I) PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

Progressão Geométrica é uma sequência de elementos (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...) tais que, a partir do segundo, o quociente entre um elemento qualquer e seu antecedente seja uma constante "q" , que será chamada razão da Progressão.

Em linguagem algébrica, podemos escrever que, se a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n,...) é uma Progressão Geométrica de razão q, então $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = ... = q.$

EXEMPLOS :

1) A sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma P.G. infinita com q = $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = ... = 3$;

2) A sequência (4, 4, 4, 4, 4, 4) é uma P.G. finita com 6 elementos e q = $\frac{4}{4} = 1$;

3) A sequência (8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, ...) é uma P.G. infinita onde q = $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = ... = \frac{1}{2}$;

4) A sequência (2, -6, 18, -54, 162) é uma Progressão Geométrica finita com 5 elementos e razão q = $\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = \frac{162}{-54} = -3$;

5) A sequência (4, -4, 4, -4) é uma P.G. finita com 4 elementos e q = $\frac{-4}{4} = \frac{4}{-4} = \frac{-4}{4} = -1$;

6) A sequência (-8, 4, -2, 1, ...) é uma P.G. infinita cuja razão é q = - 1/2;

7) A sequência (-3, -3, -3, ...) é uma P.G. infinita de razão igual a 1;

8) A sequencia (-2, -6, -18, ...) e uma P.G. infinita com q = 3.

9) A sequencia (-2; -1; -0,5; ...) e´ P.G. infinita com q = 0,5

II) CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.G.

Classificamos uma P.G. levando em consideração a sua razão e, em alguns casos, seu primeiro termo. Assim temos os seguintes casos : Se a P.G. possuir :

1) $a_1 > 0$ e $q > 1$, como no primeiro exemplo, ela será crescente ;

2) $a_1 < 0$ e $q > 1$, como no oitavo exemplo, ela sera´ decrescente:

2) $q = 1$, como no segundo e no sétimo exemplos, ela será constante ou estacionária ;

3) $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, como no terceiro exemplo, ela será decrescente ;

4) $q < -1$, como no exemplo nº 4, ela será oscilante e divergente ;

5) $q = -1$, como no exemplo 5, ela será oscilante ;

6) $-1 < q < 0$, como no sexto exemplo, teremos uma progressão oscilante e convergente;

7) $a_1 < 0$, e $0 < q < 1$, como no exemplo 9, teremos uma P.G. crescente.

OBSERVAÇÃO : Como já sabíamos, não há nenhum caso de P.G. com razão nula.

EXEMPLOS :

1) Obtenha o valor de x de modo que a sequência (x-1, 2x, 5x+6) seja uma P.G.

Resolução : Se aplicarmos a definição de P.G. na sequência dada, poderemos escrever a seguinte sentença : $\frac{2x}{x-1} = \frac{5x+6}{2x}$. Esta proporção nos remete à equação $x^2 + x - 6 = 0$ cujas raízes são as seguintes : $x_1 = -3$, e obteremos a P.G.:(-4, -6, -9), ou $x_2 = 2$, e teremos a P.G.: (1, 4, 16).

2) Monte a P.G. de 3 elementos tais que sua soma é 42 e seu produto, 512.

Resolução : Seja a P.G.: (a, b, c). De acordo com os dados do problema, seus elementos podem formar as seguintes equações : $a + b + c = 42$, e $a . b . c = 512$.

A segunda equação que acabamos de escrever, nos permite afirmar que $\frac{b}{q} . b . bq = 512$, de onde vem que $b.b.b = 512$, ou ainda : $b^3 = 512$, logo $b = 8$.

A primeira equação nos diz que a + b + c = 42, logo $\frac{8}{q} + 8 + 8q = 42$, que podemos transformar na seguinte equaçao de 2º grau: $8q^2 - 34q + 8 = 0$, cujos valores da incognita podemos calcular, para obtermos : q_1 = 4 e temos a P.G.: (2, 8, 32) crescente , ou $q_2 = \frac{1}{4}$ e a P.G.: (32, 8, 2) decrescente.

