I) <u>SEQUÊNCIA</u>

Toda aplicação (ou função) do conjunto N* = { 1, 2, 3, ... } ou do subconjunto N_n* = { 1, 2, 3,..., n } no conjunto R dos números Reais é denominada sequência. No primeiro caso, sequência infinita, no segundo, finita.

O primeiro elemento de uma sequência será representado por a_1, o segundo por a_2, o enésimo por a_n. Em qualquer caso, numa sequência, ao elemento 1 de N* está associado o elemento a_1 dos Reais, ao elemento 2 de N* está associado a_2, e assim por diante, e os elementos de qualquer sequência devem ser assim representados : A = (a_1, a_2, a_3, ..., $a_{n, ...}$).

EXEMPLOS :

1) A sequência (3, 6, 9, 12, 15, 18,....) é infinita e formada pelos múltiplos positivos de 3, em ordem crescente;

2) A sequência (24, 12, 6, 4, 3, 2) é finita e formada pelos divisores próprios e positivos de 24 e escrita em ordem decrescente.

OBSERVAÇÃO :

Veja que com o conjunto A = { 1, 2, 3 }, podemos formar as seguintes sequências: r = (1, 2, 3) , s = (1, 3, 2) , t = (2, 1, 3), u = (2, 3, 1), v = (3, 2, 1) e w = (3, 1, 2).

II) IGUALDADE DE DUAS SEQUÊNCIAS :

As sequências da observação que acabamos de escrever são diferentes, embora tenham elementos iguais.

III) FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA :

A montagem de uma sequência deve obedecer a uma regra que é chamada Lei de Formação. Esta lei pode ser apresentada de três modos diferentes : 1) Por uma propriedade de todos os termos ; 2) Por recorrência ; 3) Por uma sentença algébrica que expresse qualquer termo em função de sua posição.

1) Por uma propriedade de todos os termos :

Neste modo, é apresentada em Português uma propriedade a ser obedecida por todos os elementos.

Exemplo 1 : Montar a sequência de 5 elementos onde cada elemento é igual ao quadrado de seu índice.

Resolução : De acordo com a lei de formação , teremos os seguintes valores dos elementos :

$a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 4^2$, $a_5 = 5^2$

A sequência solicitada será então : (1, 4, 9, 16, 25)

Exemplo 2 : Montar a sequência infinita crescente dos números não negativos múltiplos de 11.

Resolução : Como o zero é múltiplo não negativo de qualquer número, a sequência que desejamos é a seguinte : (0, 11, 22, 33, 44, 55, ...)

2) Por recorrência :

Agora é dada uma regra para obtermos o primeiro elemento e outra para calcularmos os demais, relacionando cada um com o seu antecessor.

Exemplo 3 : Montar a sequência de 6 elementos tais que o primeiro deles é 5 e os demais são tais que $a_n = a_{n-1} + n$.

Resolução : De acordo com a lei de recorrência apresentada, temos : $a_1 = 5$. Os demais elementos serão

$a_2 = a_{2-1} + 2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7$; $a_3 = a_{3-1} + 3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$;

$a_4 = a_{4-1} + 4 = a_3 + 4 = 10 + 4 = 14$; $a_5 = a_{5-1} + 5 = a_4 + 5 = 14 + 5 = 19$;

$a_6 = a_{6-1} + 6 = a_5 + 6 = 19 + 6 = 25$. Logo, nossa sequência é : (5, 7, 10, 14, 19, 25)

Exemplo 4 : Qual é a sequência onde $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, com $n < 6$?

Resolução : Esta lei nos diz que $a_1 = 2$. Calculemos em seguida os quatro elementos restantes :

$a_2 = a_{1+1} = a_1^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$; $a_3 = a_{2+1} = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$;

$a_4 = a_{3+1} = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$; $a_5 = a_{4+1} = a_4^2 - 1 = 63^2 - 1 = 3969 - 1 = 3968$

A sequência é : (2, 3, 8, 63, 3968).

3) Por uma sentença algébrica que relacione qualquer elemento com sua posição na sequência.

A sequência será agora definida por uma igualdade algébrica que nos dá o valor de an em função de n.

Exemplo 5 : Montar a sequência infinita tal que $an = 3.n + 4$,

Resolução : Esta lei algébrica nos instrui do seguinte modo :

$a_1 = 3.1 + 4 = 3 + 4 = 7$; $a_2 = 3.2 + 4 = 6 + 4 = 10$; $a_3 = 3.3 + 4 = 9 + 4 = 13$;

$a_4 = 3.4 + 4 = 12 + 4 = 16$; $a_5 = 3.5 + 4 = 15 + 4 = 19$; ....

A sequência é : (7, 10, 13, 16, 19, ...)

Exemplo 6 : Obter a sequência cujos elementos obedecem a lei $a_n = n^2 - 2n + 10$, com $n \leq 4$.

Resolução : $a_1 = 1^2 - 2.1 + 10 = 1 - 2 + 10 = 9$; $a_2 = 2^2 - 2.2 + 10 = 4 - 4 + 10 = 10$;

$a_3 = 3^2 - 2.3 + 10 = 9 - 6 + 10 = 13$; $a_4 = 4^2 - 2.4 + 10 = 16 - 8 + 10 = 18$.

A sequência é : (9, 10, 13, 18)

EXERCÍCIOS

1) Escrever as sequências obedecendo as fórmulas de recorrência dadas :

a) $a_1 = 4$ e $a_n = (a_{n-1})^2$, $n < 6$; b) $p_1 = -2$ e $p_n = p_{n-1} - 1$, com $n \leq 7$; c) $m_1 = 3$ e $m_n = m_{n-1} + 3^n$

Resp.: (a) (4, 16, 256, 65536, 4294967296) ; (b) (-2, -3, -4, -5, -6, -7, -8) ;

(c) (3, 12, 39, 120, ...)

2) Escrever as sequências de acordo com as frases.

a) Sequência dos números primos entre 10 e 100

b) Sequência formada pelas raízes reais não negativas da equação $- x^3 – x^2 + 20x = 0$

c) Sequência das potências de expoente inteiro positivo de 2 e menores que 1000.

Resp.: (a) (11, 13, 17,19, 23, 29, 31 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 67, 71, 73, 70, 83, 89, 91, 97) ;

b) (0, 5) ; c) (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

3) Escrever as sequências conforme as sentenças algébricas:

a) Sequência de elementos tais que : $a_n = (2n – 3)^2$, com $n < 6$

b) Sequência cujos elementos obedecem a lei : $y_n = 4 + (n-1).(-4)$, com $n \leq 7$

c) Sequência tal que seus elementos obedecem a lei : $b_n = (n + 1)^2 + 5n$

Resp.: (a) (1, 1, 9, 25, 49) ; b) (4, 0, -4, -8, -12, -16, -20) ; c) (9, 19, 31, 45, 61, ...)