

Aspectos das histórias das Geometrias Não Euclidianas

Introdução

Tradicionalmente, o que é abordado de geometria tem como base as teorias de Euclides que adota o método axiomático-dedutivo, no qual, a partir de fatos aceitos intuitivamente, demonstram-se as consequências desses axiomas.

O que este trabalho visa abordar são os aspectos das histórias das Geometrias Não Euclidianas que se desenvolveram a partir do quinto postulado de Euclides, serão citados alguns matemáticos que se dedicaram durante suas vidas na prova do quinto postulado, além da história bem-sucedida serão expostos também suas tentativas sem êxito a fim de desmistificar a “genialidade” dos matemáticos mostrando as matemáticas e as geometrias como uma construção histórica e social.

Para D’Ambrósio (2000) uma das finalidades da participação da história da matemática no ensino é situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos; como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças, os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução.

Nessa perspectiva, as Geometrias Não Euclidianas se desenvolvem, a partir da negação do quinto postulado, ou seja, diante de questionamentos sobre as verdades até então absolutas do postulado das paralelas que diversos matemáticos cada qual à sua época contribuíram para uma formação dessas Geometrias.

Os Elementos de Euclides

A obra Os Elementos é um tratado geométrico escrito em Alexandria por volta de 300 a.E.C composto de 13 livros, a obra foi atribuída à Euclides, porém Nobre (2009) apresenta três hipóteses:

1° Realmente foi Euclides quem escreveu Os Elementos;

2° Euclides foi o líder de um grupo de matemáticos de Alexandria, onde escreveram vários trabalhos e assinavam em seu nome;

3° As obras atribuídas a Euclides foram escritas por um grupo de matemáticos que adotou o nome de Euclides em referência a Euclides de Megara, que viveu cerca de cem anos antes.

Não se sabe ao certo sobre o texto original dos elementos, já que existem apenas manuscritos em grego, latim e árabe, em sua maioria os textos que são de copistas, tradutores e comentaristas. O que se sabe é que o Os Elementos possui uma grande importância para a Ciência e a Matemática e que apenas a Bíblia possui mais edições no mundo ocidental que Os Elementos. No Brasil, em 2009 o Professor Irineu Bicudo, publicou uma edição completa, traduzido diretamente do grego.

Os Elementos são formados por treze livros, escritos por volta do ano 300 a.E.C. A obra constitui-se de proposições fundamentais, a partir das quais seria possível deduzir outras, por esse motivo dizemos que o Os elementos adota o método axiomático-dedutivo, no qual, a partir de fatos aceitos intuitivamente (definições, axiomas e postulados), demonstram-se consequências (teoremas). Os Elementos são divididos em três partes:

1. Geometria Plana – Livros I – VI;
2. Aritmética – Livros VIII – IX;
3. Geometria Espacial XI – XIII.

O primeiro dos treze livros de Os Elementos contém 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns (axiomas).

POSTULADOS

P1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

P2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

P3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

P4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

P5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(EUCLIDES, 2009)

O quinto postulado, ficou conhecido como o postulado das paralelas. Proclus (Século V - 410 a 485), um dos grandes comentaristas de Os Elementos, percebeu que as 28 primeiras proposições foram demonstradas sem que ela fosse citada. Proclus acreditava que o quinto postulado de Euclides fosse um teorema e que poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro postulados.

“Este [o quinto postulado] deve ser retirado do conjunto de postulados. Pois é um teorema – teorema este que coloca muitas questões que Ptolomeu se propôs resolver num dos seus livros – e requer, para a sua demonstração, várias definições assim como teoremas. E a sua recíproca é provada pelo próprio Euclides como um teorema (...).”

Proclus acreditava que o postulado das paralelas fosse um teorema, devido ao fato da recíproca do quinto postulado, a Proposição XVII ser um teorema demonstrável.

Proposição XVII: “Os dois ângulos de todo o triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos”

(Euclides 2009)

Desde então, foram inúmeras as tentativas de provar o quinto postulado, e como consequência dessas tentativas houve muitas afirmações equivalentes ao postulado

das paralelas, que são chamados de substitutos, o mais conhecido deles é o que chamamos de postulado de Playfair.

