

FUNÇÕES CONSTANTE, DE PRIMEIRO E DE SEGUNDO GRAUS.

DEFINIÇÕES:

FUNÇÃO CONSTANTE:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada constante se puder ser escrita na forma $y = f(x) = a$, onde a é um número real fixo. Como exemplos, podemos escrever $f(x) = 6$, $y = -2$, $y = 0$. Note que a variável x nem aparece na representação algébrica desta função.

FUNÇÃO DE PRIMEIRO GRAU:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de primeiro grau na variável x se puder ser escrita na forma $y = f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais denominados coeficientes, e a é não nulo.

Assim, as igualdades $f(x) = 2x - 5$ (coeficientes $a = 2$ e $b = -5$), $y = -3x + 8$ (coeficientes $a = -3$ e $b = 8$), $y = 4x + 1$ ($a = 4$ e $b = 1$), e $f(x) = -9x$ ($a = -9$ e $b = 0$) são funções de primeiro grau na variável x . Note que “ a ” nunca é zero, pois senão a função deixaria de ser de primeiro grau.

FUNÇÃO DE SEGUNDO GRAU:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de segundo grau ou quadrática na variável x se puder ser escrita na forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde os coeficientes a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

Conforme a definição, as igualdades $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ (coeficientes $a = 2$, $b = 3$, $c = -4$), $y = -x^2 + 8x$ ($a = -1$, $b = 8$, $c = 0$), $y = 3x^2 - 12$ ($a = 3$, $b = 0$, $c = -12$) são funções de segundo grau na variável x . Aqui também, é importante notar que o coeficiente “ a ” nunca é nulo.

OBSERVAÇÕES:

Estas funções não são novidade para você, pois já deve tê-las estudado no Ensino Fundamental, e vamos partir do fato de você já saber que a representação gráfica de uma função constante ser sempre uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois, para qualquer valor que se atribua a x , a função não muda (constante). Vamos supor também que você saiba que a representação gráfica de uma função de primeiro grau seja também uma reta não paralela a nenhum dos eixos, e que o gráfico da função de segundo grau seja uma parábola cujo eixo de simetria seja sempre perpendicular ao eixo x .

Além disso, sabemos que para determinarmos uma reta, necessitamos ou de um ponto e uma direção, ou de dois pontos distintos. No caso da função constante $f(x) = a$, utilizamos o ponto $(0, a)$ e seu paralelismo com o eixo das abscissas, e no caso da função de 1º grau, utilizamos seus interceptos (cruzamentos com os eixos x e y), e, caso eles sejam coincidentes, acrescentamos um outro qualquer de seus pontos, chutando um valor para x .

Para determinarmos uma parábola, serão utilizados seus interceptos e seu Vértice. Se houver coincidências, o mínimo de pontos que devemos ter é três, e, se for o caso, para chegar a eles, podemos usar o eixo de simetria, que é a perpendicular ao eixo x que passa pelo Vértice (último ponto da tabela), calcular e desenhar pontos simétricos convenientes.

Passemos então ao traçado das representações gráficas de tais funções:

PROCEDIMENTOS:

Para traçarmos os gráficos destas funções, utilizaremos sempre as tabelas a seguir, que se baseiam nas definições e nas propriedades das figuras que as representam. Assim, temos:

FUNÇÃO CONSTANTE

$$y = a$$

x	y
0	a

FUNÇÃO DE 1º GRAU

$$y = ax + b$$

x	y
0	b
$-\frac{b}{a}$	0

FUNÇÃO DE 2º GRAU

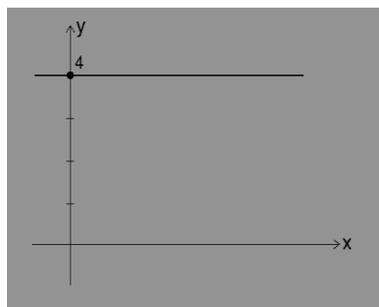
$$y = ax^2 + bx + c$$

x	y
0	c
x'	0
x''	0
$-\frac{b}{a}$	$-\frac{\Delta}{4a}$

EXEMPLOS: Representar graficamente as seguintes funções:

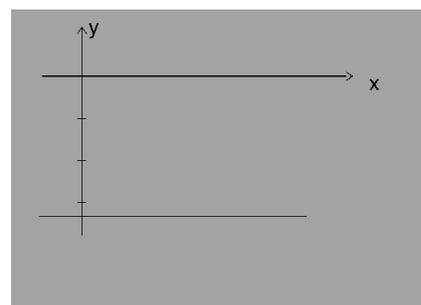
1) $f(x) = 4$

x	y
0	4



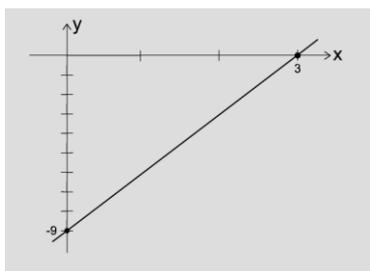
2) $y = -2\sqrt{3}$

x	y
0	$-2\sqrt{3}$



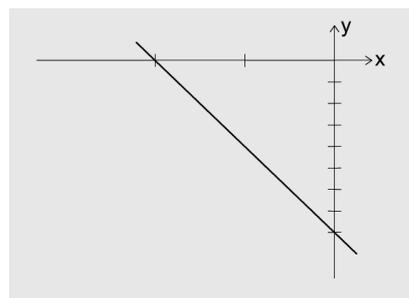
3) $y = 3x - 9$

X	y
0	-9
3	0



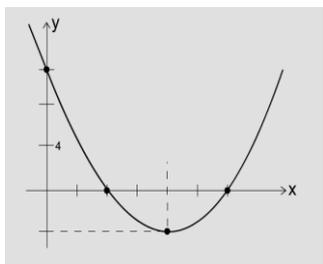
4) $f(x) = -4x - 8$

x	y
0	-8
-2	0



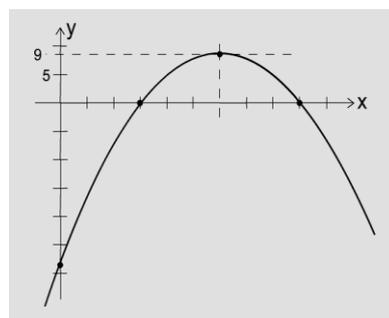
5) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

