INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS - GEAM8

Teoria das Paralelas de Lobachevski

Traduzido livremente de *Geometrical researches on The theory of Parallesl by Nicholas Lobachevski*, de George Halsted

TEORIA DAS PARALELAS.

Na geometria encontro certas imperfeições que considero serem a razão pela qual esta ciência, para além da transição para a analítica, não pode ainda fazer qualquer avanço em relação ao estado em que nos chegou de Euclides.

Como parte destas imperfeições, considero a obscuridade nos conceitos fundamentais das grandezas geométricas e na forma e método de representar a medição destas grandezas, e finalmente a lacuna importante na teoria das paralelas, para a qual todos os esforços dos matemáticos têm sido até agora em vão.

Para esta teoria, os esforços de Legendre não serviram de nada, pois foi obrigado a deixar o único caminho rígido para se transformar num caminho lateral e refugiar-se em teoremas auxiliares que ilogicamente se esforçou por exibir como axiomas necessários. O meu primeiro ensaio sobre os fundamentos da geometria publiquei-o no *Mensageiro de Kasan* do ano de 1829. Na esperança de ter satisfeito todos os requisitos, empreendi a partir daí um tratamento de toda esta ciência, e publiquei o meu trabalho em partes separadas no *Gehrten Schriflen der Universilaet Kasan* nos anos de 1836, 1837, 1838, sob o título "Novos Elementos de Geometria, com uma Teoria completa das Paralelas".

A extensão desta obra talvez tenha impedido os meus compatriotas de seguirem este tema que, desde Legendre, tinha perdido o seu interesse. No entanto, sou de opinião que a Teoria das Paralelas não deve perder o seu direito à atenção dos geômetras e, por isso, pretendo dar aqui a substância das minhas investigações, observando de antemão que, contrariamente à opinião de Legendre, todas as outras imperfeições, por exemplo, a definição de uma linha recta, se mostram aqui estranhas e sem qualquer influência real na teoria das paralelas.

Para não cansar o meu leitor com a multiplicidade de teoremas cujas provas não apresentam dificuldades, prefixo aqui apenas aqueles de que é necessário um conhecimento para o que se segue.

1. Uma linha reta ajusta-se a si mesma em todas as suas posições. Com isto quero dizer que, durante a revolução da superfície que a contém, a linha reta não muda de lugar se passar por dois pontos imóveis da superfície: (isto é, se rotacionarmos a superfície que a contém em torno de dois pontos da reta, a reta não se move).

2. Duas linhas retas não se podem intersectar em dois pontos.

3. Uma linha reta suficientemente produzida em ambos os sentidos deve ultrapassar todos os limites e, desse modo, corta uma planície delimitada em duas partes.

4. Duas retas perpendiculares a uma terceira nunca se intersectam, por mais longe que sejam prolongadas.

6. Uma linha reta corta sempre outra ao passar de um lado para o outro: ('. e., uma linha reta tem de cortar outra se tiver pontos em ambos os seus lados).

6. Os ângulos verticais, em que os lados de um são prolongamentos dos lados do outro, são iguais. Isto é válido para os ângulos planos retos planos entre si, bem como para os ângulos planos de superfície: (i. e., ângulos diedros).

7. Duas retas não se podem intersectar, se uma terceira as cortar no mesmo ângulo.

8. Num triângulo retilíneo, os lados iguais são opostos a ângulos iguais e inversamente.

9. Num triângulo retilíneo, um lado maior está em frente de um ângulo maior. Num triângulo retângulo, a hipotenusa é maior do que qualquer um dos outros lados e os dois ângulos adjacentes a ela são agudos.

10. Os triângulos retilíneos são congruentes se tiverem um lado e dois ângulos iguais, ou dois lados e o ângulo incluído iguais, ou dois lados e o ângulo oposto ao maior iguais, ou três lados iguais.

11. Uma reta que é perpendicular a duas outras retas que não estão no mesmo plano que ela é perpendicular a todas as retas que passam pelo ponto de intersecção comum no plano dessas duas retas.

