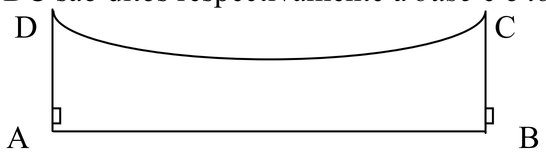
O Quadrilátero de Saccheri

Definição (Quadrilátero de Saccheri) Na figura abaixo se tem um quadrilátero ABCD com ângulos retos em A e B, os segmentos AD e BC denominados *hastes* são congruentes isto é, AD ≡ BC e os segmentos AB e DC são ditos respectivamente a *base* e o *topo* do quadrilátero.



Proposição Os ângulos do topo são congruentes.

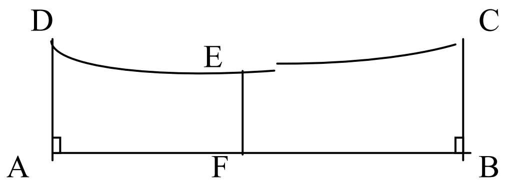
Demonstração Temos a congruência ΔDAB ≡ ΔCBA (LAL) o que implica AC ≡ BD.

Como as diagonais são congruentes temos ΔACD ≡ ΔBCD (caso LLL) e assim os ângulos do topo em D e C são congruentes.

Lembremos que duas retas distintas são *paralelas* se não se interceptam.

Proposição O segmento unindo os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri é uma perpendicular comum. A base e o topo são assim, retas paralelas com uma perpendicular comum.

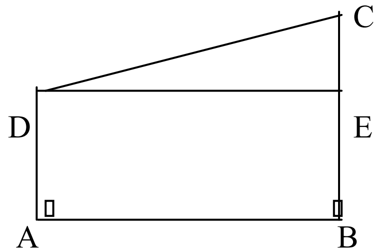
Demonstração: Sejam respectivamente E, F os pontos médios em DC e AB. Temos ΔAED ≡ ΔBEC (caso LAL) assim que AE ≡ BE e, portanto o triângulo ABE é isósceles, pois ΔAFE ≡ ΔBFE. Segue que EF é altura além de mediana. Também o triângulo DFC é isósceles donde FE é perpendicular a DC. Note que o quadrilátero AFED tem três ângulos retos.



Convenção: supõe-se que uma haste é sempre perpendicular.

Proposição: Num quadrilátero onde as hastes com respeito à base são desiguais, também o são os ângulos do topo (vale a recíproca). Além disso, ao maior ângulo do topo opõe-se a maior haste.

Demonstração Considere um quadrilátero ABCD de hastes desiguais BC > AD. Seja E o ponto interior de BC onde AD ≡ BE. Notamos que ABED é um Quadrilátero de Saccheri sendo iguais seus ângulos do topo em D e em E. Temos ∠DEB > ∠ DCB pois o ângulo DEB é externo ao triângulo DEC. Portanto ∠ ADC > ∠ADE = ∠DEB > ∠ DCB. Para a recíproca note que ∠ ADC > ∠DCB implica que as hastes não são iguais, ou seja, temos um dos dois casos BC > AD ou BC < AD. Só o primeiro é coerente com a hipótese e a primeira parte da demonstração.

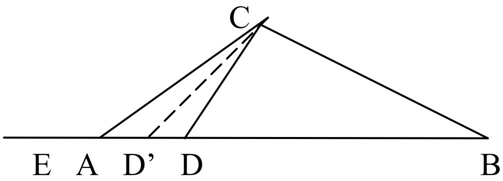


Postulado das paralelas da Geometria Hiperbólica

Os ângulos do topo de um Quadrilátero de Saccheri são agudos

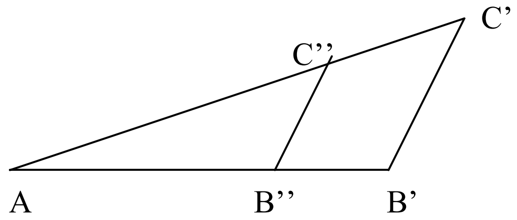
Já sabemos que na geometria absoluta um triângulo ter medida dos ângulos internos igual a dois retos implica em que todo o outro também a tenha o que ocorre somente na geometria euclidiana.
Para os quadriláteros a extensão é imediata. De fato, um quadrilátero é decomposto em dois triângulos.

