|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Gilda de La Roque Palis e Iaci Malta*** **PUC − RJ** Em sua autobiografia, Carl Gustav Jung1, um dos grandes pensadores da Psicanálise, lembrando de seus tempos de colégio, diz: “... o que mais me irritava era o princípio: *se C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm1.gif  e se C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm2.gif, então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm3.gif.* Tendo sido dado, por definição, que *a* é diferente de *b*, por conseguinte não pode ser igual a *b*, e ainda menos de *c*. ... dizer que C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm4.gif me parecia uma fraude evidente, uma mentira”. Assim como Jung, muitos de nossos alunos ficam atordoados ao tomarem contato com a linguagem matemática. Sentem-se como quem está participando de um jogo sem conhecer suas regras. As regras do jogo do raciocínio matemático abstrato precisam ser aprendidas. Seu conhecimento é de fundamental importância para aprender Matemática e para empregar resultados matemáticos em aplicações nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas. Publicações de Educação Matemática e professores experientes cada vez mais insistem em que essas regras sejam trabalhadas com os estudantes, quanto antes melhor. Por outro lado, é importante desvincular o significado matemático (que é mais restrito) do significado de sentenças análogas na linguagem do cotidiano. Como trabalhar essas regras e esses significados com nossos alunos, quando não é necessário, nem conveniente, nem possível em geral, lançar mão da linguagem rigorosa da Lógica? Nossa opção com alunos ingressantes na Universidade tem sido a de trabalhar com exemplos escolhidos nas várias áreas da Matemática. Essa experiência tem alcançado considerável êxito. Neste artigo, a título de sugestão de abordagem do tema, apresentamos exemplos de explicitação e utilização de algumas dessas regras.

|  |
| --- |
| **Proposições do tipo *se A, então B***  |

Encontra-se com freqüência um tipo de proposição (sentença, frase) importante em Matemática: as proposições da forma *se A, então B*, onde *A* e *B* são frases, como nos exemplos a seguir: Proposição 1**:** Se *m* e *n* são inteiros pares, então o produto *mn* é um inteiro par. Proposição 2**:** Se *m* é inteiro ímpar, então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm5.gif, para algum número inteiro *k*. Na proposição 1, por exemplo, *A*  é a frase “*m* e *n* são inteiros pares”, e *B* é a frase “o produto *mn* é um inteiro par”. É muito comum que, num tal contexto, a frase *A* seja chamada de *hipótese* da proposição e a conclusão *B* de *tese*. Ao ler as proposições acima, um matemático logo dirá que a proposição 1 é verdadeira e a proposição 2 é falsa. Mas, o que significa isso? Eis aqui nossa primeira regra:

|  |
| --- |
| Uma proposição “*Se A, então B*” é *verdadeira* quando em **todas** as situações nas quais a hipótese se verifique a tese também esteja satisfeita. E é *falsa* quando não for verdadeira.  |

