do número de bactérias. O gráfico representado na figura 4.5, mostra a região delimitada pela curva $f(t)$ dividida em 5 subintervalos.

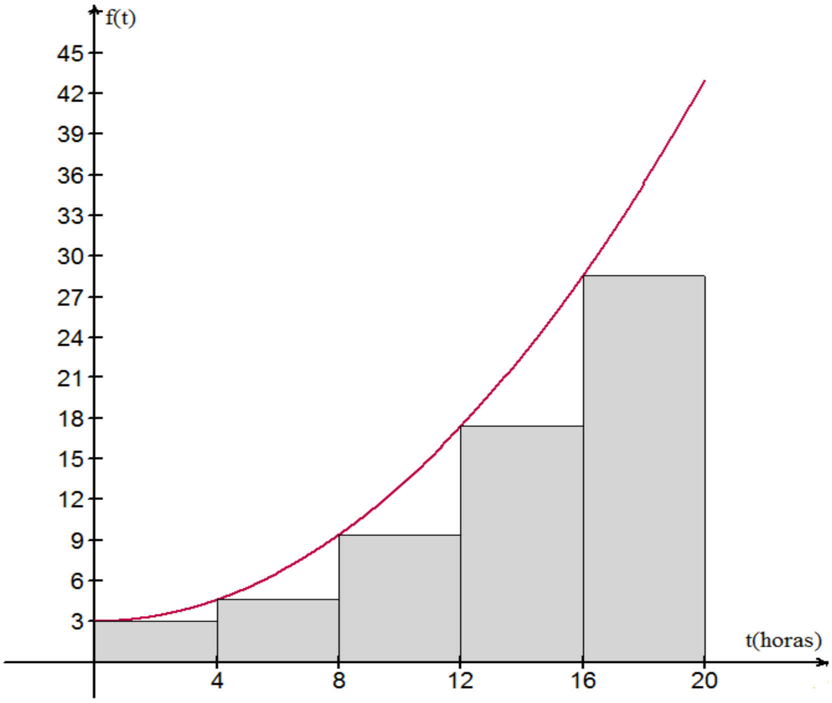


Figura 4. 5 – Extremidades à esquerda dos subintervalos considerando Δt = 4 horas

Ao dividir o intervalo [0,20] em 5 subintervalos ficamos com 5 retângulos de base igual a 4 e altura dada por *f(t)*. Analisando o gráfico podemos notar que os 5 retângulos estão situados abaixo da curva *f(t)*, não completando totalmente a área desejada. Logo, considerando todos os subintervalos, ou seja, os 5 retângulos tem-se uma estimativa inferior de:

$$V = 4 \cdot (3 + 4{,}6 + 9{,}4 + 17{,}4 + 28{,}6) = 252 \text{ milhões de bactérias}$$

O valor da soma da medida da área dos 5 retângulos é uma aproximação do valor da medida da área da região abaixo da curva *f(t)*, ou seja, não é o valor exato da medida da área sob a curva. Como os 5 retângulos estão abaixo da curva *f(t)*, podemos notar que a medida da área da região em questão teve perdas, pois os retângulos não ocuparam todos os espaços.

Agora vamos considerar os retângulos que estão acima da curva *f(t)*, ou seja, a altura de cada retângulo como o ponto mais alto de *f(t)*, sendo *t* um ponto no intervalo da base dos retângulos, como mostra o gráfico da figura 4.6.

