Resumo de livro *Euclidis ab omni naevo vindicatus* de Saccheri

Ricardo Bianconi

2012 - Revisado em 2018

1 Introdução

Em sua obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides justificado de toda falha), publicada em Milão em 1733, Saccheri também apresenta uma prova falha deste postulado. O que distingue esta obra é que existem muitos resultados corretos e úteis no desenvolvimento posterior das chamadas geometrias não euclideanas (principalmente a hiperbólica). A idéia de Saccheri era de supor que este postulado era falso e tentar daí provar alguma contradição. Ele partiu de quadriláteros de Saccheri $\boxed{\mathrm{S}}\,ABCD$, (quadriláteros convexos, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \perp \overline{BC} \perp \overline{CD}$) e considerou **três hipóteses**, a saber, $B\hat{A}C$ é reto (a *hipótese do ângulo reto*), ou $B\hat{A}C$ é obtuso (a *hipótese do ângulo obtuso*), ou $B\hat{A}C$ é agudo (a *hipótese do ângulo agudo*). Ele então mostrou que a hipótese do ângulo reto era equivalente ao quinto postulado; a do ângulo obtuso era contraditória, mas do ângulo agudo teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição. Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele "provou" o quinto postulado (numa gritante falha de argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores), devido ao medo da censura da Igreja.

Posteriormente, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também escreveu um trabalho sobre a teoria das paralelas em que aprofundou mais os resultados de Saccheri, mas também tentando provar o postulado por contradição. Por fim, os resultados de Nikolai I. Lobatchevskii (1793-1856) e Johann Bolyai (1802-1860), publicados em torno de 1824, introduziram a geometria hiperbólica, mostrando assim que o postulado das paralelas não pode ser provado a partir dos outros postulados da geometria euclideana.

Vamos apresentar aqui diversos dos resultados dessa obra, que merece também ser lida.

2 Breve Biografia de Saccheri

Giovanni Gerolamo Saccheri nasceu na cidade italiana de San Remo em 5 de setembro de 1667. Entrou para a ordem dos jesutas em 1685 e foi ordenado padre em 1694. Lecionou filosofia na Universidade de Turim de 1694 a 1697, e de 1697 até sua morte em 25 de outubro de 1733 foi professor de teologia, filosofia e matemática na Universidade de Pádua.

Sua obra mais conhecida hoje é o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Liberado de Todo Erro), publicada em 1733, ano de sua morte, em que tenta demonstrar que o quinto postulado dos *Elementos* de Euclides seria verdadeiro. Em meio a esta tentativa, demonstra diversos resultados que são válidos na geometria hiperbólica.

Saccheri publicou outras obras de conteúdo teológico, filosófico e matemático. Destacamos a *Quaesita geometrica* (1693), uma coleção de problemas de geometria e sua solução; um tratado de lógica, a *Logica Demonstrativa* (1697), e *Neo-statica*, um tratamento geométrico de problemas de Estática e Dinâmica, publicado postumamente em 1708.

3 Algumas Desigualdades Geométricas

Apresentamos cinco desigualdades geométricas a serem usadas no texto de Saccheri.

Assumimos como postulados apenas os de incidência, ordem, congruência e continuidade, sem assumir nada sobre unicidade ou não de retas paralelas.

Para facilitar a leitura, denotaremos por $P\hat{O}Q$ o ângulo de vértice O, consistindo da união das semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.

Desigualdade 1. (Euclides, *Elementos*, I-16) Dados os pontos A, B, C e D, tais que A, B e C sejam não colineares e $A-B-D$, valem as desigualdades $B\hat{A}C < D\hat{B}C$ e $A\hat{C}B < D\hat{B}C$. Em outras palavras, o ângulo $D\hat{B}C$ externo ao triângulo $\triangle ABC$ é maior que os seus dois ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Sejam M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e N, tal que $A-M-N$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MN}$. Por LAL, $\triangle AMC \equiv \triangle NMB$. Por construção, o ponto N está no interior do ângulo $D\hat{B}C$ e, portanto, $A\hat{C}B \equiv C\hat{B}N < D\hat{B}C$.

Para a outra desigualdade, tomamos um ponto E qualquer, tal que $C-B-E$, e fazemos o mesmo argumento e obtemos $B\hat{A}C < A\hat{B}F \equiv D\hat{B}C$. $\square$

Observação. Uma aplicação simples do postulado LAL implica que os dois ângulos da base, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, de um triângulo isóscele $\triangle ABC$ (com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) são congruentes.

Desigualdade 2. Dado o triângulo $\triangle ABC$, vale a equivalência: $\overline{AB} < \overline{AC}$ se, e somente se, $A\hat{C}B < A\hat{B}C$.