Concluímos que uma proposição é falsa quando existe um *objeto matemático*2 que satisfaz a hipótese *A* e não satisfaz a conclusão *B*. Um tal objeto se diz *contra-exemplo* para a proposição *se A, então B*. Por outro lado, um objeto matemático que satisfaz a hipótese *A*  e a tese *B* se diz um *exemplo* para a proposição *se A, então B*. Em relação às proposições 1 e 2 anteriores, temos: ·  A dupla de inteiros 6 e 8 é um exemplo para a proposição 1, pois 6 e 8 são inteiros pares e seu produto 48 é par. Essa proposição não admite contra-exemplo pois, como já adiantamos, ela é uma proposição verdadeira, o que será mostrado mais para a frente. Então qualquer dupla de inteiros pares é um exemplo para a proposição 1; ·   O inteiro 19 é um exemplo para a proposição 2, pois 19 é ímpar e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm6.gif, enquanto o inteiro 5 é um contra-exemplo para essa proposição. Com efeito, a hipótese se verifica, pois 5 é ímpar, mas a conclusão não é válida porque C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm7.gif, qualquer que seja o inteiro *k* (ou C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm8.gif seria esse inteiro *k*). Mas, cuidado: Enquanto um só contra-exemplo permite concluir que um enunciado é falso, não basta exibir exemplos para mostrar que uma proposição seja verdadeira. Esse é um erro muito comum. Freqüentemente, nossos estudantes examinam alguns casos e já concluem que a proposição é verdadeira, sem atentar para a exigência de que ela só se diz verdadeira se valer para **todos** os casos. Um bom exemplo para ilustrar o perigo de tal atitude é dado pela proposição: “Se *n* é um inteiro positivo, então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm9.gif é um número primo”. Podemos verificar que para C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm10.gif, C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm11.gif, etc. até C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm12.gif, tem-se que C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm13.gif é um número primo. No entanto, para C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm14.gif, obtemos C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm15.gifque não é primo. Portanto a proposição é falsa. Esse e outros casos estão no artigo *Vale para 1, para 2, para 3, ... Vale sempre?* (**RPM** 9, pág. 32). Então, como mostrar que uma proposição do tipo *Se A, então B* é verdadeira? Antes de responder a essa questão, lembramos que proposições desse tipo podem ter outras formulações equivalentes. Listamos as mais usuais: ·     na forma *A implica B*, abreviada, às vezes, pela notação *A* C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm16.gif*B* (daí o fato de esse tipo de proposição ser chamado *implicação*)*.* ·      Se *A* for verdadeira, então *B* será verdadeira. ·      Se *A* for válida, então *B* será válida. ·      *B* é verdadeira desde que *A*  seja verdadeira. ·      *B* é verdadeira se *A* for verdadeira. ·      *A* é uma condição suficiente para *B*. ·      *B* é uma condição necessária para *A*. ·      *A* será verdadeira somente se *B* for verdadeira. Todos esses enunciados querem dizer a mesma coisa. Ao dizer que todas essas sentenças são reformulações de *Se A, então B*, estamos dando convenções quanto ao uso da linguagem matemática. Em particular, estamos explicitando os significados dos termos *condição necessária*, *condição suficiente* e *somente se* na linguagem matemática. Além disso, proposições implicativas podem estar formuladas sem o emprego da palavra *Se*. Observe que a proposição 1 pode ser reformulada das seguintes maneiras equivalentes: C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm64.gif   O produto de dois inteiros pares é um inteiro par. C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm65.gif   Para toda dupla de inteiros pares *m* e *n* tem-se que seu produto *mn* é par. C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm66.gif   O produto de inteiros *mn* é par desde que *m* e *n* sejam inteiros pares. C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm67.gif   Para que o produto dos inteiros *m* e *n* seja par, é suficiente que *m* e *n* sejam pares.

|  |
| --- |
| **Diferentes modos de provar que uma proposição da forma *Se A, então B* é verdadeira**  |

Não temos aqui a pretensão de estudar técnicas de demonstração de forma abrangente. Além de essas habilidades só poderem ser tratadas adequadamente em nível mais avançado, não se pode dizer que exista uma prática uniforme, objetiva e bem estabelecida de demonstração em Matemática. Haja vista a recente discussão em torno de provas produzidas por computadores. Neste artigo, chamamos de prova ou demonstração um argumento convincente escrito em linguagem matemática. Para provar que uma proposição do tipo *Se A, então B* é verdadeira é preciso mostrar, como vimos, que a tese é verdadeira em todos os casos que satisfazem a hipótese. Os métodos mais comuns para fazer essa prova são os seguintes:    |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |
| --- |
| 1.  ***Demonstração direta*:** verificação direta da tese para todos os casos em que a hipótese é válida. 2.  ***Demonstração por meio de argumentos lógicos*:** por      argumentação, verifica-se que a tese é válida para os casos que  satisfazem a hipótese. 3.  ***Demonstração por contradição (ou por absurdo):*** verificação de que a presença de um contra-exemplo conduz a um absurdo.    |

A seguir, apresentamos alguns exemplos:

|  |
| --- |
| **Demonstração direta**  |

**Exemplo 1:**  “Se C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm17.gif, então *n* é um número primo” é uma proposição verdadeira. Nesse caso, em se tratando de um número finito e pequeno de casos possíveis, basta examiná-los um a um. Como todos os inteiros 3, 17, 31, 19 são primos, a proposição é verdadeira.

|  |
| --- |
| **Demonstração por meio de argumentos lógicos**  |

**Exemplo 2:** Voltemos à proposição1: “Se *m* e *n* são inteiros pares, então o produto *mn* é um inteiro par” para mostrar que é uma proposição verdadeira. Desta vez não dá para examinar todos os casos um a um pois há infinitos deles. Assim mesmo é possível verificar que a tese é verdadeira em todos os casos que satisfazem a hipótese, escrevendo: C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm18.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm19.gif, onde *k* e *j* são inteiros. Fazendo o produto, obtemos C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm20.gif, que é par. Logo, a proposição é verdadeira. C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm62.gif assume somente valores negativos” é uma proposição verdadeira. A tendência de nossos estudantes num caso como esse é a de verificar que os valores da função são negativos para alguns valores de *x*, o que não é uma demonstração de que a proposição é verdadeira. É preciso mostrar que a função é negativa para **todos** os números reais positivos. C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm68.gif