Proposição Podemos construir triângulos cuja soma-interna é arbitrariamente próxima a dois retos.



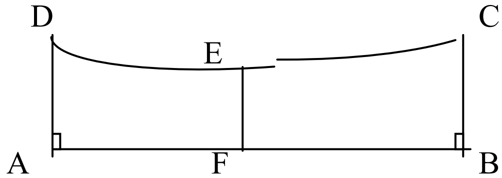
Demonstração: Considere um ponto D de divisão do triângulo ABC. Ao aproximá-lo do ponto A por posições sucessivas D, D' etc. o ângulo ACD se aproxima de zero (note que $\measuredangle$(CA, CD') < $\measuredangle$ (CA, CD)) e ADC se aproxima do ângulo externo EAC donde CAD + ADC tende a dois retos.

Proposição Não existe semelhança de triângulos na Geometria Hiperbólica; isto é, dois triângulos são congruentes se, e só se seus ângulos correspondentes o forem.
Demonstração Denote por ΔABC e ΔA'B'C' os dois triângulos de ângulos respectivamente congruentes. Suponha que dois de seus lados digamos BC e B'C' ocorra BC < B'C'.



Marque respectivamente sobre AC' e AB' pontos C'' e B'' tais que AC'' ≡ AC e AB'' ≡ AB.
De acordo com as hipóteses, no quadrilátero B''B'C'C'' acima temos B''C'' // B'C' o que implica uma soma-interna = 4 retos, pois, por exemplo, C''B''B' + B''B'C' = C''B''B' + AB''C'' = 2 retos.

Proposição Num Quadrilátero de Saccheri o topo é maior que a base e o segmento unindo os pontos médios é menor que as hastes.
Demonstração Considere o Quadrilátero de Saccheri abaixo no qual devemos mostrar que DC > AB e que EF é o menor dos segmentos verticais da figura.



No quadrilátero AFED temos AD > EF, pois o ângulo em D é agudo medindo assim menos que um reto. Analogamente temos CB > EF. Considerando agora o quadrilátero de base EF e topo AD vemos que sendo o ângulo em A reto e em D agudo, as hastes AF e DE são desiguais e, além disso, AF < DE. De forma análoga concluímos do outro quadrilátero que FB < EC donde AB < DC .

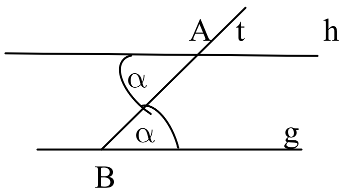
Proposição Duas paralelas tem no máximo uma perpendicular comum.
Demonstração De fato, a existência de duas perpendiculares comuns implica na formação de um retângulo isto é, existiria no Plano Hiperbólico um Quadrilátero de Saccheri com os ângulos do topo retos.

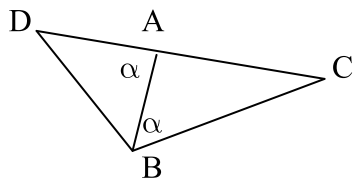
Lema: Considere duas retas cortadas por uma transversal. Se os ângulos alternos internos ou correspondentes são iguais então as retas são paralelas.

Demonstração Basta considerar o caso em que os ângulos são alternos internos, pois os correspondentes são seus suplementos.

Tomemos como retas as g e h da figura e seja t a reta transversal formando os ângulos alternos internos iguais a α e mostremos que as retas são paralelas. Sejam A e B os pontos de interseção de t com as retas h e g.

Por absurdo suponha que as retas se interceptam num ponto C. Sobre a reta AC marque um ponto D tal que D-A-C com DA $\equiv$ BC. Temos a congruência $\triangle BCA \equiv \triangle ADB$ pelo caso LAL donde $\measuredangle(BD, BA) \equiv \measuredangle(AB, AC)$. Isto é um absurdo, pois a soma dos ângulos em A vale dois retos, o que não pode ocorrer no vértice B, pois B, C e D não são colineares (uma vez que A, B e C não o são).