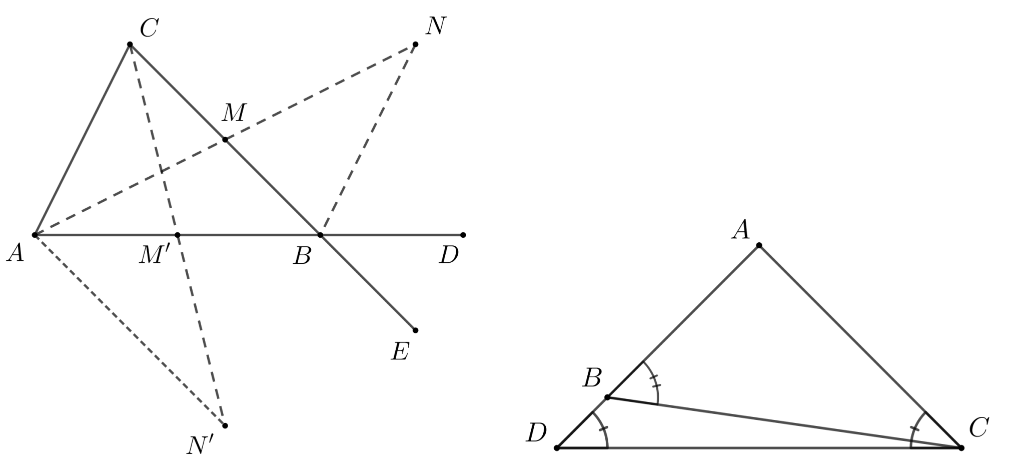

Figura 1: Desigualdades 1 e 2.

Demonstração: Suponhamos que $\overline{AB} < \overline{AC}$ e seja D o ponto que satisfaça $A-B-D$ e $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$ (o triângulo $\triangle ACD$ é isóscele). Pela desigualdade 1 aplicada ao triângulo $\triangle DBC$, com ângulo externo $A\hat{B}C$, e pelo fato de que o ponto B está no interior do ângulo $A\hat{C}D$, obtemos $A\hat{C}B < A\hat{C}D < A\hat{B}C$.

A recíproca demonstra-se por contradição. $\square$

Observação. Dado o ponto O no interior de um triângulo $\triangle ABC$, pelo menos dois dos ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são obtusos. (Sejam α, β e γ as medidas em graus destes ângulos. Como $\alpha+\beta+\gamma = 360°$, se $\alpha \leq 90°$, então $\beta+\gamma \geq 270°$. Portanto, $\beta, \gamma > 90°$.)

Observação. O postulado LAL implica que para todo triângulo, pelo menos dois de seus ângulos internos são agudos.

Desigualdade 3. Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, vale a equivalência: $B\hat{A}C > E\hat{D}F$ se, e somente se, $\overline{BC} > \overline{EF}$.

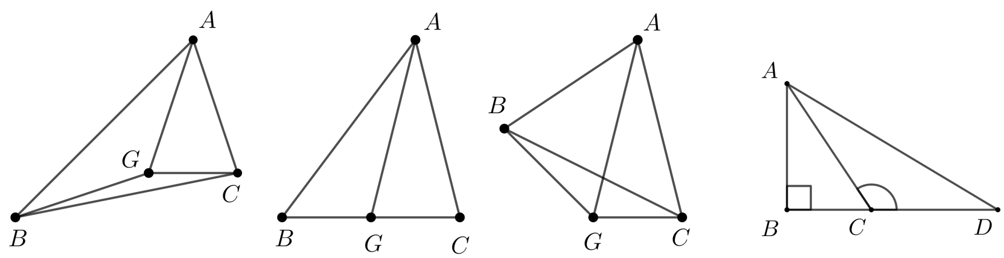

Figura 2: Desigualdades 3 e 4.

Demonstração: Seja G no interior do ângulo $B\hat{A}C$, tal que $B\hat{A}G \equiv E\hat{D}F$ (e, portanto, $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$, por LAL). O ponto G pode estar no interior do $\triangle ABC$, ou $B-G-C$, ou no exterior do $\triangle ABC$.

No caso em que $B-G-C$, temos imediatamente a desigualdade $\overline{EF} \equiv \overline{BG} < \overline{BC}$ desejada.

No caso em que G estiver no interior do $\triangle ABC$, como $\overline{AC} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{AG}$, o ângulo $A\hat{G}C \equiv A\hat{C}G$ tem que ser agudo, pela observação acima, o que implica que o ângulo $B\hat{G}C$ é obtuso. Pela desigualdade 2 no triângulo $\triangle GBC$, $\overline{BC} > \overline{BG} \equiv \overline{EF}$, como desejado.

Se G estiver no exterior de $\triangle ABC$, como $\overline{AC} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{AG}$, vale $A\hat{G}C \equiv A\hat{C}G$. Como B estará no interior de $G\hat{C}A$ e A no interior de $B\hat{G}C$, valem as desigualdades $B\hat{C}G < A\hat{C}G \equiv A\hat{G}C < B\hat{G}C$, pela desigualdade 2 aplicada ao triângulo $\triangle BGC$, obtemos $\overline{EF} \equiv \overline{BG} < \overline{BC}$, como desejado. $\square$

Observação. Com esta desigualdade pode-se deduzir os critérios ALA, LAAo e LLL de congruência de triângulos.

