I) PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Uma Progressão Aritmética é uma sequência de elementos (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ,....) tal que, a partir do segundo elemento, a diferença entre qualquer um deles e seu antecessor é igual a uma constante "r" que será chamada razão da P.A.

Em linguagem algébrica podemos escrever : Se (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...) é uma Progressão Aritmética, então : $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r$.

EXEMPLOS:

1) A sequência (1, 4, 7, 10, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$;
2) A sequência (4, 4, 4, 4, 4, 4) é uma P.A. finita com 6 elementos e razão $r = 4 - 4 = 4 - 4 = 0$;
3) A sequência (6, 3, 0, -3, -6, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = 3 - 6 = 0 - 3 = -3 - 0 = -6 - (-3) = -3$.

II) CLASSIFICAÇÃO:

Os exemplos que acabamos de fornecer nos mostram os três modos que podemos classificar as P.As..

Para classificá-las, verificamos apenas o sinal de sua razão. No primeiro exemplo, de razão 3, positiva, dizemos que a P.A. é crescente. O segundo mostra uma P.A. de razão nula e, por isto, seus membros são todos iguais. Esta é uma P.A. constante ou estacionária. Já o terceiro exemplo, cuja razão é negativa, nos traz uma Progressão Aritmética decrescente.

Em simbologia mais apropriada, podemos escrever :

P.A. crescente : $a_{n-1} < a_n$ ou $r > 0$

P.A. estacionária : $a_{n-1} = a_n$ ou $r = 0$

P.A. decrescente : $a_{n-1} > a_n$ ou $r < 0$

EXEMPLOS:

1) Obtenha o valor de x de modo que a sequência $(x -1, 2x , 5x + 6)$ seja uma Progressão Aritmética.

Resolução : Se a sequência é uma P.A., a definição nos diz que $a_2 – a_1 = a_3 – a_2 = r$, então podemos escrever $2x – (x – 1) = 5x + 6 – 2x$ que é uma equação de primeiro grau na variável x. Logo, teremos $2x – x + 1 = 3x + 6$, e daí, $x – 3x = 6 – 1$. Então $-2x = 5$, e $x = -5/2$.

2) A soma dos três elementos de uma P.A. é 48 e seu produto é 3520. Monte a P.A.

Resolução : Para resolvermos este problema utilizaremos uma notação mais conveniente para esta progressão. Como ela possui 3 elementos, iremos simbolizá-la do seguinte modo : $(a_2 – r, a_2, a_2 + r)$ e, deste modo escreveremos : $a_2 – r + a_2 + a_2 + r = 48$, e, com toda a facilidade : $3 a_2= 48$, ou seja : $a_2 = 16$.

Por outro lado, temos que $(a_2 – r).a_2. (a_2 + r) = 16$, ou ainda $(16 – r).16. (16 + r) = 3520$, que nos remete à equação de 2º grau : $16. (256 – r^2) = 3520$ ou ainda $r^2 = 36$, isto é: $r = \pm 6$.

Assim, o problema possuirá duas soluções: Se r = 6, a P.A. será : (16 – 6, 16, 16 + 6) = (10, 16, 22), e se r = -6, teremos a P.A. (16 + 6, 16, 16 – 6) = (22, 16, 10) .

EXERCÍCIOS:

1) Ache 3 números em P.A. tais que sua soma seja igual a 30 e seu produto, 910.

2) Numa P.A. crescente de 3 elementos, sua soma é 39 e a soma de seus quadrados é 539. Monte a P.A.

3) Os quatro termos de uma P.A. são inteiros e tais que a a sua soma é 20 e seu produto, 384. Monte a P.A.

Sugestão para a resolução: Represente a P.A. por (a – 2r, a – r, a + r, a + 2r). Resolvido o sistema resultante, r será a razão da P.A., o primeiro elemento será a – 2r, e assim por diante.

4) Ache os 5 termos de uma P.A. sabendo que sua soma é 5 e que a soma de seus cubos é 125.

5) Uma P.A. tem 3 termos tais que seu produto é o quadrado de sua soma, e, além disso, a soma dos dois primeiros é igual ao terceiro. Monte a P.A.

Resp.: (1) Os números são 7, 10, 13; (2) A P.A. é (9, 13, 17) ou (17, 13, 9) ;
(3) $P.A_1$: (2, 4, 6, 8) , $P.A_2$:(8, 6, 4, 2) ;

III) PROPRIEDADE:

Dados 3 elementos consecutivos de uma Progressão Aritmética, o elemento central é igual à média aritmética entre os outros dois.

Demonstração : Seja a P.A. (...., a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ...) , onde estamos considerando três elementos consecutivos. De acordo com a definição de P.A., podemos escrever : $a_p - a_{p-1} = a_{p+1} - a_p$, igualdade que nos permite afirmar que : $a_p + a_p = a_{p-1} + a_{p+1}$, então $2.a_p = a_{p-1} + a_{p+1}$, de onde concluímos que

$$a_p = \frac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2} \quad \text{(cqd)}$$

OBSERVAÇÃO :

A propriedade que acabamos de demonstrar é o que justifica a denominação de Progressão Aritmética a este tipo de progressão.