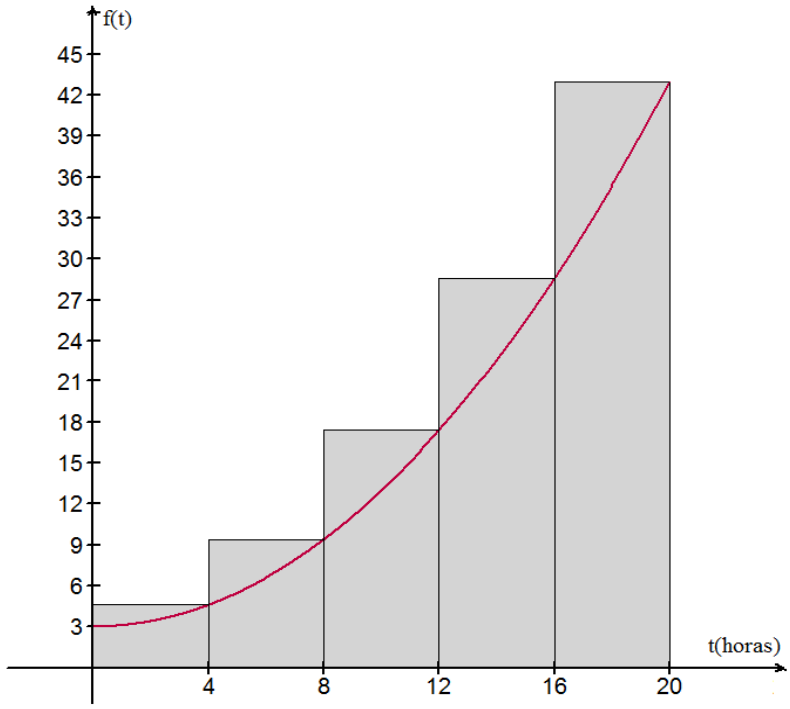


Figura 4. 6 - Extremidades à direita dos subintervalos considerando Δt = 4 horas

Analisando essa situação podemos notar que os 5 retângulos são mais altos e estão acima da curva *f(t)*. O valor será maior do que o valor encontrado durante as primeiras 4 horas usando a estimativa inferior. Utilizando os 5 subintervalos temos uma estimativa superior de:

$$V = 4 \cdot (4{,}6 + 9{,}4 + 17{,}4 + 28{,}6 + 43) = 412 \text{ milhões de bactérias}$$

Agora a variação total do número de bactérias (V) estimado é maior, pois o valor foi obtido considerando a altura de cada retângulo como o valor máximo (o ponto mais alto) de *f(t)*. Logo, o valor encontrado da soma da medida da área dos 5 retângulos é maior do que o valor real da área abaixo da curva *f(t)*.

O primeiro valor estimado para variação total do número de bactérias é uma estimativa inferior, pois os 5 retângulos estão situados abaixo da curva *f(t)*. Já o segundo valor encontrado é uma estimativa superior, pois foi obtida considerando a altura de cada retângulo como o valor máximo (o ponto mais alto) de *f(t)*. Assim, uma reposta possível para o problema proposto é dizer que a variação total do número de bactérias está em algum ponto entre as estimativas inferior e superior. Logo, a variação total do número de bactérias será: 252 milhões de bactérias < V< 412 milhões de bactérias.

O problema pede para determinarmos as estimativas inferior e superior para a variação total do número de bactérias usando o Δt = 4 horas e Δt = 2 horas. Se utilizarmos Δt = 2 horas, qual será o valor das estimativas inferior e superior?

Nesta etapa estimamos a variação total do número de bactérias utilizando o Δt = 4 horas e encontramos as estimativas inferior e superior. Analisando o problema percebemos que para determinar as estimativas seria necessário dividir o intervalo em *n* subintervalos. Para determinar o número de subintervalos (*n*), dividimos o período de 20 horas pelas 4 horas e encontramos o número de subintervalos (*n*) igual a 5. Assim, dividindo o intervalo de [0,20] em 5 subintervalos determinamos a base dos retângulos e a altura. Determinado os valores da medida altura e da medida da base dos 5 retângulos encontramos primeiro uma estimativa inferior para a variação do número de bactéria de 252 milhões e em seguida encontramos a estimativa superior de 412 milhões. Logo, de acordo com a Tipologia das Situações Didáticas conseguimos uma formulação da solução da situação-problema.

<u>Etapa 3: Validação</u>

Na segunda etapa encontramos as estimativas inferior e superior para variação no número de bactéria usando o Δt = 4 horas. Mas, o problema pede para determinarmos as estimativas utilizando Δt = 4 horas e Δt = 2 horas. Então, agora nessa etapa vamos encontrar as estimativas inferior e superior para variação no número de bactérias considerando Δt = 2 horas.

Primeiro vamos determinar o número de subintervalos (*n*). Utilizando Δt = 2 horas mediremos *a* variação total do numero de bactéria a cada 2 horas, logo o número de subintervalos será $n = \frac{20}{2} = 10$ Então, aproximaremos o valor da medida da área da região limitada pela curva *f(t)* pela soma da medida da área de 10 retângulos de base 2. Portanto, o valor da altura dos 10 retângulos será dado por $f(t) = 3 + 0{,}1t^2$, como mostra a Tabela 4.5.