|  |
| --- |
| ***Demonstração por contradição (ou por absurdo*)**  |

Esse método é bastante utilizado no caso de proposições cuja verdade ou falsidade queremos determinar e não conseguimos mostrar que a tese é satisfeita em todas as situações nas quais a hipótese se verifica, nem conseguimos produzir um contra-exemplo. **Exemplo 4:** “Se *n* é um inteiro e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm23.gif é par, então *n* é par” é uma proposição verdadeira. Seja *n* um inteiro, tal que C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm24.gif é par. Suponhamos que *n* não seja par, isto é, que *n* é ímpar. Então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm25.gif, onde *k* é um inteiro e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm26.gif C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm27.gif . Temos então que C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm28.gif é ímpar, contradizendo o fato de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm29.gif ser par. Logo a proposição é verdadeira. **Exemplo 5:** “As funções polinomiais C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm30.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm31.gif não têm um zero comum” é uma proposição verdadeira. Observe que essa proposição pode também ser escrita da seguinte forma: “Sejam C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm32.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm33.gif. Se C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm34.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm35.gif, então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm36.gif”. Uma demonstração direta de que essa proposição é verdadeira consiste em calcular os zeros das funções *f* e *g*, e verificar que nenhum dos zeros de *f* é também um zero de *g*. A demonstração alternativa que sugerimos a seguir é por absurdo e bem mais compacta. Suponhamos que a proposição é falsa, ou seja, que as funções dadas têm um zero comum, que denotaremos por *a*. Então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm37.gif ou C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm38.gif, ou C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm39.gif, e daí, C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm40.gif, o que é uma contradição, pois 0 não é solução nem de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm41.gif nem de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm42.gif. Logo a proposição dada é verdadeira. Observe que demonstrações por contradição (ou por absurdo) podem ser detectadas por apresentarem no seu início frases como “Suponhamos que a proposição seja falsa (isto é, admite contra-exemplo)”, e ao final sentenças como “e assim chegamos a uma contradição (ou absurdo), logo a proposição é verdadeira”. **Exemplo 6:**  “Se há *n* C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm43.gif pessoas em uma festa, então há pelo menos duas pessoas que têm o mesmo número de amigos na festa.” é uma proposição verdadeira3. Inicialmente observe que uma pessoa qualquer na festa pode ter C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm44.gif ou C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm45.gif amigos presentes. Ou seja, há *n* possibilidades quanto ao número de amigos que uma pessoa pode ter na festa. Supondo, por absurdo, que nenhum par de pessoas na festa tem o mesmo número de amigos presentes, cada pessoa terá um número diferente de amigos na festa, isso significa que uma pessoa que chamaremos de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm46.gif tem 0 amigo na festa, uma pessoa C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm47.gif tem 1 amigo na festa, uma pessoa C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm48.gif tem 2 amigos na festa, etc., até que finalmente uma pessoa C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm49.gif tem C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm50.gif amigos na festa. A pessoa C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm51.gif, que tem C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm52.gif amigos na festa, é então amiga de todas as outras pessoas presentes, isto é, de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm53.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm54.gif. Chegamos assim a um absurdo, pois C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm55.gif é amiga de C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm56.gif, que não tem amigos na festa. Logo a proposição é verdadeira. **Observação 1:** Quando não existe objeto satisfazendo a hipótese *A*, a proposição *Se A, então B* se diz verdadeira (por vacuidade). Nesse caso, um contra-exemplo seria um elemento no conjunto vazio e esse seria o absurdo. Esse tipo de verificação é também chamado *implicação vazia*. É o que se dá no exemplo a seguir. **Exemplo 7:** “O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto”, que pode ser traduzido como: “Se C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm57.gifC:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm69.gif, então C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm58.gif*A*”. **Observação 2:** Há demonstrações em que várias implicações são empregadas em cadeia. Assim, uma demonstração de que *A implica B* pode ser realizada através de uma cadeia de proposições como as seguintes: *A implica C*, *C implica D* e *D implica B*.

|  |
| --- |
| **Recíproca da proposição *Se A, então B***  |

Dada uma proposição *Se A, então B*, a sentença *Se B, então A* é chamada *recíproca* da primeira. É claro que a recíproca da recíproca de uma proposição é ela própria, daí falarmos também de duas *proposições recíprocas*. Embora ligando as mesmas frases, como a hipótese de uma vira tese de outra e vice-versa, uma proposição e sua recíproca podem não ter a mesma natureza: uma pode ser verdadeira e a outra, falsa; ambas podem ser verdadeiras ou ambas podem ser falsas. **Exemplo 8:** A recíproca da proposição 1 é a proposição “Se o produto *mn*  de dois inteiros é par, então cada um dos inteiros *m, n*  é par”. Embora a proposição 1 seja verdadeira, sua recíproca é falsa, como se vê com o contra-exemplo C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm59.gif e C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm60.gif. **Exemplo 9:** A recíproca da proposição “Se *m* e *n*  são inteiros ímpares, então o produto *mn*  é ímpar” é a proposição “Se o produto *mn* de dois inteiros é ímpar, então cada um dos inteiros *m, n*  é ímpar”. Deixamos a cargo do leitor verificar que ambas as proposições são verdadeiras.

