INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

Licenciatura em Matemática
Geometrias axiomáticas (GEAM8)

Fundamentos da Geometria, de David Hilbert (1902)

1. OS ELEMENTOS DE GEOMETRIA E OS CINCO GRUPOS DE AXIOMAS.

Consideremos três sistemas distintos de coisas. As coisas que compõem o primeiro sistema, chamaremos pontos e os designaremos pelas letras A, B, C, ...; as do segundo, chamaremos linhas retas e as designaremos pelas letras a, b, c, ...; e as do terceiro chamaremos planos e os designaremos pelas letras gregas α, β, γ, ... Os pontos são chamados de elementos de geometria linear; os pontos e linhas retas, os elementos da geometria plana; e os pontos, linhas e planos, os elementos da geometria espacial ou os elementos do espaço.

Pensamos nestes pontos, linhas retas e planos como tendo certas relações mútuas, que indicamos por meio de palavras como "estão situados", "estão entre", "são paralelos", "são congruentes", "são contínuos", etc. A descrição completa e exata dessas relações é a seguinte, como consequência dos axiomas da geometria. Estes axiomas podem ser dispostos em cinco grupos. Cada um desses grupos expressa, por si só, certos fatos fundamentais relacionados à nossa intuição.

Vamos nomear estes grupos da seguinte forma:

I, 1–7. Axiomas de incidência.
II, 1-5. Axiomas de ordem.
III. Axioma das paralelas (axioma de Euclides).
IV, 1-6. Axiomas de congruência.
V. Axioma de continuidade (axioma de Arquimedes).

GRUPO I: AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

Os axiomas deste grupo estabelecem uma conexão entre os conceitos indicados acima; a saber, pontos, linhas retas e planos. Estes axiomas são os seguintes:

I.1. Dois pontos A e B distintos determinam sempre completamente uma linha reta a. Nós escrevemos $AB = a$ ou $BA = a$. Em vez de "determinar", podemos também empregar outras formas de expressão; por exemplo, podemos dizer que A "está sobre" a, A "é um ponto de" a, a "passa por" A "e passa por" B, a "une" A "e" ou "com" B, etc. Se A está sobre a e, ao mesmo tempo, sobre outra linha reta b, fazemos uso também da expressão: "As linhas retas" a "e" b "têm o ponto A em comum", etc.

I.2. Quaisquer dois pontos distintos de uma linha reta determinam completamente essa linha; isto é, se $AB = a$ e $AC = a$, onde $B \neq C$, então também $BC = a$.

I.3. Três pontos A, B, C não situados na mesma linha reta sempre determinam completamente um plano α. Escrevemos $ABC = \alpha$. Empregamos também as expressões: A, B, C, "estão em" α; A, B,

C "são pontos de"α, etc.

I.4. Quaisquer três pontos A, B, C de plano α, que não se encontram na mesma linha reta, determinar completamente esse plano.

I.5. Se dois pontos A, B de uma linha reta estão em um plano α, então cada ponto desta reta está em α. Neste caso, dizemos: "A linha reta a está no plano α".

I.6. Se dois planos α, β têm um ponto A em comum, então eles têm pelo menos um segundo ponto B em comum.

I.7. Em cada linha reta há pelo menos dois pontos, em cada plano há pelo menos três pontos que não se encontram na mesma linha reta, e no espaço existem pelo menos quatro pontos que não estão no mesmo plano.

Os Axiomas I, 1-2 contêm declarações relativas apenas a pontos e linhas retas; isto é, sobre os elementos da geometria plana. Vamos chamá-los, portanto, de axiomas planos do grupo I, a fim de distingui-los dos axiomas I, 3-7, que designaremos brevemente como os axiomas espaciais deste grupo.

Dos teoremas que se seguem aos axiomas I, 3-7, citaremos apenas os seguintes:

Teorema 1. Duas linhas retas de um plano têm ou um ponto ou nenhum ponto em comum; dois planos não têm ponto em comum ou uma linha reta em comum; um plano e uma linha reta que não se encontre nela não tem nenhum ponto ou um ponto em comum.

Teorema 2. Através de uma linha reta e um ponto que não esteja dentro dela, ou através de duas linhas retas distintas com um ponto em comum, pode passar um, e apenas um plano.

GRUPO II: AXIOMAS DE ORDEM

Os axiomas deste grupo definem a ideia expressa pela palavra "entre", e tornam possível, com base nesta ideia, uma ordem de sequência dos pontos sobre uma linha reta, em um plano e no espaço. Os pontos de uma linha reta têm uma certa relação entre si, que a palavra "entre"serve para descrever. Os axiomas deste grupo são os seguintes:

II.1. Se A, B, C são pontos de uma linha reta e B está entre A e C, então B está também entre C e A.

II.2. Se A e C são dois pontos de uma linha reta, então existe pelo menos um ponto B que está entre A e C e pelo menos um ponto D situado de tal forma que C fica entre A e D.