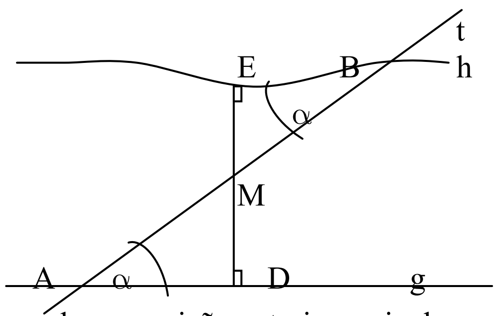




Proposição Considere duas retas cortadas por uma transversal. Se os ângulos alternos internos ou correspondentes são iguais então as retas serão paralelas com uma perpendicular comum . A reciproca é válida e sua demonstração fica como exercício.

Demonstração: Faremos uma nova demonstração envolvendo o lema anterior.

Marque o ponto médio M do segmento AB. Seja D, E respectivamente, a projeção de M sobre g, h. Temos a congruência de triângulos retângulos $\triangle ADM \equiv \triangle BEM$ (hipotenusa e um ângulo agudo correspondente congruente). Isto implica que os pontos E, M e D são colineares, pois seus suplementos na reta t são congruentes. Sendo assim, as retas h e g são paralelas e ED é a perpendicular comum.



A seguir temos a recíproca da proposição anterior, cuja demonstração deixamos para o leitor.

Proposição Se duas retas tem uma perpendicular comum, existem transversais que cortam as linhas de modo que formam ângulos interiores iguais. As únicas transversais com esta propriedade são aquelas que passam pelo ponto médio da perpendicular .

Proposição Dado uma reta e um ponto fora dela, por este ponto passam infinitas retas paralelas á reta dada. Além disso, cada uma delas tem uma perpendicular comum com a reta dada.

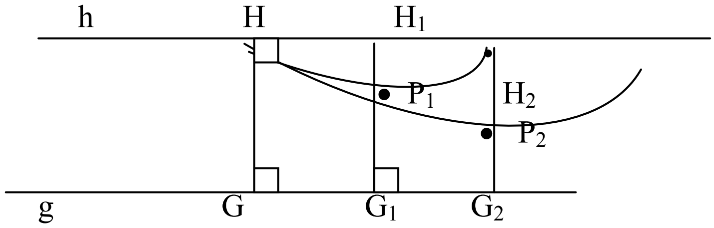
Demonstração Considere uma reta g e um ponto H fora dela. Seja G a projeção de H sobre g e por ele trace a perpendicular h a HG. A reta h é paralela a g com uma perpendicular comum. Tome agora um outro ponto H_1 sobre h digamos à direita de H e seja G_1 sua projeção sobre g. Como H_1G_1 se opõe ao ângulo reto no quadrilátero HGG_1H_1, temos $H_1G_1 > HG$ (ver abaixo).

Seja P_1 o ponto no interior do H_1G_1 tal que $HG \equiv G_1P_1$.

O quadrilátero GG_1P_1H é um Quadrilátero de Saccheri e portanto HP_1 é uma reta paralela à g com perpendicular comum. Além disso, HP_1 está abaixo de HH_1.

Analogamente, tome H_2 sobre HP_1 tal que $H - P_1 - H_2$ e seja G_2, a projeção de H_2 sobre g.

Devido a se ter $H_2G_2 > H_1G_1$ tome o ponto P_2 no interior de H_2G_2 formando um Quadrilátero de Saccheri $P_1G_1G_2H_2$ e obtendo uma nova reta paralela com perpendicular comum à g que é HP_2 .
Note que HP_2 está abaixo de HP_1. Neste processo obtemos infinitas retas paralelas à reta g e tando com ela uma perpendicular comum.