Postulado 5' (Axioma de Playfair) – Por um ponto fora de uma reta pode – se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Os substitutos, tiveram grande importância na história e nos mostra que o quinto postulado não é trivial. Como consequência do postulado das paralelas e seus substitutos, existem importantes teoremas como por exemplo o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, a teoria dos triângulos semelhantes e a trigonometria.

A seguir, alguns matemáticos que contribuíram trabalhando sobre o quinto postulado durante a história, cada qual em seu tempo para o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas.

O quinto postulado – Tentativas de provas.

O quinto postulado (P5) foi o ponto culminante para o surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Pelo fato desse postulado não ser trivial quanto os outros quatro, alguns matemáticos acreditavam que ele poderia ser um teorema e, portanto, poderia ser demonstrado. Além de Próclus, outros matemáticos- tentaram provar o quinto postulado, dentre eles tivemos os árabes Omar al-Khayyam (1048 - 1131) e Nasir Eddin al-Tusi (1201 – 1274).

Al-Khayyam acreditava sobre a demonstrabilidade do postulado das paralelas e para ele o quinto postulado só não estava demonstrado por dois motivos: os antigos o consideravam tão evidente e, por isto, omitiam a demonstração; e os modernos como os matemáticos árabes al – Hazin e na-Nayziri falharam nas suas tentativas de prova, pois deixaram de levar em conta certas premissas fundamentais. (BARBOSA, 2011, p.35). Al-Khayyam, em suas tentativas de prova, criou oito proposições, dentre elas: “Se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, então os outros dois também são retos”. O problema estava justamente nesta proposição que é equivalente ao quinto postulado. Esse quadrilátero será fonte de estudo de Saccheri no século XVIII. (BARBOSA, 2011, p.35).

Nasir Eddin al-Tusi, em 1250 publicou sua tentativa de prova do quinto postulado no livro intitulado “Discussão que elimina dúvidas sobre as linhas paralelas”. Nasir Eddin inicialmente supôs, sem demonstração, a validade do seguinte axioma:

Axioma: Sejam m e n duas retas, A um ponto de m , B um ponto de n , tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m . Então as perpendiculares baixadas de m à reta n , do lado do ângulo agudo, são menores que AB e as que ficam do outro lado são maiores que AB .

Nasir Eddin usou esse axioma para deduzir o quinto postulado e considerou o mesmo quadrilátero que Al-Khayyam. Com seus estudos ele também concluiu uma afirmação equivalente ao quinto postulado.

No ocidente, com a transição entre a Idade Média e a Idade Moderna, houve profundas transformações econômicas, culturais e nas relações entre religião e ciência neste contexto surgem, paralelas às universidades, academias destinadas à recuperação de obras gregas e romanas (BARBOSA, 2010, p36).

Nesse período surgem os primeiros comentaristas europeus da obra *Os Elementos*, como por exemplo **Federico Commandino** (1509 – 1575), **Cristoph Clavius** (1537 – 1612), **Pietro Antonio Cataldi** (1548 – 1626), **Giovanni Alfonso Borelli** (1608 – 1679), **Giordano Vitale** (1633 – 1711) e **John Wallis** (1616 – 1703), todos eles se dedicaram a prova do quinto postulado, trabalhando com a ideia de retas equidistantes, e não trouxeram nenhum resultado novo, com exceção de John Wallis que abandonou a ideia de equidistância demonstrando o quinto postulado baseado no seguinte axioma: dado um triângulo ABC e um segmento de reta DE , existe um triângulo DEF tal que ABC e DEF são semelhantes. Para a infelicidade de Wallis, esse é mais um argumento equivalente ao quinto postulado. (BARBOSA, 2011).

Outro matemático que se dedicou ao estudo do quinto postulado foi o padre jesuíta e professor na Universidade de Pavia Giovanni Girolamo Saccheri (1667 – 1733) que escreveu um livro intitulado *Euclides ad omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda mácula), publicado no ano de sua morte 1773. Nessa obra Saccheri procura demonstrar que o quinto postulado seria verdadeiro. Seu livro só foi reconhecido um século e meio depois pelo matemático italiano Eugenio Beltrami.