II.3. De quaisquer três pontos situados em uma linha reta, há sempre um e apenas um que fica entre os outros dois.

II.4. Quaisquer quatro pontos A, B, C, D de uma linha reta podem ser sempre dispostos de tal forma que B deve estar entre A e C e também entre A e D, e, além disso, que C deve se situar entre A e D e também entre B e D.

Definição. Vamos chamar o sistema de dois pontos A e B, sobre uma linha reta, um segmento e denotar por AB ou BA. Os pontos situados entre A e B são chamados os pontos do segmento AB ou os pontos situados dentro do segmento AB. Todos os outros pontos da linha reta são referidos como os pontos situados fora do segmento AB. Os pontos A e B são chamados de extremidades do segmento AB.

II.5 (Axioma de Pasch). Sejam A, B, C três pontos que não se encontrem na mesma linha reta e seja dada uma linha reta se encontre no plano ABC e que não passe por nenhum dos pontos A, B, C. Então, se a linha reta passar por um ponto do segmento AB, também passará por um ponto do segmento BC ou por um ponto do segmento AC.

Os Axiomas II, 1-4 contêm afirmações relativas apenas sobre pontos de uma linha reta, e, portanto, os chamaremos de axiomas lineares do grupo II. O Axioma II.5 diz respeito aos elementos de geometria plana e, consequentemente, deve ser chamado de axioma plano do grupo II.

GRUPO III: AXIOMA DAS PARALELAS (AXIOMA DE EUCLIDES)

A introdução deste axioma simplifica muito os princípios fundamentais da geometria e facilita, em grande parte, seu desenvolvimento. Este axioma pode ser expresso da seguinte forma:

III. Em um plano α pode ser traçado através de qualquer ponto A, situado fora de uma reta a, uma, e apenas uma, linha reta que não cruze a linha a. Esta linha reta é chamada de paralela à reta a através do ponto A dado.

Esta afirmação do axioma das paralelas contém duas afirmações. A primeira delas é a seguinte: que, no plano α, há sempre uma linha reta passando por A que não intersecta a linha dada a. A segunda afirma que apenas uma dessas linhas é possível.

GRUPO IV. AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA.

Os axiomas deste grupo definem a ideia de congruência ou deslocamento. Os segmentos estão em certa relação uns com os outros, que é descrita pela palavra "congruente".

IV.I. Se A, B são dois pontos em uma linha reta a, e se A' é um ponto sobre a mesma ou outra linha reta a', então, sobre um determinado lado de A' na linha reta a', podemos sempre encontrar um e apenas um ponto B' para que o segmento AB (ou BA) é congruente com o segmento $A'B'$. Indicamos esta relação por escrito $AB \equiv A'B'$.

Cada segmento é congruente a si mesmo; isto é, sempre temos $AB \equiv AB$.

Podemos afirmar brevemente o axioma acima, dizendo que cada segmento pode ser disposto sobre um determinado lado de um determinado ponto de uma determinada linha reta em uma e apenas uma maneira.

IV.2. Se um segmento AB é congruente com o segmento $A'B'$ e também com o segmento $A''B''$, então o segmento $A'B'$ é congruente com o segmento $A''B''$; isto é, se $AB \equiv A'B'$ e $AB \equiv A''B''$, então $A'B' \equiv A''B''$.

IV.3. Sejam AB e BC dois segmentos de uma linha reta a que não tenham pontos em comum além do ponto B, e, além disso, que $A'B'$ e $B'C'$ sejam dois segmentos da mesma ou de outra linha reta a' não tendo, da mesma forma, nenhum outro ponto além de B' em comum. Então, se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, nós temos $AC \equiv A'C'$.

Definições. Seja α qualquer plano arbitrário e h, k quaisquer duas semirretas distintas contidas em α e partindo do ponto O de modo a formar uma parte de duas linhas retas diferentes.

Chamamos o sistema formado por estas duas semirretas h e k de *ângulo* e o representamos pelo símbolo $\angle(h,k)$ ou $\angle(k,h)$.

Dos axiomas II.1-5, segue-se prontamente que as semirretas h e k, tomadas em conjunto com o ponto O, dividem os pontos restantes do plano α em duas regiões com as seguintes propriedades: Se A for um ponto de uma região e B um ponto da outra, então cada segmento de reta que une A e B ou passa por O ou tem um ponto em comum com uma das semirretas h e k. Se, no entanto, A e A' estão ambos dentro da mesma região, então é sempre possível unir estes dois pontos por um segmento de reta que não passa por O nem tem um ponto em comum com uma das semirretas h e k. Uma destas duas regiões se distingue da outra, pois o segmento que une quaisquer dois pontos desta região está inteiramente dentro da região. A região assim caracterizada é chamada o *interior do ângulo* (h,k). Para distinguir a outra região desta, a chamamos de *exterior ao ângulo* (h,k). As semirretas h e k são chamadas de *lados* do ângulo, e o ponto O é chamado de *vértice* do ângulo.