Desigualdade 4. Dados o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em B, e o ponto D, tal que $B - C - D$, valem as desigualdades $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{AD}$.

Demonstração: Como o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, o ângulo $A\hat{C}B$ tem que ser agudo e, portanto, a desigualdade 2 implica que $\overline{AB} < \overline{AC}$. O ângulo $A\hat{C}D$ é obtuso e, daí, $\overline{AC} < \overline{AD}$, pela desigualdade 2 aplicada ao triângulo $\triangle ACD$. $\square$

Desigualdade 5. Suponhamos que $\triangle ABC$ seja retângulo, com $A\hat{B}C$ reto. Sejam D e E dois pontos que estejam no plano daquele triângulo, do mesmo lado em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$, e tais que $\overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{AE}$. Neste caso, $A\hat{D}C$ é obtuso e $A\hat{E}C$ é agudo se, e somente se $\overline{DC} < \overline{BC} < \overline{EC}$.

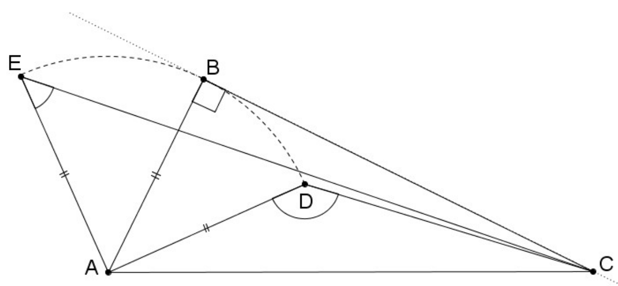

Figura 3: Desigualdade 5.

Demonstração: Como os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABE$ são isósceles, com bases $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$, o ângulo $A\hat{D}C$ será obtuso se, e somente se, o ponto D estiver no interior do triângulo $\triangle ABC$, e que o ângulo $A\hat{E}C$ será agudo se, e somente se, o ponto E estiver no interior do ângulo $A\hat{C}B$, mas no exterior do triângulo $\triangle ABC$.

A desigualdade 2 aplicada ao triângulo $\triangle CDB$ implica que $\overline{DC} < \overline{BC}$, pois o ângulo $B\hat{D}C$ é obtuso, e aplicada ao triângulo $\triangle CEB$ implica que $\overline{BC} < \overline{EC}$, pois o ângulo $E\hat{B}C$ é obtuso. $\square$

Para finalizar esta seção, apresentamos o seguinte resultado.

Exercício 1: Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas linha distintas, $\ell_1 \not\perp \ell_2$, $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ uma régua, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = d(P, Q)$, sendo que $P \in \ell_2$, $Q \in \ell_1$, $\overline{PX} \perp \ell_1$ e $x = f(P)$. Mostre que h é função contínua.

4 Os quadriláteros de Saccheri

Definição 1: Um quadrilátero convexo $ABCD$ é chamado de quadrilátero de Saccheri se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos.

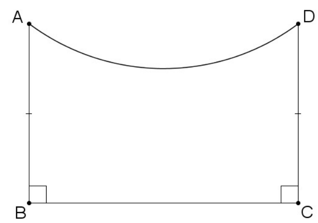

Figura 4: Quadrilátero de Saccheri. O lado $\overline{AD}$ foi desenhado curvo, para evitar a ilusão de que sejam retângulos.

Nesta seção ainda não assumimos nenhuma forma de postulado de paralelismo. Usamos apenas os postulados da Geometria (Métrica) Neutra.

Estudemos algumas propriedades dos quadriláteros de Saccheri e de Lambert, estes definidos após o Exerício 3.

Exercício 2: (Saccheri, Prop. I) Dado o quadrilátero $\square ABCD$, mostre que se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $B\hat{A}D \equiv A\hat{D}C$, então $A\hat{B}C \equiv B\hat{C}D$. (Use LAL nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle DCA$ e, depois, LLL nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$.)

Exercício 3: (Saccheri, Prop. II) Dado o quadrilátero $\square ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $B\hat{A}D \equiv A\hat{D}C$, se $A - E - D$ e $B - F - C$, $\overline{AE} \equiv \overline{ED}$ e $\overline{BF} \equiv \overline{FC}$, mostre que $\overline{EF}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ e também ao segmento $\overline{BC}$. (Os triângulos $\triangle ABF$ e $\triangle DCF$ são congruentes, por LAL; daí, $\overline{AF} \equiv \overline{DF}$; por LLL, $\triangle AEF \equiv \triangle DEF$ e, portanto, $A\hat{E}F \equiv D\hat{E}F$ são retos; por LAL, $\triangle AEB \equiv \triangle DEC$ e, portanto, $\overline{BE} \equiv \overline{CE}$; por fim, por LLL, $\triangle BEF \equiv \triangle CEF$, do que se conclui que $B\hat{F}E \equiv C\hat{F}E$ são retos.)

Definição 2: Com a notação do exercício, o quadrilátero $EFCD$ é chamado de *quadrilátero de Lambert*.

