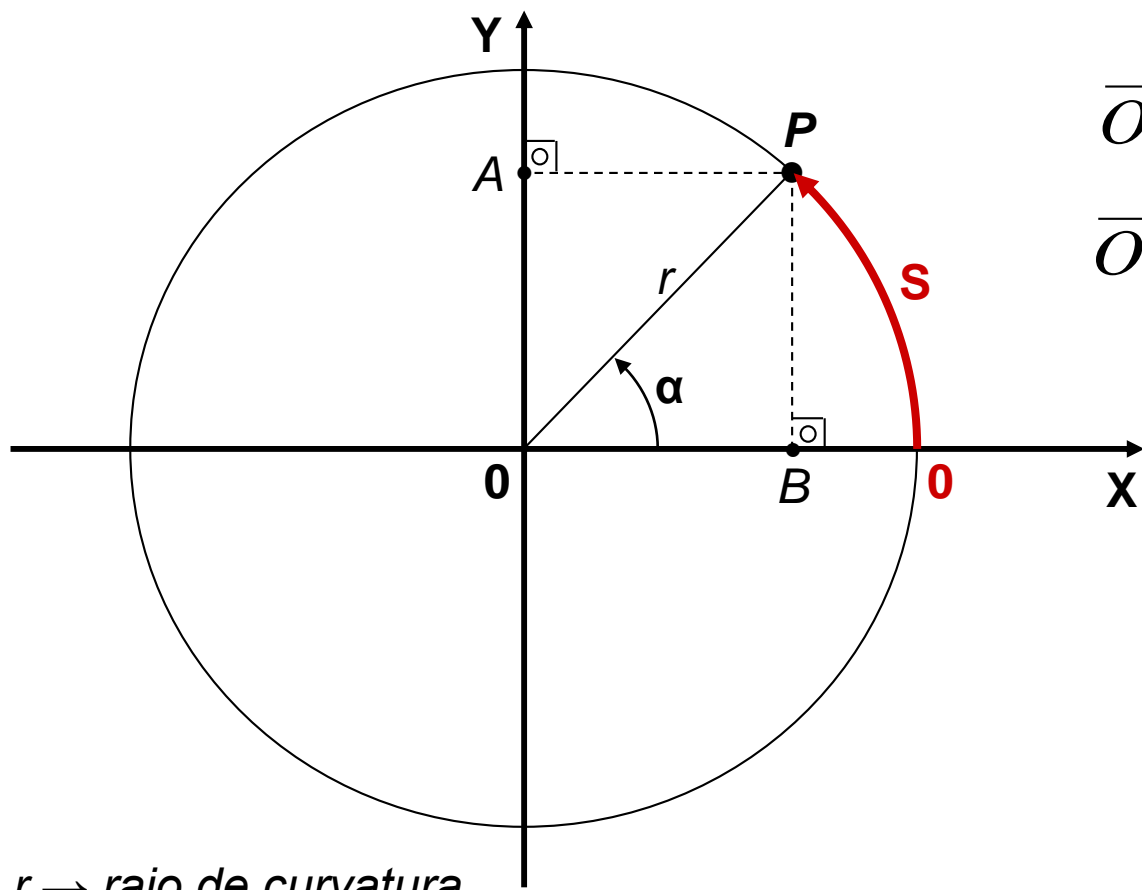




Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
*Campus São Paulo*

# **Movimento Circular**

# Cinemática do Movimento Circular



$r \rightarrow$  raio de curvatura

$$\overline{OA} = \overline{BP} = \overline{OP} \times \text{sen} \alpha$$

$$\overline{OB} = \overline{AP} = \overline{OP} \times \text{cos} \alpha$$

Perímetro

$$\frac{L}{r} = 2\pi \text{ (radiano)}$$

Para um arco qualquer:

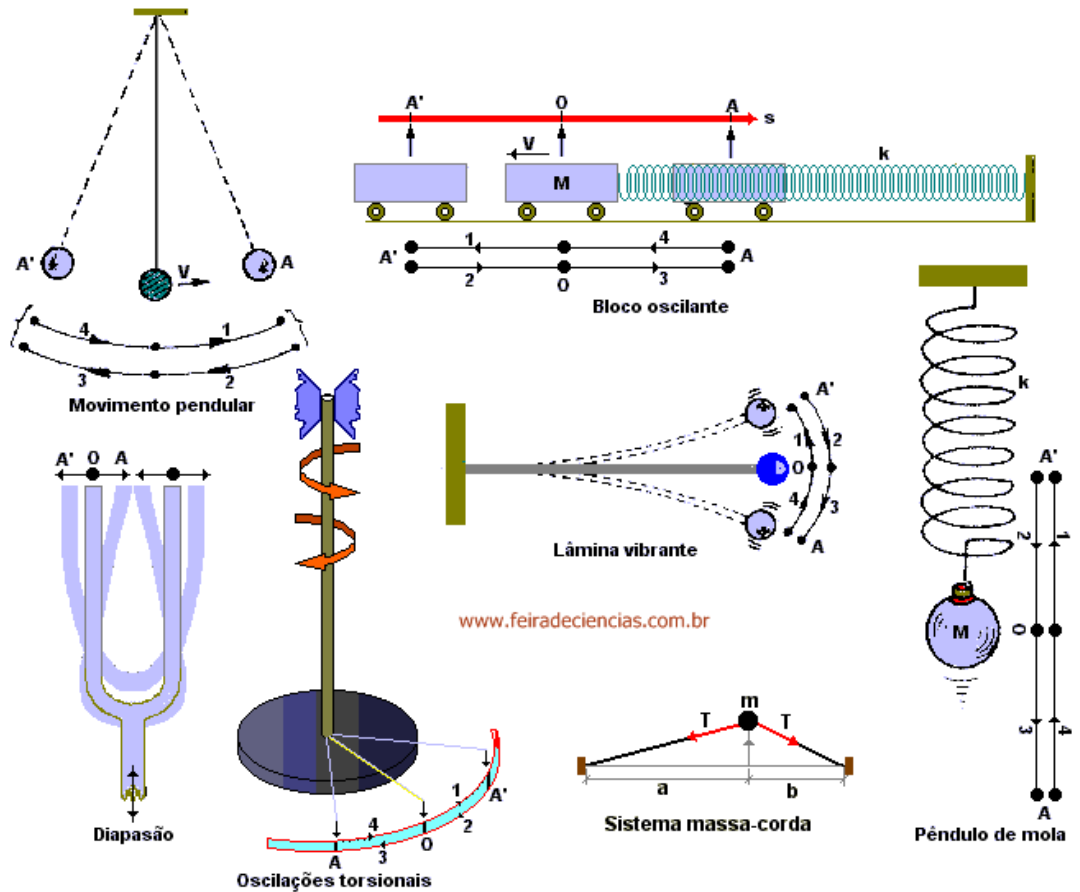
$$\frac{S}{r} = \alpha \text{ (radiano)}$$

Assim, para passar de uma linguagem linear (um arco **S** qualquer) para uma angular (um ângulo  **$\alpha$** ), basta dividir o arco pelo raio de curvatura  **$r$** .

Para movimentos repetitivos:

$T \rightarrow$  **Período**: intervalo de tempo para uma oscilação completa (*ida e volta*), ou para um giro completo, ou para um processo completo etc.

Unidade: segundo/ciclo



$f \rightarrow$  **Frequência**: número de oscilações completas, ou de giros, ou de processos completos, na unidade de tempo.

Unidade: ciclo/s, volta(rotação)/s ( $n$ ), processo/s  $\rightarrow$  hertz ( $Hz$ )

*Exemplo*: qual é o tempo médio entre a saída e a chegada de uma nova composição do Metrô?  $\rightarrow$  (**Período**)

Quantas composições passam em uma hora?  $\rightarrow$  (**Frequência**)

$$T = \frac{1}{f}$$

Determinação do módulo da velocidade tangencial:  $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \times \pi \times r}{T}$

Assim,  $\omega = \frac{2 \times \pi}{T}$

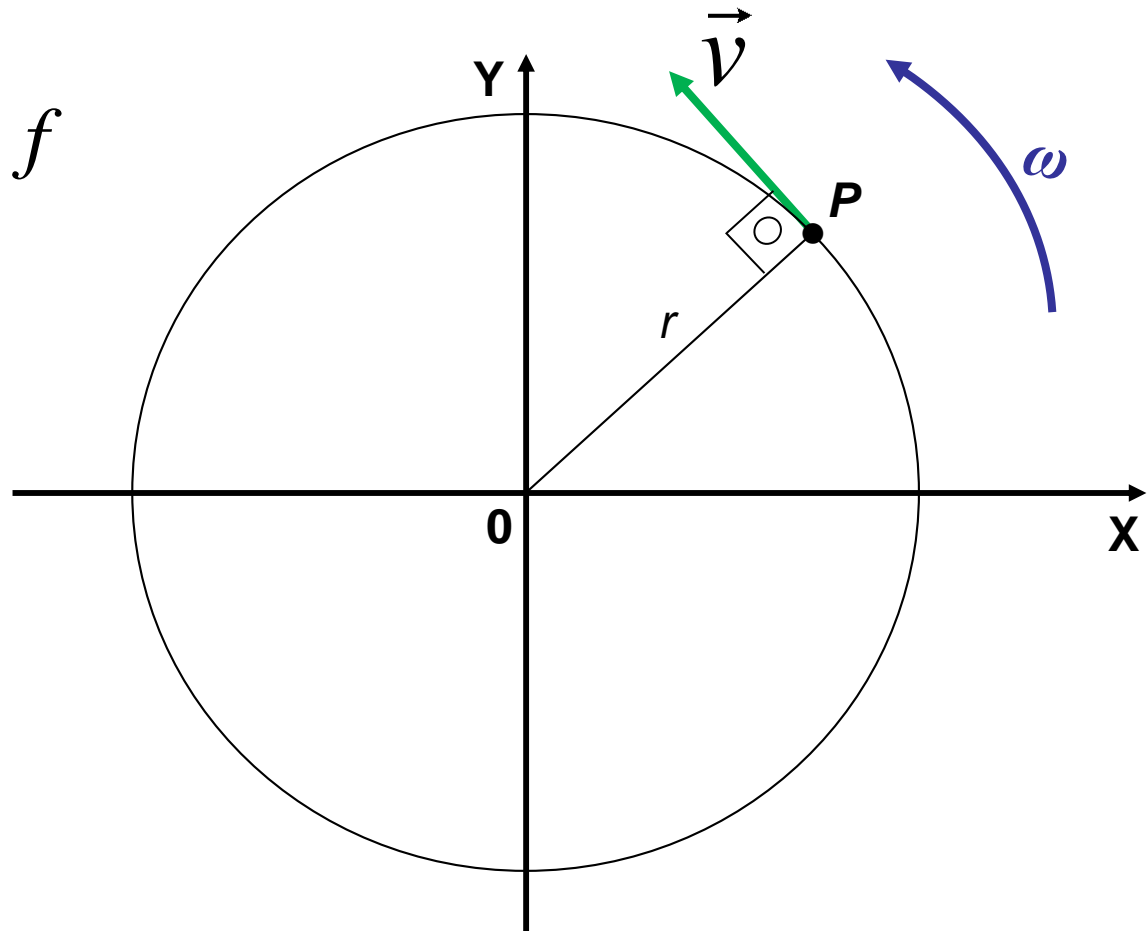
e

$$v = \omega \times r$$

$\omega \rightarrow$  Velocidade Angular  
[rad/s]

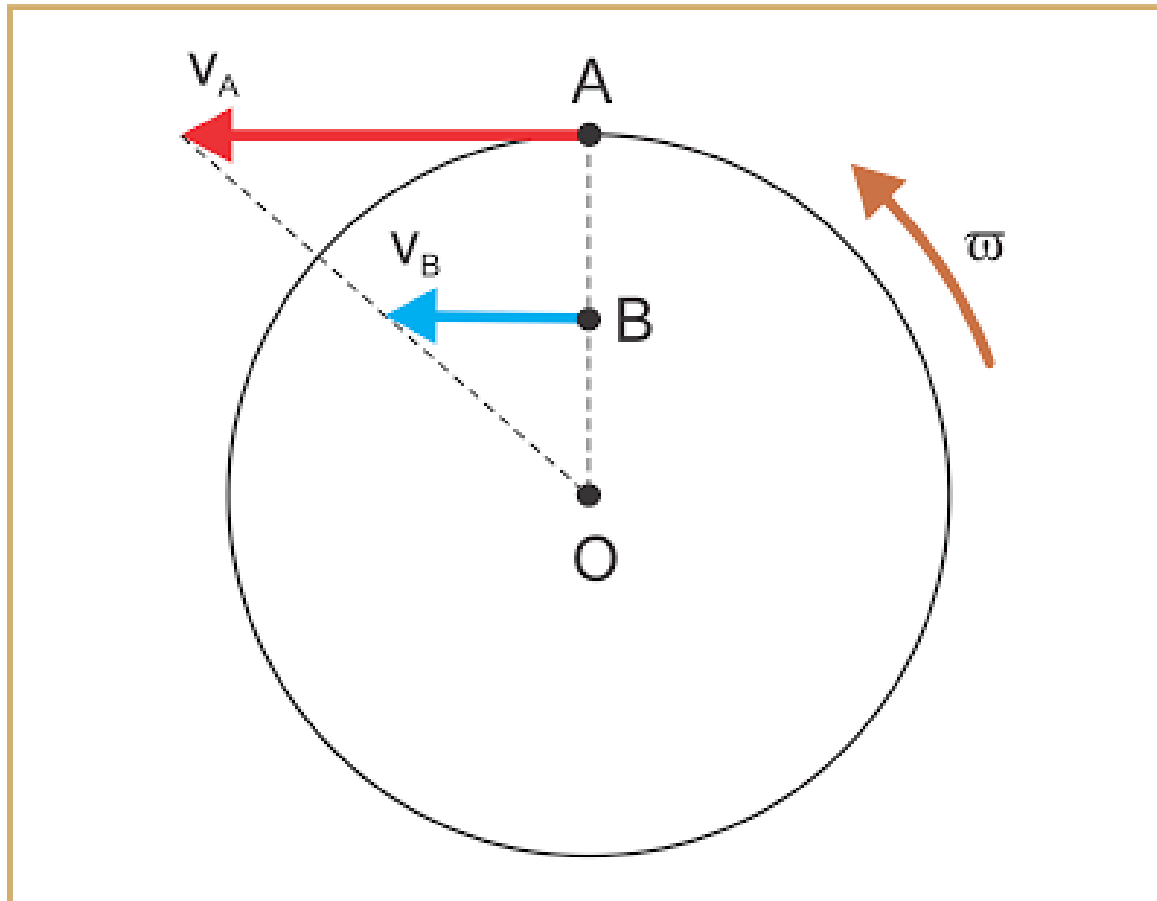
ou

$$\omega = 2 \times \pi \times f$$



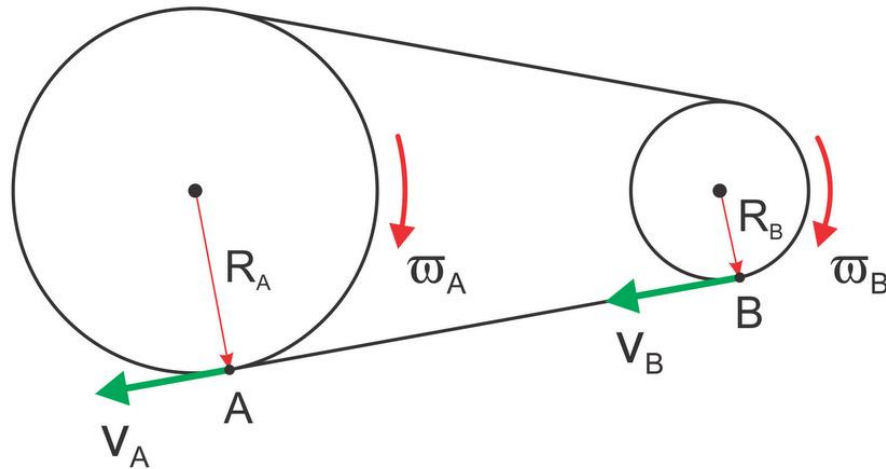
***Dependência da velocidade tangencial com a distância ao centro:***

$$v = \omega \times r$$



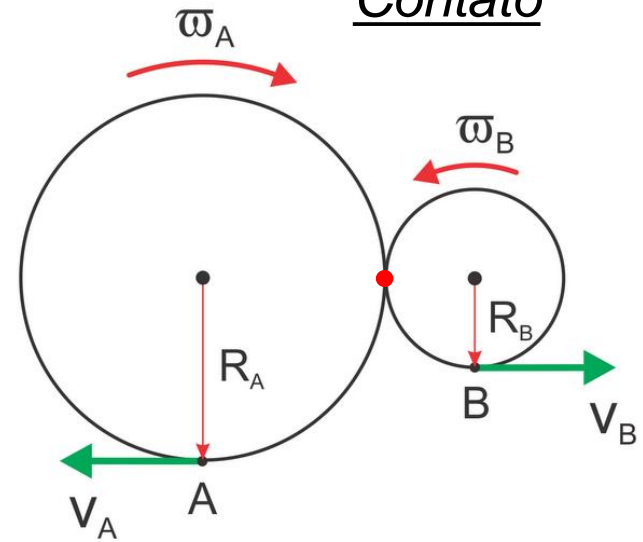
# Estudo de caso: Acoplamentos Mecânicos entre Rodas

## Elemento de ligação

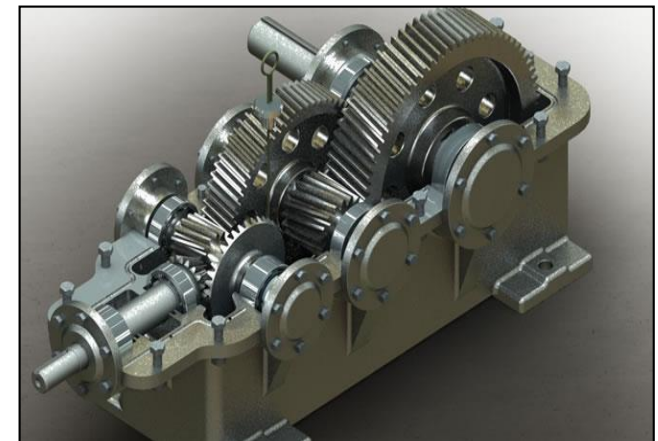
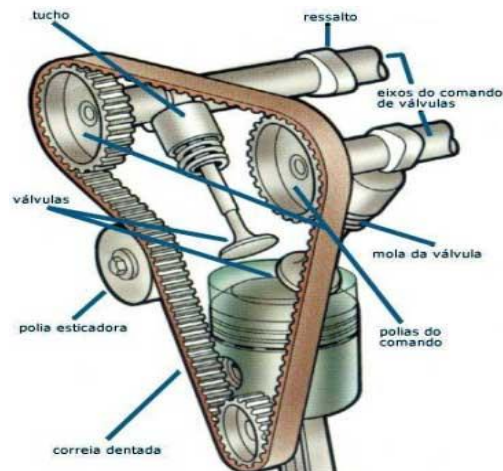


*Cintas, correias, fios etc*

## Contato



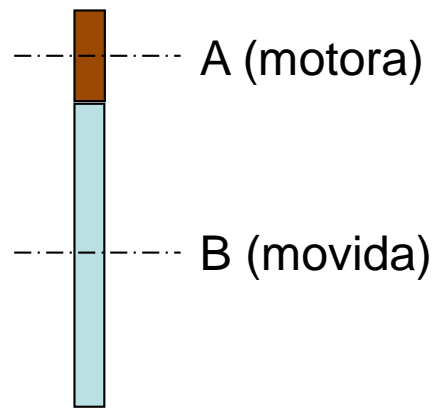
*Atrito, engrenagens etc*



Condição de acoplamento: não existe escorregamento entre rodas e cinta, ou entre as rodas.