EXERCICIOS:

1) Escreva a P.G. constante de quatro termos, se o produto de todos eles se iguala a 1296.

2) Numa P.G., o segundo elemento e a razao se igualam. Monte-a, se a soma de seus 3 elementos e´57.

3) O produto dos 5 termos de uma P.G. e 729. Obtenha o produto dos seus extremos.

4) Ache o valor de x, sabendo que a sequencia (x - 1, x + 8, x + 44) e´ uma P.G.

5) Ache o numero que, se for somado a 4, 8 e 13 nesta ordem, determinara uma P.G. Monte a P.G.

Resp.: (1) (6, 6, 6, 6) e (-6, -6, -6, -6) ; 2) (1, 7, 49) e (1, -8, 64) ; 3) 9 ; 4) 4 ; 5) 3 e P.G. : (4, 8, 16) .)

III) PROPRIEDADE

Dados 3 termos consecutivos de uma P.G., o modulo do termo central sera a Media Geometrica dos outros dois.

Demonstraçao : Seja a P.G.: (.... , a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ...) . Conforme a definiçao de P.G. podemos escrever : $\frac{a_p}{a_{p-1}} = \frac{a_{p-1}}{a_p}$. Se multiplicarmos em cruz os elementos desta proporçao poderemos ter :

$a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$. Logo, $a_p = \pm\sqrt{a_{p-1} \cdot a_{p+1}}$. Portanto, $|a_p| = \sqrt{a_{p-1} \cdot a_{p+1}}$ (c.q.d.)

OBSERVAÇAO : Esta propriedade deixa claro o motivo de as P.Gs. terem o nome que ostentam.

TERMO GERAL DE UMA PROGRESSAO GEOMETRICA

Analogamente ao que fizemos com as P.As., desenvolveremos a seguir uma forma de obtermos qualquer termo da P.G. da qual conhecemos a razão, a ordem do termo procurado e o primeiro termo.

Assim, seja a P.G.: (a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-1}, a_n, ...). De acordo com a definiçao de P.G., podemos escrever:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_2 . q$

....

....

$a_{n-1} = a_{n-2} . q$

$a_n = a_{n-1} . q$

Se multiplicarmos membro a membro estas igualdades, teremos : $a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_{n-1} . a_n = a_1 . a_1.q . a_2.q . a_3.q . \ldots . a_{n-2}.q . a_{n-1}.q$. Simplifiquemos a igualdade, e então ficaremos com : $\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$; que vem a ser a fórmula do termo geral da P.G.

EXEMPLOS:

1) Calcule o oitavo termo da P.G. de primeiro termo 4 e razão 3.

Resoluçao : Pelo enunciado, procuramos a_8 e sabemos que $a_1 = 4$ e $q = 3$. Logo, pela formula do termo geral, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, teremos : $a_8 = 4 . 3^{8-1} = 4 . 3^7 = 4 . 2187 = 8748$.

2) Obtenha o primeiro termo da P.G. onde o 10º termo e´ 6 e a razão, 2.

Resoluçao : Sabemos que nesta P.G., $a_{10} = 6$ e $q = 2$. Procuramos a_1. Com a mesma formula entao, $a_n = a_1.q^{n-1}$, escreveremos : $6 = a_1.2^{10-1}$, logo, $6 = a_1.2^9$, e $6 = a_1.512$. Portanto : $a_1 = \frac{6}{512} = \frac{3}{256}$

3) Ache a razão da P.G. valor 4 para o primeiro elemento e 1024 para o quinto.

Resoluçao : Nesta progressão, $a_1 = 4$, $a_5 = 1024$ e queremos o valor de q. Novamente, se utilizarmos o termo geral, teremos : 1024 = 4. q^{5-1} . Então $q^4 = \frac{1024}{4}$. Portanto : q = $\pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$.

OBSERVAÇAO : Como q = ± 4, surgem duas P.Gs.: Se q = 4 : P.G.: (4, 16, 64, 256, 1024) que é crescente, e, se q = -4 , P.G.: (4, -16, 64, -256, 1024) que é oscilante divergente.

