

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

Licenciatura em Matemática
Geometrias axiomáticas (GEAM8)

Geometria neutra

Adaptado de *Aspectos da Geometria Neutra* de autoria da professora Adriane Renóbio da Silva, orientada pela Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, no Programa de Pós graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, IGCE - UNESP, campus de Rio Claro-SP

Axioma 1. Por quaisquer pontos P e Q distintos, existe uma única reta l que passa por eles.

definição Segmento: O segmento AB é o conjunto de todos os pontos entre A e B incluindo as extremidades A e B . Assim, para quaisquer dois pontos A e B , tem-se $\overline{AB} = \overline{BA}$

Axioma 2. Para todo o segmento \overline{AB} e para todo segmento \overline{CD} , existe um único ponto E com B entre A e E , que denotaremos por $A - B - E$ ou $E - B - A$, tal que o segmento \overline{BE} é congruente¹ ao segmento \overline{CD} dado.

definição Círculo: Dados dois pontos O e A , o conjunto de todos os pontos P tais que $\overline{OP} \cong \overline{OA}$ é chamado círculo, com \overline{OP} sendo chamado raio e, O , centro do círculo.

Axioma 3. Para todo ponto O e todo ponto A diferente de O existe um círculo com centro O e raio \overline{OA} .

Axioma 4 Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

¹ Congruência é um termo indefinido, e se refere tanto em relação a segmentos, quanto em relação a ângulos, ou outras figuras, remetendo à ideia intuitiva de mover e sobrepor, coincidindo-as.

Fundamentos da Geometria, de David Hilbert (1902)

1. OS ELEMENTOS DE GEOMETRIA E OS CINCO GRUPOS DE AXIOMAS.

Consideremos três sistemas distintos de coisas. As coisas que compõem o primeiro sistema, chamaremos pontos e os designaremos pelas letras A, B, C, \dots ; as do segundo, chamaremos linhas retas e as designaremos pelas letras a, b, c, \dots ; e as do terceiro chamaremos planos e os designaremos pelas cartas gregas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Os pontos são chamados de elementos de geometria linear; os pontos e linhas retas, os elementos de a geometria plana; e os pontos, linhas e planos, os elementos da geometria espacial ou os elementos do espaço.

Pensamos nestes pontos, linhas retas e planos como tendo certas relações mútuas, que indicamos por meio de palavras como "estão situados", "entre", "paralelos", "congruentes", "contínuos", etc. A descrição completa e exata dessas relações é a seguinte como consequência dos axiomas da geometria. Estes axiomas podem ser dispostos em cinco grupos. Cada um desses grupos expressa, por si só, certos fatos fundamentais relacionados a nossa intuição.

Vamos nomear estes grupos da seguinte forma:

I, 1-7. Axiomas de incidência.

II, 1-5. Axiomas de ordem.

III. Axioma das paralelas (axioma de Euclides).

IV, 1-6. Axiomas de congruência.

V. Axioma de continuidade (axioma de Arquimedes).

GRUPO I: AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

Os axiomas deste grupo estabelecem uma conexão entre os conceitos indicados acima; a saber, pontos, linhas retas e planos. Estes axiomas são os seguintes:

I.1. Dois pontos A e B distintos determinam sempre completamente uma linha reta a . Nós escrevemos $AB = a$ ou $BA = a$. Em vez de "determinar", podemos também empregar outras formas de expressão; por exemplo, podemos dizer que A "está sobre" a , A "é um ponto de" a , a "passa por" A "e passa por" B , a "une" A "e" ou "com" B , etc. Se A está sobre a e, ao mesmo tempo, sobre outra linha reta b , fazemos uso também da expressão: "As linhas retas" a "e" b "têm o ponto A em comum", etc.

I.2. Quaisquer dois pontos distintos de uma linha reta determinam completamente essa linha; isto é, se $AB = a$ e $AC = a$, onde $B \neq C$, então também $BC = a$.

I.3. Três pontos A, B, C não situados na mesma linha reta sempre determinam completamente um plano α . Escrevemos $ABC = \alpha$. Empregamos também as expressões: A, B, C , "estão em" α ; A, B, C "são pontos de" α , etc.

I.4. Quaisquer três pontos A, B, C de plano α , que não se encontram na mesma linha reta, determinar completamente esse plano.

I.5. Se dois pontos A, B de uma linha reta estão em um plano α , então cada ponto desta reta está em α . Neste caso, dizemos: "A linha reta a está no plano α ".

I.6. Se dois planos α , β têm um ponto A em comum, então eles têm pelo menos um segundo ponto B em comum.

I.7. Em cada linha reta há pelo menos dois pontos, em cada plano há pelo menos três pontos que não se encontram na mesma linha reta, e no espaço existem pelo menos quatro pontos que não estão no mesmo plano.

Dos teoremas que se seguem aos axiomas I, 3-7, citaremos apenas os seguintes:

Teorema 1. Duas linhas retas de um plano têm ou um ponto ou nenhum ponto em comum; dois planos não têm ponto em comum ou uma linha reta em comum; um plano e uma linha reta que não se encontre nela não tem nenhum ponto ou um ponto em comum.

Teorema 2. Através de uma linha reta e um ponto que não esteja dentro dela, ou através de duas linhas retas distintas com um ponto em comum, pode passar um e apenas um plano.

GRUPO II: AXIOMAS DE ORDEM

Os axiomas deste grupo definem a ideia expressa pela palavra "entre", e tornam possível, com base nesta ideia, uma ordem de seqüência dos pontos sobre uma linha reta, em um plano e no espaço. Os pontos de uma linha reta têm uma certa relação entre si, que a palavra "entre" serve para descrever. Os axiomas deste grupo são os seguintes:

II.1. Se A , B , C são pontos de uma linha reta e B está entre A e C , então B está também entre C e A .

II.2. Se A e C são dois pontos de uma linha reta, então existe pelo menos um ponto B que está entre A e C e pelo menos um ponto D situado de tal forma que C fica entre A e D .

II.3. De quaisquer três pontos situados em uma linha reta, há sempre um e apenas um que fica entre os outros dois.

II.4. Quaisquer quatro pontos A , B , C , D de uma linha reta podem ser sempre dispostos de tal forma que B deve estar entre A e C e também entre A e D , e, além disso, que C deve se situar entre A e D e também entre B e D .

Definição. Vamos chamar o sistema de dois pontos A e B , sobre uma linha reta, um segmento e denotar por AB ou BA . Os pontos situados entre A e B são chamados os pontos do segmento AB ou os pontos situados dentro do segmento AB . Todos os outros pontos da linha reta são referidos como os pontos situados fora do segmento AB . Os pontos A e B são chamados de extremidades do segmento AB .

II.5 (Axioma de Pasch). Sejam A , B , C três pontos que não se encontrem na mesma linha reta e seja dada uma linha reta se encontre no plano ABC e que não passe por nenhum dos pontos A , B , C . Então, se a linha reta passar por um ponto do segmento AB , também passará por um ponto do segmento BC ou por um ponto do segmento AC .