**Grandeza cinemática comum aos dois modelos:**

$$v_A = v_B$$



$$\omega_A \times r_A = \omega_B \times r_B$$

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

Relação de Transmissão ***i***

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

$$i = \frac{r_{movida}}{r_{motora}}$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{r_B}{r_A}$$

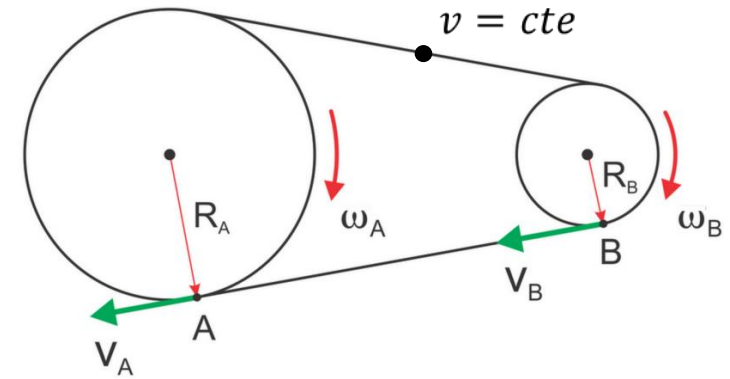
**Velocidade**

$i > 1 \rightarrow$  redução

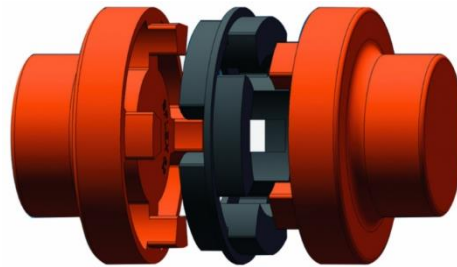
$i < 1 \rightarrow$  ampliação

## Exemplos de Acoplamentos

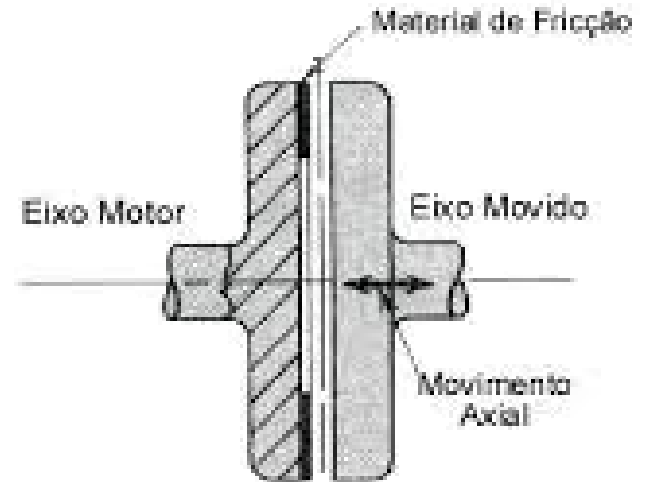
- Correia Dentada e Corrente:



- Contato



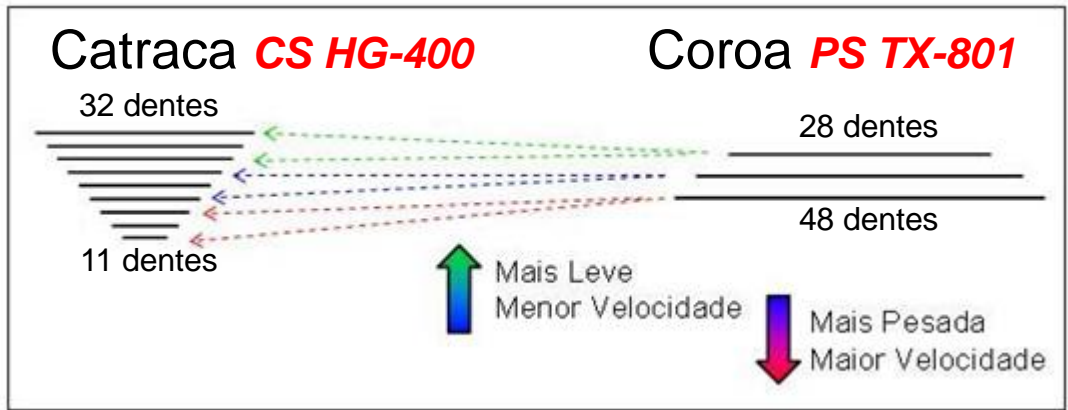
Permanente



Progressivo

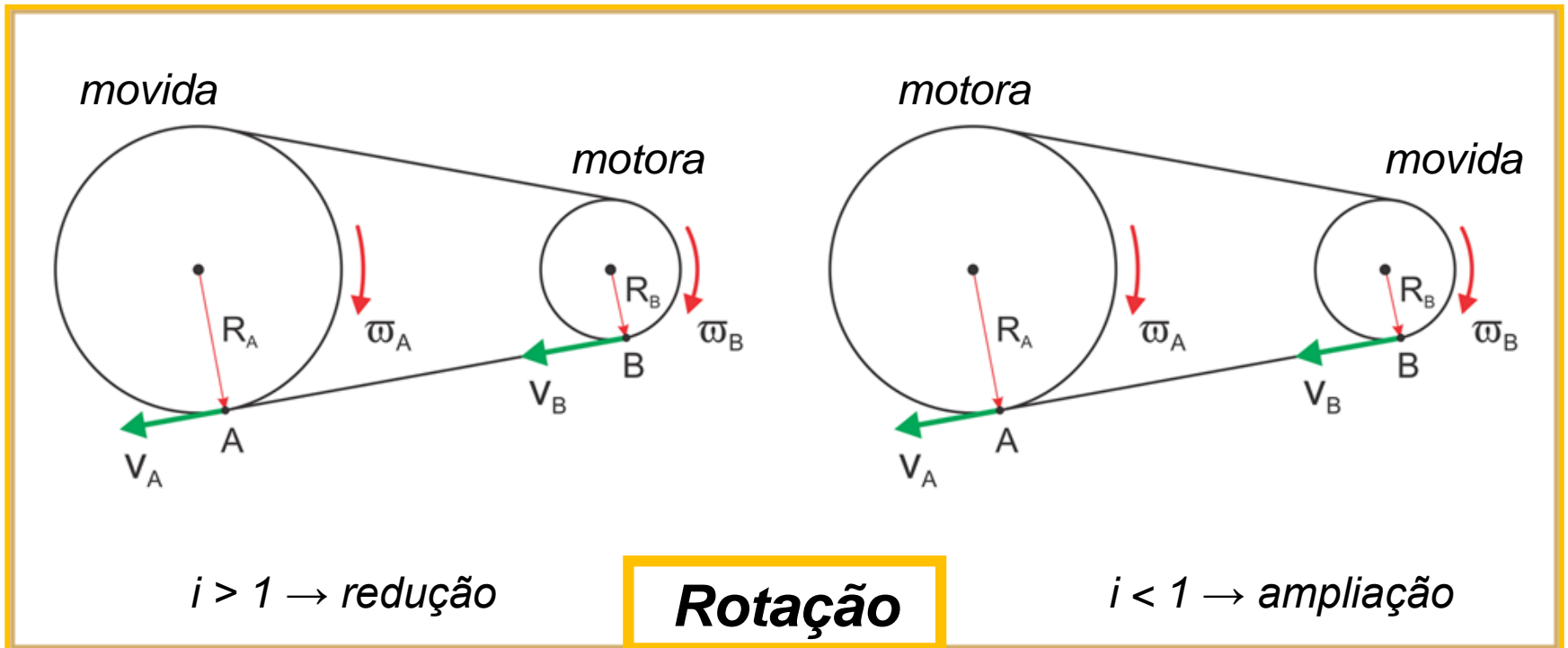


# Exemplos

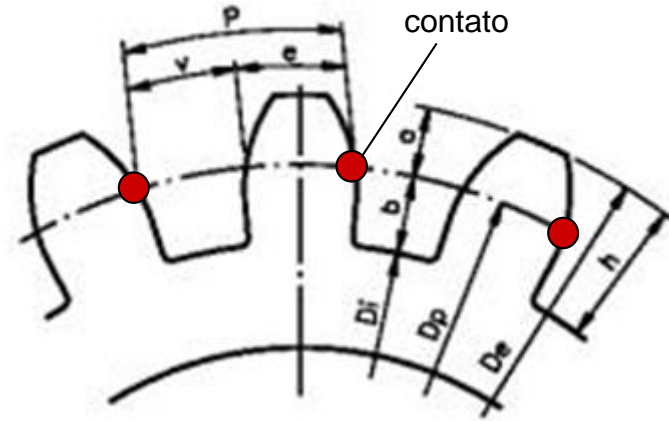


11, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28 e 32 dentes

28, 38 e 48 dentes



# Engrenagem Cilíndrica de Dente Reto



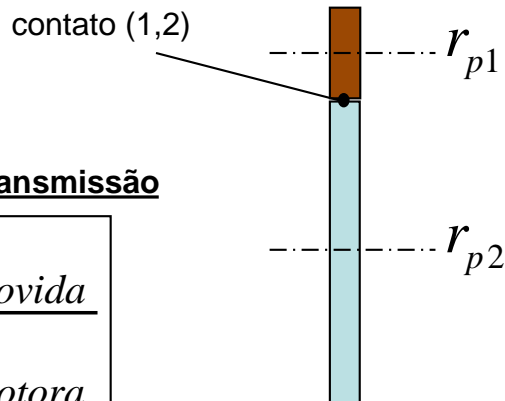
Legenda:

- $D_i$  → diâmetro interno
- $D_p$  → **diâmetro primitivo**
- $D_e$  → diâmetro externo

$$d_p = m \cdot Z \rightarrow r_p = \frac{m \cdot Z}{2}$$

Relação de Transmissão

$$i = \frac{r_{movida}}{r_{motora}}$$

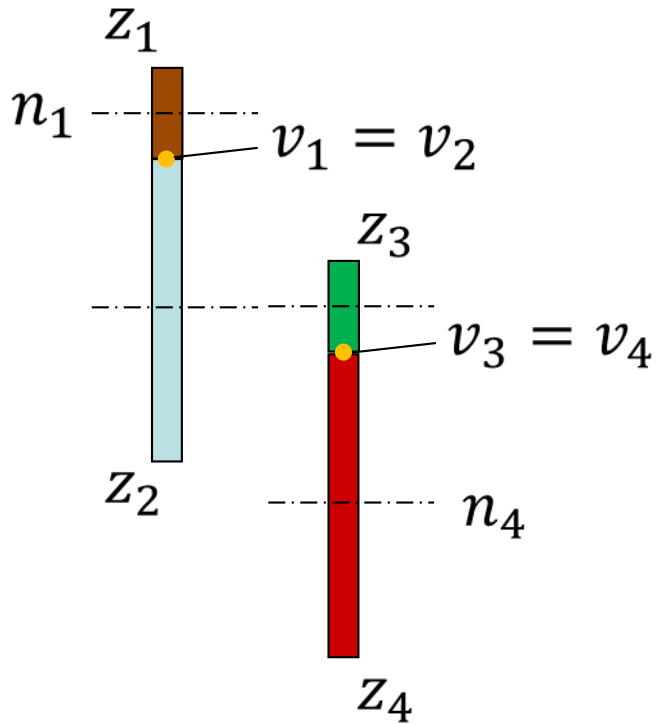


$$v_1 = v_2 \rightarrow \omega_1 \cdot r_{p1} = \omega_2 \cdot r_{p2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \frac{m \cdot Z_1}{2} = 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot \frac{m \cdot Z_2}{2}$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{n_1}{n_2} = i$$

Para o sistema de engrenagens abaixo, determine a rotação de entrada ( $n_1$ ) para que a engrenagem **4** dê uma volta ( $n_4 = 1$  volta).



Como as engrenagens 2 e 3 estão ligadas solidariamente ao mesmo eixo, suas rotações são iguais:

$$\boxed{n_2 = n_3}$$

$$v_1 = v_2$$

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$$

$$\cancel{2 \cdot \pi} \cdot n_1 \cdot R_1 = \cancel{2 \cdot \pi} \cdot n_2 \cdot R_2$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

$$v_3 = v_4$$

$$\omega_3 \cdot R_3 = \omega_4 \cdot R_4$$

$$\cancel{2 \cdot \pi} \cdot n_3 \cdot R_3 = \cancel{2 \cdot \pi} \cdot n_4 \cdot R_4$$

$$\boxed{\frac{n_3}{n_4} = \frac{R_4}{R_3}}$$

$$n_2 = n_3$$

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad n_3 = n_4 \cdot \frac{R_4}{R_3}$$

$$n_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = n_4 \cdot \frac{R_4}{R_3}$$

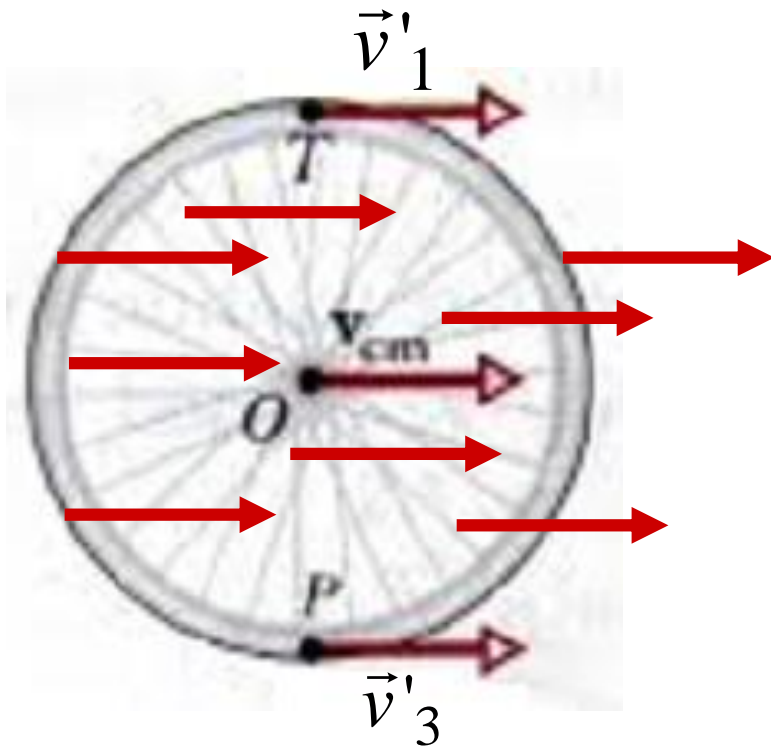
$$n_1 = n_4 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \quad \text{Como } \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = i_1 \quad \text{e} \quad \frac{R_4}{R_3} = \frac{z_4}{z_3} = i_2$$

$$n_1 = n_4 \cdot i_1 \cdot i_2$$

Exemplo:  $z_1 = 10$  dentes;  $z_2 = 20$  dentes;  $z_3 = 10$  dentes;  $z_4 = 20$  dentes.