4) Quantos termos tem a P.G. finita : (6, 18, ... , 13122) ?

Resoluçao : De acordo com a definiçao de P.G., q = 18/6 = 3, e se utilizarmos a formula do termo geral, escreveremos : 13122 = 6. 3^{n-1} que e´ uma equaçao exponencial. Entao, $3^{n-1} = 2187$, portanto $3^{n-1} = 3^7$, e concluiremos que n-1 = 7, logo a quantidade de termos desta P.G. e´ n = 8.

5) Interpole 6 termos geometricos entre os numeros -10935 e 5.

Resolução : Do mesmo modo que nas interpolaçoes aritmeticas, se desejamos interpolar 6 termos entre outros dois, entao a P.G. possuira´ 8 termos. Entao, a formula que estamos estudando representara´ nosso problema da seguinte maneira : -5 = -10935. q^{8-1} , e assim, $q^7 = \frac{5}{-10935} = -\frac{1}{2187}$. Podemos agora calcular o valor de q : q = $\sqrt[7]{-\frac{1}{2187}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{3^7}} = -\frac{1}{3}$. A progressão que desejamos será então:

P.G.: (-10935, 3645, -1215, 405, -135, 45, -15, 5)

EXERCÍCIOS:

1) Uma P.G. possui primeiro membro igual a -3. Calcule seu :

   a) sétimo elemento, se sua razão é 4;

   b) oitavo elemento, se sua razão é -1/3 ;

   c) número de elementos, se o último é -243 e a razão é 3;

2) O produto de 3 números em P.G. é 1728 e a diferença entre o maior e o menor é 32. Monte a P.G.;

3) Interpole 6 termos geométricos entre -5 e 640 ;

4) Ache a razão da P.G. de quatro elementos cuja soma dos extremos é 325 e a dos centrais é 100.

Resp.: (1a) -12288; 1b) 1/729 ; 1c) 5 ; 2) (4, 12, 36) ou (-36, 12, -4) ;

3) (10, -20, 40,-80, 160, -320) ; 4) ¼ ou 4.)

IV) PROPRIEDADE

Numa P.G. finita, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração : Seja a P.G.: ($a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_s, \ldots, a_{n-1}, a_n$) onde a_p e a_s são dois termos equidistantes dos extremos a_1 e a_n. Assim, surgem na P.G. duas outras PGs. finitas com p elementos : $P.G_1$: ($a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p$) e P.G2 : ($a_s, a_{q+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$). Se aplicarmos a fórmula do termo geral nestas duas progressões com razão q, poderemos escrever :

$$\left.\begin{array}{ll} P.G_1: & a_p = a_1 . q^{p-1} \\ P.G_2.: & a_n = a_s . q^{p-1} \end{array}\right\}$$ Se dividirmos membro a membro estas duas equações, ficaremos com :

$$\frac{a_p}{a_n} = \frac{a_1}{a_s}$$, de onde obteremos : $a_p . a_s = a_1 . a_n$. cqd

V) PRODUTO DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

Seja a P.G. finita : ($a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_s, \ldots, a_{n-1}, a_n$) , onde são equidistantes dos extremos os elementos a_p e a_s, e assim, o produto destes n elementos será :

$P_n = a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_p . \ldots . a_s . \ldots . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n$. - Esta última igualdade pode ser assim escrita:

$P_n = a_n . a_{n-1} . a_{n-2} . \ldots . a_s . \ldots a_p . \ldots . a_3 . a_2 . a_1$. - Multipliquemos membro a membro estas sentenças:

$P_n.P_n = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1}).(a_3.a_{n-2}). \ldots .(a_p.a_s). \ldots .(a_s.a_p). \ldots .(a_{n-2}.a_3).(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$

Os parênteses envolvem produtos de termos equidistantes dos extremos da P.G. Então, conforme a propriedade demonstrada, teremos :

$P_n^2 = (a_1.a_n). (a_1.a_n). .... . (a_1.a_n). ... .(a_1.a_n). ....(a_1.a_n). (a_1.a_n).$

Logo, $P_n^2 = (a_1.a_n)^n$, e daí : $Pn = \pm \sqrt{(a_1.a_n)^n}$, onde o sinal ± será positivo se o número de termos negativos for par e negativo caso seja ímpar.