Comentário: Considerando o quadrilátero GHH_1G_1 (onde os ângulos da base são retos) vemos que o ângulo HH_1G_1 é agudo pois GG_1H_1 H é reto. Isto mostra que $H_1G_1 > HG$. Por outro lado, no quadrilátero G_1G_2 H_2H_1 o ângulo G_1H_1 H_2 é obtuso pois seu suplementar é um ângulo agudo.
Conclusão : 1) as distâncias dos pontos situados à direita de H aumentam no sentido da 'direita'.
O mesmo ocorre no sentido esquerdo. 2)Também podemos notar que não há *nenhuma reta paralela com perpendicular comum passando por H e que forme com HG um menor ângulo.*

Paralelas sem perpendicular comum
Cada reta paralela acrescentada acima forma um ângulo menor que a anterior. Como o ângulo GHH_1 é finito (agudo) isto implica na existência de uma reta limite abaixo de todas do gênero acima.
Existe no lado direito do ponto H uma reta ρ que ocupa uma posição limite. De fato, existe tal reta com as seguintes propriedades :

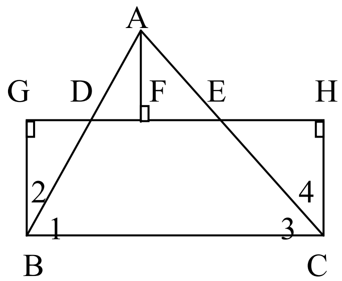
1) ρ está abaixo de qualquer paralela HP_j que tenha com g uma perpendicular comum.
2) ρ não intercepta a reta g.

Observe que o número de retas HP_j acima não é enumerável pois *a cada ponto H_j de h à direita de H corresponde uma tal reta*. Por outro lado, *a cada ponto Q_j de h à direita de G corresponde uma reta que naturalmente intercepta a reta g*. Assim, a reta ρ separa estes dois conjuntos:

- O conjunto das paralelas com perpendicular comum construídas como acima à direita de H.
- O conjunto das retas traçadas à direita de H e que interceptam a reta g. O mesmo ocorre no lado esquerdo do ponto H e tais retas , digamos ρ_1 e ρ_2 são *retas paralelas na concepção de Lobatchevski* e denominadas *retas limites*. Veremos algumas propriedades destas retas a seguir.

Quadrilátero associado a um triângulo
Todo lado de triângulo é o topo de algum quadrilátero de Saccheri, onde as duas figuras estão numa a relação bem definida. Dizemos, neste caso, que o Quadrilátero de Saccheri é associado ao triângulo.

Para ver isto, considere o ΔABC de base BC como na figura abaixo. Marque os pontos médios D e E dos lados AB e AC respectivamente. A seguir, projete os vértices A, B e C sobre a reta DE, obtendo respectivamente os pontos F, G e H.
Os triângulos GBD e ADF são congruentes(são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa congruentes) assim como os triângulos AFE e ECH.



Então o quadrilátero BCHG é um Quadrilátero de Saccheri de mesma área que o triângulo ABC dado.

Além disso, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC igual à dos ângulos do topo de BCHG: $\angle 1+ \angle 2 + \angle 3 +\angle 4 = \angle 1+ \angle 3 + \measuredangle(AD, AC) = \measuredangle(BA, BC) + \measuredangle(CB, CA)+ \measuredangle(AB, AC)$. Ou seja:

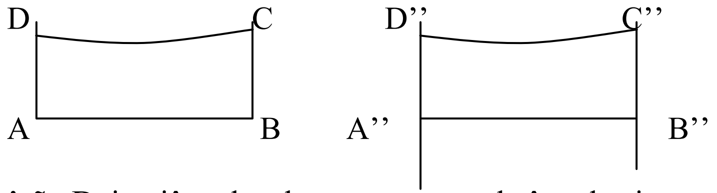
Corolário 1 A soma dos ângulos internos de um triângulo vale a soma dos ângulos do topo de seu Quadrilátero de Saccheri equivalente.

Corolário2 A linha unindo os pontos médios dos lados de um triângulos é paralela a linha suporte do terceiro lado , tem uma perpendicular comum com ele e o segmento unindo os pontos médios é menor que metade do terceiro lado.
Demonstração A referida linha unindo os pontos médios é a base do Quadrilátero de Saccheri equivalente e portanto tem esta propriedade de ser paralela ao topo, que no caso é do terceiro lado. Além disso a base deste Quadrilátero de Saccheri, que como já sabemos tem um comprimento menor que o do topo mede o dobro do segmento dos pontos médios.