Tabela 4. 5 - Variação total do número de bactérias com Δt = 2 horas

t (horas)	***f(t)***
0	3
2	3,4
4	4,6
6	6,6
8	9,4
10	13
12	17,4
14	22,6
16	28,6
18	35,4
20	43

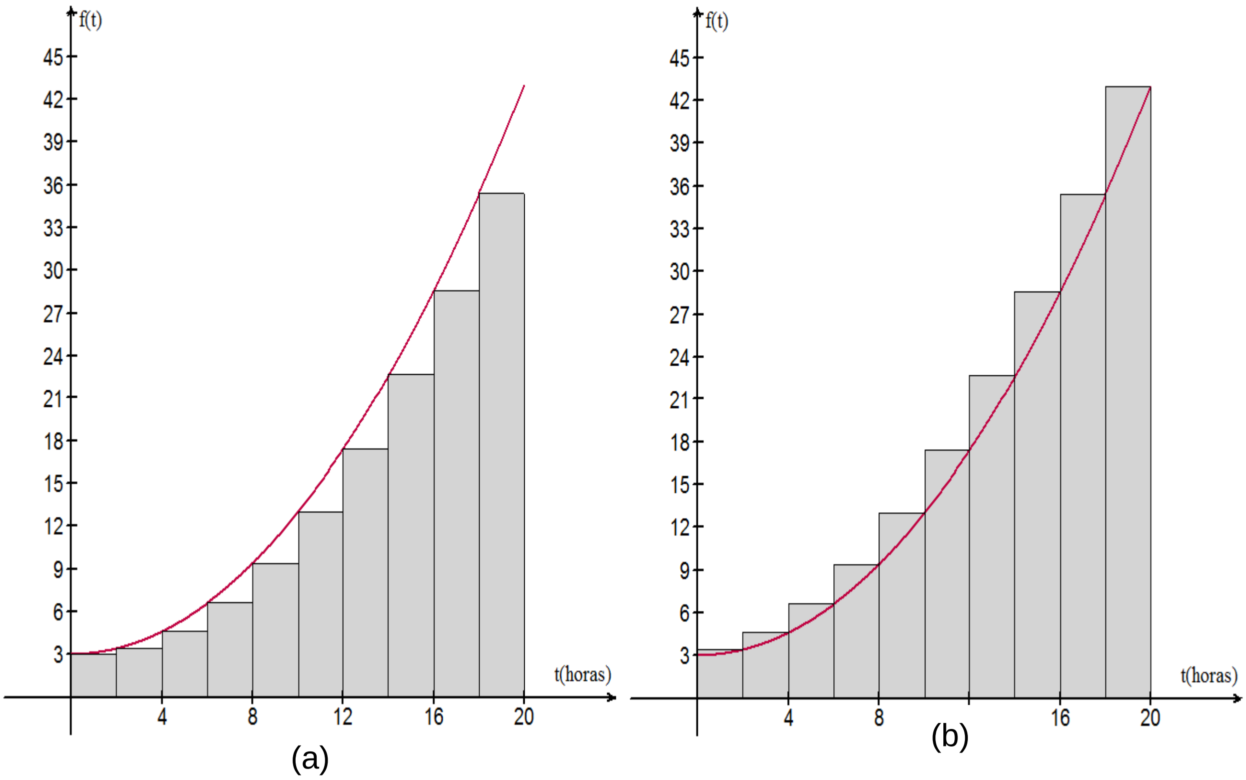


Figura 4. 7 – (a) Extremidades à esquerda e (b) extremidades à direita dos subintervalos considerando Δt = 2 horas

Dividindo o intervalo [0,20] horas em 10 subintervalos e repetindo o mesmo processo apresentado na etapa 2 determinaremos as estimativas inferior e superior. Os gráficos da Fig.4.7 representam o intervalo de [0,20] divididos em 10 subintervalos, primeiro considerando as extremidades à esquerda e depois a extremidade à direita dos subintervalos.

Repetindo o mesmo processo da etapa 2, temos uma estimativa inferior para variação do número de bactérias (V) de:

V = 2 · (3 + 3,4 + 4,6 + 6,6 + 9,4 + 13 + 17, 4 + 22,6 + 28,6 +35,4) = 288 milhões de bactérias.