EXEMPLOS :

1) Obtenha o produto dos 10 primeiros elementos da P.G. : (-2, 6, ...)

Resolução : Nesta P.G., q = $\frac{6}{-2} = -3$, portanto, $a_{10} = a_1.q^9 = -2.(-3)^9 = -2.(-19683) = 39366$.

O produto de 10 primeiros termos será negativo, pois o número de elementos negativos é 5. Então, escrevemos: $P_{10} = \pm\sqrt{(-2.39366)^{10}} = -\sqrt{+78732^{10}} = -78732^5 =$ -

OBSERVAÇÃO: Afinal, porque o produto desta questão ficou negativo ? Ora, muito fácil: É que dentro dos 10 termos da P.G. há 5 elementos negativos cujo produto naturalmente é negativo.

2) Calcule o produto dos 25 primeiros elementos da P.G.:(-3, -6, -12,...)

Resolução : A razão desta progressão é : $q = \frac{-6}{-3} = 2$, então $a_{25} = -3.2^{24}$, e o produto dos 25 elementos será : $P_{25} = -\sqrt{(-3)^{25}.(-3.2^{24})^{25}} = -\sqrt{(-3)^{50}.(-2)^{600}} = -3^{25}.2^{300}$ (O produto é negativo pois há na progressão 25 termos negativos).

EXERCÍCIOS:

1) Calcule o produto dos 101 primeiros elementos da P.G.:

a) (-1, 1, -1, ...) ; b) (1, -1, 1, ...) ; c) (-1, -1, -1, ...) ; d) (1, 1, 1, ...)

Resp.: (1a) -1 ; 1b) 1 ; 1c) -1 ; 1d) 1).

2) Multiplique os 8 primeiros termos da progressão geométrica :

a) ($\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}, ...$) ; b) (0,5 , 0,25 , ...) ; c) (1-$\sqrt{3}$, -2, ...) ; d) ($\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{\sqrt{m}}{m}, ...$)

Resp.: (2a) 16625 ; 2b) $\frac{1}{256}$; 2c) -2.(1 + $\sqrt{3}$)^6 ; 2d) $\frac{\sqrt{m}}{m^8}$.)

VI) SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

Seja a P.G. com n elementos : ($a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$). Se somarmos seus membros, escreveremos :

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. (1). Multipliquemos por 'q' os dois membros de (1) : $q.S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)$ ou ainda, se distribuirmos q pelo 2º membro :

$q.S_n = q.a_1 + q.a_2 + q.a_3 + ... + q.a_{n-2} + q.a_{n-1} + q.a_n$ (2) . Se efetuarmos a operação (2)-(1), ficaremos com : $q.S_n - S_n = qa_1 - a_1 + qa_2 - a_2 + qa_3 - a_3 + ... + qa_{n-2} - a_{n-2} + qa_{n-1} - a_{n-1} + qa_n - a_n$.

Como $qa_1 = a_2, qa_2 = a_3, ..., qa_{n-1} = a_n$, e assim por diante. Então a diferença (2) - (1) que estamos calculando se transformará em :

$$q.S_n - S_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + ... - a_{n-2} + a_{n-1} - a_{n-1} + a_n - a_n + a_n - a_n + q.a_n$$

Percebemos então que :

$S_n(q-1) = q.a_n - a_1 = q.a_1.q^{n-1} - a_1 = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1)$. Portanto, a Soma dos n primeiros termos da Progressão Geométrica será : $\left[\; S_n = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \;\right]$

EXEMPLOS:

1) Calcule a soma dos 6 primeiros elementos da P.G.: (3, 5, ...)