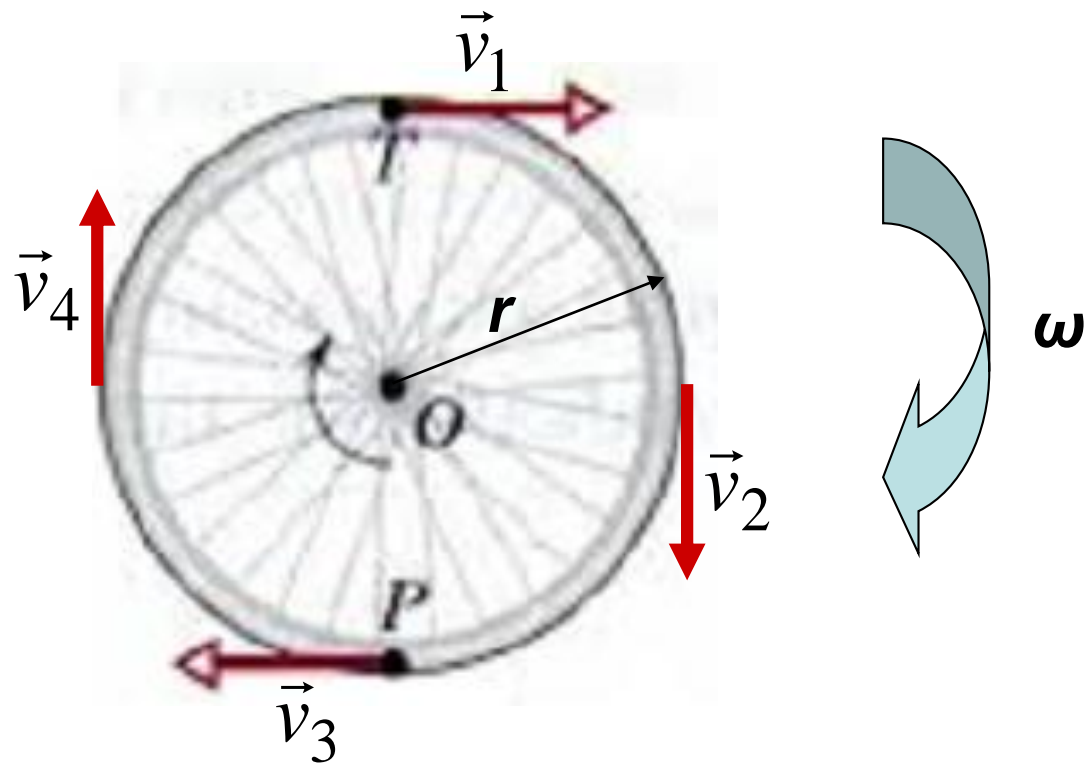
$$n_1 = 1 \cdot \frac{20}{10} \cdot \frac{20}{10} \rightarrow n_1 = 4 \text{ voltas}$$

# Translação



$$v'_1 = v'_3 = v_{CM}$$

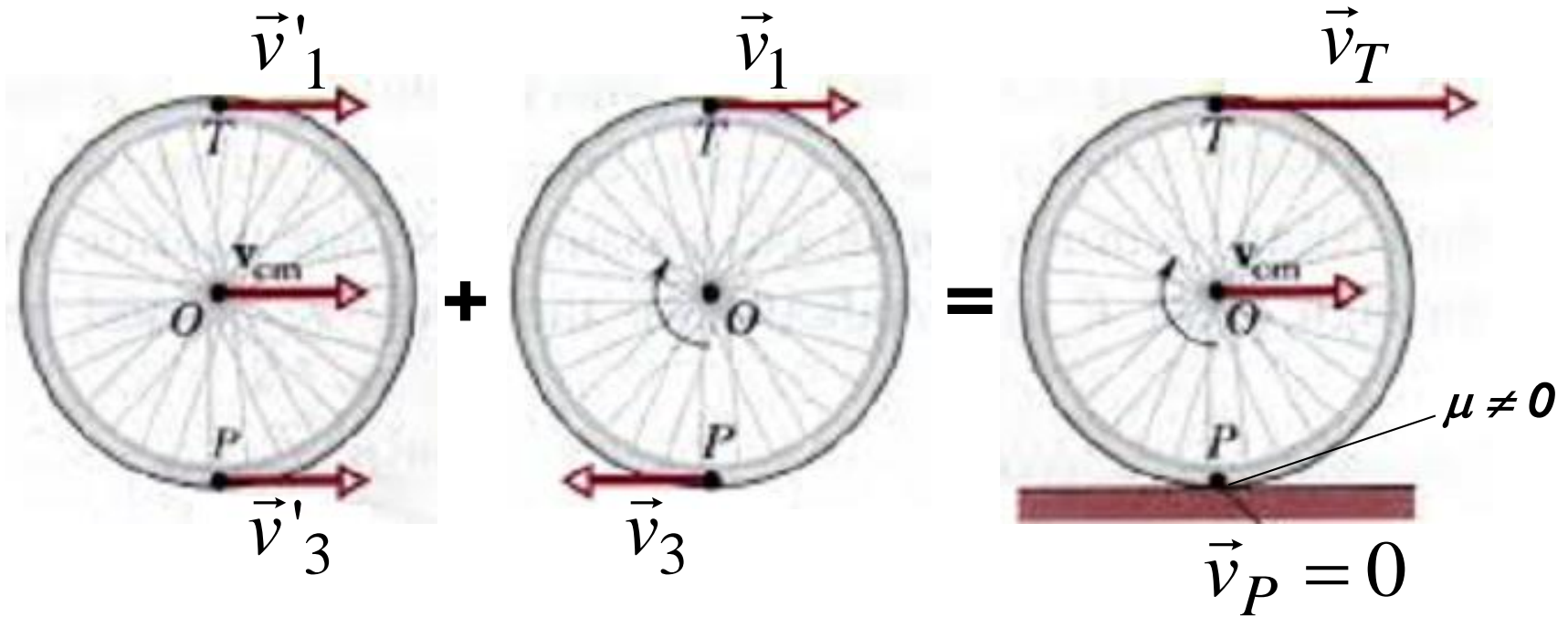
# Rotação



$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v = \omega \cdot r$$

# Rolamento = Translação + Rotação

O rolamento ocorre quando  $v_P$  (a velocidade no ponto de contato entre o pneu e o piso) é igual a zero, ou seja, não existe escorregamento.



$$\vec{v}_3 + \vec{v}'_3 = 0$$

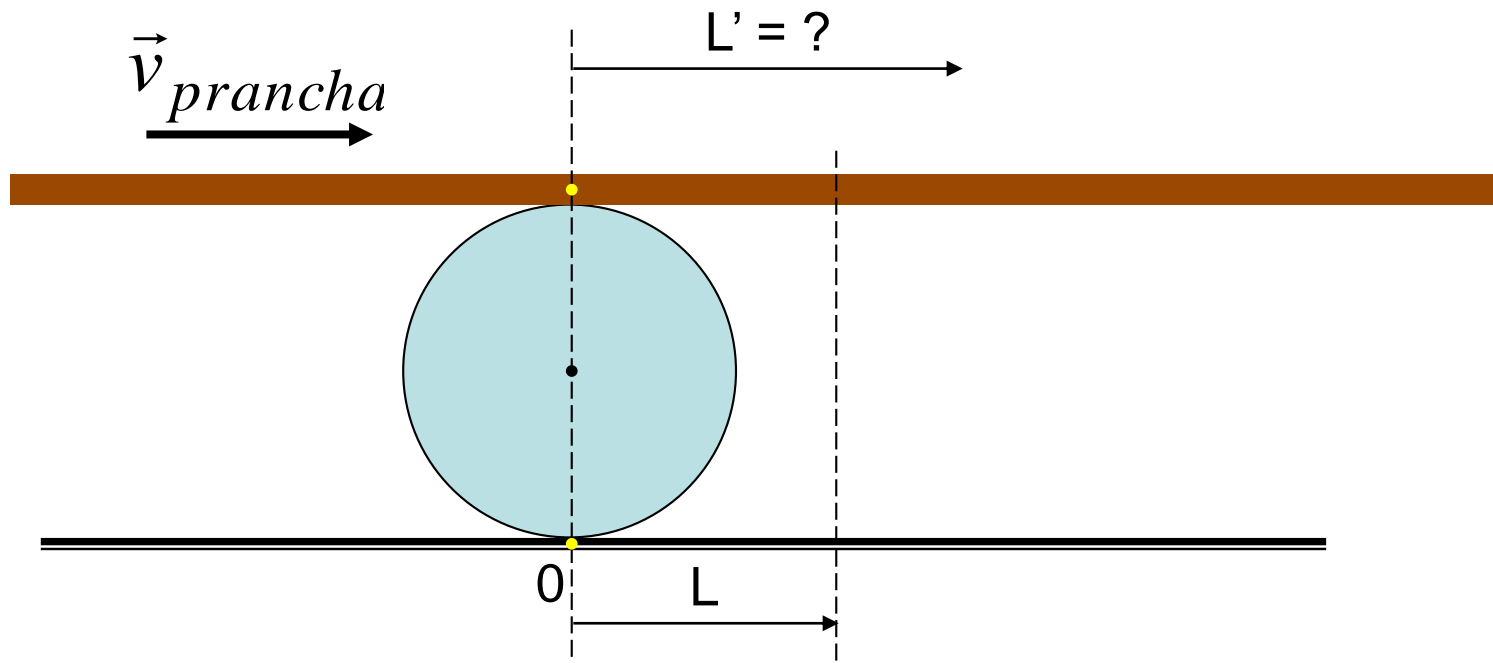
$$v_3 = v'_3$$

$$v_3 = \omega.r \quad , \therefore v'_3 = \omega.r$$

$$v_{CM} = \omega.r \quad \text{e} \quad v_T = 2.\omega.r \quad \text{ou} \quad v_T = 2.v_{CM}$$

## Desafio

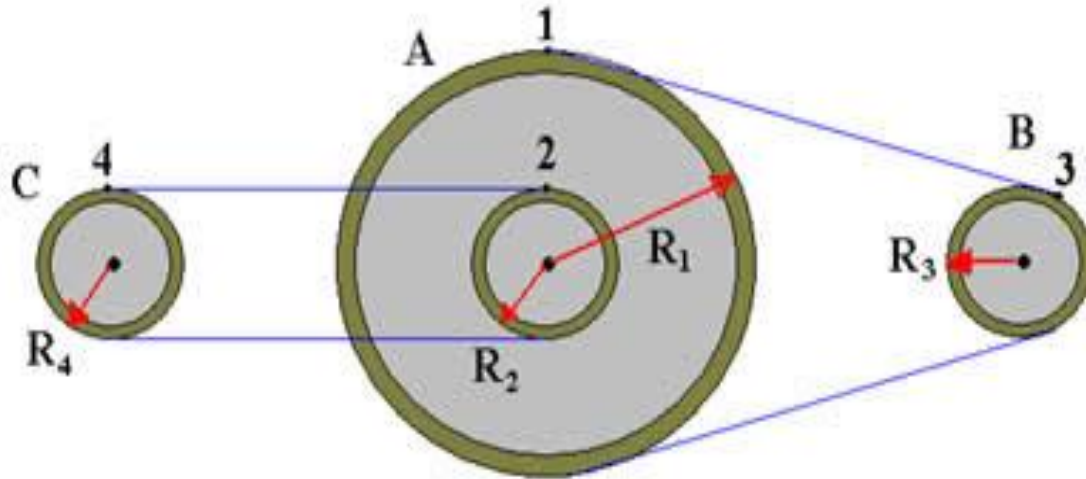
Determine a velocidade da prancha de madeira quando ela é empurrada sobre um cilindro maciço com diâmetro  $D$ . Admita as superfícies com atrito, portanto, o movimento do cilindro respeita as condições de **rolamento**.





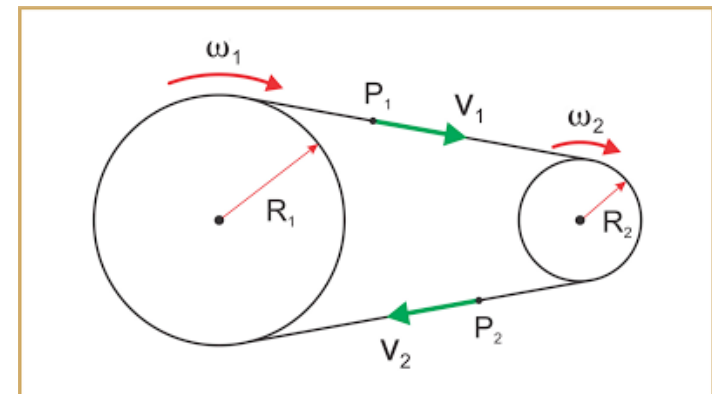
# Exercícios

1. Determine a rotação de saída nas rodas **B** e **C**, sabendo que  $R_1 = 2 \cdot R_2$ ,  $R_2 = R_3 = R_4$ .

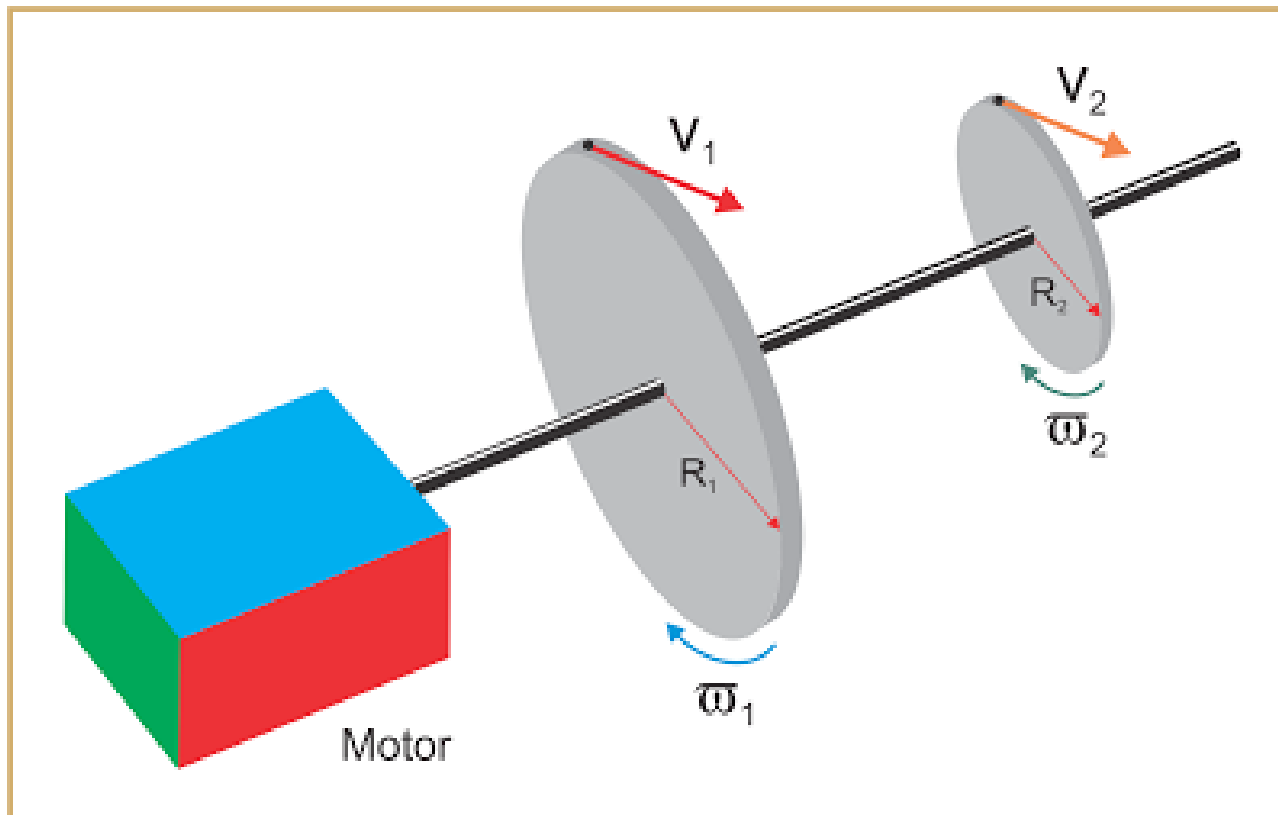


2. Duas polias, 1 e 2, são ligadas por uma correia. A polia 1 possui raio  $R_1 = 20$  cm, gira com frequência  $f_1 = 30$  rpm. A polia 2 possui raio  $R_2 = 15$  cm, gira com frequência  $f_2$ . Não há escorregamento da correia sobre as polias. Determine:

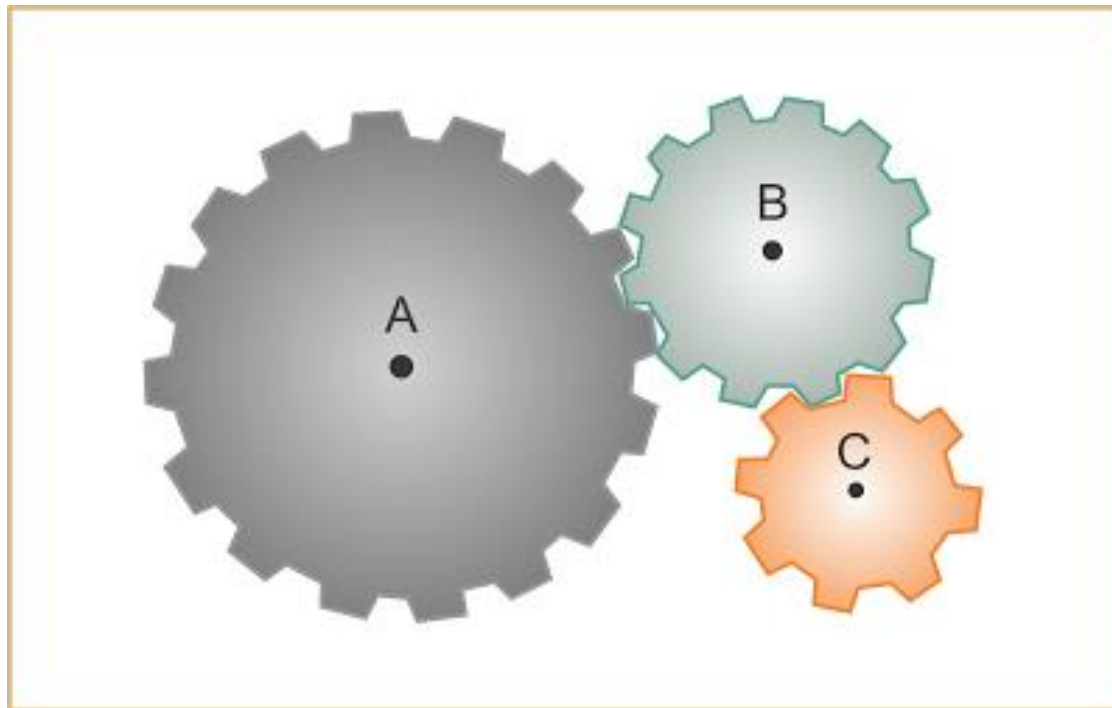
- a) a frequência  $f_2$ ;  
b) as velocidades lineares  $v_1$  e  $v_2$  dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .



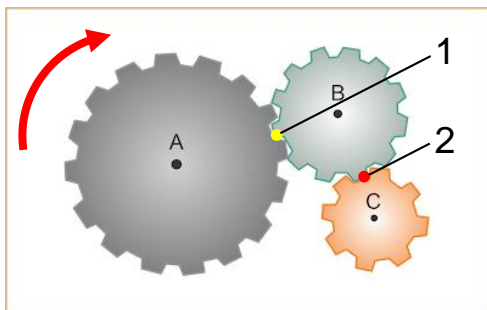
3. Duas polias, 1 e 2, giram ligadas ao eixo de um motor. A polia 1 possui raio  $R_1 = 20$  cm, gira com velocidade angular  $\omega_1 = 12$  rad/s. A polia 2 possui raio  $R_2 = 15$  cm. Determine:
- a frequência  $f_1$  da polia 1;
  - a velocidade angular  $\omega_2$  e a frequência  $f_2$  da polia 2;
  - as velocidades lineares  $v_1$  e  $v_2$  dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .



4. Três engrenagens giram vinculadas conforme a figura. A engrenagem A gira no sentido horário com velocidade angular  $30 \text{ rad/s}$ . As engrenagens C, B e A possuem raios  $R$ ,  $2.R$  e  $3.R$ , respectivamente. Determine as velocidades angulares de B e C e seus sentidos de rotação.



- Resolução do exercício 4:



$$\omega_A = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$R_A = 3.R$$

$$R_B = 2.R$$

$$R_C = R$$

$$\text{Ponto 1} \rightarrow V_A = V_B \quad \text{Ponto 2} \rightarrow V_B = V_C$$

$$V_1 = V_2$$

$$V_A = V_B = V_C$$

$$\omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B = \omega_C \cdot R_C$$

$$30 \cdot 3.R = \omega_B \cdot 2.R$$

$$\omega_B = 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Sentido anti-horário

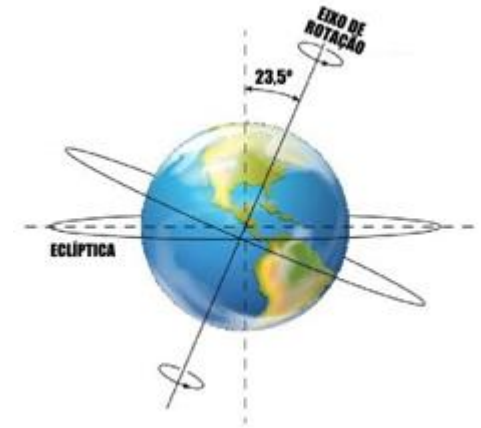
$$30 \cdot 3.R = \omega_C \cdot R$$

$$\omega_C = 90 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Sentido horário

Outro exemplo: Determine as seguintes grandezas físicas para a rotação do planeta Terra:



a) Período (T) → 1 dia/rotação → 24 h/rotação → 1440 min/rotação → 86400 s/rotação

b) Frequência (f) → 1 rotação/dia → 1 rotação/24 h → 1 rotação/1440 min → 1 rotação/86400 s

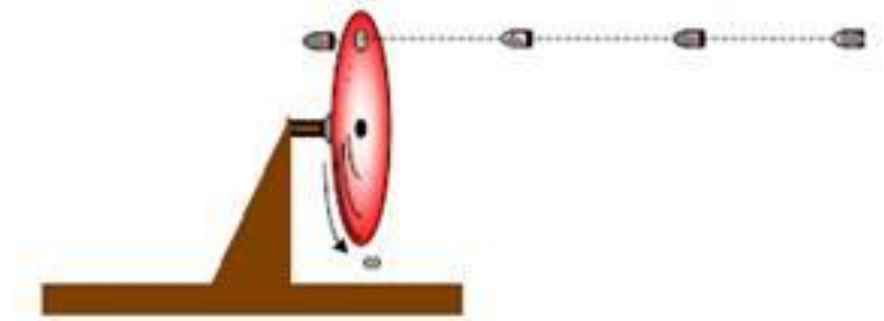
c) Velocidade angular ( $\omega$ ) →  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2 \cdot \pi}{1} \rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{dia}}$

d) Velocidade tangencial na linha do Equador (use o raio da Terra = 6.400 km)

$$v_{tg} = \omega \cdot r \rightarrow v_{tg} = \frac{2 \cdot \pi}{86400} \cdot 6400 \rightarrow v_{tg} = \frac{2 \cdot \pi}{86400} \cdot 6400 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{tg} = 0,465 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

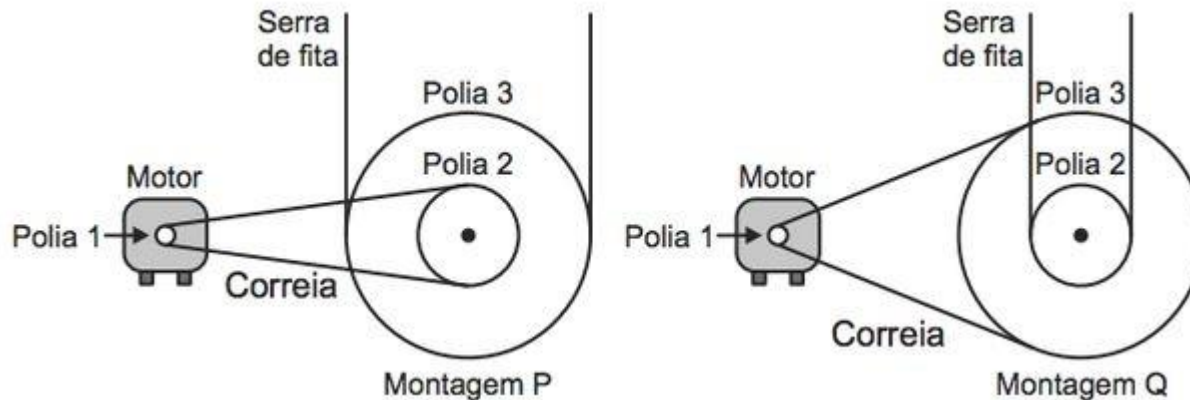
5. (UFPE) Uma arma dispara 30 balas por minuto. Essas balas atingem um disco girante sempre num mesmo ponto atravessando um orifício. Qual é a frequência do disco, em rotações por minuto?



6. (PUC-RJ-09) O ponteiro dos minutos de um relógio tem 1 cm. Supondo que o movimento deste ponteiro é contínuo e que  $\eta = 3$ , a velocidade de translação na extremidade deste ponteiro é:
- a) 0,1 cm/min.   b) 0,2 cm/min.   c) 0,3 cm/min.   d) 0,4 cm/min.   e) 0,5 cm/min.



7. **DESAFIO** (ENEM 2013) Para serrar os ossos e carnes congeladas, um açougueiro utiliza uma serra de fita que possui três polias e um motor. O equipamento pode ser montado de duas formas diferentes, P e Q. Por questão de segurança, é necessário que a serra possua menor velocidade linear.



Por qual montagem o açougueiro deve optar e qual a justificativa desta opção?

- A) Q, pois as polias 1 e 3 giram com velocidades lineares iguais em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.
- B) Q, pois as polias 1 e 3 giram com frequências iguais e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- C) P, pois as polias 2 e 3 giram com frequências diferentes e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- D) P, pois as polias 1 e 2 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver menor raio terá maior frequência.
- E) Q, pois as polias 2 e 3 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.

8. (FGV-SP) Toda caneta esferográfica possui em sua ponta uma pequena esfera feita de liga de tungstênio, cuja finalidade é transferir a tinta do reservatório para o papel. Quando um desenhista traça uma linha reta, transladando sua caneta com velocidade constante  $v = 0,2 \text{ m/s}$ , a pequena esfera de  $0,8 \text{ mm}$  de diâmetro gira sobre seu centro com velocidade angular  $\omega$ , em  $\text{rad/s}$ , de valor:
- a) 160                      b) 200                      c) 250                      d) 400                      e) 500
9. (UEJF-MG) Um velocímetro comum de carro mede, na realidade, a velocidade angular do eixo da roda, e indica um valor que corresponde à velocidade do carro. O velocímetro para um determinado carro sai da fábrica calibrado para uma roda de 20 polegadas de diâmetro (isso inclui o pneu). Um motorista resolve trocar as rodas do carro para 22 polegadas de diâmetro. Assim, quando o velocímetro indica  $100 \text{ km/h}$ , a velocidade real do carro é:
- a)  $100 \text{ km/h}$               b)  $200 \text{ km/h}$               c)  $110 \text{ km/h}$               d)  $90 \text{ km/h}$               e)  $160 \text{ km/h}$
10. (FUVEST-SP) A figura ilustra uma roda d'água constituída de 16 cubas. Cada cuba recebe  $5 \text{ L}$  de água de uma bica cuja vazão é  $160 \text{ L/min}$ . A roda gira em movimento uniforme.



- a) Qual é o período de rotação da roda?
- b) Qual é a quantidade de água utilizada em 1 hora de funcionamento do sistema?



11. (PUC-RJ) Um ciclista pedala em uma trajetória circular de raio  $R = 5 \text{ m}$ , com a velocidade de translação  $v = 150 \text{ m/min}$ . A velocidade angular do ciclista em  $\text{rad/min}$  é:
- a) 60                      b) 50                      c) 40                      d) 30                      e) 20
12. (UNESP-SP) Satélites de órbita polar giram numa órbita que passa sobre os pólos terrestres e que permanece sempre em um plano fixo em relação às estrelas. Pesquisadores de estações oceanográficas, preocupados com os efeitos do aquecimento global, utilizam satélites desse tipo para detectar regularmente pequenas variações de temperatura e medir o espectro da radiação térmica de diferentes regiões do planeta. Considere o satélite a  $5.298 \text{ km}$  acima da superfície da Terra, deslocando-se com velocidade de  $5.849 \text{ m/s}$  em uma órbita circular. Estime quantas passagens o satélite fará pela linha do equador em cada período de 24 horas. Utilize a aproximação  $\pi = 3,0$  e suponha a Terra esférica, com raio de  $6400 \text{ km}$ .
13. (UNESP-SP) Um cilindro oco de  $3,0\text{m}$  de comprimento, cujas bases são tampadas com papel fino, gira rapidamente em torno de seu eixo com velocidade angular constante. Uma bala disparada com velocidade de  $600\text{m/s}$ , paralelamente ao eixo do cilindro, perfura suas bases em dois pontos, P na primeira base e Q na segunda. Os efeitos da gravidade e da resistência do ar podem ser desprezados.
- a) Quanto tempo a bala levou para atravessar o cilindro?
- b) b) Examinando as duas bases de papel, verifica-se que entre P e Q há um deslocamento angular de  $9^\circ$ . Qual é a frequência de rotação do cilindro, em *hertz*, sabendo que não houve mais do que uma rotação do cilindro durante o tempo que a bala levou para atravessá-lo?

14. (UFSCAR-SP) Para possibilitar o traslado da fábrica até a construção, o concreto precisa ser mantido em constante agitação. É por esse motivo que as betoneiras, quando carregadas, mantêm seu tambor misturador sob rotação constante de 4 r.p.m. Esse movimento só é possível devido ao engate por correntes de duas engrenagens, uma grande, presa ao tambor e de diâmetro 1,2m, e outra pequena, de diâmetro 0,4 m, conectada solidariamente a um motor. Na obra, para que a betoneira descarregue seu conteúdo, o tambor é posto em rotação inversa, com velocidade angular 5 vezes maior que a aplicada durante o transporte. Nesse momento, a frequência de rotação do eixo da engrenagem menor, em r.p.m., é



- a) 40                      b) 45                      c) 50                      d) 55                      e) 60
15. (UFPR) Um ciclista movimenta-se com sua bicicleta em linha reta a uma velocidade constante de 18 km/h. O pneu, devidamente montado na roda, possui diâmetro igual a 70 cm. No centro da roda traseira, presa ao eixo, há uma roda dentada de diâmetro 7,0 cm. Junto ao pedal e preso ao seu eixo há outra roda dentada de diâmetro 20 cm. As duas rodas dentadas estão unidas por uma corrente. Não há deslizamento entre a corrente e as rodas dentadas. Supondo que o ciclista imprima aos pedais um movimento circular uniforme, assinale a alternativa correta para o número de voltas por minuto que ele impõe aos pedais durante esse movimento. Nesta questão, considere  $\pi = 3$ .
- a) 0,25 rpm      b) 2,50 rpm      c) 5,00 rpm      d) 25,0 rpm      e) 50,0 rpm.

16) Em 1885, Michaux lançou o biciclo com uma roda dianteira diretamente acionada por pedais (Fig. A). Através do emprego da roda dentada, que já tinha sido concebida por Leonardo da Vinci, obteve-se melhor aproveitamento da força nos pedais (Fig. B). Considere que um ciclista consiga pedalar 40 voltas por minuto em ambas as bicicletas.



Fig. A

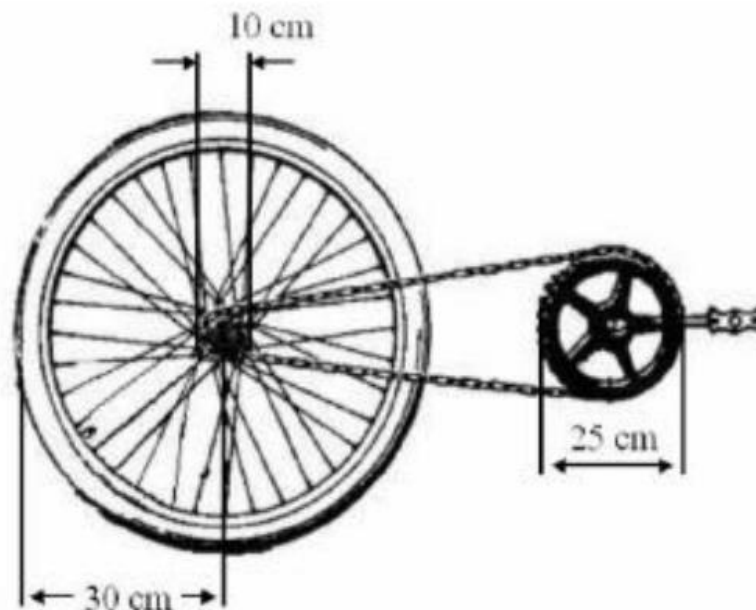
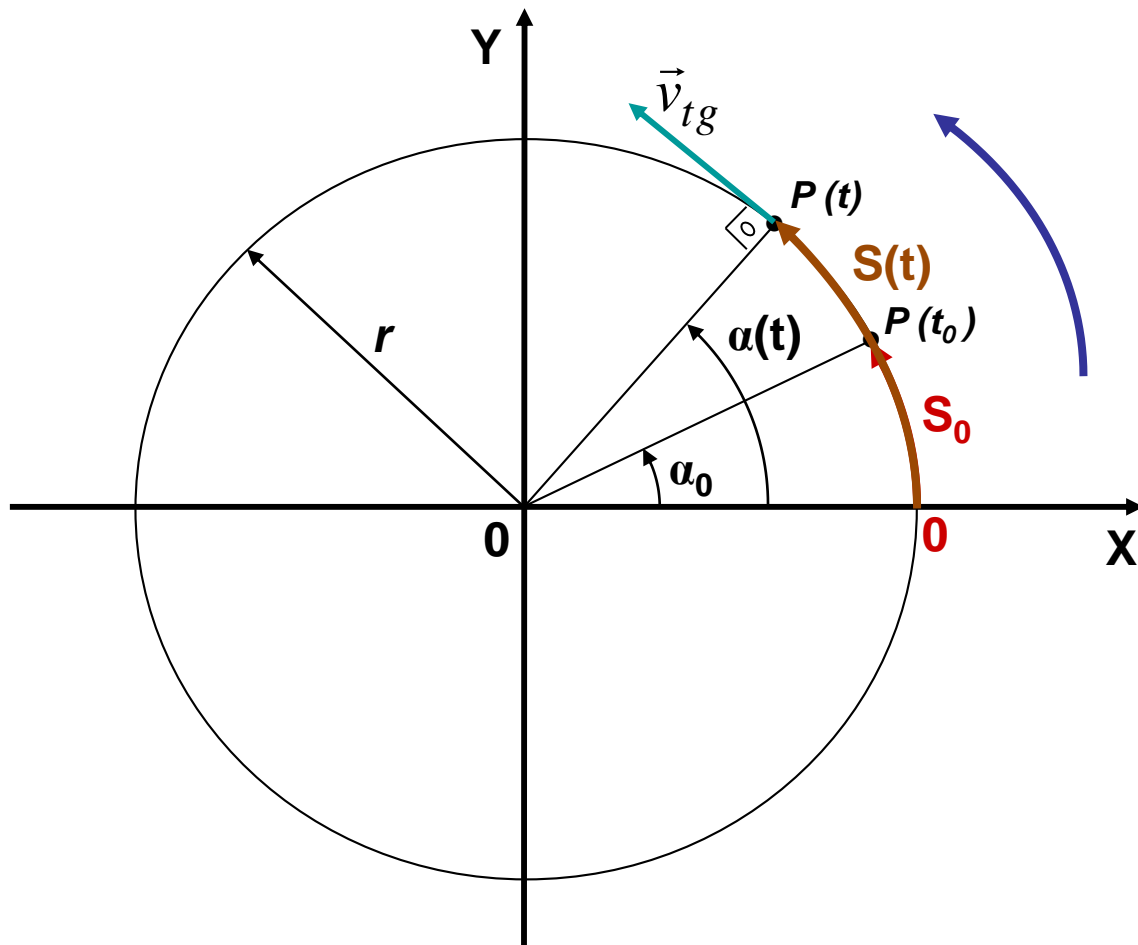


Fig. B

- a) Qual a velocidade de translação do biciclo de Michaux para um diâmetro da roda de 1,20 m?
- b) Qual a velocidade de translação para a bicicleta padrão aro 60 (Fig. B)?