Agora, calculando a estimativa superior para variação do número de bactéria (V), encontramos uma estimativa de:

$V = 2 \cdot (3{,}4 + 4{,}6 + 6{,}6 + 9{,}4 + 13 + 17{,}\ 4 + 22{,}6 + 28{,}6 + 35{,}4 + 43) = 368$ milhões de bactérias.

Logo, o valor da variação no número de bactérias (V) está em algum ponto entre as estimativas inferior e superior, ou seja, a variação do número de bactérias (V) será: 288 milhões de bactérias < V < 368 milhões de bactérias.

Comparando os valores da estimativa inferior para $\Delta t = 4$ e $\Delta t = 2$ anos, percebemos que refinando o intervalo, o valor ficou mais próximo do desejado, ou seja, para $\Delta t = 2$ ficou mais próximo do real. Também comparando os valores das estimativas superiores para $\Delta t = 4$ e $\Delta t = 2$ anos, percebemos que o refinamento do intervalo deixou o resultado mais próximo do valor real procurado.

Nessa etapa, utilizamos $\Delta t = 2$ anos determinamos as estimativas inferior e superior para variação do número de bactérias no intervalo de 0 a 20 horas. Utilizando o mesmo processo da etapa 2, estimamos o valor da área da região limitada pela curva $f(t)$ aumentando os números de retângulos para 10. Logo, ao somar a medida da área dos 10 retângulos encontramos a estimativa para a variação total no número de bactérias, ou seja, encontramos nos dois casos uma estimativa por falta (inferior) e por excesso (superior). Portanto, com base na Tipologia das Situações Didáticas conseguimos uma validação do novo conhecimento ao usar o cálculo das estimativas inferior e superior para encontrar uma estimativa para variação do número total no número bactérias no intervalo de 0 a 20 anos.

Etapa 4: Institucionalização

A resolver a situação-problema, encontramos estimativas inferior e superior para a variação total no número de bactérias. No primeiro caso, consideramos $\Delta t = 4$ anos e encontramos uma estimativa inferior de 252 milhões de bactérias e uma estimativa superior de 412 milhões de bactérias. No segundo caso, usamos o $\Delta t = 2$ anos encontramos uma estimativa inferior de 288 milhões de bactérias e uma estimativa superior de 368 milhões de bactérias. Comparando os resultados podemos notar que a estimativa inferior no segundo caso é maior do que foi encontrado no primeiro caso, e a estimativa superior é menor no segundo caso se comparado com o primeiro caso. Os valores encontrados são uma estimativa para variação total no número de bactérias, mas as estimativas encontradas usando o Δt = 2 anos está mais próxima do valor real da variação total no número de bactérias, pois quando aumentamos o número de subintervalos conseguimos uma estimativa mais precisa. Logo, podemos concluir que quando número subintervalos (*n*) cresce a estimativa melhora e a soma da área dos retângulos se aproxima da área da região limitada pela curva *f(t)*, como mostra a Tabela 4.6.

Tabela 4. 6 - Valores estimados da variação total

Δt *(horas)*	***n*** **(subintervalos)**	**Valor estimado da variação total no número de bactéria (V) em milhões**
4	5	252 < V< 412
2	10	288 < V < 368
1	20	307 < V < 347
0,2	100	322,68 < V < 330,68
0,1	200	324,67 < V < 328,67

Assim como na situação-problema 1, para encontrar os valores estimados da variação total no número de bactérias apresentado na Tabela 4.6, foi necessário contar com o auxílio do software Winplot, pois aumentamos consideravelmente o número de subintervalos e sem ajuda do software seria inviável calcular as estimativas inferior e superior.

Ao diminuir o valor de Δt aumentamos o número de subintervalos e encontramos estimativas para variação total mais próxima do valor real da variação. Assim, podemos concluir que realmente o cálculo das estimativas inferior e superior pode ser utilizado para estimar a área de qualquer região plana e que à medida que o número de subintervalos aumenta, mais próximo chegamos do valor real da área que se deseja encontrar, ou seja, do valor da variação total no número de bactérias. Logo, de acordo com a Tipologia das Situações Didáticas, institucionalizamos a resolução do problema ao discutir sobre a solução encontrada e ao afirmar que à medida que o número de subintervalos (*n*) aumenta, mais preciso será os valores estimados para a variação total no número de bactérias.

Problema 3: (Adaptado de STEWART, 2008, p.379) A velocidade de um corredor aumentou regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade na metade do segundo intervalo é dada em uma tabela. Ache as estimativas inferior e superior para distância que ele percorreu durante esses três segundos.