Exercício 4: (Saccheri, Prop. III e IV) Dado o quadrilátero de Saccheri $\boxed{\mathrm{S}}ABCD$ ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são retos), seja

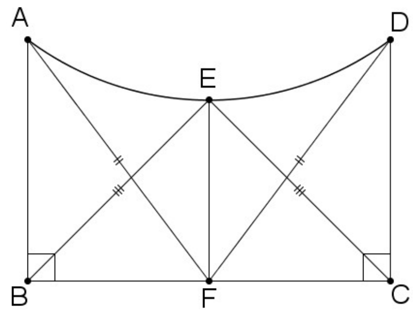

Figura 5: O segmento $\overline{EF}$ é perpendicular aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

$\alpha = m(B\hat{A}C)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $BC < AD$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $BC = AD$;

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $BC > AD$.

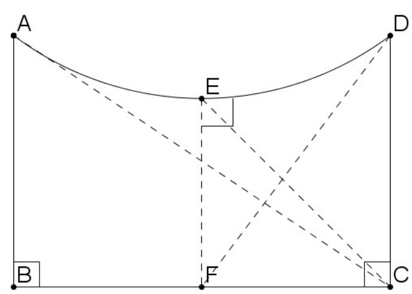

Figura 6: Desigualdade de ângulos e de lados de um quadrilátero de Saccheri.

Exercício 5: (Variante do anterior) Dado o quadrilátero de Lambert $\boxed{\text{L}}\,ABFE$, (figura 7) seja $\alpha = m(B\hat{A}E)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $AB > EF$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $AB = EF$;

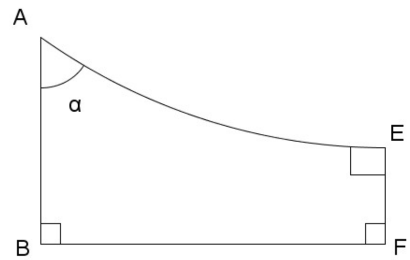

Figura 7: Quadrilátero de Lambert.

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $AB < EF$.

Sugestão: Prolongar a um quadrilátero de Saccheri.

Exercício 6: (Preparação de Roberto Bonola[1] para o resultado seguinte)

Neste exercício vamos demonstrar algumas desigualdades relacionadas aos quadriláteros de Saccheri, expostas por Roberto Bonola (1874-1911). Elas serão usadas para a demonstração de que se uma das hipóteses do ângulo agudo, reto ou obtuso for válida em um exemplo, então será válida em todos os quadriláteros de Saccheri. A demonstração original de Saccheri usa a propriedade arquimediana das retas e a nova demonstração evita essa hipótese.

Dado o quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são retos), sejam os pontos E, F, E' e F', tais que $A - E - D$, $E' - A - D$, $B - F - C$, $F' - B - C$, e também $\overline{EF}, \overline{E'F'} \perp r_{BC}$ (veja as figuras 8 e 9. Seja $\alpha = m(B\hat{A}D)$.

Mostre que:

1. $\alpha = 90$ se, e somente se, $\overline{EF} \equiv \overline{AB}$;
2. $\alpha = 90$ se, e somente se, $\overline{E'F'} \equiv \overline{AB}$;
3. $\alpha > 90$ se, e somente se, $\overline{EF} > \overline{AB}$;
4. $\alpha > 90$ se, e somente se, $\overline{E'F'} < \overline{AB}$;
5. $\alpha < 90$ se, e somente se, $\overline{EF} < \overline{AB}$;

[1]Em seu livro *Noneuclidean Geometry*, Dover Ed., EUA, 1955. Veja o Capítulo II.

6. $\alpha < 90$ se, e somente se, $\overline{E'F'} > \overline{AB}$.

Solução e/ou Sugestão: É mais fácil demonstrar todas as implicações "$\Leftarrow$" (correspondentes às cláusulas *se*), e depois demonstrar as implicações "$\Rightarrow$" (correspondentes às cláusulas *somente se*), por contradição.

O caso em que $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ segue do fato que $ABFE$ e $EFCD$ também são quadriláteros de Saccheri. Compare os ângulos $B\hat{A}D$, $F\hat{E}A$ $F\hat{E}D$ e $C\hat{D}A$. (O caso em que $\overline{AB} \equiv \overline{E'F'}$ segue a mesma linha de argumentação.)

Os casos em que $\overline{AB} < \overline{EF}$ ou $\overline{AB} > \overline{E'F'}$ estão indicados na figura 8.

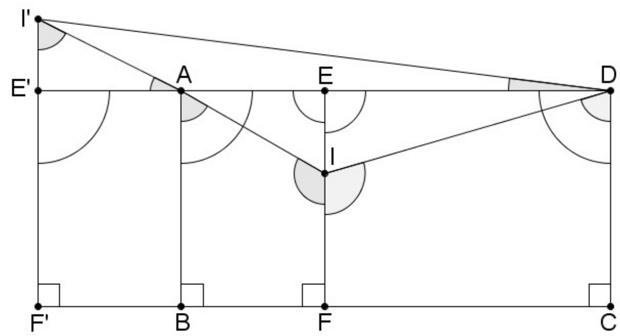

Figura 8: Mais desigualdades para os quadriláteros de Saccheri: hipótese do ângulo obtuso.