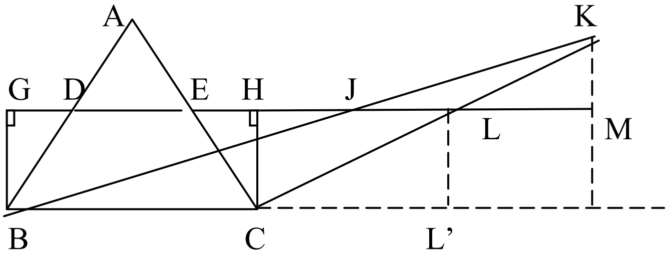
A seguir, iremos em direção a definir a medida de área na geometria hiperbólica. Note a ausência de quadrados nesta geometria. Assim usaremos outro processo.
Na verdade, a triangularização de uma figura será o processo definitivo no cálculo da área.
Veremos agora que precisamos esclarecer a relação entre a área de um triângulo e seu defeito.

Definição Dois polígonos são *equivalentes* se podem ser subdivididos num número finito de triângulos congruentes entre si.

Lema: Dois Quadrilátero de Saccheri cujos topos e os ângulos do topo são congruentes, são congruentes.
Demonstração: Considere dois QS nas condições acima e a seguir trace um segmento D’’C’’ congruente a DC e nas extremidades D’’ e C’’ trace semiretas formando com D’’C’’ um ângulo congruente ao do topo do quadrilátero. Estas semiretas só admitem uma perpendicular comum. Como no quadrilátero ABCD temos a perpendicular comum AB, a perpendicular comum ás semiretas traçadas deve ser uma reta A’’B’’ com D’’A’’ $\equiv$ DA $\equiv$ CB $\equiv$ C’’B’’.



Proposição Dois triângulos de mesma soma de ângulos internos são equivalentes.
Demonstração Considere dois triângulos ΔABC e ΔA’B’C’ com mesma soma de ângulos internos. Vamos considerar dois casos.
Caso 1: Os triângulos têm um dos lados correspondentes congruentes.
Seja Q (resp. Q’) o QS associado ao triângulo ABC (resp. A’B’C’). Podemos usar o lema para os quadriláteros Q e Q’ o que os torna equivalentes. Isto se estende então aos triângulos.
Caso 2: Suponha agora que nenhum par de lados dos dois triângulos é congruente.
Considere então que nos triângulos temos A’B’ > AB.



Se J é um ponto variável sobre a reta GH, o comprimento de BJ é mínimo quando J = G e cresce arbitrariamente se J se desloca à direita de G (ver figura acima).

Considere assim uma posição de J onde BJ = $\frac{A'B'}{2}$, que é possível já que $\frac{A'B'}{2} > \frac{AB}{2}$ = BD > BG.

Tome o ponto K sobre a reta BJ com B – J – K e JK = BJ e onde BJ é congruente ao um dos lados do triângulo A'B'C'.

Como C, K estão sobre lados opostos da reta GH, esta (usando Pasch) intercepta o lado CK do triângulo BCK num ponto L .

A mediatriz de BC no Quadrilátero de Saccheri BCHG é perpendicular a GH. Como GH contem o ponto médio J do lado BK no triângulo BCK e é perpendicular à mediatriz do lado BC , também contem o ponto médio do lado CK (os triângulos LMK e CL'L são congruentes onde L' é projeção de L sobre BC).

Daí L é o ponto médio do lado CK e assim o Quadrilátero de Saccheri BCHG é associado aos triângulos BCK e ABC sendo então equivalente a cada destes triângulos e já vimos pelo lema acima, que os triângulos ABC e BCK são equivalentes.

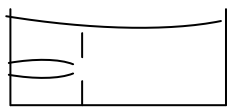
Observe ainda que os triângulos BCK e A'B'C' tem dois lados congruentes pois BK ≡ A'B' por construção. Concluímos daí a equivalência dos triângulos ΔABC e ΔA'B'C' .