12. A intersecção de uma esfera com um plano é uma circunferência.

13. Uma recta perpendicular à intersecção de dois planos perpendiculares e que, num deles, é perpendicular ao outro.

14. Num triângulo esférico, os lados iguais são opostos a ângulos iguais, e inversamente.

15. Os triângulos esféricos são congruentes (ou simétricos) se tiverem dois lados e o ângulo incluído iguais, ou um lado e os ângulos adjacentes iguais.

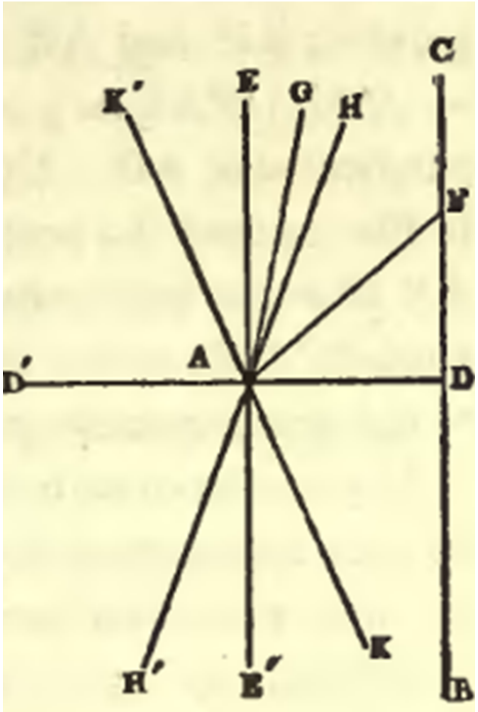
A partir daqui, seguem-se os outros teoremas com as suas explicações e provas.

16. Todas as retas que, num plano, partem de um ponto podem, em relação a uma dada reta do mesmo plano, ser divididas em duas classes: secantes e não secantes.

As linhas de fronteira de uma e outra classe dessas linhas serão chamadas paralelas à linha dada.

A partir do ponto A (Fig. 1), faz-se cair sobre a reta BC a perpendicular AD, em relação à qual se traça novamente a perpendicular AE.

No ângulo reto EAD, ou todas as retas que saem do ponto A encontram a reta DC, como por exemplo AF, ou algumas delas, como a perpendicular AE, não encontram a reta DC. Na incerteza de saber se a perpendicular AE é a única reta que não passa por DC, assumiremos que é possível que existam ainda outras linhas, por exemplo AG, que não cortam DC, por mais que se prolonguem. Ao passarmos das retas que cortam, como AF, para as que não cortam, como AG, temos de nos deparar com uma linha AH, paralela a DC, uma linha de fronteira, de um lado da qual todas as linhas AG são tais que não encontram a linha DC, enquanto do outro lado todas as rectas AF cortam a linha DC.



O ângulo HAD entre a paralela HA e a perpendicular AD chama-se *ângulo de paralelismo*, que designaremos por $\Pi(p)$ para $AD = p$.

Se $\Pi(p)$ é um ângulo reto, então o prolongamento AE' da perpendicular AE será igualmente paralelo ao prolongamento DB da reta DC, para além do que notamos que em relação aos quatro ângulos retos, que são feitos no ponto A pelas perpendiculares AE e AD, e os seus prolongamentos AE' e AD', todas as retas que partem do ponto A, ou ela própria ou pelo menos o seu prolongamento, estão num dos dois ângulos retos que estão orientados para BC, de modo que, exceto a paralela EE', todas as outras, se forem suficientemente prolongadas nos dois sentidos, têm de intersectar a reta BC.

Se $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, então sobre o outro lado de AD, fazendo o mesmo ângulo $DAK = \Pi(p)$, estará também uma recta AK, paralela ao prolongamento DB da reta DC, de modo que sob esta suposição devemos também fazer uma distinção de lados em paralelismo.