x	y
0	12
2	0
6	0
4	-4



6) $y = -x^2 + 12x - 27$

x	y
0	-27
3	0
9	0
6	9



CONCEITO:

Já vimos que os pontos onde uma função corta o eixo x ou o eixo y são seus Intercepts. Fica fácil perceber que os pares ordenados que representam tais pontos possuem ou a abscissa ou a ordenada nula.

Então você deve ter notado que todos os pares ordenados das tabelas apresentadas para as funções constante e de primeiro grau se referem aos seus interceptos, e os da função de segundo grau também, com exceção do último, que vem a ser o seu ponto mais alto ou mais baixo, ou Vértice da parábola.

OBSERVAÇÕES:

Os exemplos que acabamos de ver nos permitem algumas conclusões:

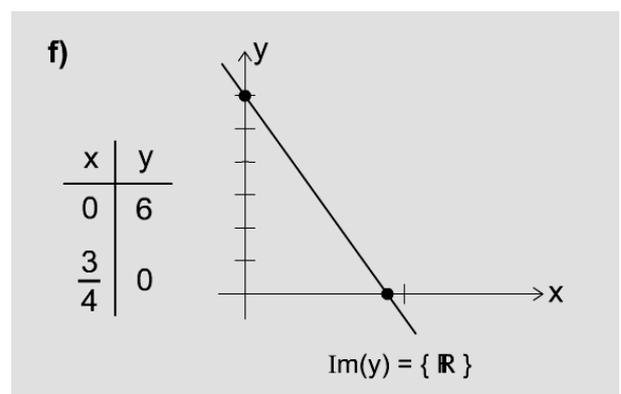
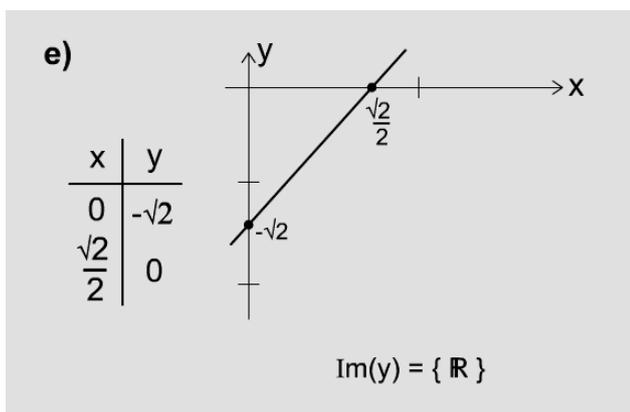
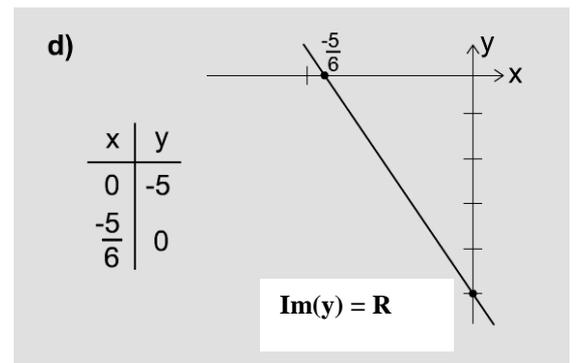
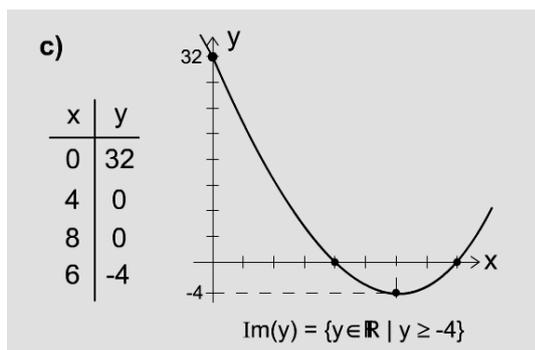
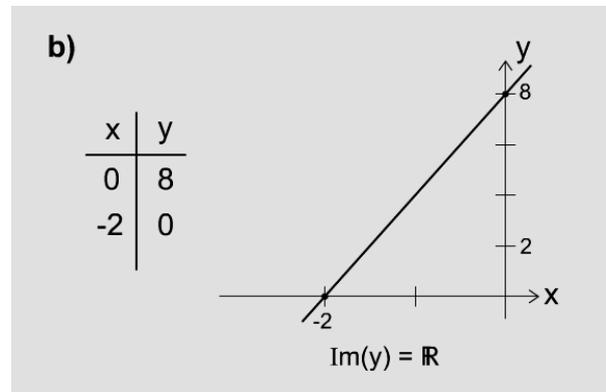
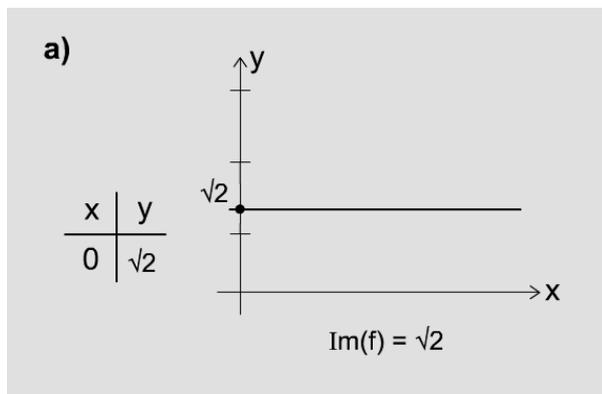
- Função constante $f(x) = a$: Sua Imagem é sempre o conjunto unitário $\{a\}$
- Função de 1º grau $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$: Sua Imagem é o conjunto \mathbb{R} e ela é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.
- Função de 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Possui concavidade voltada para cima quando $a > 0$, e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} / y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$. Quando $a < 0$, sua concavidade é voltada para baixo e ela possui Imagem tal que $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} / y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$.