Saccheri, diferentemente dos outros matemáticos que tentaram demonstrar o quinto postulado de maneira direta, aplicou a demonstração usando a prova por redução ao absurdo, assumindo a negação do postulado das retas paralelas para chegar a uma contradição. Antes de ir para Pávia, Saccheri lecionou filosofia na Universidade de Turim e publicou um livro em 1697, um tratado de lógica – Lógica Demonstrativa por conhecer o quinto postulado e por dominar as ferramentas lógicas necessárias ele tentou a demonstração do quinto postulado por absurdo e inclusive indicou as falhas nas provas de Nasir Eddin e de Wallis.

Para sua demonstração Saccheri utilizou a hipótese já utilizada por Omar al-Khayyam e por Nasir Eddin de que um quadrilátero possuem dois ângulos retos, os outros são iguais entre si. Dessa maneira existem então três possibilidades para esses ângulos:

- 1) Ambos serem retos;
- 2) Ambos serem obtusos;
- 3) Ambos serem agudos;

Saccheri, em sua prova, admitia que apenas uma dessas possibilidades pudesse ser correta. Para provar que a primeira opção era a verdadeira, Saccheri admitia, de início, que ela era falsa (de acordo com a redução ao absurdo) e, então, tentava provar que as outras duas eram falsas. Caso chegasse a uma conclusão como esta – que as três possibilidades eram falsas – teria chegado ao absurdo e, portanto, inferiria o contrário de sua hipótese inicial. Assim, provaria que os ângulos do topo eram ambos retos, logo estaria provado o quinto postulado (Barbosa, 2011).

Saccheri, não obteve dificuldades para encontrar uma contradição na possibilidade (2), porém, ao procurar uma contradição no caso (3), sem perceber ele encontrou alguns resultados clássicos do que conhecemos hoje como Geometria Não – Euclidiana.

“Sem notar, Saccheri obteve as consequências de uma geometria que negasse o quinto postulado sem, contudo, ser inconsistente”.

BARBOSA, 2011

Outro matemático que tentou provar o quinto postulado, foi o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) que apesar de não obter sucesso na

demonstração do quinto postulado, as tentativas despertaram o interesse de seus sucessores, Legendre em suas tentativas demonstrou dois teoremas, são eles:

- 1) A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos.
- 2) Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.

As Geometrias Não Euclidianas

No século XIX, três matemáticos contribuíram para o “surgimento” das Geometrias Não Euclidianas, são eles Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856), János Bolyai (1802 – 1860) e Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) notaram que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser demonstrado e que de fato se tratava de um postulado, poderia ser negado sem que ocorressem contradições.

Carl Friedrich Gauss, teve uma grande contribuição no desenvolvimento das ideias dessa geometria, que era nomeada por ele como geometria antieuclidiana, depois geometria astral e por último de geometria não euclidiana. Apesar de suas contribuições Gauss teve poucos trabalhos publicados sobre o quinto postulado, mas há registros de algumas cartas destinada a matemáticos que se interessava pelo assunto. Em 1824 Gauss escreve uma carta para o Matemático Franz Adolph Taurinus (1794 – 1874) diz que a hipótese de a soma dos três ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° conduz a uma curiosa geometria.

“A hipótese de que a soma dos ângulos é menor do que 180° levou a uma Geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente(...) Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, inconsistência nesta Geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe à nossa concepção é que, se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (por nós desconhecida)”. (...)

Gauss, diz que que tem o desejo de que a Geometria Euclidiana não seja verdadeira e se despede, na carta pedindo para Taurinus, que deixe essa comunicação privada, e que não a torne pública. O receio de Gauss se dava pois em seu tempo a filosofia de Kant, no século XIX, era predominante.

Em meados do século XIX duas questões se evidenciaram: Não é possível provar o quinto postulado sem admitir outro postulado equivalente e que era possível construir outras geometrias sem manter o quinto postulado.

O matemático húngaro János Bolyai, filho de outro matemático Farkas Bolyai (1775 – 1856), também se dedicou aos estudos do postulado das paralelas, influenciado por seu pai Farkas, que havia estudado com Gauss também tinha conhecimento sobre o quinto postulado, Farkas, trocava cartas com Gauss sobre o assunto. Então, desde muito jovem János Bolyai se interessava pelo quinto postulado, apesar de seu pai recomendar a ele que se distanciasse desse assunto.