## Cinemática Escalar do Movimento Circular



$t_0$  → Instante inicial (que pode ser 0)

$\alpha_0$  → Ângulo inicial (em  $t_0$ )

$S_0$  → Posição inicial (em  $t_0$ )

$t$  → Instante final qualquer

$\alpha(t)$  → Ângulo final (em  $t$ )

$S(t)$  → Posição final (em  $t$ )

$v_{tg}$  → velocidade tangencial

Para movimento circular uniforme ( $v_{tg} = \text{cte}$ ):

$$a_{tg} = \frac{\Delta v_{tg}}{\Delta t} = 0$$

$$S(t) = S_0 + v_{tg} \times (t - t_0) \quad (1)$$

$$S(t) = S_0 + v \cdot t$$

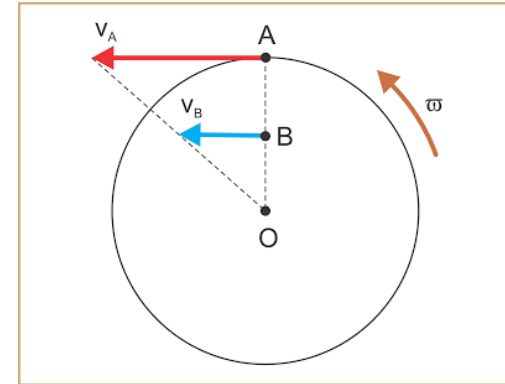
0

Determinação do módulo da velocidade tangencial: 
$$v_{tg} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \times \pi \times r}{T}$$

$T$  → Período (Para eventos **repetitivos**, representa o intervalo de tempo para **um** evento)

$\omega$  → Velocidade Angular [Relação entre uma volta completa (rad) e o Período (s)]

Assim, 
$$\omega = \frac{2 \times \pi}{T} \left[ \frac{rad}{s} \right] \quad \text{e} \quad \boxed{v_{tg} = \omega \times r} \left[ \frac{m}{s} \right]$$



Multiplicando os dois lados da igualdade (1) por 1/r, tem-se que:

$$\left( \frac{1}{r} \right) \times S(t) = \left[ S_0 + v_{tg} \times (t - t_0) \right] \times \left( \frac{1}{r} \right)$$

$\alpha(t)$                        $\alpha_0$                        $\omega$

Posição angular no MCU

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 + \omega \times (t - t_0)} \rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 + \omega \cdot t$$

## Relação entre Período (T) e Frequência (f)

$T \rightarrow$  Período (Intervalo de tempo para um evento acontecer)  $\rightarrow [s]$

$f \rightarrow$  Frequência (Número de repetições de um evento na unidade de tempo)  $\rightarrow \left[\frac{ev}{s}\right] \rightarrow [hertz] \rightarrow [Hz]$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$v_{tg} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot r$$

## Relação entre Velocidade Angular ( $\omega$ ) e Rotação (n)

Rotação (n)  $\rightarrow$  **rpm** (rotações por minuto)

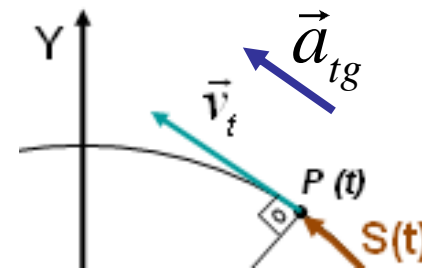
No caso do movimento circular, a frequência (f) corresponde à rotação (n):

$$\omega \left[ \frac{rad}{s} \right] = 2 \cdot \pi \cdot n$$

**rps** ou **Hz**

Para movimento **circular** uniformemente variado (aceleração tangencial  $\mathbf{a}_{tg} = cte$ ):

$$S(t) = S_0 + v_{tg_0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{tg} \times (t - t_0)^2 \quad (2)$$



Multiplicando os dois lados da igualdade (2) por  $1/r$ , tem-se que:

$$\left(\frac{1}{r}\right) \times S(t) = \left\{ S_0 + v_{tg_0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{tg} \times (t - t_0)^2 \right\} \times \left(\frac{1}{r}\right)$$

$\alpha(t)$                        $\alpha_0$                        $\omega_0$                        $\gamma \rightarrow$  Aceleração angular

Posição angular no MCUV

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times \gamma \times (t - t_0)^2$$

Descobrimos o que é a aceleração angular:

$$a_{tg} = \frac{\Delta v_{tg}}{\Delta t}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade acima por  $1/r$ , tem-se que:

$$\left(\frac{1}{r}\right) \times a_{tg} = \frac{v_{tgf} - v_{tgi}}{\Delta t} \times \left(\frac{1}{r}\right) \longrightarrow \frac{a_{tg}}{r} = \frac{\frac{v_{tgf}}{r} - \frac{v_{tgi}}{r}}{\Delta t}$$

Lembrando que  $v_{tg} = \omega \times r$   $\longrightarrow$   $\frac{a_{tg}}{r} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t}$

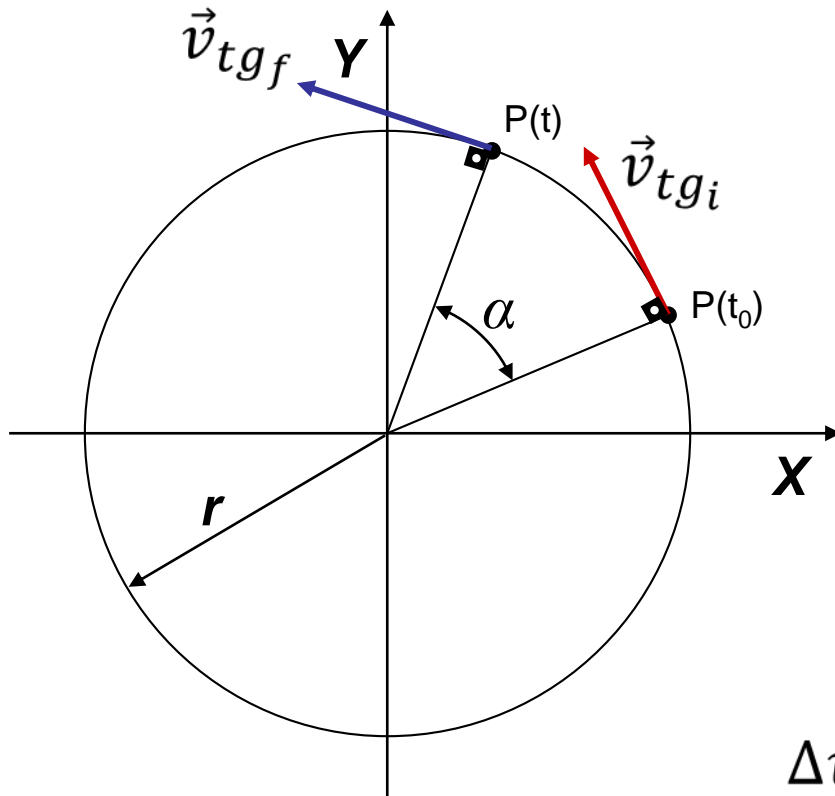
$$\gamma = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

*Aceleração Angular Escalar*

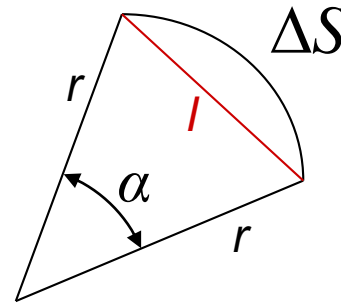


# Revisão sobre Dinâmica do Movimento Circular Uniforme

$$v_{tgi} = v_{tgf}$$



Análise geométrica no 1º Quadrante

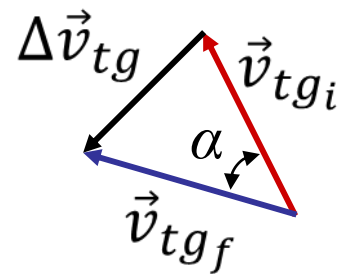


$$\Delta S \gg l$$



$$\Delta S \approx l$$

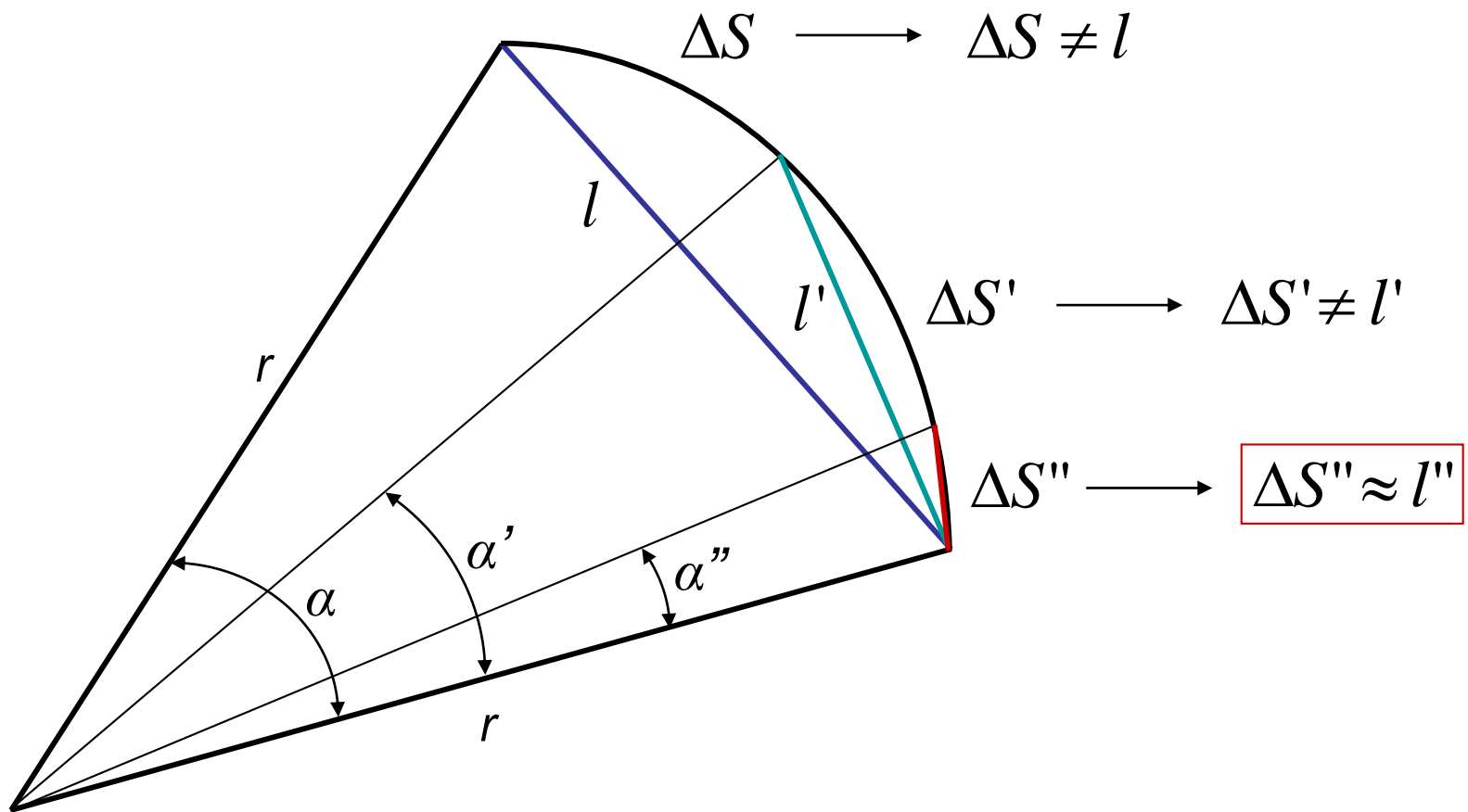
Análise cinemática vetorial



$$\vec{v}_{tgf} = \vec{v}_{tgi} + \Delta \vec{v}_{tg}$$

$$\Delta \vec{v}_{tg} = \vec{v}_{tgf} - \vec{v}_{tgi}$$

Uma aproximação possível, diminuindo o ângulo  $\alpha$  :



Da semelhança de triângulos,  
para  $\alpha$  *muito pequeno*

$$\alpha = \frac{\Delta S}{r} \quad e \quad \alpha = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v_{tg}}$$

Igualando as duas expressões e  
multiplicando os dois lados por  $1/\Delta t$

$$\frac{1}{\Delta t} \times \frac{\Delta S}{r} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v_{tg}} \times \frac{1}{\Delta t}$$

Lembrando que  $v_{tg} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ ,  $a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$  e  $v_{tg} = \omega \cdot r$

conclui-se que

$$a = \frac{v_{tg}^2}{r}$$

ou

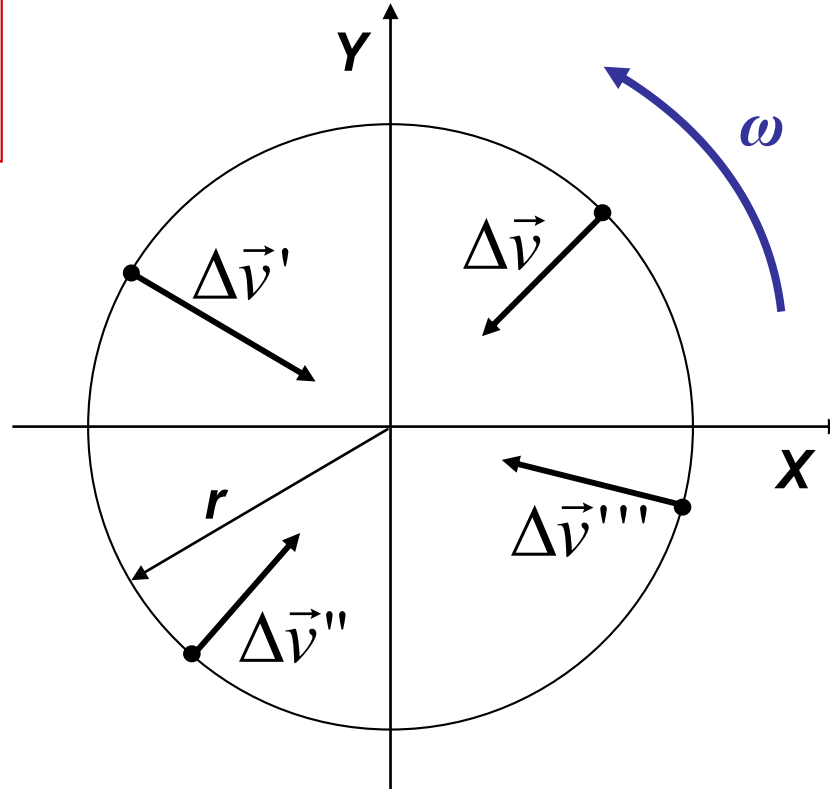
$$a = \omega^2 \cdot r$$

Sabe-se que a aceleração *tangencial* muda  
o *módulo* da velocidade tangencial.

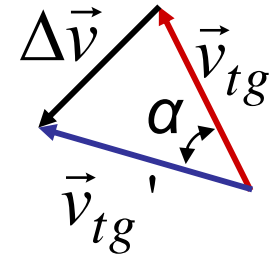
Então, qual é a interpretação física dessa nova aceleração?

# Interpretação geométrica de $\underline{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



para  $\alpha$   muito pequeno



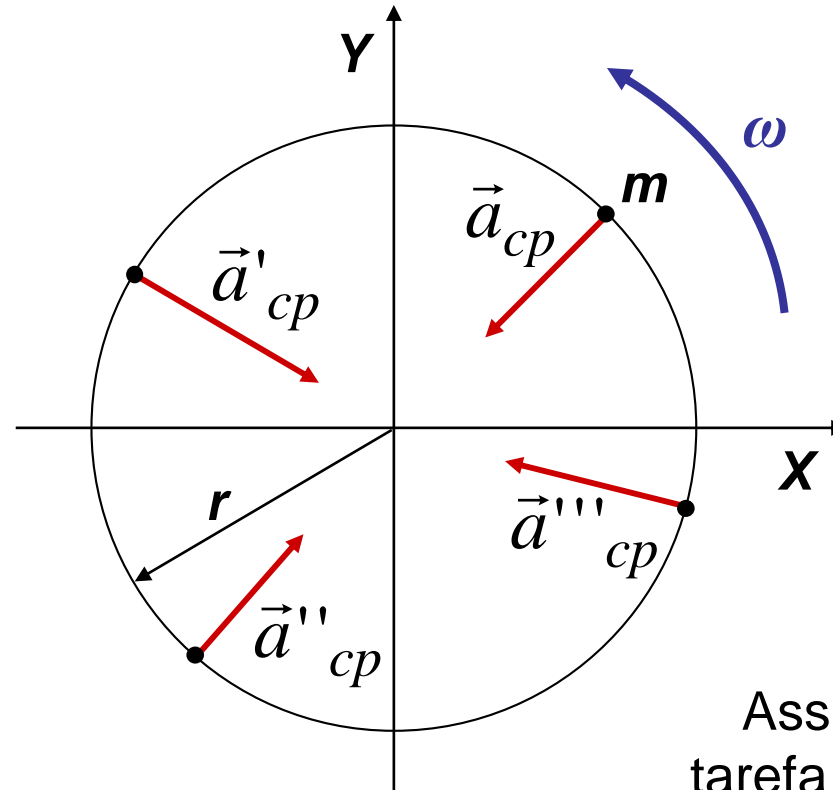
## Aceleração Centrípeta

O vetor  $\Delta \vec{v}$  determina a direção e o sentido do vetor  $\underline{a}$ , o qual sempre deve apontar para o centro de curvatura.

$$a_{cp} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_{tg}^2}{r}$$

## Aceleração Centrípeta

$$a_{cp} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_{tg}^2}{r}$$



Para um corpo com massa  $m$ :