Resolução :

$$q = \frac{5}{3} \rightarrow S_6 = \frac{3.[(\frac{5}{3})^6 - 1]}{\frac{5}{3} - 1} = \frac{3.(\frac{15625}{729} - 1)}{\frac{2}{3}} = \frac{7438}{81}$$

2) Quantos elementos possui a P.G.: (4, 8, ...) para que a soma de seus elementos seja 4092 ?

Resolução :

$$q = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow S_n = \frac{4.(2^n - 1)}{2 - 1} = 4.(2^n - 1) = 4092$$

Logo, $2^n - 1 = 1023 \rightarrow 2^n = 1024$, que é uma equação exponencial cuja solução se resume em fatorar os seus dois membros. Assim, teremos: $2^n = 2^{10} \rightarrow n = 10$

EXERCÍCIOS:

1) Obtenha a soma dos 8 primeiros termos da P.G.:

a) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...)$; b) (1, -4, 16, ...) ; c) (-1, -3, -9, ...) ; d) $(2, \frac{4}{3}, ...)$

2) Quantos elementos deve possuir a P.G. cujo primeiro termo é 2 e cuja razão é 5 para que a soma dos seus termos seja igual a 7812 ?

3) Obtenha o quinto elemento da P.G. de 11 elementos , sabendo que a soma de seus 10 primeiros elementos é 3069 e que a soma dos 10 últimos é 6138.

Resp.: (1 a) $\frac{3280}{2187}$; 1 b) 13107 ; 1c) 3280 ; 1d) $\frac{12610}{2187}$; 2) 6 ; 3) 48)

LIMITE DA SOMA DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Pensemos agora da seguinte P.G. : $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$. Se calcularmos as somas de seus elementos conforme aumentamos o número desses elementos, poderemos verificar que :

Se n = 1, então $S_1 = 1$

Se n = 2, então $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ = 1,5

Se n = 3, então $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$

Se n = 4, então $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$

Se n = 5, então $S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 1,9375$

E assim por diante.

Vemos então que , por mais que calculemos estas somas, os seus resultados irão se aproximar do número 2, sem nunca chegar realmente a 2. Dizemos assim que o limite da Soma S_n quando "n" cresce cada vez mais, é 2. Este fato é representado algebricamente por $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ e damos a esta expressão o símbolo S.

Devemos ler $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ deste modo : S é o limite de Sn, quando n tende ao infinito.

Como observação ao que estamos mostrando, é importante percebermos que o limite de uma P.G. só é um número real, se a razão q da P.G. não for nula e estiver colocada entre os números -1 e +1, e for diferente de zero.

Obtenhamos agora a expressão que nos dá o limite da Soma da P.G. infinita e cuja razão esteja entre -1 e 1, e não seja nula :

Assim, seja a P.G.: $(a_1, a_2, a_3, ...)$ nas condições expostas anteriormente. Como já é de nosso conhecimento, se esta P.G. fosse finita a Soma de seus elementos seria dada por $S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$. Como ela é infinita, devemos calcular S, limite da Soma quando n se torna cada vez maior. Isto é :

$$\left(S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} \right)$$

OBSERVAÇÃO : É importante lembrar que, quando n tende ao infinito, a potência q^n tende a zero, uma vez que a razão "q" é um número real diferente de zero e entre -1 e 1.

EXEMPLOS:

1) Obtenha a soma dos elementos da P.G.: (2, 1, $\frac{1}{2}$,......)

Resolução : Como esta P.G. é infinita e sua razão $q = \frac{1}{2}$ se encontra entre -1 e 1, e é diferente de zero, podemos calcular o limite S da soma de seus elementos :

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

2) Ache a soma dos elementos da sequência : $(\frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, ...)$

Resolução : Esta sequência é uma P.G. de razão $q = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{5}{81}}{\frac{5}{27}} = \frac{1}{3}$, diferente de zero e entre -1 e 1.

Então, sua soma será $S = \frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{9}.\frac{3}{2} = \frac{5}{6}$

3) Ache a fração geratriz da dízima periódica 2, 4153153153...