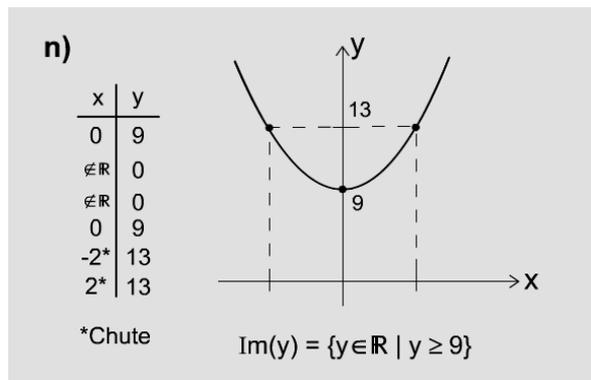
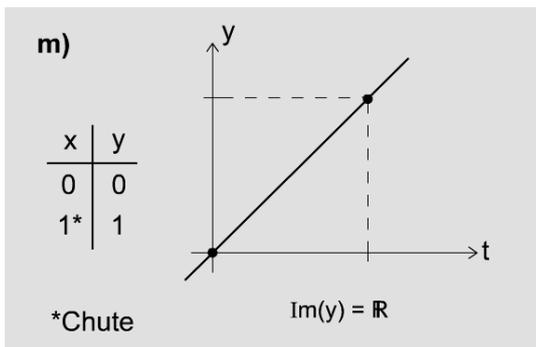
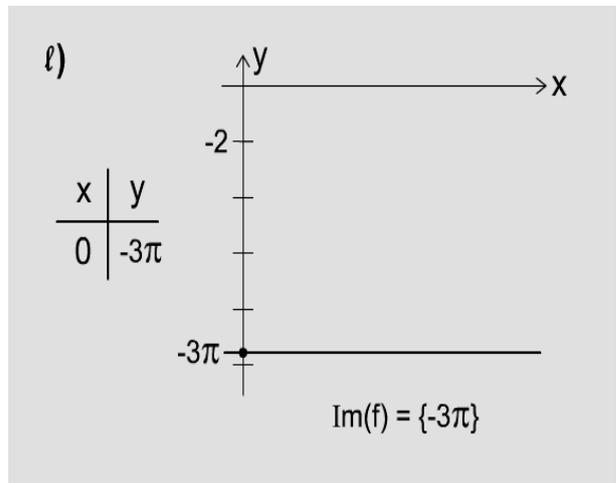
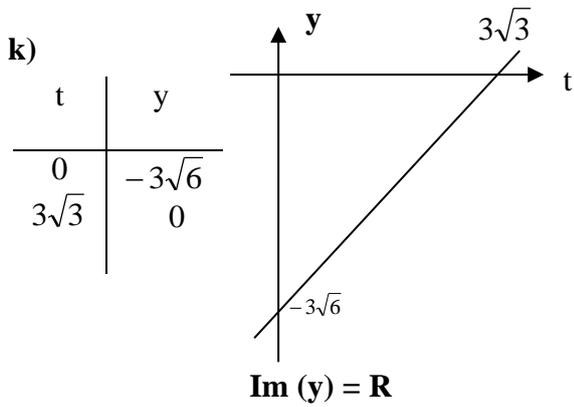
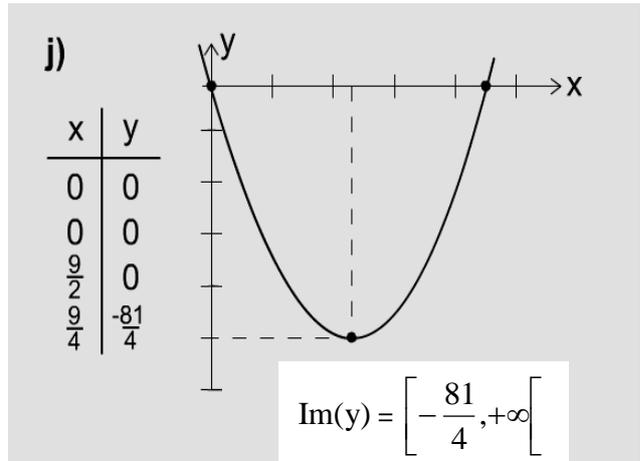
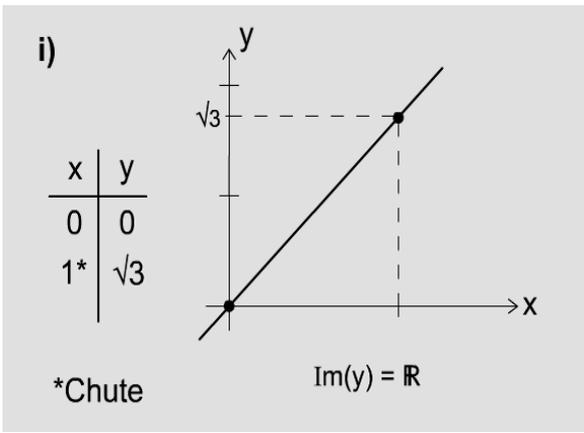
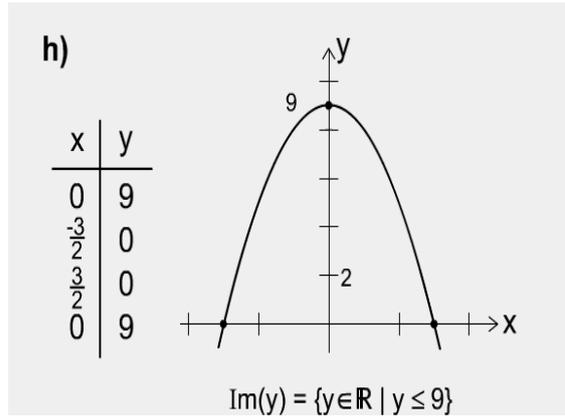
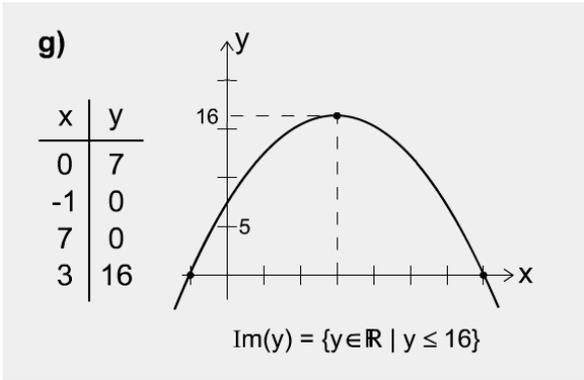
EXERCÍCIOS:

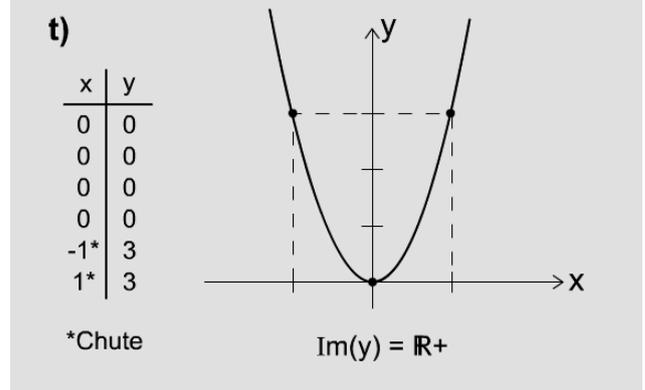
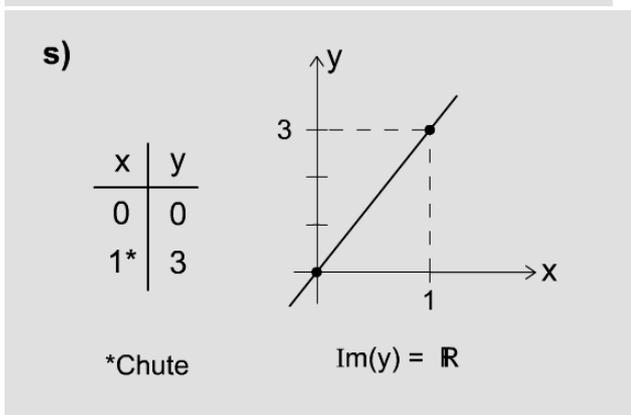
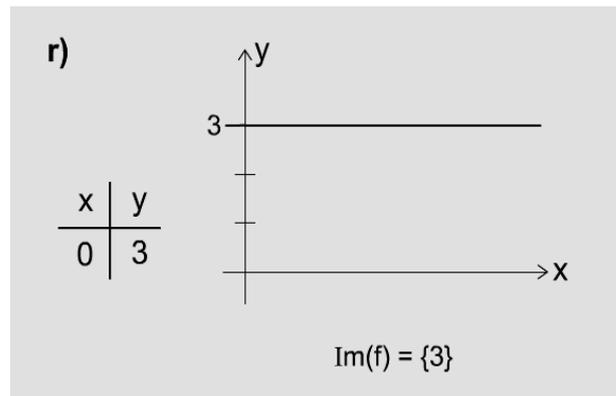
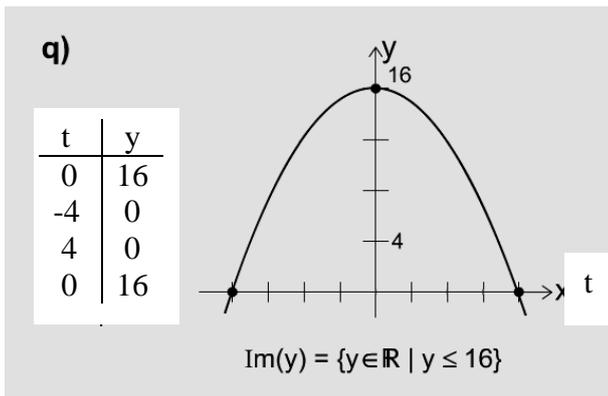
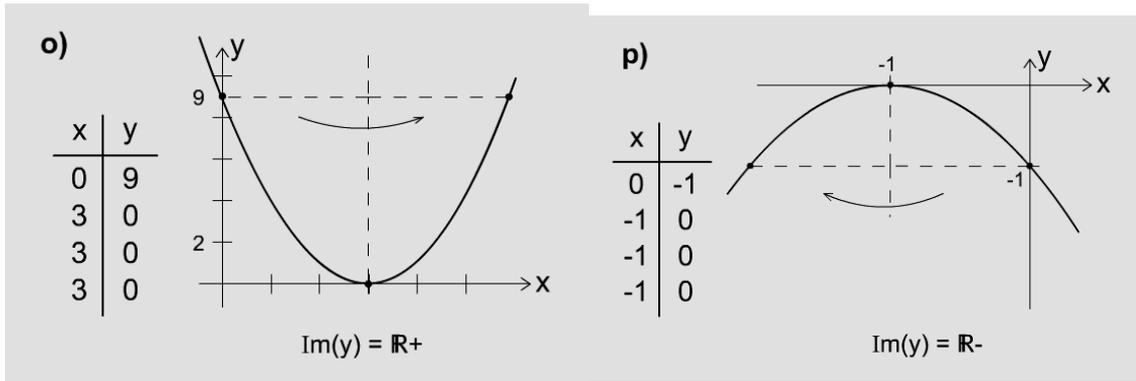
Representar graficamente as funções e escrever suas Imagens:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{2}$ | b) $y = 4x + 8$ | c) $y = x^2 - 12x + 32$ |
| d) $y = -6x - 5$ | e) $y = 2x - \sqrt{2}$ | f) $g(x) = -8x + 6$ |
| g) $h(x) = -x^2 + 6x + 7$ | h) $y = 9 - 4x^2$ | i) $y = x\sqrt{3}$ |
| j) $f(x) = 2x^2 - 9x$ | k) $f(t) = \sqrt{2}t - 3\sqrt{6}$ | l) $f(x) = -3\pi$ |
| m) $f(t) = t$ | n) $f(x) = x^2 + 9$ | o) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ |
| p) $y = -x^2 - 2x - 1$ | q) $g(t) = -t^2 + 16$ | r) $y = 3$ |
| s) $y = 3x$ | t) $y = 3x^2$ | |