IV.4. Seja dado um ângulo (h,k) no plano α e seja dada uma linha reta a' em um plano α'. Suponha também que, no plano α', uma linha reta a' seja designada. Denote por h' uma semirreta da reta a' que emana de um ponto O' desta linha. Então, no plano α' há um e apenas uma semirreta k', de tal forma que o ângulo (h,k), ou (k,h), seja congruente ao ângulo (h',k') e, ao mesmo tempo todos os pontos interiores do ângulo (h',k') encontram-se sobre o lado dado de a'. Nós expressamos esta relação por meio da notação $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

Cada ângulo é congruente consigo mesmo; isto é, $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$ ou $\angle(h,k) \equiv \angle(k,h)$. Dizemos, brevemente, que cada ângulo em um determinado plano pode ser disposto sobre um determinado lado de uma determinado reta de uma e apenas uma maneira.

IV.5. Se o ângulo (h,k) for congruente ao ângulo (h',k') e ao ângulo (h'',k''), então o ângulo (h',k') é congruente ao ângulo (h'',k''); ou seja, se $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ e $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$, então $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$.

Suponha que tenhamos um triângulo ABC. Denote por h, k as duas semirretas que emanam de A e passando respectivamente por B e C. Diz-se então que o ângulo (h,k) é o ângulo definido pelos lados AB e AC, ou o oposto ao lado BC no triângulo ABC. Ele contém todos os pontos interiores do triângulo ABC e é representado pelo símbolo $\angle BAC$, ou por $\angle A$.

IV.6. Se, nos dois triângulos ABC e $A'B'C'$, as congruências $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ são verificadas, então as congruências $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ também ocorrem.

Os Axiomas IV.1-3 contêm declarações sobre a congruência de segmentos em uma reta apenas. Eles podem, portanto, ser chamados os axiomas lineares do grupo IV. Os Axiomas IV.4 e IV.5 contêm declarações relativas à congruência dos ângulos. O Axioma IV.6 dá a conexão entre a congruência dos segmentos e a congruência dos ângulos. Os Axiomas IV.4-6 contêm declarações sobre os elementos da geometria plana e podem ser chamados de axiomas planos do grupo IV.

GRUPO V. AXIOMA DA CONTINUIDADE. (AXIOMA DE ARQUIMEDES).

Este axioma torna possível a introdução na geometria da ideia de continuidade. Para afirmar este axioma, devemos primeiro estabelecer uma convenção sobre a igualdade de dois segmentos. Para este fim, podemos basear nossa ideia de igualdade nos axiomas relativos à congruência de segmentos e definir como "iguais"os segmentos congruentes, ou com base nos grupos I e II, podemos determinar como, por construções adequadas, um segmento pode ser transportado de um ponto de um dada linha reta para que um segmento novo e definido tal que o obtido seja "igual"a ele.

Em conformidade com tal convenção, o axioma de Arquimedes pode ser declarado da seguinte forma:

Seja A_1 qualquer ponto sobre uma linha reta entre os pontos escolhidos arbitrariamente A e B. Tome os pontos A_2, A_3, A_4, ... de modo que A_1 fique entre A e A_2, A_2 entre A_1 e A_3, A_3 entre A_2 e A_4 etc. Além disso, faça com que os segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... sejam iguais uns aos outros.

Então, entre esta série de pontos, sempre existirá um certo ponto A_n tal que B fica entre A e A_n.

O axioma de Arquimedes é um axioma linear.

Observação: Aos cinco grupos de axiomas anteriores, podemos acrescentar o seguinte, que, embora não seja de natureza puramente geométrica, merece uma atenção especial por parte de um ponto de vista teórico. Ele pode ser expresso da seguinte forma:

AXIOMA DA COMPLETUDE (*Vollständigkeit*): Para um sistema de pontos, retas e planos, é impossível acrescentar outros elementos de tal forma que o sistema assim generalizado deva formar uma nova geometria obedecendo a todas as cinco grupos de axiomas. Em outras palavras, os elementos da geometria formam um sistema que não é suscetível de extensão, se considerarmos os cinco grupos de axiomas como válido.

Este axioma não nos dá nada diretamente a respeito da existência de pontos limitantes, ou da ideia de convergência. No entanto, ele nos permite demonstrar o teorema de Bolzano em virtude do qual, para todos os conjuntos de pontos situados sobre uma linha reta entre dois pontos definidos da mesma linha, existe necessariamente um ponto de acumulação, ou seja, um ponto limitante. Do ponto de vista teórico, o valor deste axioma é que ele leva indiretamente à introdução de pontos limitantes e, portanto, torna possível estabelecer uma correspondência um-para-um entre os pontos de um segmento e o sistema de números reais.