IV) TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

A definição de P. A. nos permite calcular seus elementos a partir do primeiro e da razão. Como qualquer um deles é igual ao seu precedente adicionado a ela, podemos obter o segundo, o terceiro, e assim por diante. Porém, imagine o trabalho que teríamos para calcular o milésimo termo deste modo!

Para tanto utilizaremos a Fórmula do Termo Geral da P.A., pois com ela poderemos obter qualquer um de seus elementos a partir do primeiro, da razão e do número de termos.

Observemos o seguinte : Dada a P.A. (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...) de razão r, se aplicarmos a definição, poderemos escrever :

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

\+ +

Se adicionarmos todos os primeiros membros e todos os segundos membros destas igualdades,

$a_4 = a_3 + r$ obteremos as seguintes somas :

.
.
.
.
.

$a_n = a_{n-1} + r$

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1 + a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + ... + a_{n-1} + r$

Se eliminarmos os termos iguais existentes nos dois membros dessa igualdade, teremos :

$$\left[a_n = a_1 + (n-1).r \right]$$

(fórmula do termo geral da P.A.)

EXEMPLOS :

1) Obtenha o 31º termo da P.A. cujo primeiro termo é 8 e cuja razão é 4.

Resolução : O enunciado do problema nos diz que nesta P.A., a_{31} é procurado, n = 31, a_1 = 8 e r = 4.

Então, se substituirmos na fórmula do termo geral , $a_n = a_1 + (n-1).r$, os dados, poderemos escrever :

$a_{31} = 8 + (31 – 1). 4$, ou ainda $a_{31} = 8 + 30 . 4$. Logo: $a_{31} = 128$.

2) Qual é o primeiro termo da Progressão aritmética cuja razão é igual ao 12º elemento e igual a 3 ?

Resolução : P.A.: a1 = ? n = 12, $a_{12} = r = 3$. Como $a_n = a_1 + (n-1).r$, então escrevemos que :

$3 = a_1 + (12 – 1).3$, ou seja : $3 = a_1 + 11.3$, então: $a_1 = 3 – 33$. Logo : $a_1 = -30$.

3) Calcule a razão da P.A. onde o primeiro termo é 13 e o vigésimo oitavo é 94.

Resolução : P.A.: r = ?, $a_1 = 13$, $a_{28} = 94$, n = 28. Substituamos os dados do problema na fórmula do termo geral : $94 = 13 + (28 – 1).r$, ou ainda : $81 = 27.r$, e por fim: r = 3.

4) Quantos termos possui a P.A. finita cujo último termo é 180, cujo primeiro termo é 12 e razão 4 ?

Resolução : P.A.: $n = ?$, $a_n = 180$, $a_1 = 12$ e $r = 4$. Se procedermos do mesmo modo que nas duas questões anteriores, teremos : $180 = 12 + (n - 1). 4$, logo: $168 = (n - 1).4$, ou : $42 = n - 1$, e daí : $n = 43$.

5) Interpole 5 termos aritméticos entre 6 e 18.

Resolução : Interpolar, ou intercalar, ou inserir, 5 termos aritméticos entre outros 2 , que são 6 e 18, Significa montar uma P.A. cujo primeiro termo é 6, cujo último é 18 e que possui 5 + 2 = 7 elementos. Logo, $18 = 6 + (7 - 1). r$, de onde temos $12 = 6.r$, e daí, $r = 2$, que é chamada razão de interpolação , ou intercalação , ou inserção aritmética, e teremos então a P.A.: (6, 8, 10, 12, 14, 16, 18) que possui 5 elementos entre 6 e 18.

EXERCÍCIOS :

1) A razão de uma P.A. é 6. Obtenha :

   a) seu décimo quinto termo, se o primeiro é 5;

   b) seu primeiro termo, se o vigésimo é 52 ;

   c) seu número de termos, se o primeiro é 11 e o último é 65.

2) A soma de 3 números em P.A. é 30 e o seu produto é 750. Monte a P.A.

3) Intercale 8 termos em P.A. entre os números 4 e 13.

4) Ache 4 números em Progressão Aritmética crescente de modo que sua soma seja 24 e a soma de seus quadrados seja igual a 164.

Resp.: (1a) 89; 1b) 166 ; 1c) 10 ; 2) (5, 10, 15) ou (15, 10, 5) ; 3) (4, 5,6,7,8,9,,10,11,12, 13);

4) (3, 5, 7, 9).)

V) **PROPRIEDADE :**

Numa Progressão Aritmética finita, dizemos que dois elementos a_p e a_q são eqüidistantes dos extremos se o número de termos que antecede a_p é igual ao número de termos que sucede a_q.

Demonstraremos que a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma de seus extremos.