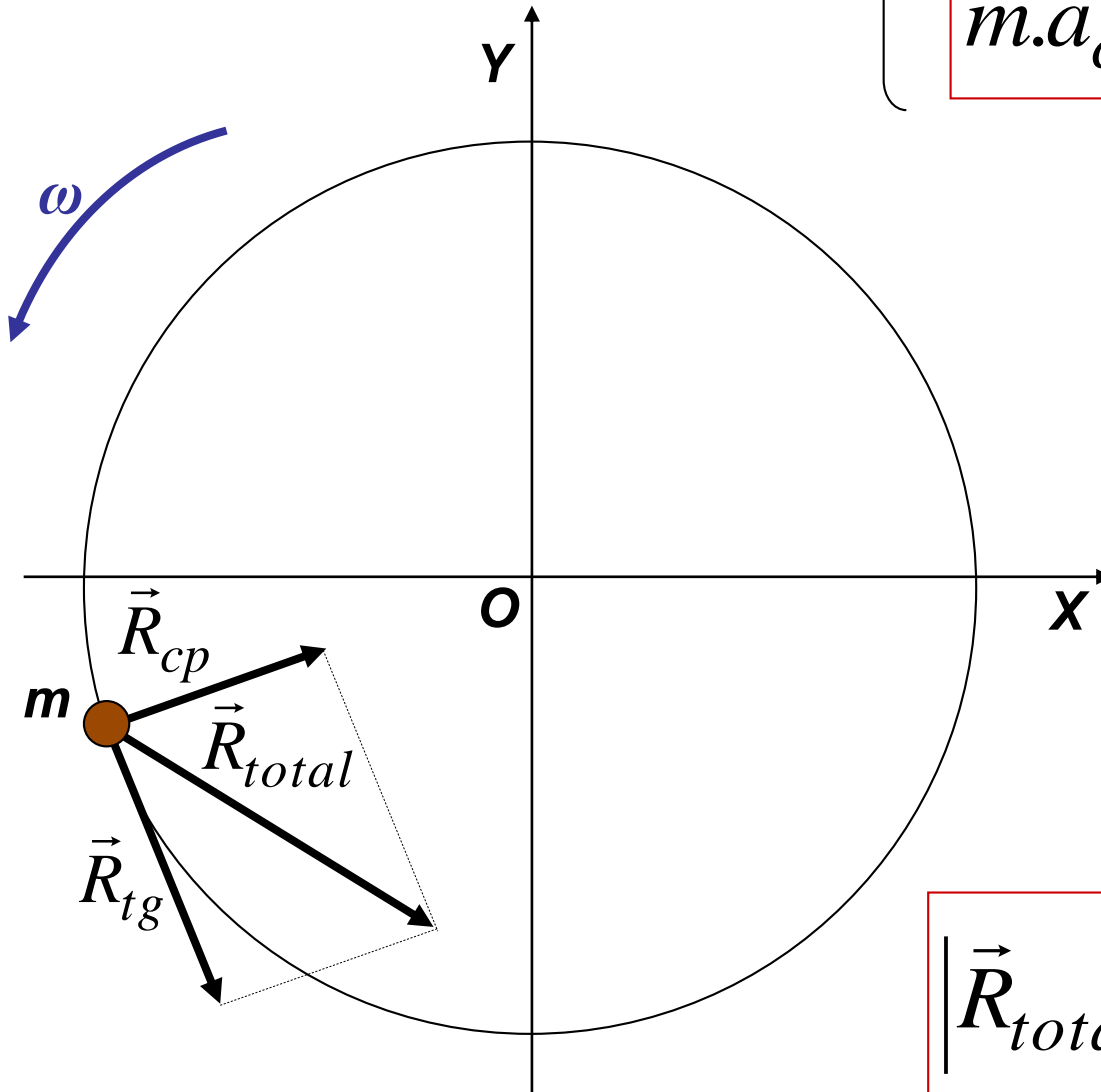
$$m \cdot \vec{a}_{cp} = \vec{R}_{cp}$$

Assim, a principal tarefa na Dinâmica de Rotações é descobrir *que forças representam a Resultante Centrípeta*.

Para um movimento circular variado

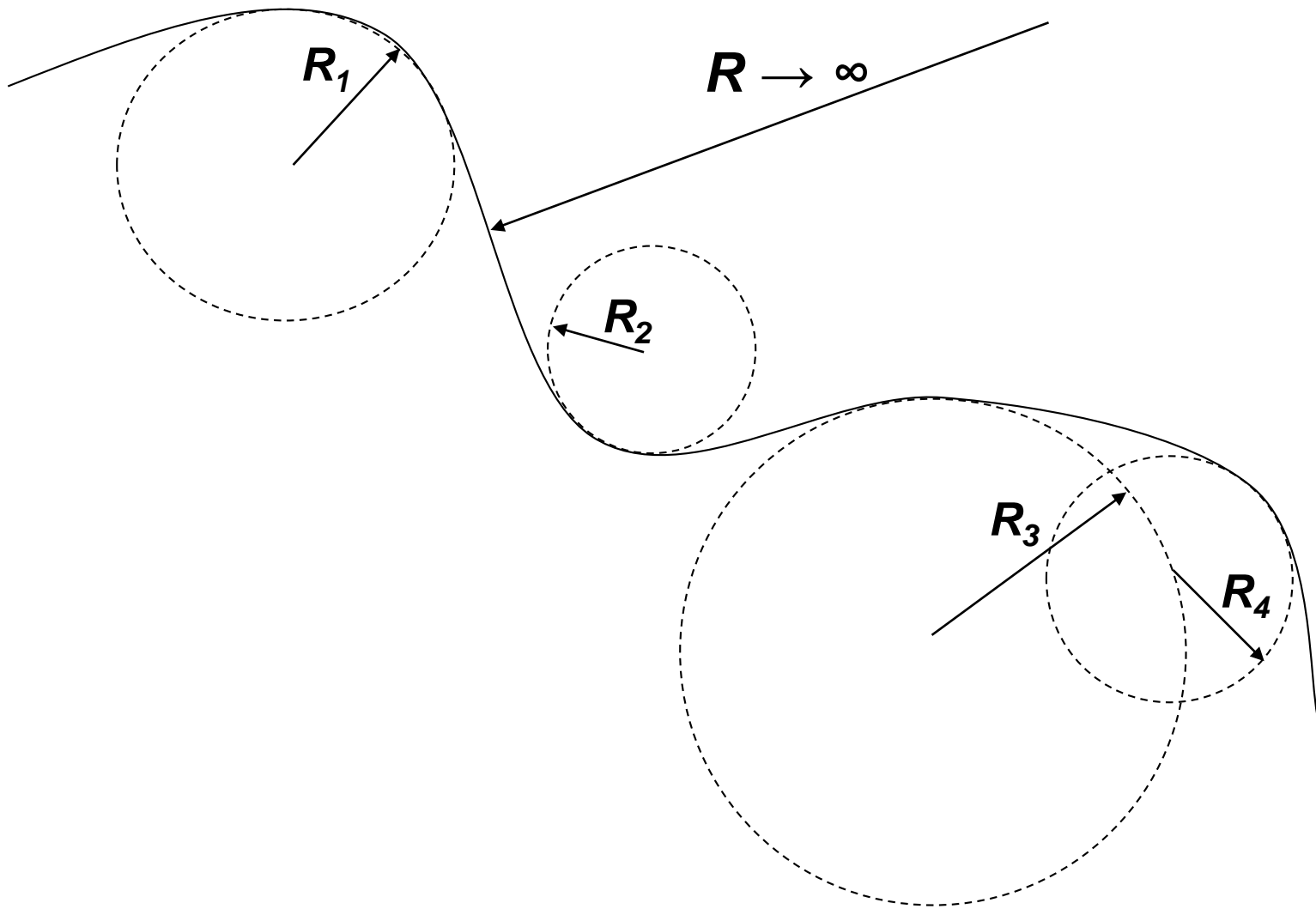
$$m \cdot \vec{a}_{tg} = \vec{R}_{tg}$$

$$m \cdot \vec{a}_{cp} = \vec{R}_{cp}$$

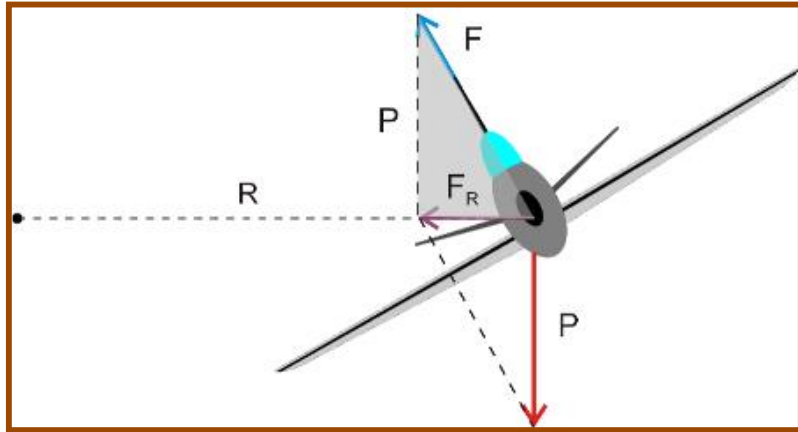


$$|\vec{R}_{total}|^2 = |\vec{R}_{tg}|^2 + |\vec{R}_{cp}|^2$$

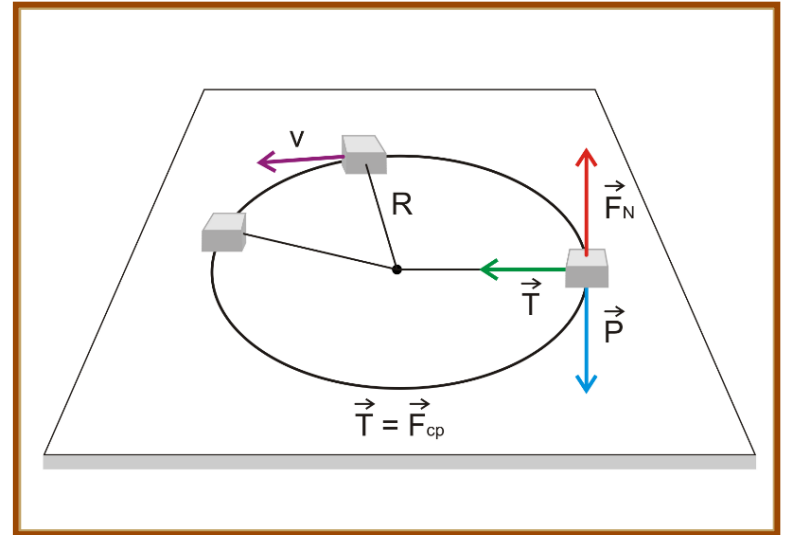
Para um movimento geral:



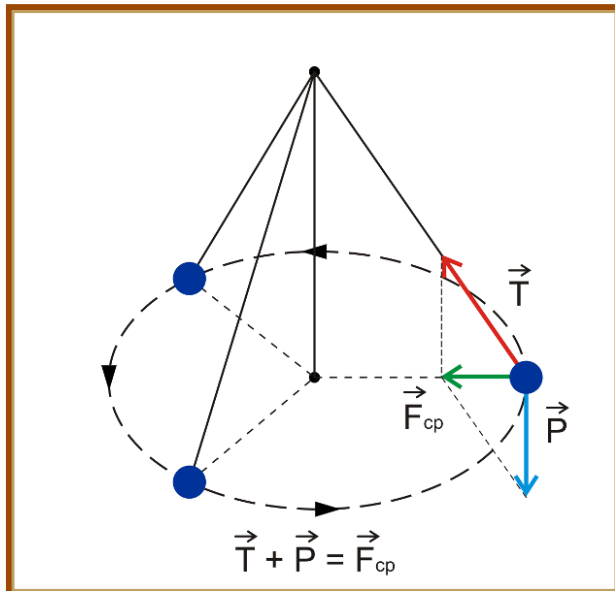
# Exemplos



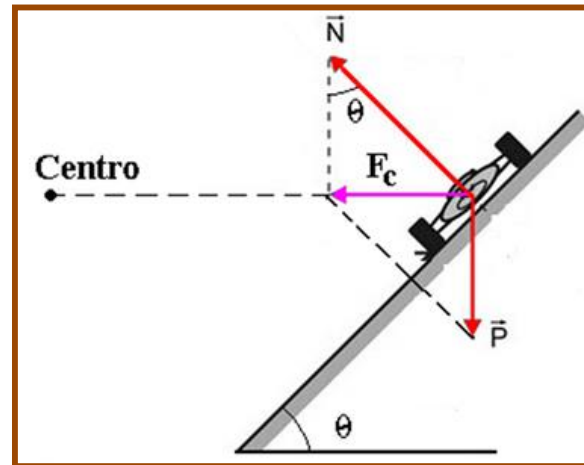
*Avião em curva*



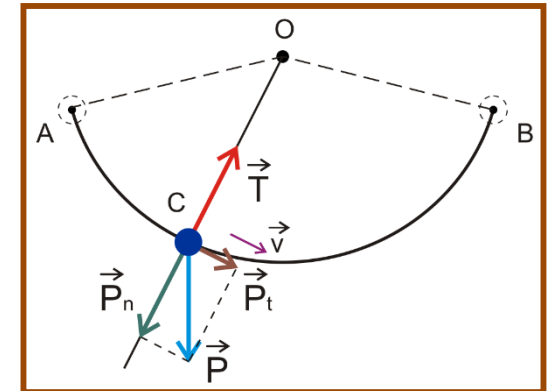
*Objeto sobre um plano horizontal*



*Pêndulo cônico*



*Carro sobre curva inclinada  
com atrito nulo*

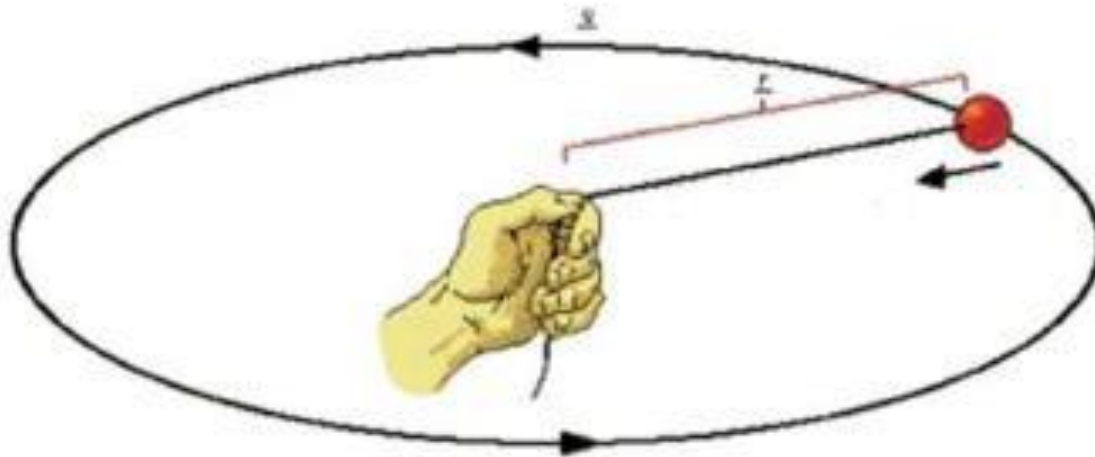


*Pêndulo simples*



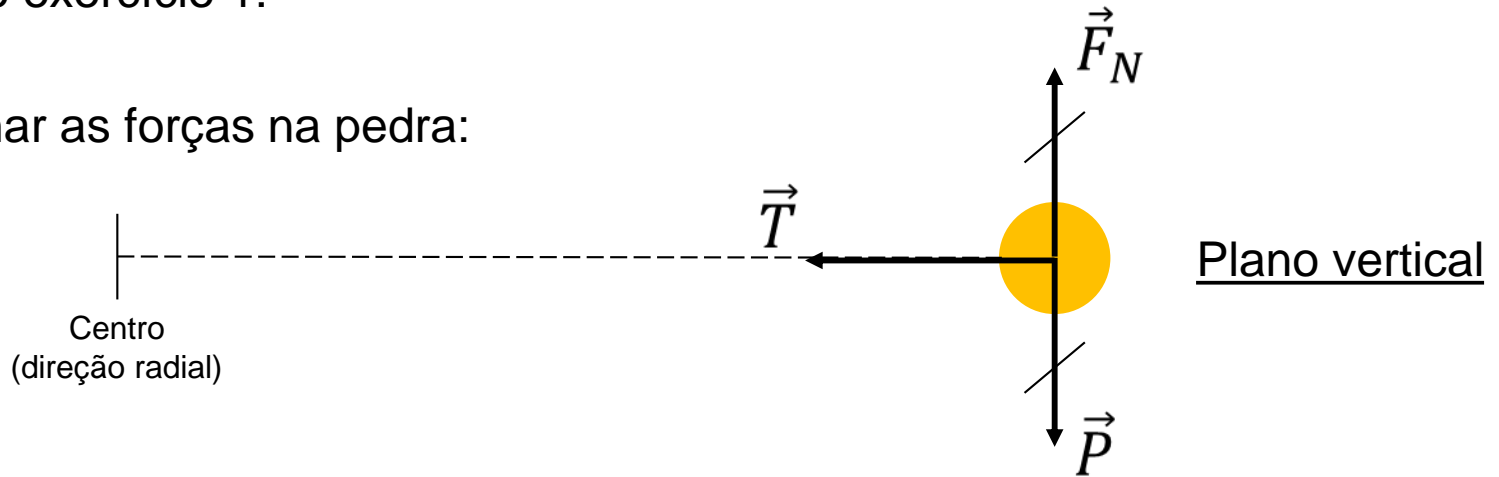
# Exercícios sobre Dinâmica do Movimento Circular

- 1) Uma pedra amarrada em um arame realiza um movimento circular e uniforme, em um plano horizontal sem atrito, com velocidade de  $1 \text{ m/s}$ . A) Desenhe as forças atuantes na pedra. B) Qual é a força que representa a resultante centrípeta? C) Sendo o valor do raio da circunferência igual a  $1 \text{ m}$ , determine a aceleração centrípeta. D) Considerando que a massa da pedra vale  $0,2 \text{ kg}$ , calcule o módulo da resultante centrípeta. E) Represente a resultante centrípeta em três pontos diferentes da trajetória da pedra. F) Considerando, agora, a presença de uma aceleração tangencial constante e igual a  $1 \text{ m/s}^2$  no mesmo sentido do movimento inicial, determine os módulos das resultantes tangencial, centrípeta e total, em  $t = 3 \text{ s}$ . G) Represente as resultantes em um ponto qualquer, quando o sistema é visto de cima. H) Determine o número de voltas que a pedra deu após  $3 \text{ s}$ , depois de ser acelerada.