János desenvolveu algo novo e escreveu uma carta ao seu pai, dizendo que publicaria seu trabalho assim que o terminasse. Naquele momento o que ele poderia dizer é que do nada havia criado um estranho novo universo! (BARBOSA, 2011).

János escreveu um apêndice de 26 páginas ao livro de seu pai *Tentamen*, intitulado *Apêndice contendo a absoluta verdade científica do espaço, independente da veracidade ou falsidade do XI axioma de Euclides (que nunca poderá ser decidido a priori)*. Em 1832, Gauss recebeu uma das primeiras cópias do Apêndice e então decidiu responder a Farkas, dizendo que não poderia elogiar o trabalho de seu filho pois, estaria elogiando a si mesmo, já que Gauss havia chegado a resultados semelhantes ao de János.

“Se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo”

János Bolyai ficou extremamente desapontado com a resposta de Gauss, pois segundo ele Gauss estava tentando se apropriar de seu trabalho e, depois disto, não publicou mais nada de suas pesquisas. Em 1848, János Bolyai, após saber que outro matemático, Lobachevsky, havia encontrado resultados semelhantes aos seus, retomou seus estudos que culminaram em uma grande obra sobre o assunto.

O matemático Russo, Lobachevsky, também se debruçou sobre o estudo do postulado das paralelas e estava convicto que fosse possível uma geometria sem que o quinto postulado fosse afirmado. Em 1829 publicou seu primeiro trabalho sobre a geometria não euclidiana, na qual o denominava de geometria imaginária, esse nome relacionava a geometria euclidiana, da mesma forma que relacionavam os números imaginários (ou complexos) com os números reais.

Em 1826, Lobachevsky, numa conferência da Universidade de Kazan, em sua palestra intitulada *Uma breve introdução dos princípios da Geometria incluindo uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas*. Ele sugeriu uma nova Geometria, na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor que dois retos. (BARBOSA, 2008). O trabalho de Lobachevsky, não foi bem aceito pelos acadêmicos, que acreditavam que não era digno de atenção, em 1834 jornais de Petersburgo publicaram textos insultando seu trabalho, dizendo, que Lobachevsky era o insolente de falsas invenções e que o título de seu artigo deveria se chamar *Uma sátira na geometria* ou *Uma caricatura na Geometria* ao invés de *Sobre os princípios da geometria*.

Lobachevsky publicou outros artigos sobre a Geometria Não Euclidiana, foram elas: *Geometria Imaginária* em 1835, *Aplicações da Geometria imaginária a certas integrais* em 1836, *Novos princípios da Geometria com uma completa teoria das paralelas* entre os anos de 1835 e 1838, *Pesquisas geométricas sobre a teoria das retas paralelas* em 1840 e *Pangeometria* em 1855. Esse último artigo mostra a sua concepção de geometria universal que inclui a geometria euclidiana como um caso especial.

Alguns anos depois Gauss, leu os artigos de Lobachevsky, onde reconhece o mérito, afirmando que os resultados obtidos por Lobachevsky são semelhantes aos seus resultados, porém demonstrados através de um método diferente.

Considerações finais

De acordo com os fatos abordados nesse trabalho, constata-se que as Geometrias Não Euclidianas tiveram como inspiração o quinto postulado de Euclides e que durante muitos séculos, diversos matemáticos se empenharam em estudar esse postulado, gerando muitas dúvidas e discussões, entretanto os frutos dessas discordâncias foram de grande valia para a Matemática e a Geometria. Até mesmo os trabalhos que não obtiveram êxito contribuíram de forma relevante para a história. Mostrando que a matemática é uma construção histórico-social, que envolve diversos fatores, científicos, culturais, sociais e institucionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Hiperbólica**. 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 167p.

BARBOSA, Línlya Natássia Sachs Camerlengo de. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das Geometrias Não Euclidianas**. 2011. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011. Cap. 2.

BARRETO, Mylane dos Santos; TAVARES, Salvador. **Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas – A experiência no IFFluminense Campus Campos - Centro**. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, p. 1-10, jul. 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática**. In BICUDO, M.A.V (Org). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999, p. 97-115.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

<https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/quintoposteuc/proclus.htm>