|  |
| --- |
| **Proposições do tipo *A se, e somente se, B***  |

Se queremos considerar simultaneamente a proposição *Se A, então B* e sua recíproca *Se B, então A*, usamos a frase *A se, e somente se, B.* Proposições desse tipo podem ser formuladas de várias outras maneiras, dentre elas: ·      *A* implica *B* e reciprocamente, abreviada às vezes pela notação *A* ⇔ *B*; ·      Se *A*, então *B* e reciprocamente; ·      *A* é verdadeira se, e somente se, *B* for verdadeira; ·      *A* é uma condição necessária e suficiente para *B*; ·      *A* e *B* são proposições equivalentes. E eis aqui uma outra regra:

|  |
| --- |
| Uma proposição do tipo *A se, e somente se, B*  é verdadeira quando *Se A, então B* e *Se B, então A* são ambas verdadeiras. Caso contrário é falsa.    |

Pelo exemplo 9 anterior, vê-se que a proposição “O produto *mn* de dois inteiros é ímpar se, e somente se, cada um dos inteiros *m*, *n*  é ímpar” é verdadeira. O exemplo 8 mostra que a proposição “O produto *mn* de dois inteiros é par se, e somente se, cada um dos inteiros *m*, *n* é par” é falsa, embora seja válida num dos sentidos.

|  |
| --- |
| **Negação de uma proposição**  |

Para o iniciante nem sempre é fácil negar uma proposição. No entanto, saber enunciar a negação de uma proposição é freqüentemente útil em demonstrações. Designamos a negação de uma proposição *P* por *não P.* A negação de uma proposição *P* tem a propriedade que sua negação é *P*, isto é*, não* (*não* *P*) é *P*. **Exemplo 10:** Enunciamos, para exemplificar as negações das proposições 1 e 2, dadas no início deste artigo: Negação da proposição 1: Existe uma4 dupla de inteiros pares *m* e *n* cujo produto *mn* não é um número par. (Falsa) Negação da proposição 2**:** Existe um inteiro ímpar *m* tal que C:\Documents and Settings\cliente\Desktop\rpm\37\images\1.htm61.gif qualquer que seja o inteiro *k*. (Verdadeira)

|  |
| --- |
| Dizemos que *não P* é verdadeira quando *P* é falsa e dizemos que *não P* é falsa quando *P* é verdadeira.    |

Apesar de não pretendermos nos estender sobre o problema delicado de negar proposições, alguns comentários que faremos abaixo podem auxiliar essa tarefa. A proposição: “Se *m* é um inteiro múltiplo de 3, então *m* é um múltiplo de 9” pode ser reformulada no seguinte enunciado “***Para todo*** *inteiro m que goza da propriedade de ser múltiplo de 3 tem-se que m é um múltiplo de 9*”. E sua negação é: “***Existe*** *um inteiro m que é múltiplo de 3 e* ***não é*** *múltiplo de 9*”. Observe que isso é uma regra geral:

|  |
| --- |
| A negação de uma proposição do tipo: Para todo *objeto*, com uma *certa propriedade*, *algo acontece* é: Existe um *objeto* com a *certa propriedade*, tal que *aquele algo não acontece*.    |

E vice-versa:

|  |
| --- |
| A negação de uma proposição do tipo: Existe um *objeto*, com uma *certa propriedade*, para o qual *algo acontece* é: Para todo *objeto* com a *certa propriedade*, *aquele algo não acontece*.  |

Finalmente, observamos que a grande queixa do Jung era anterior a essa discussão lógica. No dizer dele próprio, sua grande confusão vinha da substituição dos números, que ele compreendia, por letras, o que ele nunca aceitou! \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 1 C.G. Jung. *Memórias, sonhos, reflexões*. Editora Nova Fronteira, 1961. págs. 38-39.2 Um *objeto matemático* é um número, uma expressão algébrica, uma função, uma figura geométrica, etc.3 Esse é um problema bastante conhecido; a versão que apresentamos encontra-se em *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, SBM (1996), pág. 47. 4 Em “existe uma” ou “existe um”, esse “uma” ou “um” deve ser entendido no sentido de “alguma” ou “algum” isto é, no sentido de “pelo menos uma” ou “pelo menos um”, não no sentido de “somente uma” ou “somente um”, salvo menção explícita, quando se diz, em geral, “existe um e um só” ou “existe um único”.    |