Tomamos o ponto I, tal que $E - I - F$ e $\overline{AB} \equiv \overline{FI}$. Observe que os quadriláteros $ABFI$ e $FICD$ são de Saccheri. Os ângulos $F\hat{I}C$ e $F\hat{I}D$ são externos aos triângulos $\triangle IEA$ e $\triangle IED$ respectivamente e, portanto, vale a desigualdade $m(F\hat{I}A) + m(F\hat{I}D) > m(I\hat{E}A) + m(I\hat{E}D) = 180$. Um dos ângulos $F\hat{I}C$ ou $F\hat{I}D$ tem que ser obtuso. Conclua a argumentação.

Também tomamos o ponto I', tal que $E' - I' - F'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{F'I'}$. Observe que os quadriláteros $I'F'AB$ e $I'F'CD$ são de Saccheri. Observe que $m(B\hat{A}I') + m(B\hat{A}D) > 180$. O ângulo $E'\hat{A}I'$ é externo ao triângulo $\triangle I'AD$. Daí, $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{D}A) = m(C\hat{D}I') - m(A\hat{D}I') > m(C\hat{D}I') - m(E'\hat{A}I')$. Como $C\hat{D}I' \equiv F'\hat{I'}D$, temos que $m(C\hat{D}I') - m(E'\hat{A}I') = m(F'\hat{I'}A) - m(E'\hat{A}I') = m(B\hat{A}E')$. Isso garante que $\alpha > 90$ (por que?).

Os casos em que $\overline{AB} > \overline{EF}$ ou $\overline{AB} < \overline{E'F'}$ estão indicados na figura 9.

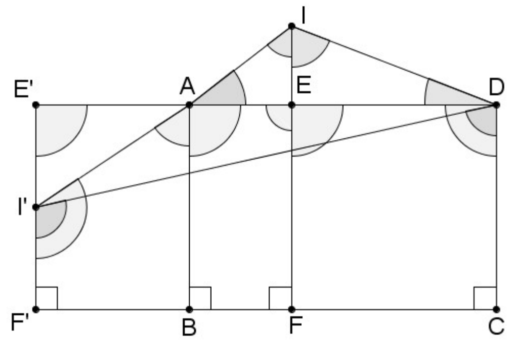

Figura 9: Mais desigualdades para os quadriláteros de Saccheri: hipótese do ângulo agudo.

No caso em que $\overline{AB} > \overline{EF}$, seja I o ponto tal que $F - E - I$ e $\overline{AB} \equiv \overline{FI}$. Os quadriláteros $ABFI$ e $IFCD$ também são de Saccheri. Pelo teorema dos ângulos externos, temos que $m(E\hat{I}A)+m(E\hat{I}D) < m(F\hat{E}A)+m(F\hat{E}D) = 180$. Daí, temos que $2m(B\hat{A}D) = m(B\hat{A}D) + m(C\hat{D}A) < m(B\hat{A}I) + m(C\hat{D}I) = m(E\hat{I}A) + m(E\hat{I}D) < 180$ e, portanto, $\alpha = m(B\hat{A}D) < 90$.

No caso em que $\overline{AB} < \overline{E'F'}$. seja I' o ponto tal que $F' - I' - E'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{F'I'}$. O ângulo $I'\hat{A}E'$ é externo ao triângulo $\triangle I'AD$ e, portanto, $m(I'\hat{A}E') > m(I'\hat{D}A)$. Temos que $180 = m(B\hat{A}D)+m(B\hat{A}E') = m(B\hat{A}D)+ m(B\hat{A}I') + m(I'\hat{A}E')$. Mas $m(B\hat{A}I') + m(I'\hat{A}E') > m(B\hat{A}I') + m(I'\hat{D}A)$ e, como $m(C\hat{D}I') = m(F'\hat{I}'D) < m(B\hat{A}I') = m(F'\hat{I}'A)$, concluímos que

$$m(B\hat{A}E') = m(B\hat{A}I') + m(I'\hat{A}E') = m(F'\hat{I}'A) + m(I'\hat{A}E') >$$

$$m(F'\hat{I}'D) + m(I'\hat{D}A) = m(C\hat{D}I') + m(I'\hat{D}A) =$$

$$m(C\hat{D}A) = m(B\hat{A}D).$$

Ou seja, o suplementar do ângulo $B\hat{A}D$ é maior que ele e, assim, $m(B\hat{A}D) < 90$.

Exercício 7: (Saccheri, Prop. V, VI e VII) Sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ um quadrilátero de Saccheri ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são retos) e $\alpha = m(A\hat{B}C)$. Mostre que, se valer uma das hipóteses, $\alpha < 90$, ou $\alpha = 90$, ou $\alpha > 90$, então, para todo quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}\,EFGH$ vale a mesma hipótese.