## Resolução do exercício 1:

A) Desenhar as forças na pedra:



B) A força que representa a Resultante Centrípeta é a **Tração do fio**.  $\vec{R}_{cp} = \vec{T}$

C) Cálculo da aceleração centrípeta:  $v_{tg} = 1 \frac{m}{s}$   $r = 1m$

$$a_{cp} = \frac{v_{tg}^2}{R} \rightarrow a_{cp} = \frac{1^2}{1} \rightarrow a_{cp} = 1 \frac{m}{s^2}$$

D) Módulo da Resultante Centrípeta ( $m = 0,2\text{kg}$ ):

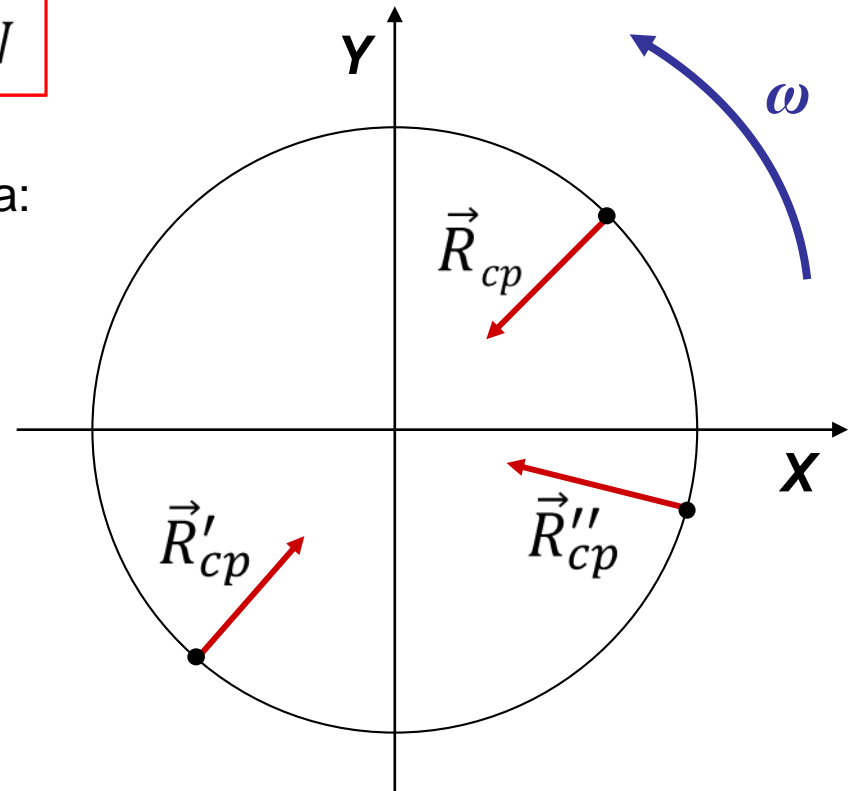
$$\vec{R}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

Na direção radial,  $R_{cp} = m \cdot a_{cp}$

$$R_{cp} = 0,2 \cdot 1$$

$$R_{cp} = 0,2\text{N}$$

E) Representação da Resultante Centrípeta:



F)  $a_{tg} = 1\text{m/s}^2$ ;  $t = 3\text{s}$ :

$$\vec{R}_{tg} = m \cdot \vec{a}_{tg} \rightarrow R_{tg} = m \cdot a_{tg} \rightarrow R_{tg} = 0,2 \cdot 1 \rightarrow \boxed{R_{tg} = 0,2\text{N}}$$

$$\vec{R}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp} \rightarrow R_{cp} = m \cdot \frac{v_{tg}^2}{R} \rightarrow R_{cp} = 0,2 \cdot \frac{(4)^2}{1}$$

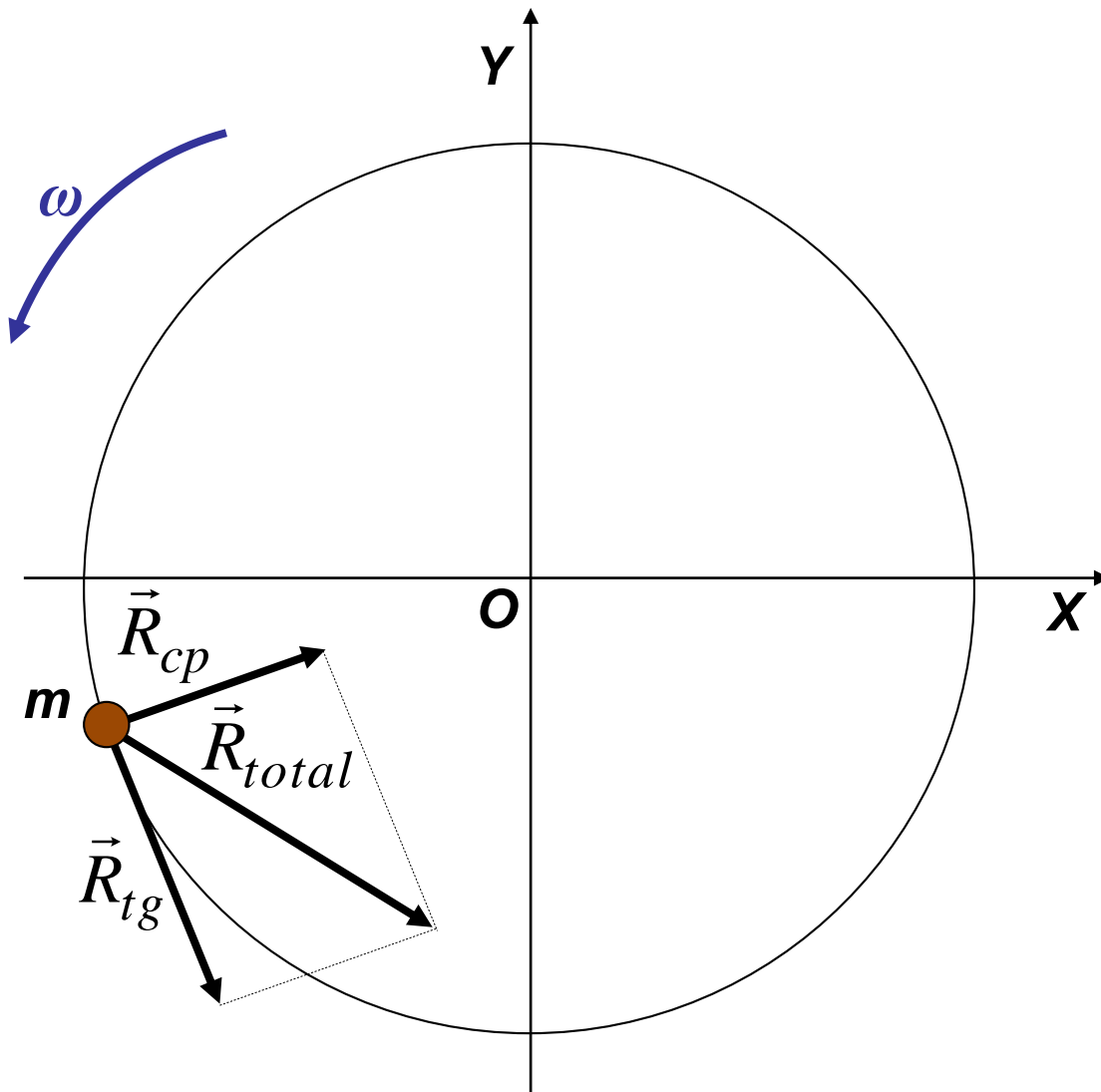
$$\boxed{R_{cp} = 3,2\text{N}}$$

$$v_{tg} = v_{tg0} + a_{tg} \cdot t \rightarrow v_{tg} = 1 + (+1) \cdot 3 \rightarrow \boxed{v_{tg} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$R_{total}^2 = R_{cp}^2 + R_{tg}^2$$

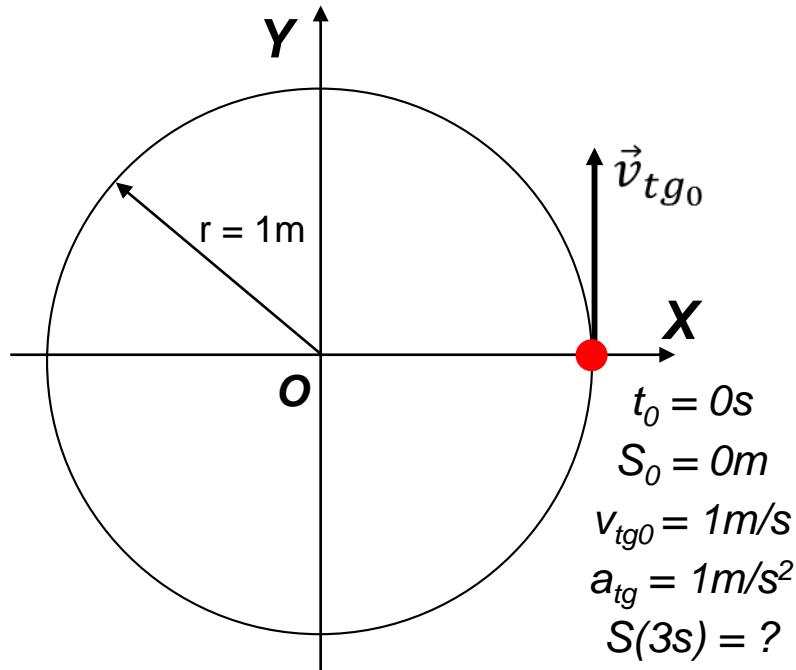
$$R_{total}^2 = (3,2)^2 + (0,2)^2 \rightarrow \boxed{R_{total} = 3,21\text{N}}$$

G) Desenho fora de escala



H)

$$S(t) = S_0 + v_{tg0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{tg} \times (t - t_0)^2$$



- Determinação da posição da pedra em  $t = 3s$ :

$$S(3s) = 0 + 1.3 + \frac{1}{2} \cdot (+1) \cdot 3^2$$

$$S(3s) = 7,5m$$

- Determinação do perímetro:

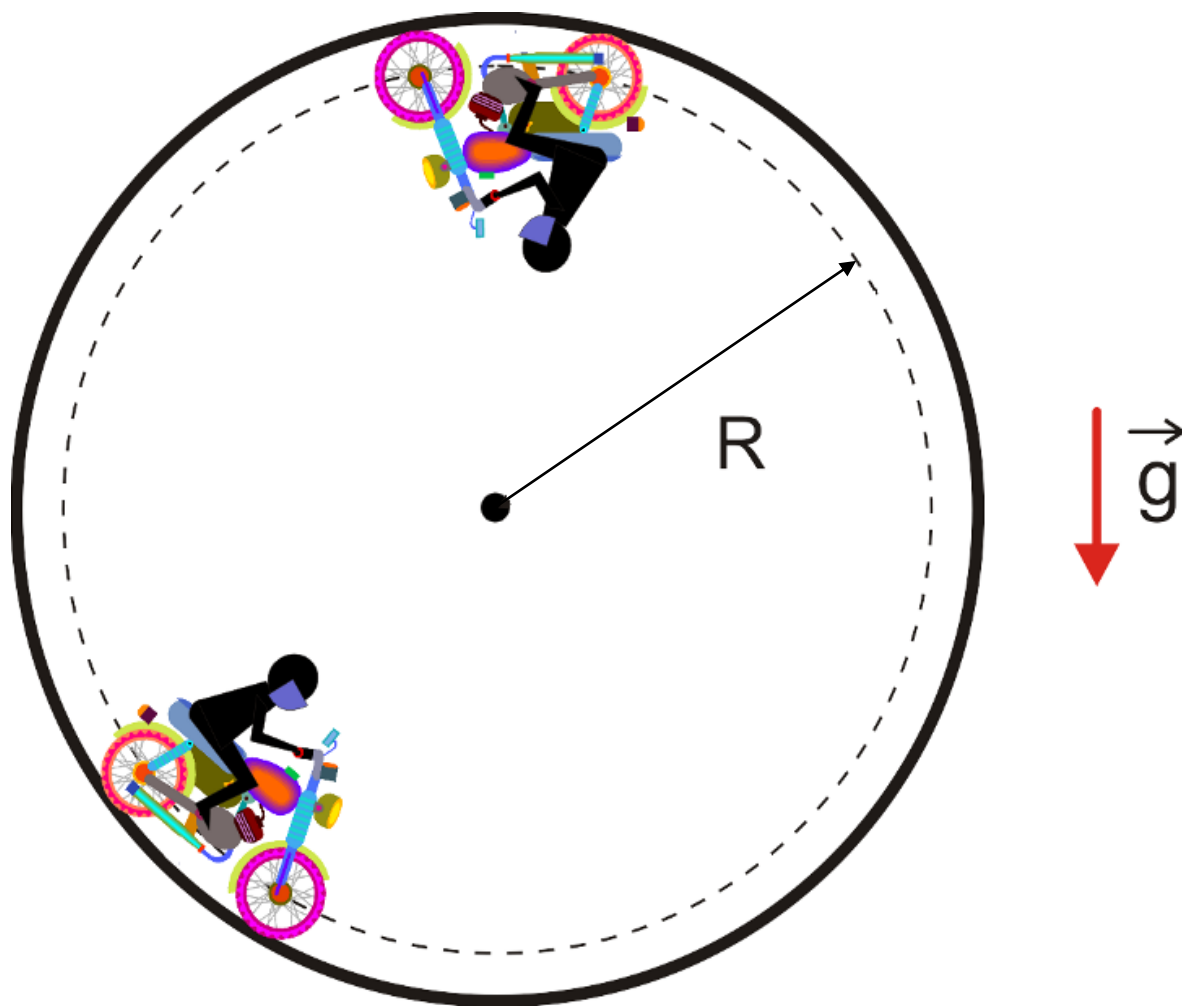
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 1 \rightarrow L = 6,28m$$

- Determinação do número (n) de voltas:

$$n = \frac{S(3s)}{L} \rightarrow n = \frac{7,5}{6,28} \rightarrow n \approx 1,2 \text{ volta}$$

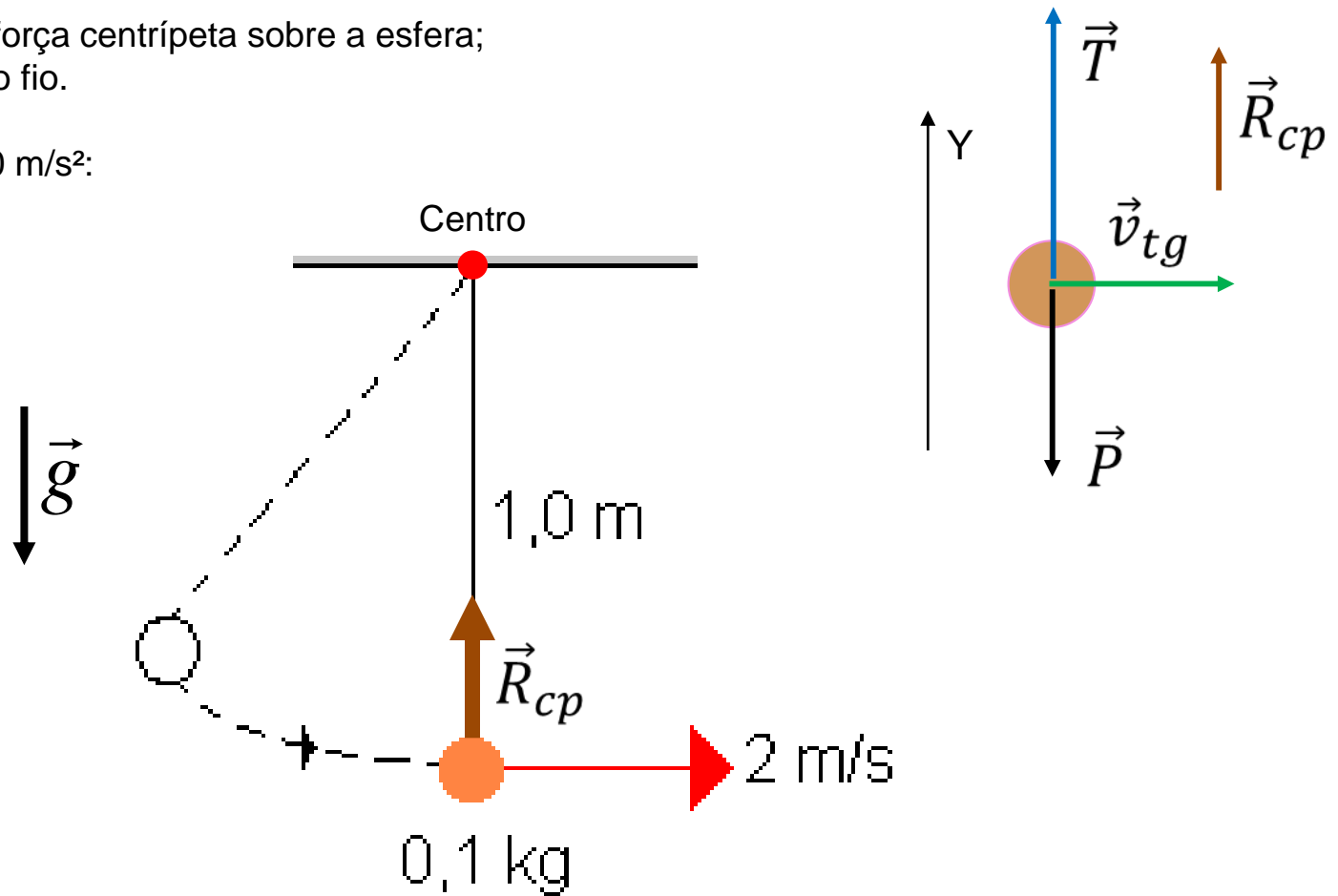
2) (Fatec-SP) Um motociclista move-se no interior de um globo metálico de raio  $R = 2,5\text{m}$ . Num determinado momento ele passa pelo ponto mais alto da trajetória. Qual deve ser a velocidade mínima, nesse instante, para que a moto não perca o contato com a superfície do globo? Adote  $g = 10\text{ m/s}^2$ .