Tabela 4. 7 - Velocidade do corredor em função do tempo

t (s)	0	0,5	1	1,5	20	2,5	3
v(pés/s)	0	6,2	10,8	14,9	18,1	19,4	20,2

Agora vamos dividir a resolução desta situação-problema em quatro etapas exemplificando a resolução da situação proposta.

Etapa 1: Ação

Para visualizar melhor a situação, vamos tentar representá-la graficamente, para isso será necessário utilizar o software Excel.

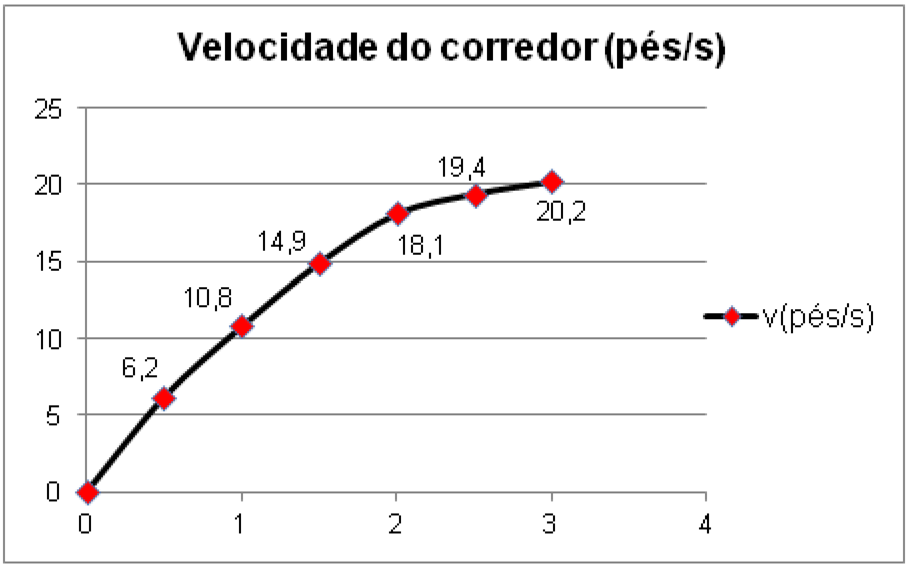


Figura 4. 8 - Velocidade do corredor

Analisando o gráfico da figura 4.8 e os dados da Tabela 4.5 notamos que a velocidade varia a cada 0,5 segundo, também podemos notar que a velocidade quase não varia. Portanto, determinar a distância percorrida pelo corredor será uma tarefa fácil basta multiplicar a velocidade pelo tempo em cada instante e depois somar os valores encontrados.

Nessa primeira etapa, representamos os dados fornecidos pela Tabela 4.5 graficamente, que ajudou a visualizar o problema. Analisando o gráfico representado na figura 4.8 e os dados da tabela concluímos que para determinar a distância percorrida pelo corredor basta multiplicar a velocidade pelo tempo em cada instante e depois somar os valores encontrados. Para determinar a distância utilizaremos os dados fornecidos pela Tabela 4.5. Portanto, analise feita sobre a resolução do problema pode ser classificada de acordo com a Tipologia das Situações Didáticas de ação.

<u>Etapa 2: Formulação</u>

Durante os 5 primeiros segundos a velocidade do corredor não varia muito, supondo que a velocidade seja constante podemos estimar a distância percorrida pelo corredor durante os cinco primeiros minutos. Considerando a velocidade sendo 6,2 (*pés/s*) quando o corredor começa a se movimentar e o tempo de 0,5 segundo, a estimativa da distância (D) percorrida pelo corredor será:

$$D = 6{,}2 \cdot 0{,}5 = 3{,}1 \textit{ pés}$$

Agora considerado velocidade como sendo 10,8 (*pés/s*) durante o segundo intervalo de tempo que vai de 0,5 segundo até 1 segundo, a estimativa da distância (D) percorrida pelo corredor será:

$$D = 10{,}8 \cdot 0{,}5 = 5{,}4 \textit{ pés}$$

Como foi mencionado anteriormente, determinar a distância percorrida pelo corredor no intervalo de tempo de 0 a 3 segundos se a velocidade do corredor permanece constante em cada instante, é simples basta utilizar a fórmula: distância = velocidade *x* variação do tempo. Analisando o gráfico da figura 4.8, notamos que na verdade ao encontrar a distância no intervalo de tempo entre 0 a 0,5 calculamos a medida da área de um retângulo cuja base é representada pela variação do tempo (Δt) e a altura é representada pela velocidade ($v(t)$). A mesma situação acontece quando encontramos a distância no intervalo de tempo de 0,5 a 1 segundo. Logo, para estimar a distância percorrida pelo corredor no intervalo de 0 a 3 segundos basta determinar o valor da medida da área em cada instante de tempo e depois somar os valores encontrados.