RESPOSTAS







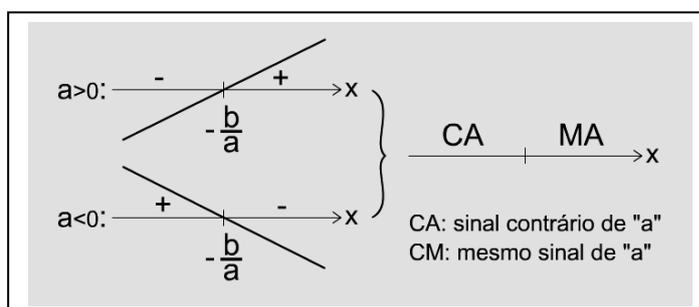
OBSERVAÇÕES:

Sinais das funções:

Os gráficos que acabamos de traçar nos permitem algumas conclusões a respeito dos sinais destas funções:

a) A função constante $f(x) = a$ tem sempre o mesmo sinal de “a” (MA).

b) A função de 1º grau $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) tem os sinais conforme a figura:



c) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) tem os sinais obedecendo a tabela :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$:			
$a < 0$:			

$\Delta > 0$	MA	CA	MA	$\rightarrow x$
	x_1	x_2		
$\Delta = 0$	MA	MA		$\rightarrow x$
	$x_1 = x_2$			
$\Delta < 0$	MA			$\rightarrow x$
	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$			

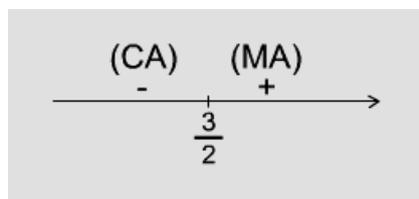
1) $f(x) = -5$. Esta função, que é constante, tem sempre o mesmo sinal de “a”. Como $a = -5$, então ela é sempre negativa, e devemos escrever :

$$f(x) = 0, \text{ então } x \notin \mathbb{R}$$

$$f(x) < 0 \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

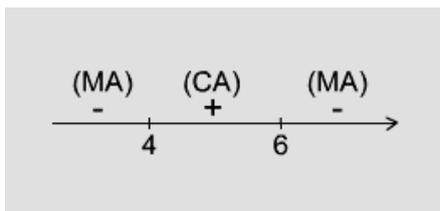
$$f(x) > 0, \text{ então } x \notin \mathbb{R}$$

2) $f(x) = 4x - 6$. Esta função é de 1º grau. Conforme o esquema da página anterior, seus sinais são CA e MA, ou, como a é positivo, -, +, e devemos escrever:



$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / x = \frac{3}{2} \\ f(x) > 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / x > \frac{3}{2} \\ f(x) < 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

3) $f(x) = -x^2 + 10x - 24$. As raízes desta função de 2º grau são 4 e 6. Logo, como seus sinais são CA, MA e CA, ou, como a é negativo, +, -, +, teremos:



$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / x = 4 \text{ ou } x = 6 \\ f(x) > 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / 4 < x < 6 \\ f(x) < 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} / x < 4 \text{ ou } x > 6 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS: Estudar os sinais das funções:

- a) $y = 4x - 2$ b) $f(x) = -x - 6$ c) $f(t) = -3t + 11$
d) $y = -x^2 + 2x + 35$ e) $f(x) = -\frac{2}{3}$ f) $y = 4x^2 - 9$
g) $f(w) = -w^2 - 6w$ h) $f(9x) = -\sqrt{2}x^2$ i) $y = x^2 + 3x + 6$
j) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ k) $g(t) = 3\pi$ l) $g(x) = 3\pi x$