Observação: A construção do triângulo BCK é uma conexão com os dois triângulos ABC e A'B'C' que possuem a mesma soma dos ângulos internos: é assumido o lado comum BC com ΔABC e constrói-se o lado BK congruente ao lado A'B' através da observação de continuidade. Portanto, através da construção do triângulo BCK verificamos que também a reciproca do teorema acima é válida: Se dois triângulos são equivalentes, seus Quadriláteros de Saccheri associados são equivalentes (congruentes até) e então os triângulos tem a mesma soma dos ângulos internos.

Recíproca Suponha que os triângulos ABC e A'B'C' são equivalentes. Eles podem ser decompostos no mesmo número de triângulos congruentes aos pares. Cada tal par tem mesma soma de ângulos internos e então o mesmo defeito. Assim ABC e A'B'C' tem o mesmo defeito e portanto a mesma soma de ângulos internos.

A unidade de área na Geometria Hiperbólica

Na Geometria Euclidiana: O quadrado unitário e a medida de área.
Na Geometria Hiperbólica: deveríamos usar o Quadrilátero de Saccheri unitário?



Impedimento: a relação de paralelismo não é transitiva na Geometria Hiperbólica!

O cálculo de área na Geometria Hiperbólica necessita de uma unidade que necessariamente difere de um quadrado já que este não existe. Uma possibilidade seria pelo uso de infinitésimos onde se tomaria por unidade um triângulo equilátero. Porem há certos problemas. Primeiro, na geometria hiperbólica não existem triângulos proporcionais ficando delicada a questão de submúltiplo.

A área não pode ser medida como proporcional a soma dos ângulos internos. De fato, se dividirmos um triângulo em dois triângulos retângulos vemos que suas áreas não somaria a área do triângulo pois a soma dos ângulos internos seria maior que dois retos° (cada triângulo tem um ângulo de 90°).

A solução no entanto é em considerar o defeito de um triângulo pois este valor é aditivo.

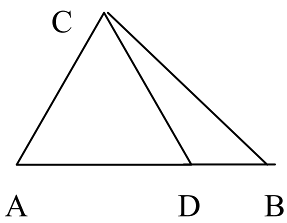
NOTA: Como vimos, na Geometria Hiperbólica existem triângulos cuja soma dos ângulos internos é menor do que um número prefixado δ > 0. Portanto, o mesmo ocorre com qualquer polígono. Em particular, existem quadriláteros na Geometria Hiperbólica cuja soma dos ângulos é menor que dois retos. Para isto, basta ‘colar dois triângulos congruentes de soma interna menor que um reto.

Definição A área de um triângulo é um número proporcional ao defeito do triângulo, a constante de proporcionalidade sendo a mesma para cada triângulo ou seja, se D é o defeito do triângulo a área é A = kD onde k é uma constante positiva. Por exemplo, se k = 2 os triângulos cujas soma de ângulos internos é 50° ,100° ,150° e portanto com defeitos de 130, 80 e 30 tem áreas 260 160 e 60 e área 26,16 6 se k = 1/5. Temos evidentemente a seguinte,

Proposição Dois triângulos tem mesma área se , e só se tem a mesma soma de ângulos internos.

Considere k = 1 e usemos a medida em graus. Os triângulos com defeitos 1° , 2°, 3° , ... tem portanto áreas A = 1,2,3,... e vice versa. Considere um triângulo ABC com área 2, defeito 2° e ângulo soma 178°. Seja D um ponto do lado AB que varia de A para B. Os ângulos DCB e CDB irão variar (numa variação que podemos supor continua) de modo que $\angle DCB$ tende a 0° quando D se aproxima de B enquanto $\angle CDB$ se aproxima do suplemento do ângulo interno B. Da mesma forma o ângulo soma do triângulo BCD irá variar começando do valor 178° e se aproxima de dois retos° quando D se aproxima de B. Haverá então uma posição de D para a qual o ângulo soma é 179°. O defeito do triângulo BCD será então de 1° de forma que o triângulo ADC também terá um defeito de 1°. O triângulo ABC contem assim duas unidades de área. Similarmente um triângulo de área 3 unidades pode ser subdividido em três triângulos com área 1 unidade cada.