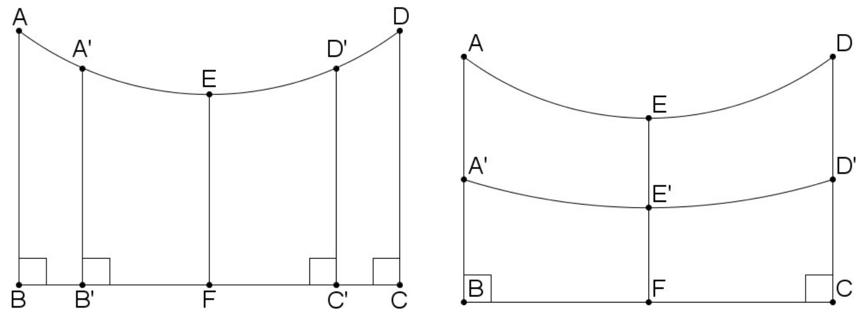

Figura 10: Caso particular implica no caso geral, para quadriláteros de Saccheri.

Solução e/ou Sugestão: (Acompanhe a Figura 10.) Comece com a hipótese do ângulo reto. Seja $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ um quadrilátero de Saccheri tal que $m(A\hat{B}C) = 90$. Sejam $P \in \overleftrightarrow{BC}$ e $Q \in \overleftrightarrow{AD}$ tais que $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Sejam $P_1, P_2 \in \overleftrightarrow{BC}$ e $Q_1, Q_2 \in \overleftrightarrow{AD}$ tais que $P_1 - C - P$, $\overline{CP_1} \equiv \overline{CP}$, $P_2 - B - P$, $\overline{AP_2} \equiv \overline{AP}$, $\overline{P_1Q_1} \perp \overleftrightarrow{AD} \perp \overline{P_2Q_2}$. Mostre que $\boxed{\text{S}}\,QPP_iQ_i$ (isto é, $\square QPP_iQ_i$ é de Saccheri), para $i = 1, 2$. Mostre que estes quadriláteros também satisfazem a hipótese do ângulo reto. Finalmente, sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ que satisfaz a hipótese do ângulo reto e $\boxed{\text{S}}\,EFGH$ um outro quadrilátero de Saccheri. Seja $\boxed{\text{S}}\,E'F'G'H'$ congruente a $\boxed{\text{S}}\,EFGH$, tal que $\overline{E'H'} \subset \overleftrightarrow{AD}$ o ponto médio de $\overline{E'H'}$ coincide com o ponto médio de $\overline{AD}$ e F', G' do mesmo lado que B e C em relação a $\overleftrightarrow{AD}$. Pode ser que $E' = A$, ou $E' - A - D - H'$, ou $A - E' - H' - D$, etc. Por exemplo, se $E' - A - D - H'$, sejam $K \in \overline{H'G'} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $L \in \overline{E'F'} \cap \overleftrightarrow{BC}$ (por que existem tais pontos?). Pelo argumento acima, temos que $\boxed{\text{S}}\,E'LKH'$ e que $\hat{K} \equiv \hat{L}$ são retos. Depois, use o mesmo argumento com $\boxed{\text{L}}\,MNG'H'$, sendo que M é o ponto médio de $\overline{E'H'}$ e N o ponto médio de $\overline{F'G'}$. (Faça os outros casos.)

Para o caso da hipótese do ângulo agudo, sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ tal que valha a hipótese $\alpha < 90$, M o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Pelo exercício anterior, $MN < CD$. Se $P \in \overleftrightarrow{BC}$, $P \neq N$, seja $Q \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Mostre que se $PQ \leq MN$ então existem $R \in \overleftrightarrow{BC}$ e $S \in \overleftrightarrow{BC}$ tais que $R \neq M$, $S \neq N$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overline{RS} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Conclua daí que $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ tem que satisfazer a hipótese do ângulo reto. Portanto $MN < PQ$, etc.

Para o caso da hipótese do ângulo obtuso, faça o mesmo.

Exercício 8: (Saccheri, Prop. VIII) Sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ um quadrilátero de Saccheri ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são retos), G e H dois pontos tais que $A - B - G$, $D - B - H$, $\alpha = m(\hat{})$, $\beta = m(B\hat{D}C)$ e $\gamma = m(G\hat{B}H)$. Mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e somente se, $\beta < \gamma$;

(b) se $\alpha = 90$ se, e somente se, $\beta = \gamma$;

(c) se $\alpha > 90$ se, e somente se, $\beta > \gamma$.

Solução e/ou Sugestão: Saccheri enunciou o resultado para um triângulo retângulo, e sua demonstração envolve completar a figura a um quadrilátero de Saccheri. Observe que $G\hat{B}H \equiv D\hat{B}A$. Use o exercício 4 e a desigualdade 3.