Respostas:

$$\text{a) } \begin{cases} y > 0, \text{ para } x > \frac{1}{2} \\ y = 0, \text{ para } x = \frac{1}{2} \\ y < 0, \text{ para } x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 6 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < -6 \\ f(x) < 0, \text{ para } x > -6 \end{cases} \quad \text{c) }$$

$$\begin{cases} f(t) = 0, \text{ para } t = \frac{11}{3} \\ f(t) > 0, \text{ para } t < \frac{11}{3} \\ f(t) < 0, \text{ para } t > \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y = 0, \text{ para } x = -5 \text{ ou } x = 7 \\ y > 0, \text{ para } -5 < x < 7 \\ y < 0, \text{ para } x < -5 \text{ ou } x > 7 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0, \text{ para } x \notin \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{f) }$$

$$\begin{cases} y = 0, \text{ para } x = \pm \frac{3}{2} \\ y > 0, \text{ para } x < -\frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2} \\ y < 0, \text{ para } -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} f(w) = 0, \text{ para } w = -6 \text{ ou } w = 0 \\ f(w) < 0, \text{ para } w < -6 \text{ ou } w > 0 \\ f(w) > 0, \text{ para } -6 < w < 0 \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ f(x) < 0, \text{ para } x \neq 0 \\ f(x) > 0, \text{ para } x \notin \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} y \geq 0, \text{ para } x \notin \mathbb{R} \\ y > 0, \text{ para } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -3 \\ f(x) > 0, \text{ para } x \neq -3 \\ f(x) < 0, \text{ para } x \notin \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{k) } \begin{cases} g(t) \leq 0, \text{ para } t \notin \mathbb{R} \\ g(t) > 0, \text{ para } \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{l) } \begin{cases} g(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ g(x) > 0, \text{ para } x > 0 \\ g(x) < 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

CONCEITO:

Inequações:

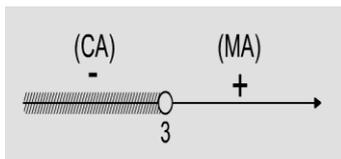
Toda inequação é uma desigualdade aberta, o que significa que ela contém ao menos uma incógnita. Trabalharemos a seguir com inequações de 1º e de 2º graus com uma só incógnita, e para isso utilizaremos os estudos de sinais das funções que acabamos de fazer.

EXEMPLOS:

Resolva as inequações em \mathbb{R} :

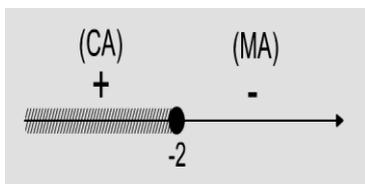
1) $2x - 6 < 0$

A função $y = 2x - 6$, de primeiro grau, tem os sinais $-,+$ (CA,MA) e raiz $-\frac{b}{a} = \frac{6}{2} = 3$. Como a inequação pede que a função $2x - 6$ seja menor que zero, hachuraremos a região do eixo x onde o sinal seja negativo, e veremos que a solução é $x < 3$. Assim, $V = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$.



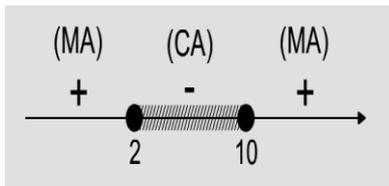
2) $-3x - 6 \geq 0$

A função $y = -3x - 6$, de 1º grau, tem os sinais $+,-$ (CA,MA) e raiz igual a -2 . A função $-3x - 6$ deve ser maior ou igual a zero. Então vamos hachurar a raiz, além da região onde o sinal é positivo, e a solução da inequação será: $V = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$.



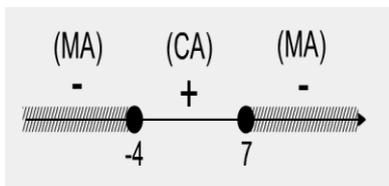
3) $x^2 - 12x + 20 \leq 0$

Os sinais da função $y = x^2 - 12x + 20$, de 2º grau, são $+,-,+$ (MA, CA,MA) e suas raízes são 2 e 10. Como a função dada deve ser menor ou igual a zero, hachuraremos as raízes e a região onde o sinal é negativo, e a solução será: $V = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 10\}$.



4) $-x^2 + 3x + 28 \leq 0$

Sinais da função: -,+, - (MA,CA,MA). Raízes -4 e 7. A função deve ser menor ou igual a zero. Hachuraremos então as raízes e a região do eixo x onde o sinal é negativo, e teremos o seguinte Conjunto Verdade: $V = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -4 \text{ ou } x \geq 7\}$.



EXERCÍCIOS: Resolva as inequações em \mathbb{R} :

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------------|
| a) $4x + 6 < 0$ | b) $5x + 7 > 0$ | c) $3 - 10x < 6 -$ |
| d) $x^2 - 7x + 6 <$ | e) $2 - 5x > -3x$ | f) $-x^2 + 10x - 6 <$ |
| g) $81 - 25x^2 \leq 0$ | h) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ | i) $x^2 + 4 \geq 0$ |
| j) $-x^2 - 100 \geq 0$ | k) $-4x^2 < 0$ | l) $-x^2 + \sqrt{12} \leq 0$ |

Respostas:

- a) $V = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{3}{2}\}$; b) $V = \{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{7}{5}\}$; c) $V = \{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{3}{2}\}$; d) $V = [1,6]$;
e) $V = \{x \in \mathbb{R} / x < -5\}$; f) $V = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 9\}$; g) $V = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{9}{5} \text{ ou } x \geq \frac{9}{5}\}$;
h) $V = \mathbb{R} - \{3\}$; i) $V = \mathbb{R}$; j) $V = \emptyset$; k) $V = \mathbb{R}$; l) $V = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\sqrt{3} \text{ ou } x \geq 2\sqrt{3}\}$

CONCEITO:

Sistemas de inequações: Consideramos que um conjunto de inequações com a mesma variável constitui um sistema se a sua solução contemplar a todas as inequações que dele fazem parte. Para

tanto, o Conjunto Verdade do sistema deverá ser a interseção dos Conjuntos Verdade de todas as inequações que o formam.