Todas as restantes retas ou seus prolongamentos dentro dos dois ângulos retos voltados para BC pertencem às que se intersectam, se estiverem dentro do ângulo $HAK = 2\Pi(p)$ entre as paralelas; pertencem, por outro lado, às não secantes, se estiverem sobre os outros lados das paralelas AH e AK, na abertura dos dois ângulos $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, entre as paralelas e EE' a perpendicular a AD.

Do outro lado da perpendicular EE' serão igualmente paralelos a BC os prolongamentos AH' e AK' das paralelas AH e AK; as retas restantes pertencem, se estiverem no ângulo $K'AH'$, à classe das secantes, mas se estiverem nos ângulos $K'AE$, $H'AE'$ à classe das não secantes.

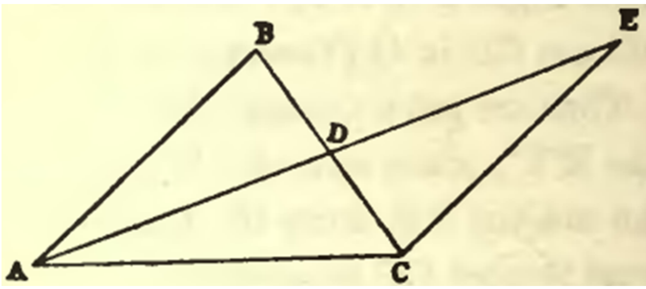
De acordo com isto, para a hipótese $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$, as retas só podem ser secantes ou paralelas; mas se assumirmos que $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, então temos de admitir duas paralelas, uma de um lado e outra do outro; além disso, temos de distinguir as retas restantes em não secantes e secantes.

Para ambas as hipóteses, serve como marca de paralelismo o fato de a reta se tornar secante para o menor desvio em direção ao lado onde se encontra a paralela, de modo que, se AH é paralela a DC, toda a reta AP corta DC, por menor que seja o ângulo HAF.

17. Uma reta mantém a característica do paralelismo em todos os seus pontos.

18. Duas retas são sempre mutuamente paralelas.

19. Num triângulo retilíneo, a soma dos três ângulos não pode ser superior a dois ângulos retos.



Suponhamos que, no triângulo ABC, a soma dos três ângulos seja igual a $\pi + a$, escolhemos então, em caso de desigualdade dos lados, o menor BC, dividimo-lo por metade em D, traçamos de A até D a reta AD e fazemos o seu prolongamento, DE, igual a AD, depois unimos o ponto E ao ponto C pela reta CE. Nos triângulos congruentes ADB e CDE, os ângulos $ABD = DCE$ e $BAD = DEC$ (Teoremas 6 e 10); daí resulta que também no triângulo ACE a soma dos três ângulos deve ser igual a $\pi + a$; mas também o ângulo menor BAG (Teorema 9) do triângulo ABC, ao passar para o novo triângulo ACE, foi dividido nas duas partes EAC e AEC. Continuando este processo, continuamente reduzindo a metade o lado oposto ao ângulo menor, temos finalmente de chegar a um triângulo em que a soma dos três ângulos é $\pi + a$, mas em que há dois ângulos, cada um dos quais em valor absoluto é menor do que $\frac{1}{2}a$; como agora, porém, o terceiro ângulo não pode ser maior do que π, então a tem de ser nulo ou negativo.

20. Se em qualquer triângulo retângulo a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos, o mesmo acontece com todos os outros triângulos.

21. A partir de um dado ponto podemos sempre traçar uma reta que fará com uma dada reta um ângulo tão pequeno quanto escolhermos.

22. Se duas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si, então a soma dos três ângulos do triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos.

23. Para cada ângulo a, existe uma reta p tal que $\Pi(p) = a$.

24. Quanto mais as retas paralelas se prolongam do lado do seu paralelismo, mais se aproximam uma da outra.

25. Duas retas paralelas a uma terceira são também paralelas entre si.

continua ...