Nessa etapa, fizemos uma analise da possível solução do problema, concluímos que para estimar a distância percorrida pelo corredor será necessário determinar a área no intervalo de [0,3] segundos. Também notamos que a distância será dada por d = $v(t) \cdot t$, ou seja, depois de encontrar a distância em cada instante de tempo (t) basta somar os valores que encontraremos uma estimativa para distância percorrida pelo corredor. Este processo pode ser classificado, de acordo com a *Tipologia* das Situações Didáticas, por formulação.

Etapa 3: Validação

Na segunda etapa encontramos a distância percorrida pelo corredor nos instantes de 0 a 0,5 segundo e de 0,5 a 1 segundo, com esses resultados concluímos que para determinar a distância bastava multiplica a velocidade pelo tempo. Também notamos que o produto da velocidade pelo tempo poderia também ser interpretado como a medida da área de um retângulo, pois a velocidade seria a medida da altura do retângulo e a variação do tempo em cada instante seria a medida da base dos retângulos. Então para estimar a distância percorrida pelo corredor basta determinar o valor da medida da área em cada instante e somar os resultados encontrados.

Se somarmos as estimativas da distância percorrida pelo corredor no intervalo de tempo de 0 a 3 segundos, temos:

$$D = 0{,}5 \cdot (0 + 6{,}2 + 10{,}8 + 14{,}9 + 18{,}1 + 19{,}\ 4) = 34{,}7 \textit{ pés}$$

Encontramos a distância percorrida pelo corredor considerando a velocidade no começo de cada intervalo de tempo, ou seja, estamos calculando uma estimativa superior para a distância. Agora considerando a velocidade no fim de cada intervalo e supondo que a velocidade seja constante. Logo, temos uma estimativa para distância de:

$$D = 0{,}5 \cdot (6{,}2 + 10{,}8 + 14{,}9 + 18{,}1 + 19{,}\ 4 + 20{,}2) = 44{,}8\ \textit{pés}$$

O valor encontrado para distância de 34,7 *pés* é uma estimativa inferior e o valor encontrado de 44,8 *pés* é uma estimativa superior para distância percorrida pelo corredor. Logo, podemos determinar a distância percorrida pelo corredor encontrando estimativas inferior e superior. Portanto, podemos afirmar que para encontrar uma estimativa da distância foi necessário fazer uma aproximação por áreas de um conjunto de retângulos.

Logo, a distância percorrida pelo corredor está em algum ponto entre a estimativa inferior e a estimativa superior 34,7 *pés* < D < 44,8 *pés*.

De acordo com a Tipologia das Situações Didáticas, ao apresentar o cálculo das estimativas para encontrar a distância percorrida pelo corredor, conseguimos uma validação da solução do problema.

<u>Etapa 4: Institucionalização</u>

O cálculo das estimativas para distância percorrida pelo corredor é um valor estimado considerando 6 subintervalos, se aumentarmos o número de subintervalos encontraremos uma estimativa mais precisa da distância percorrida pelo corredor.

Então, podemos determinar uma melhor aproximação para a distância percorrida pelo corredor fazendo uma aproximação pela soma das distâncias em cada ponto do intervalo. Dividindo o intervalo [0,3] em pequenos intervalos de tempo, no qual a velocidade é quase constante, podemos fazer uma aproximação para distância usando a fórmula $D = v(t) \cdot \Delta t$ e somando os resultados encontrados ao longo do intervalo [0,3], encontramos uma estimativa para distância percorrida pelo corredor. Se aumentarmos o número de subintervalos (Δt tende a zero), a soma total das distâncias em cada intervalo tende ao valor real da distância que desejamos determinar, ou no caso, a estimativa encontrada para distância será mais precisa.