Exercício 9: (Saccheri, Prop. IX) Sejam $\boxed{\text{S}}\,ABCD$ um quadrilátero de Saccheri ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são retos), $\alpha = m(A\hat{B}C)$, $\beta = m(D\hat{C}A)$ e $\gamma = m(D\hat{A}C)$. Mostre que

(a) se $\alpha < 90$, então $\beta + \gamma < 90$;

(b) se $\alpha = 90$, então $\beta + \gamma = 90$;

(c) se $\alpha > 90$, então $\beta + \gamma > 90$.

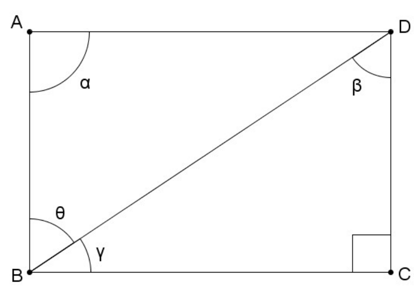

Figura 11: Soma de ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Solução e/ou Sugestão: Imediato, usando o exercício anterior.

Exercício 10: (Saccheri, Prop. X) Dados $A - B - C$ e D fora de $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, mostre que $DC > DA$ se, e só se, $BC > BA$.

Solução e/ou Sugestão: Esta é a desigualdade 5.

Vamos mostrar a seguir que a hipótese do ângulo obtuso leva a uma contradição. Isto será feito na Proposição XII. Para facilitar a argumentação, dividimos sua demonstração em duas partes.

Exercício 11: Suponha que valha a hipótese do ângulo obtuso para quadriláteros de Saccheri. Suponha que $A - B - C$, $A - E - D$, $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ e $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, e que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Mostre que $\overline{AE} < \overline{ED}$.

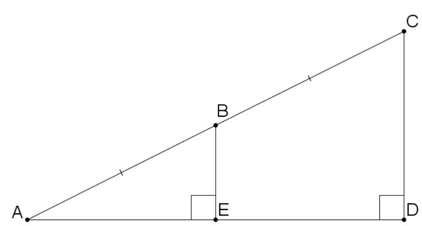

Figura 12: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes.

Solução e/ou Sugestão: Pelo Postulado de Pasch, sabemos que a linha contendo o ponto B e perpendicular ao segmento $\overline{BE}$ encontra o lado $\overline{CD}$ do triângulo $\triangle ACD$ no ponto G (exercício: por que não encontra o lado $\overline{AD}$?).

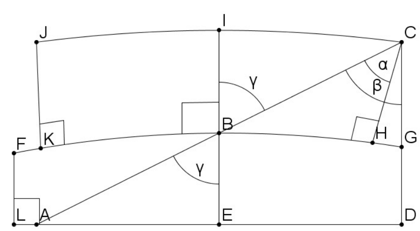

Figura 13: Os ângulos $A\hat{B}E \equiv I\hat{B}C < B\hat{C}H < B\hat{C}G$.

Sejam F o ponto no mesmo semiplano de G e $L \in \overleftrightarrow{AD}$, tais que $\overline{FL} \perp \overleftrightarrow{AD}$, e $\overline{FL} \equiv \overline{GD}$. Então $\boxed{\text{S}}\,FLDG$, e $\overline{BE}$ liga os pontos médios dos lados $\overline{FG}$ e $\overline{LD}$, e o ângulo $L\hat{F}G$ é obtuso. Sejam H, I, J e K pontos, tais que

$H, K \in \overleftrightarrow{FG}$, $\boxed{\text{S}}\, JKHC$, com I o ponto médio de $\overline{JC}$, $\overline{JK} \perp \overline{KH} \perp \overline{CH}$. Observe-se que $K - H - G$, pois $K\hat{G}C$ é agudo. O ângulo $G\hat{C}I \equiv C\hat{J}K$ é obtuso, e sabemos que $A\hat{B}E \equiv I\hat{B}C < B\hat{C}H < B\hat{C}G$.

Agora, seja $Q \in \overline{CD}$, tal que $\overline{BQ} \perp \overline{BD}$.

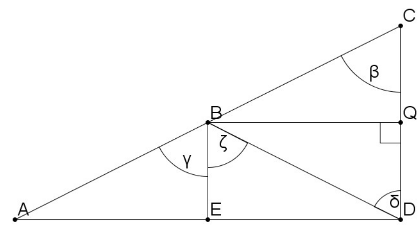

Figura 14: Os lados $\overline{AE} < \overline{BQ} < \overline{ED}$.

Comparamos os seguintes triângulos retângulos $\triangle ABE$, $\triangle BCQ$, $\triangle DBQ$ e $\triangle DBE$, e usamos as desigualdades de ângulos acima obtidas, para concluirmos que $\overline{AE} < \overline{BQ} < \overline{ED}$. $\square$

Exercício 12: (Saccheri, Prop. XII) Mostre que a hipótese do ângulo obtuso é contraditória.

Solução e/ou Sugestão: Primeiramente mostremos que, dados os pontos A, B, C, D, tais que B e C estão no mesmo semiplano relativo à reta $\overleftrightarrow{AD}$, e tais que $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ e $D\hat{A}B$ agudo, então $\overleftrightarrow{AB}$ concorre com a reta $\overleftrightarrow{CD}$ em um ponto P.