Resolução : Esta dízima periódica é um número racional que pode ser escrito conforme a seguinte sentença : 2,4153153153... = 2,4 + 0.0153 + 0,0000153 + 0,0000000153 + ..., onde 2,4 é sua parte não periódica e o restante é a parte periódica, e podemos escrevê-la como uma P.G.. Ou seja :

$$2{,}4153153153... = \frac{24}{10} + \frac{153}{10000} + \frac{153}{10000000} + \frac{153}{10000000000} + ...$$

Então, 2,4153153153153... = $\frac{24}{10} + S$, onde S é a soma da PG apresentada ; Calculando S, teremos ?

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{153}{10000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{153}{10000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{153}{10000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{153}{9990} = \frac{17}{1110}$$

Assim, a fração geratriz solicitada será G = $\frac{24}{10} + S = \frac{24}{10} + \frac{17}{1110} = \frac{2681}{1110}$

EXERCÍCIOS:

1) Obtenha o limite da soma das seguintes Progressões Geométricas :

a) (1; 0,2; ...) ; b) (2/3 , 1/3, ...) ; c) ($-\frac{5}{2}.\frac{3}{2}$,...) ; d) ($\sqrt{3},-1,....$) ; e) ($-2\sqrt{2},-2,....$) .

2) Obtenha o primeiro termo e a razão da P.G. cujo limite da soma é 4, se o primeiro termo é igual à razão da progressão.

3) Obtenha a geratriz das seguintes dízimas periódicas :

a) 0,35353535... ; b) 3,2575757... ; c) 1,999999... ; d) 0,19999... ; e) 2,321032103210... .

4) Uma P.G. infinita é tal que a soma de seus termos de ordem ímpar é 20 e a dos de ordem par é 10. Encontre o primeiro termo desta P.G..

5) Seja um quadrado de 2cm de lado. Os pontos médios de seus lados formam um outro quadrado cujos pontos médios dos lados formam um novo quadrado, e assim por diante. Obtenha a soma :

a) dos comprimentos das diagonais de todos os quadrados ;

b) das áreas de todos os quadrados.

Resp.: (1a) 1,25 , 1 b) 4/2 , 1c) $-\frac{25}{16}$; 1d) , $\frac{3.(\sqrt{3}-1)}{2}$; 1e) $4\sqrt{2}+4$; 2) $\frac{4}{5}$; 3a) $\frac{35}{99}$, 3b) $\frac{43}{132}$, 3c) 2 , 3d) $\frac{1}{5}$, 3e) $\frac{7736}{3333}$; 4) 15 ; 5 a) $4(\sqrt{2}+1)cm$) ; 5b) 8cm^2)

EXERCÍCIOS GERAIS DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

1) Se a P.G.: (x, y, z) possui razão igual a 2, então quanto será o valor da soma dos logaritmos de base 2 de seus elementos ?

2) Os lados de um triângulo retângulo estão em P.G. de razão 2. Obtenha o seu menor ângulo agudo.

3) Dadas as progressões : Aritmética $(a_1, a_2, ...)$ de razão 3 e Geométrica $(b_1, b_2, ...)$ de razão ½, e tais que $a_6 = b_1$ e $a_3 = b_2$, calcule soma entre a_4 e b_3.

4) Suponhamos a P.A.: (x,y,z) cuja soma é 15, e a P.G.: (x, y+1, z+5) de soma 21. Se elas são crescentes, obtenha a P.A. e a P.G..

5) Seja o triângulo equilátero de 8 cm de lado. Inscreva-se nele uma circunferência, e nela outro triângulo equilátero, e assim por diante. Obtenha :
   a) O limite dos perímetros dos triângulos;
   b) O limite dos perímetros das circunferências;
   c) O limite das áreas dos triângulos;
   d) O limite das áreas dos círculos determinados pelas circunferências.

Resp.: (1) $3(1+\log_2^x)$; 2) 30º ; 3) 27/2 ; 4) P.A.:(3, 5, 7), P.G.:(3,6,12) ;