Nessa etapa, conseguimos a institucionalização do conhecimento ao afirmar que a distância percorrida pelo corredor pode ser determinada utilizando o cálculo das estimativas inferior e superior. Também, analisamos a situação e chegamos à conclusão que a distância percorrida pelo corredor pode ser estimada quando dividimos o intervalo [0,3] em *n* subintervalos e calculamos a distância em cada ponto do intervalo, somando os valores encontrados temos uma aproximação da distância percorrida pelo corredor.

Para as situações-problema 1 e 2, o software Winplot teve uma grande importância, já que foram explorados os recursos de somas inferior e superior. Esses recursos possibilitam a visualização dos retângulos utilizados para a aproximação da área, de modo que, ao aumentar a quantidade de retângulos, mais próxima à soma da medida das áreas está da medida da área da região que se deseja calcular. Assim, além de possibilitar a visualização, a utilização do Winplot foi imprescindível para determinar as estimativas quando aumentamos o número de subintervalos. Sem o auxílio do software seria inviável calcular as estimativas, principalmente quando aumentamos o número de subintervalos para 100.

Portanto, podemos concluir que o cálculo das estimativas inferior e superior utilizados para resolver as situações-problema propostas nesse capítulo, pode ser utilizado para determinar uma aproximação do valor da medida da área de uma região de contorno irregular, como a medida da área de uma região limitada por uma parábola, ou de uma região de contorno regular, como um trapézio. Os resultados provaram que à medida que aumentamos os números de subdivisões do intervalo, mais a soma das medidas das áreas desses retângulos se aproxima do valor real da medida da área.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi apresentado na introdução, o principal objetivo deste trabalho era apresentar o cálculo das estimativas inferior e superior como uma possibilidade para desenvolver o conteúdo cálculo de área de regiões planas na Educação Básica. Propomos o cálculo das estimativas como uma ferramenta para determinar a área de regiões planas regulares e irregulares.

Os professores e os livros didáticos analisados na Educação Básica geralmente costumam trabalhar com área de regiões planas utilizando fórmulas, as quais são aplicadas em situações-problema. Os livros didáticos analisados que trabalham com regiões planas irregulares, normalmente utilizam figuras em malhas quadriculadas, cujo valor da medida da área é um, pois para determinar a medida da área dessas regiões irregulares na malha quadriculada basta somar o número de quadrados de medida de área um, os quais cabem dentro dessa figura. No entanto, como foi mencionado no começo desse trabalho, no cotidiano o aluno nem sempre vai deparar-se com problemas que envolvam o calculo da medida da área de uma região plana regular. E quando a região for irregular, ele nem sempre vai conseguir determinar a área utilizando malhas quadriculadas. Por isso, é importante apresentar ao aluno uma forma de determinar área de regiões planas que possa ser aplicado em situações-problema do cotidiano.

No desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, analisamos situações-problema onde o objetivo era determinar o valor da medida da área aplicando o cálculo das estimativas para resolver. Discutimos a solução de cada problema de acordo com as principais etapas da Tipologia das Situações Didáticas (ação, formulação, validação e institucionalização).

Na primeira situação-problema, tínhamos que determinar a distância percorrida por um automóvel no intervalo no intervalo de 0 a 4 segundos. Como a região se tratava de um trapézio, para determinar a distância percorrida pelo automóvel utilizamos a fórmula para determinar a área do trapézio e depois as estimativas, comprovando que realmente quando aproximamos o valor da medida da área de qualquer região pela soma de um conjunto de retângulos, as estimativas inferior e superior se aproximam do valor real da área.

Já na segunda situação-problema, utilizamos o cálculo das estimativas inferior e superior para variação total no número de bactérias usando Δt = 4 anos e Δt = 2 anos. Por se tratar de uma região de contorno irregular, ou seja, uma região limitada por uma curva, para estimar o valor da medida da área aplicamos o cálculo das estimativas.

Na terceira situação-problema, tínhamos que determinar a distância percorrida por um corredor no intervalo de 0 a 3 segundos, no entanto só tínhamos os dados da velocidade a cada instante de 0,5 segundo fornecidos por uma tabela. Analisando o problema, chegamos à conclusão que para estimar a distância percorrida pelo corredor seria necessário determinar a distância em cada instante e depois somar as distâncias encontradas. Ainda, analisando o problema notamos que determinar a distância a cada 0,5 segundo era o mesmo que determinar a soma da medida da área de um conjunto de retângulos, pois a distância era dada pela fórmula $D = v(t) \cdot \Delta t$, sendo $v(t)$ a altura dos retângulos e $\Delta t = 0{,}5$ a base dos retângulos.