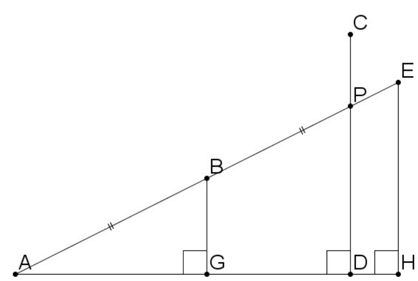

Figura 15: As retas AD e CD são concorrentes no ponto P.

Seja $G \in \overleftrightarrow{AD}$, tal que $\overline{BG} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot \overline{AG} > \overline{AD}$ (por que existe?). Seja E na semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que $\overline{AE} = n \cdot \overline{AB}$. Seja $H \in \overleftrightarrow{AD}$, tal que $\overline{EH} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Pelo exercício anterior, $n \cdot \overline{AG} < \overline{AH}$, ou seja, vale a relação $A - D - H$. Pelo postulado de Pasch, aplicado ao triângulo $\triangle AEH$ e à reta $\overleftrightarrow{CD}$, existe um ponto $P \in \overline{AE}$, tal que $P \mathrel{.\mathrm{I}.} \overleftrightarrow{CD}$.

Agora suponha que exista um quadrilátero de Saccheri $\boxed{\mathrm{S}}\,DABC$ (agora, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ são retos), satisfazendo a hipótese do ângulo obtuso (no caso, os ângulos $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$ obtusos). Os suplementares dos ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são agudos e, pela argumentação acima, sabemos que existem pontos P e Q, tais que $B - A - P$ e $A - B - Q$, e que incidem na reta $\overleftrightarrow{CD}$. Ou seja, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, sendo supostamente distintas, têm dois pontos distintos em comum, em direta afronta ao primeiro postulado de incidência.

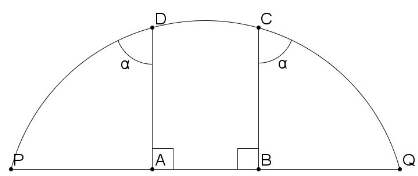

Figura 16: Hipótese do ângulo obtuso é contraditória.

Exercício 13: Mostre que todo triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. (Lembre-se que existem triângulos equiláteros, isósceles e escalenos.)

Solução e/ou Sugestão: Se o maior ângulo do $\triangle ABC$ for agudo, então todos os outros, sendo menores ou congruentes a este, serão também agudos.

Caso $\triangle ABC$ tenha uma ângulo reto ou obtuso, seu suplementar (sendo um ângulo externo) será agudo e, portanto, pela Prop. 16 de Euclides (o ângulo externo do triângulo é maior do que os dois ângulos internos não adjacentes; esta é a nossa desigualdade 1), os outros dois ângulos de $\triangle ABC$ deverão ser agudos.

Exercício 14: Mostre que a soma dos ângulos (internos) de um triângulo retângulo mede $180°$ se, e somente se, valer a hipótese do ângulo reto para os quadriláteros de Saccheri. Mostre que a mesma equivalência vale para qualquer triângulo, não necessariamente retângulo.

Solução e/ou Sugestão: Os triângulos retângulos já foram tratados no Exercício 9.

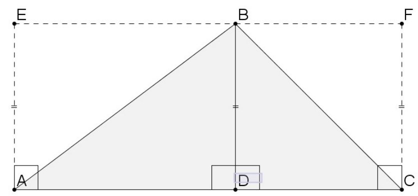

Figura 17: Hipótese do ângulo reto: soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.

Podemos supor que o maior lado é $\overline{AC}$ e, portanto, os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ são agudos. Daí, existe um ponto D, tal que $A - D - C$ e $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ (por que?). Agora é só somar os ângulos dos triângulos retângulos $\triangle BDA$ e $\triangle BDC$.

Exercício 15: Mostre que a soma dos ângulos (internos) de um triângulo retângulo mede estritamente menos que 180° se, e somente se, valer a hipótese do ângulo agudo para os quadriláteros de Saccheri. Mostre que a mesma equivalência vale para qualquer triângulo, não necessariamente retângulo.

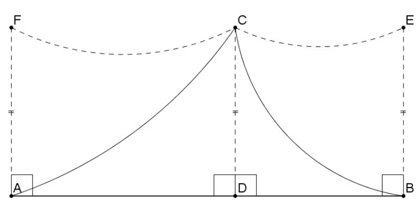

Figura 18: Hipótese do ângulo agudo: soma dos ângulos de um triângulo é estritamente menor que 180°.

Solução e/ou Sugestão: Acompanhe a figura 18.

Os triângulos retângulos já foram tratados no Exercício 9.

Podemos supor que o maior lado é $\overline{AB}$ e, portanto, os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{B}A$ são agudos. Daí, existe um ponto D, tal que $A - D - B$ e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (por que?). Agora é só somar os ângulos dos triângulos retângulos $\triangle CDA$ e $\triangle CDB$.

***