EXEMPLO: Resolva o sistema $\begin{cases} 3x - 6 < 9 \\ x^2 - 9x \geq 10 \end{cases}$

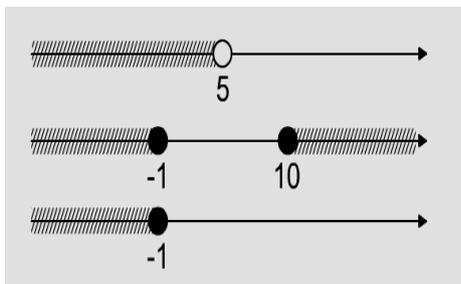
Inicialmente vamos resolver cada inequação:

a) $3x - 15 < 0$ (CA,MA) $(-, +) \rightarrow x < 5$

b) $x^2 - 9x - 10 \geq 0$ (MA<CA<MA) $(+,-,+)$ $\rightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 10$ \rightarrow

c) Em seguida, a interseção dos conjuntos: $\cap \rightarrow$

Conclusão: $V = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \}$.



EXERCÍCIOS : Resolva os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 4x + 3 < 2 - 3x + 8 \\ 2x + 9 \geq 3 + 5x \\ -3x - 7 < 2 + 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0 \\ -x^2 + 6x \geq 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 3x - 28 \leq 0 \\ -4x + 28 > 0 \\ 6x + 24 > 0 \end{cases}$

$(V =]-\frac{9}{7}, 1])$

$(V = [0, 3[)$

$(V =]-4, 7])$

f) $\begin{cases} x + 4 > -1 \\ -x - 6 < 5 \\ 2x + 7 < 19 \\ x^2 - 2x - 35 \leq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 < 0 \\ 4 - 2x > 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 9 - 4x^2 \leq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

$(V =]-5, 6[)$

$(V = \emptyset)$

$(V = [-2, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 2])$

CONCEITO:

Inequações simultâneas: A sentença algébrica $-3 < 2x - 5 \leq 4$ nos apresenta duas inequações. Uma delas é $-3 < 2x - 5$ e a outra, $2x - 5 \leq 4$. Por estarem escritas em uma única sentença, elas devem ter uma solução única, que será a interseção das soluções das inequações separadas. Para isso, devemos tratá-las como sendo um sistema de inequações, conforme estudamos no conceito anterior.

EXEMPLO: Resolva as inequações simultâneas : $-3 < 2x - 5 \leq 4$.

Conforme você acabou de ler, devemos resolver o sistema $\begin{cases} -3 < 2x < -5 \\ 2x - 5 \leq 4 \end{cases}$ e assim teremos a solução $V = \left\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq \frac{9}{2}\right\}$

EXERCÍCIOS: Resolva as inequações:

a) $4 < 3x - 2 \leq 15$

b) $2x \leq x^2 - 10x \leq 2x^2$

c) $4 < 3x - 2 < 1$

d) $x^2 \leq 2x^2 + 6x \leq 3x$

Respostas:

a) $V = [2,5]$; b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -10 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x \geq 12\}$; c) $V = \emptyset$; d) $V = \{0\}$

CONCEITO:

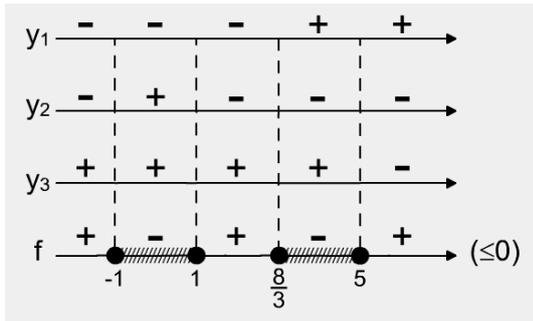
Inequações formadas por produtos ou quocientes de funções:

Para resolvermos este tipo de inequação, devemos estudar os sinais das funções que a compõem, multiplicá-los e verificar os intervalos onde estes produtos obedecem ao sinal que a inequação pede.

EXEMPLOS: Resolva as inequações em \mathbb{R} :

1) $(3x - 8) \cdot (-x^2 + 1) \cdot (10 - 2x) \leq 0$

Esta inequação é formada pelas funções $y_1 = 3x - 8$, $y_2 = -x^2 + 1$ e $y_3 = 10 - 2x$, cujos sinais representaremos em 3 eixos paralelos, e utilizaremos um quarto eixo para os sinais do produto desses sinais e para hachurar o Conjunto Verdade.