Em simbologia algébrica, temos : Se tivermos a P.A.: ($a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ... , a_q, ... ,a_{n-1}, a_n$), onde a_p e a_q são elementos eqüidistantes dos extremos a_1 e a_n, então na P.A. inicial ficarão definidas outras duas com p elementos: P.A$_1$.: ($a_1, a_2,..., a_p$) e P.A2.: ($a_q, a_{q+1}, ..., a_n$) às quais poderemos aplicar a fórmula do Termo Geral : P.A1.: $a_p = a_1 + (p-1).r$ e P.A$_2$.: $a_n = a_q + (p-1).r$. Se subtrairmos membro a membro estas duas igualdades, teremos : ap - na = a1 - aq , e desta última igualdade, teremos : $a_p + a_q = a_1 + a_n$. Assim, fica demonstrada a propriedade.

VI) **PROPRIEDADE :**

SOMA DOS ELEMENTOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA FINITA :

Na P.A. ($a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ..., a_q, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$) , finita, a Soma S_n de seus n elementos será :

$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (1). Esta igualdade pode ser assim escrita :

$Sn = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (2). Se calcularmos (1) + (2) membro a a membro, teremos : $S_n + S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) + ...+(a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$.

Podemos perceber que o segundo membro desta última igualdade é composto de n somas de termos eqüidistantes dos extremos da P.A.. Então, se aplicarmos a propriedade anterior, teremos :

$2. S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$. Logo :

$2. S_n = (a_1 + a_n) . n$, ou ainda : $S_n = \frac{(a_1 + a_n). n}{2}$, que é a fórmula para cálculo da Soma dos elementos de uma P.A. finita.

EXEMPLOS :

1) Calcular a soma dos 25 primeiros elementos da P.A.: (3, 7, ...).

Resolução: Vamos calcular o 25º elemento desta P.A. cuja razão é $r = 7 - 3 = 4$, pelo seu termo geral:

$a_{25} = a_1 + (25 - 1).r$, então : $a_{25} = 3 + 24 . 4 = 3 + 96 = 99$. Apliquemos em seguida a fórmula da soma : $S_{25} = \dfrac{(a_1 + a_{25}). 25}{2} = \dfrac{(3 + 99) . 25}{2} = \dfrac{102 . 25}{2} = 1275$

2) Obtenha a soma dos múltiplos de 6 que possuam 3 algarismos.

Resolução : O primeiro elemento desta P.A., se ela for crescente, é 102, e o último é 996, e o número de termos é obtido pela fórmula do termo geral : $996 = 102 + (n-1). 6$, de onde tiramos $804 = (n-1).6$, logo $n-1 = 134$, e o valor de n será 135.

A soma destes elementos : $S_{135} = \dfrac{(102 + 996). 135}{2}$, ou ainda S135 = 74115

3) Calcule a soma dos 16 elementos da P.A, se ela é igual a 20 vezes o primeiro elemento e o último elemento é 102.

Resolução : $S_{16} = 20.a_1$, logo, se aplicarmos a fórmula da Soma da P.A., poderemos escrever :

$20.a_1 = \dfrac{(a_1 + 102).16}{2}$, então: $20.a_1 = (a_1 + 102). 8$, portanto: $20.a_1 = 8.a_1 + 816$, logo $12.a_1 = 816$, entao $a_1 = 68$. Como $S_{16} = 20. a_1$, facilmente chegaremos à conclusão que $S_{16} = 1360$.

EXERCICIOS :

1) Obtenha a soma dos números naturais maiores que 13 e menores que 1347.
2) Quantos termos possui a P.A. cujos extremos são 17 e 300, e cuja soma é 47550 ?
3) Some os 2501 primeiros elementos da P.A.: (-750, -732, ...).

4) O tratamento de um paciente indica que ele deve tomar 20 gotas de um remédio após o almoço do primeiro dia, 18 gotas após o almoço do segundo, 16 após o do terceiro, e assim por diante até que chegue a zero gotas. Qual o total das gotas que ele irá tomar?

5) Quantos termos tem a P.A.: (-100, -95, ...) sabendo que eles não são positivos ? Ache ainda o valor de sua soma.

6) Ache a soma dos números que não são múltiplos de 8 compreendidos entre 1000 e 9999.

7) Interpole 8 meios aritméticos entre 4 e 18 e some-os .

8) A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é obtida com o uso da fórmula $S_n = n^2 + 4n$. Calcule seu décimo quarto termo.

9) A soma dos 10 primeiros elementos de uma P.A. é 200, e a soma dos seus 20 primeiros elementos é 800. Encontre a soma dos 50 primeiros elementos dessa progressão.

10) Quantos são os meios aritméticos com razão igual a 5 que podemos intercalar entre 13 e 58. Obtenha a soma da P.A. decorrente.

Resp.: (1) 905760 ; 2) 300 ; 3) 398250 ; 4) 220 ; 5) 21, 1050 ; 6) 43 307 000 ; 7) 88 ; 8) 31 ; 9) 5000 ; 10) 8, 355.)