O professor da Educação Básica, especificamente do Ensino Médio, ao trabalhar o conteúdo área de regiões planas utilizando o cálculo das estimativas, poderá ampliar o conhecimento dos alunos sobre o que significa determinar a medida da área de certa região. Determinar o valor da medida de uma área, dependendo da forma trabalhada, pode significar, por exemplo, a medida da distância percorrida por um automóvel num certo intervalo de tempo quando sua velocidade é constante ou praticamente constante. O professor pode trabalhar também com situações-problema relacionados com o cotidiano do aluno, assim ele poderá mostrar ao aluno como o novo conhecimento pode ser aplicado na sua vida fora da sala de aula. Ao desenvolver as situações-problema o professor pode utilizar o software Winplot, que é um programa gratuito, para representar os problemas graficamente. Além do software Winplot, o professor pode utilizar o software Geogebra que também é gratuito.

Nossa pesquisa se baseou somente em dados documentais, ou seja, analisamos alguns livros didáticos, trabalhos acadêmicos e artigos sobre o tema cálculo da medida da área de regiões planas. Nas situações-problema propostas neste TCC, trabalhamos com regiões delimitadas pelos eixos coordenados. Contudo, fica como perspectivas de trabalhos futuros um estudo de caso, com aplicação em sala de aula das ideias propostas nesse trabalho e também trabalhar com regiões planas que não seja delimitado pelos eixos coordenados.

Por fim, desejamos que esse trabalho de conclusão de curso possa de alguma forma colaborar para o ensino do conteúdo de cálculo da medida da área de regiões planas na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito área e perímetro: Uma sequência didática com auxílio de Software de Geometria Dinâmica**. Londrina, Paraná, 2004. Disponível em – *www.uel.br/pos/mecem/pdf/10_Loreni_Aparecida_Ferreira_Baldini.pdf*. - Consultado 20/08/2013.

BIANCHINI, E. **Matemática, v.1**, 6º ano – 6ª. ed. – São Paulo, SP: Moderna, 2006.

BONJORNO, J. R.; OLIVARES, A. **Matemática: fazendo a diferença**. - 8ª série – São Paulo: FTD, 2006. – (Coleção fazendo a diferença).

DANTE, L. R. **Matemática: contexto aplicado, volume único.** – 2ª Ed. - São Paulo: Ática, 2007.

DOCA, R. H.; BISCOLAU, G. J.; BOÂS, N. V. **Física, 1**. - -. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

ESCARLATE, A. C. **Uma investigação sobre aprendizagem de integral**. – Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em – *http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/72/09%20Allan%20Escarlate.pdf?sequence=1* - Consultado 12/02/2014

FACCO, S. R. **Conceito de área uma proposta de ensino-aprendizagem**. - Dissertação de mestrado, PUC 2003. Disponível em - *www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/sonia_facco.pdf* - Consultado 04/05/2013

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração**. – 6ª edição – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

FREITAS, J. L. M. - **Teoria das Situações didáticas** - In: MACHADO, Silva Dias Alcântara. (org.) **Educação Matemática – Uma (nova) Introdução**. – 3ª. Ed. - São Paulo, SP: Editora EDUC, 2008.

HUGHES-HALLETT, Deborah... [et al.] - **Cálculo e aplicações**. Tradução Elza F. Gomide. – São Paulo: Blucher, 1999. 5ª reimpressão – 2012.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 6º ano**. – 6ª. Ed. – São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio** - ...[et AL.]. –6. Ed. – São Paulo: Saraiva 2010.

MOLON, J. **Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com auxílio do Software Geogebra**. – Santa Maria, RS, 2013. Disponível em - www.bit.profmat-sbm.org.br/.../2011_00024_JAQUELINE_MOLON.pdf?...1. - Consultado 12/10/2013

ROCHA, T. M. **Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick**. Paraná, 2007. Disponível em - www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/.../artigo_tania_marli_rocha.pdf - Consultado 20/08/2013.

SÃO PAULO – Secretária da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. Secretaria da educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – São Paulo: SEE, 2010.

STEWART, J. **Cálculo - volume I** – 5. ed. – São Paulo: Thomson Learning, 2008.