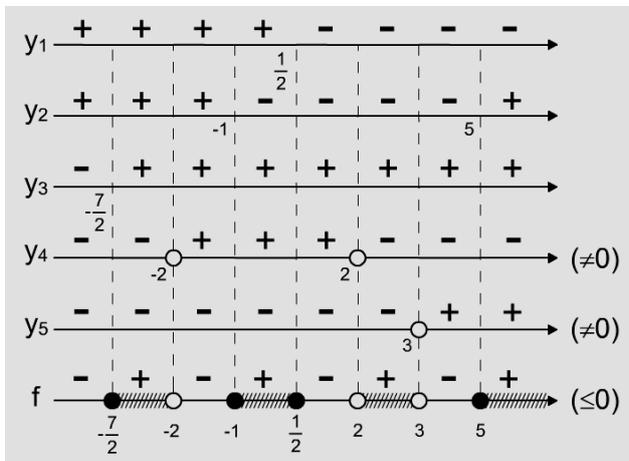


Então temos o seguinte Conjunto Verdade: $V = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } \frac{8}{3} \leq x \leq 5\right\}$

$$2) \frac{(-4x+2) \cdot (x^2-4x-5) \cdot (2x+7)}{(4-x^2) \cdot (x-3)} \geq 0$$

Funções $y_1 = -4x + 2$, $y_2 = x^2 - 4x - 5$, $y_3 = 2x + 7$ no numerador e funções $y_4 = 4 - x^2$, $y_5 = x - 3$ no denominador, e, por isso diferentes de zero. Isto quer dizer que as raízes das funções y_4 e y_5 devem ser excluídas do Conjunto Verdade da inequação.

Trabalharemos agora com os 5 eixos das funções e um sexto para a multiplicação dos sinais e a representação do Conjunto Verdade:



$$V = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{7}{2} \leq x < -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x \geq 5\right\}$$

EXERCÍCIOS: Resolva as inequações em \mathbb{R} :

a) $(x - 2) \cdot (-x - 4) \cdot (x^2 - 9) \geq 0$ ($V = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4 \text{ ou } -3 \leq x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$)

b) $-(3x + 8) \cdot (-x^2 + 12x - 11) \cdot (x^2 + 2) < 0$ ($V = \left\{x \in \mathbb{R} / x < \frac{8}{3} \text{ ou } 1 < x < 11\right\}$)

$$c) \frac{(2-x) \cdot (3+x) \cdot (x-4)}{(5-x) \cdot (x^2-9x+14)} \leq 0 \quad (V = ([-3,4] \cup]5,7]) - \{2\})$$

$$d) \frac{(2x-1) \cdot (2x-2) \cdot (2x-3)}{(3x-1) \cdot (3x-2) \cdot (3x-3)} \geq 0 \quad (V = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \text{ ou } x \geq \frac{3}{2}\})$$

$$e) \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \quad (V = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x > 2\})$$

$$f) \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} \geq \frac{2}{3} \quad (V = \{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ ou } 9 - 3\sqrt{10} \leq x < 3 \text{ ou } x \geq 9 + 3\sqrt{10}\})$$

$$g) (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdots (x-9) \cdot (x-10) > 0$$

$$(V = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } 4 < x < 5 \text{ ou } 6 < x < 7 \text{ ou } 8 < x < 9 \text{ ou } x > 10\})$$

APLICAÇÕES:

Existem funções que envolvem radicais e frações algébricas. Tais funções nem sempre possuem o conjunto \mathbb{R} como seu Domínio, pois, como sabemos, se o radicando de uma raiz de índice par for negativo, a raiz não será um número real, e se o valor de uma expressão for zero, ela não poderá ser o denominador de nenhuma fração.

Logo, podemos dizer que, se uma função for um polinômio de grau qualquer, seu Domínio será igual a \mathbb{R} . Porém, se a função envolver algum radical com índice par, seu radicando deverá ser positivo ou nulo, e, por fim, se a função for uma fração algébrica, seu denominador deverá ser diferente de zero.

EXEMPLO: Obtenha o Domínio de Validade das funções:

$$a) \quad f(x) = \sqrt{2x-3}$$

Se o radical tem índice par, então seu radicando deve ser maior ou igual a zero. Isto nos leva à inequação $2x - 3 \geq 0$, cuja solução é $x \geq \frac{3}{2}$. Então, temos:

$$Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{3}{2}\right\}$$

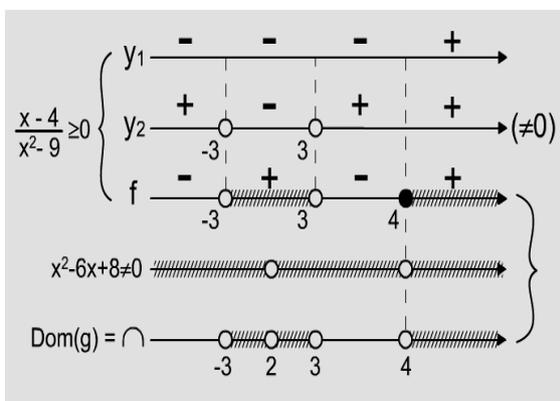
$$b) \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{3-6x}{x+1}}$$

Novamente o índice da raiz é par, logo o radicando não pode ser negativo, ou $\frac{3-6x}{x+1} \geq 0$. Se resolvermos esta inequação, conforme já estudamos, teremos o seguinte Domínio de Validade:

$$\text{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

c)
$$g(x) = \frac{2x - \sqrt{\frac{x-4}{x^2-9}}}{x^2-6x+8}$$

Neste caso, devemos resolver o sistema de inequações resultante de o radicando ser maior ou igual a zero, e de o denominador ser diferente de zero. O Domínio deverá ser a interseção das duas condições de existência: $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} - 3 < x < 3 \text{ e } x \neq 2 \text{ ou } x > 4\}$



EXERCÍCIOS: Obtenha o Domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; b) $g(x) = 1 + x + 2x^2 - \sqrt{x^2 - 4}$; c) $j(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{3}}$

e) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \dots + \sqrt{x-9} + \sqrt{x-10}$; f) $h(t) = \frac{\sqrt{1-3t} + \sqrt{1+3t}}{\sqrt{1-2t}}$

Respostas:

a) $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$; b) $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$; c) $\text{Dom}(j) = \mathbb{R}_+^*$; d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1,2,3, \dots, 9,10\}$; f) $\text{Dom}(h) = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}\right\}$