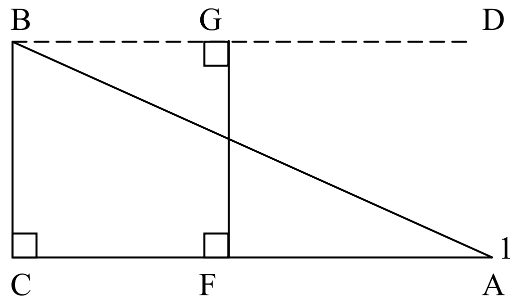
A questão aqui é de ordem infinitesimal: a varredura do segmento CD é tal que as áreas determinadas percorrem todos os valores entre 0 e o valor da área de ABC. As unidades correspondem a medida de áreas de triângulos que não são necessariamente congruentes.



Faremos agora uma demonstração direta do seguinte fato:

Proposição Na Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos.

Demonstração Mostremos primeiro que a afirmação é válida para triângulos retângulos.
Seja BD a reta tal que $\angle$ DBA = $\angle$BAC. As retas AC e BD são paralelas com uma perpendicular comum GF como na figura. O quadrilátero BCFG é de Lambert. Portanto, o $\angle$CBG < $\pi/2$. Logo, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle CBG$ + um reto < dois retos.

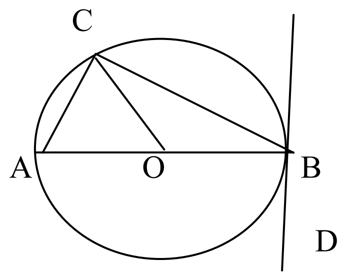


Conclusão: Todo triângulo se divide em dois triângulos retângulos. Disto segue a afirmação feita na proposição.

Proposição C_1 Os ângulos inscritos em um semicírculo de qualquer círculo são agudos e não tem um valor constante.

Demonstração Considere um circulo de centro O. seja ABC um ângulo inscrito num seu semicírculo onde AB é o diâmetro. Seja ainda BD uma tangente ao circulo em B.

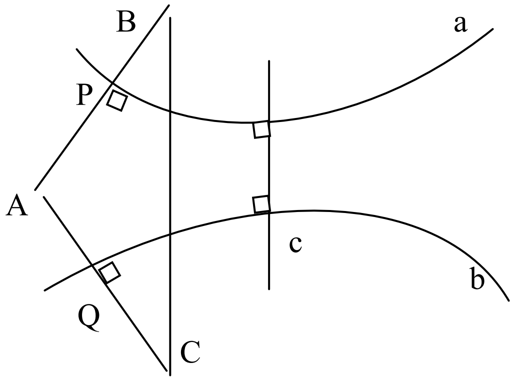
Os triângulos ΔACO , ΔOBC são isósceles assim que $\angle CAO = \angle ACO$ e $\angle OCB = \angle OBC$ .Ora a soma destes dois ângulos iguala ao ângulo inscrito em C ou seja, $S(ABC) = 2\angle ACB$. Portanto, $2\angle ACB$ < dois retos donde $\angle ACB < 90$ como queríamos demonstrar.



Para a segunda parte observe que movendo o ponto C em direção ao ponto B chegamos à posição limite $\angle ABD$ que é um ângulo reto o que não vale de acordo com a primeira parte da demonstração. Assim não há igualdade de medida no ângulo inscrito.

Proposição C_2 Por três pontos nem sempre existe um circulo que os contenha.

Demonstração vamos exibir um triângulo com duas mediatrizes que não se encontram. Considere duas retas a e b com uma perpendicular comum c. Seja A um ponto entre a e b(e também fora de c).



Seja P(resp. Q) a projeção de A sobre a (resp. b) Agora tome o ponto B (resp. C) sobre a reta AP (resp. (AQ) de forma que $AP \equiv PB$ (resp. $AQ \equiv AC$). Naturalmente, os pontos A,B,C não são colineares, senão as retas a e b teriam mais uma perpendicular (que seria a reta BC).

Assim, o triângulo ΔABC mostra a veracidade de nossa proposição.