3) (Vunesp-SP) Uma esfera metálica de massa 0,1 kg, presa à extremidade de um fio leve e inextensível de 1,0 m de comprimento, é abandonado de certa altura e passa pelo ponto mais baixo da trajetória com velocidade de 2,0 m/s, como mostra a figura. Determine, no ponto mais baixo da trajetória:

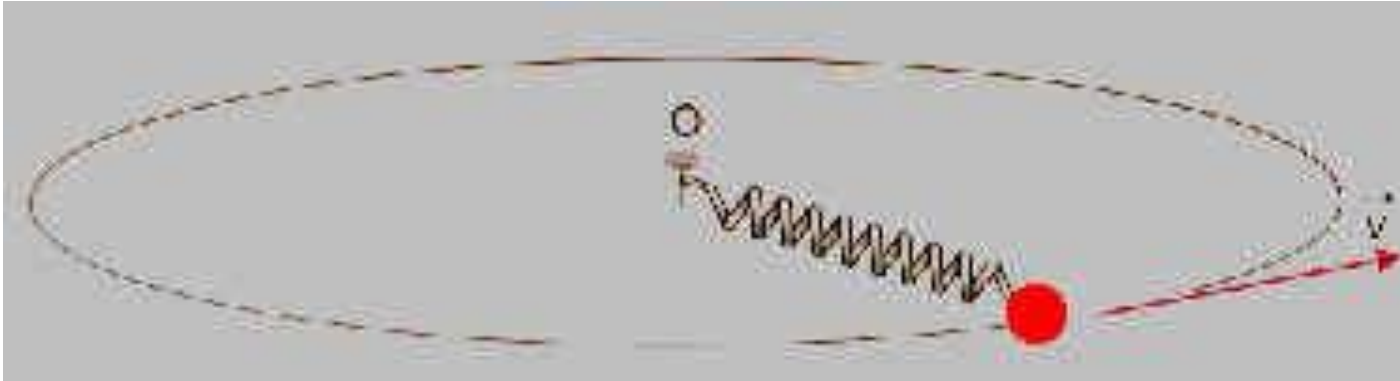
- a) o valor da força centrípeta sobre a esfera;
- b) a tensão no fio.

Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :

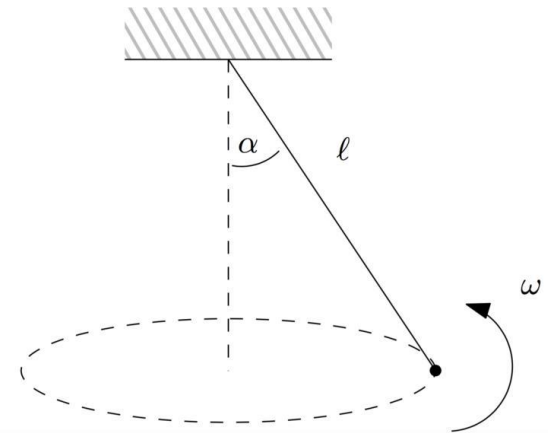




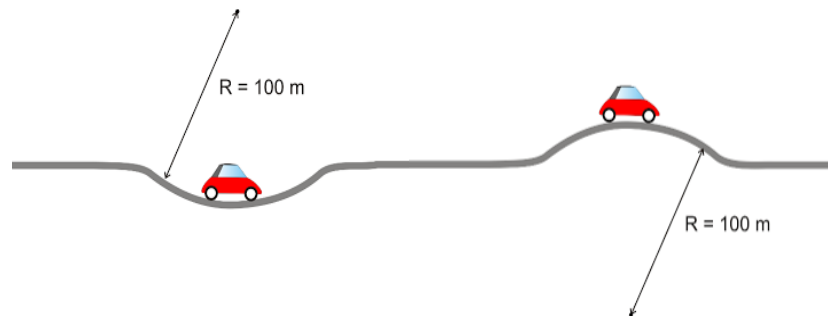
4) (Unicamp-SP) Uma bola de massa igual a 1,0 kg, presa à extremidade livre de uma mola esticada de constante elástica  $k = 2000 \text{ N/m}$ , descreve um MCU de raio  $R = 0,50 \text{ m}$  com velocidade  $v = 10 \text{ m/s}$  sobre uma mesa horizontal e sem atrito. A outra extremidade da mola está presa a um pino em  $O$ , segundo a figura a seguir. Determine a deformação da mola.



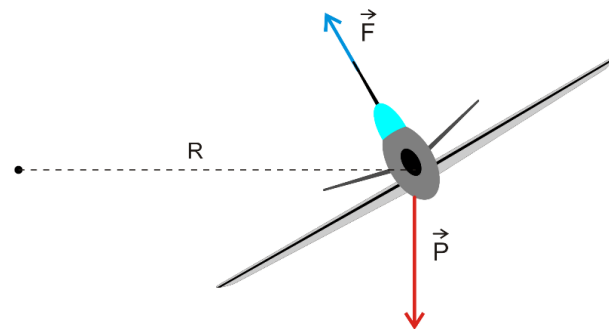
5) Um pêndulo cônico é constituído por um corpo mantido em trajetória plana, horizontal, circular, por meio de um fio de comprimento  $L$  preso a um ponto fixo. Se o fio tem comprimento 2m e forma com a vertical um ângulo  $\alpha$  ( $\text{sen}\alpha = 0,6$  e  $\text{cos}\alpha = 0,8$ ), determine a intensidade da aceleração centrípeta do corpo, sabendo-se que sua velocidade escalar é  $3,0 \text{ m/s}$ . Represente também a aceleração centrípeta em diferentes pontos da trajetória.



6) Um carro de 800 kg, deslocando-se numa estrada, passa pelo ponto mais baixo de uma depressão com velocidade de 72 km/h, conforme indica a figura. Qual é a intensidade da força normal que a pista exerce no carro? É dado  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Mantidas as condições anteriores, resolva o exercício quando o veículo passa pelo ponto mais alto.



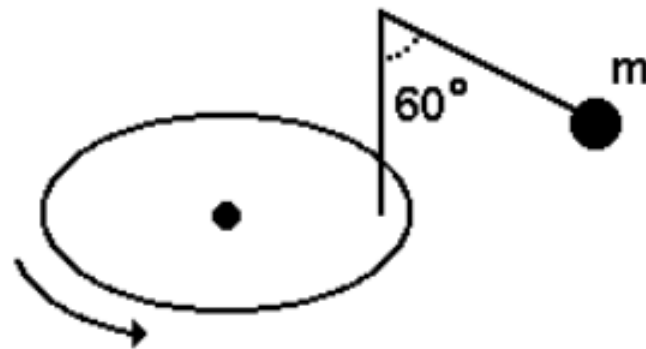
7) (Mackenzie-SP) Um avião descreve uma trajetória circular horizontal com velocidade escalar constante  $v$ . As asas formam um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Devem ser considerados apenas o peso do avião e a força de sustentação, que é perpendicular à asa. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade, o raio da trajetória descrita é:



8) Na figura, o fio ideal prende uma partícula de massa  $m$  a uma haste vertical presa a um disco horizontal que gira com velocidade angular  $\omega$  constante. A distância do eixo de rotação do disco ao centro da partícula é igual a  $0,1\sqrt{3}m$ . A velocidade angular do disco é:

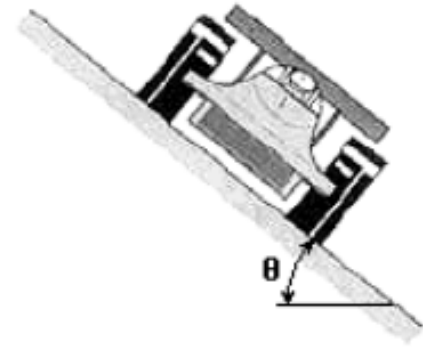
Dado:  $g=10\text{m/s}^2$

- a) 3 rad/s      b) 5 rad/s      c)  $5\sqrt{2}$  rad/s  
 d)  $8\sqrt{3}$  rad/s      e) 10 rad/s



9) Um circuito de Fórmula Mundial circular, com 320 m de raio, tem como velocidade de segurança 40 m/s. Calcule a tangente do ângulo de inclinação da pista.

Observação: velocidade de segurança é a velocidade com a qual o carro pode trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.



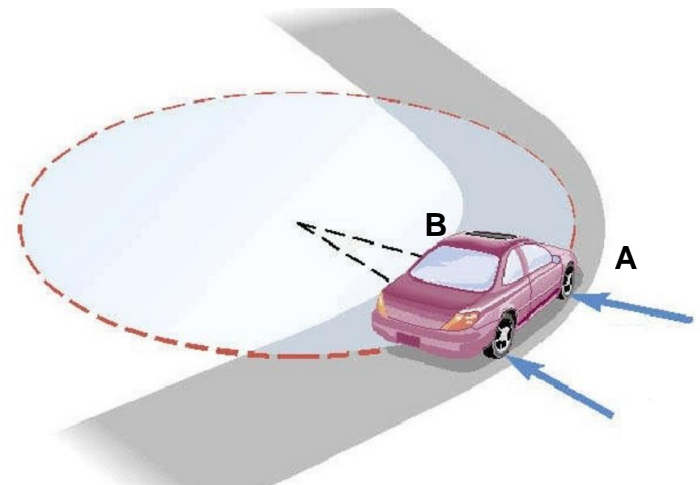
10) A figura a seguir mostra um carro fazendo uma curva horizontal plana, de raio  $R = 50$  m, em uma estrada asphaltada. O módulo da velocidade do carro é constante e suficientemente baixo para que se possa desprezar a resistência do ar sobre ele.



1 - Cite as forças que atuam sobre o carro e desenhe, na figura, vetores indicando a direção e o sentido de cada uma dessas forças.

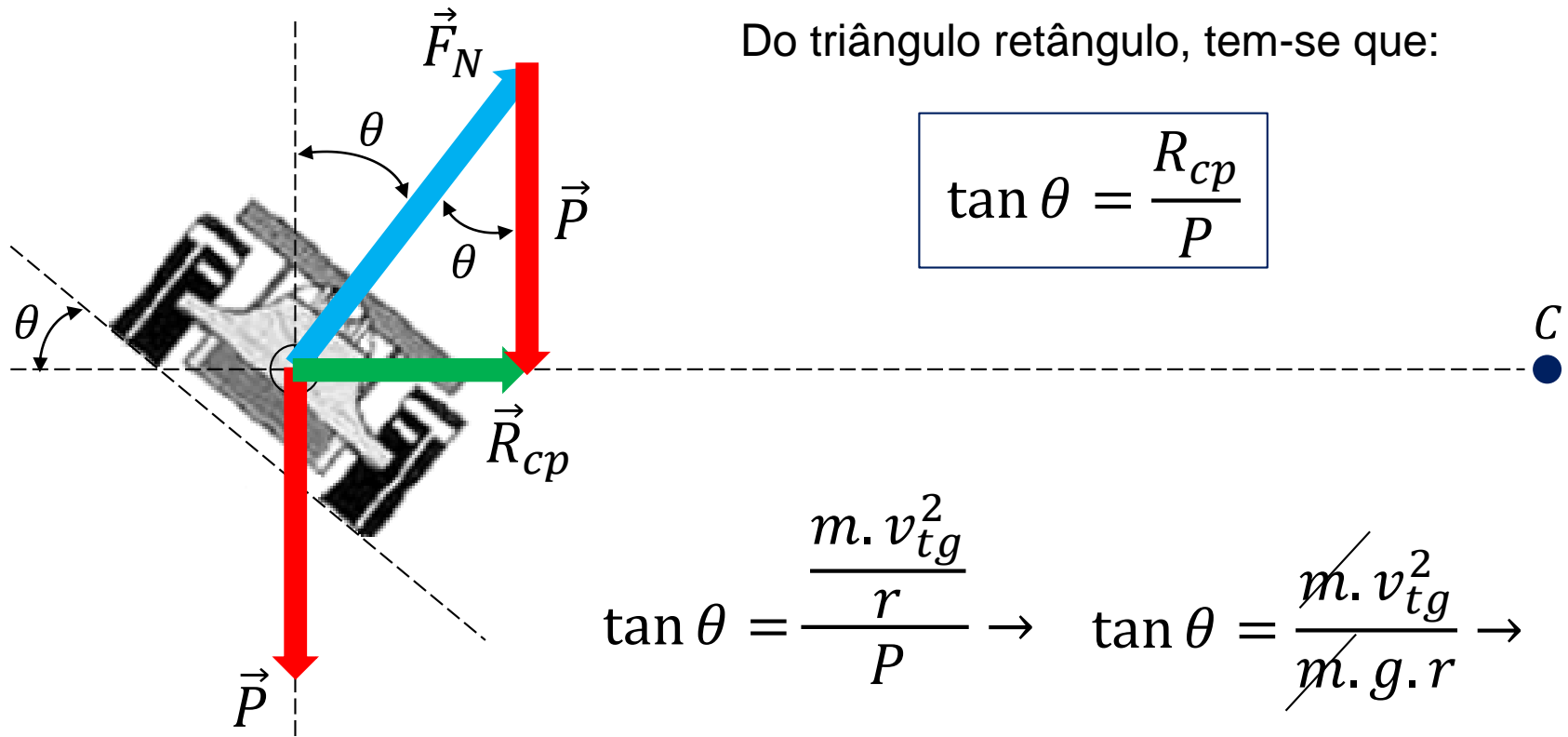
2 - Supondo valores numéricos razoáveis para as grandezas envolvidas, determine a velocidade que o carro pode ter nessa curva.

3 - O carro poderia ter uma velocidade maior nessa curva se ela fosse inclinada. Indique, nesse caso, se a parte externa da curva, ponto A, deve ser mais alta ou mais baixa que a parte interna, ponto B. Justifique sua resposta.



## Resolução do exercício 9:

- Isolar o carro e aplicar as forças externas atuantes sobre ele:



The diagram shows a car on a banked curve. A dashed vertical line represents the vertical direction. The car's body is tilted at an angle  $\theta$  from this vertical line. A dashed horizontal line represents the horizontal direction. The car's center of mass is at the origin of a coordinate system where the horizontal axis is dashed and the vertical axis is dashed. A blue vector  $\vec{F}_N$  (normal force) points upwards and to the right, making an angle  $\theta$  with the vertical dashed line. A red vector  $\vec{P}$  (weight) points vertically downwards. A green vector  $\vec{R}_{cp}$  (centrifugal force) points horizontally to the right. A blue dot labeled 'C' is on the horizontal dashed line to the right. A red vector  $\vec{P}$  is also shown pointing vertically downwards from the origin.

Do triângulo retângulo, tem-se que:

$$\tan \theta = \frac{R_{cp}}{P}$$
$$\tan \theta = \frac{m \cdot v_{tg}^2}{r \cdot P} \rightarrow \tan \theta = \frac{m \cdot v_{tg}^2}{m \cdot g \cdot r}$$
$$\tan \theta = \frac{v_{tg}^2}{g \cdot r} \rightarrow \tan \theta = \frac{40^2}{10 \cdot 320} \rightarrow \tan \theta = 0,5$$
$$\theta \approx 26,6^\circ$$

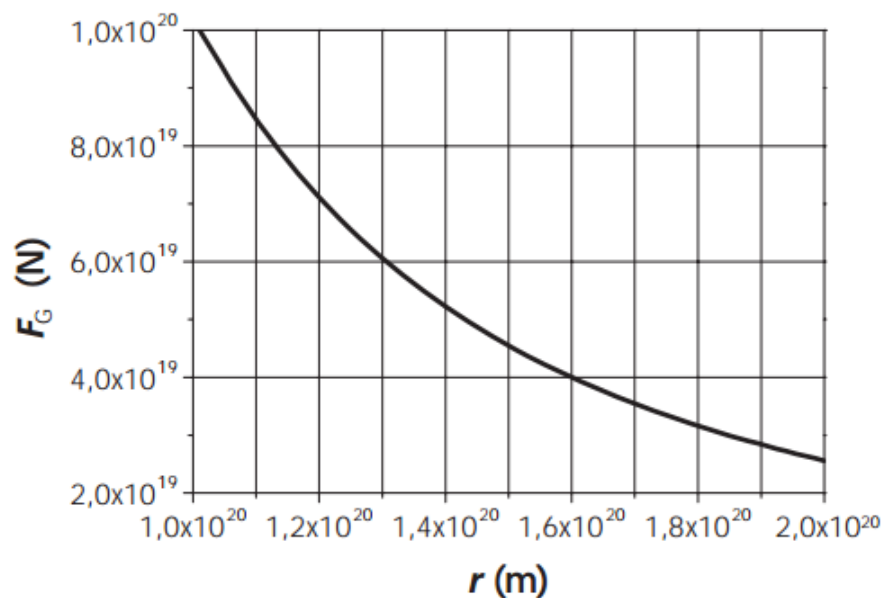
***Não se esqueça de assistir ao seguinte vídeo:***



**<https://www.youtube.com/watch?v=ubRukj6ti0Y> - Moto 3**

11) Observações astronômicas indicam que as velocidades de rotação das estrelas em torno de galáxias são incompatíveis com a distribuição de massa visível das galáxias, sugerindo que grande parte da matéria do Universo é escura, isto é, matéria que não interage com a luz. O movimento de rotação das estrelas resulta da força de atração gravitacional que as galáxias exercem sobre elas.

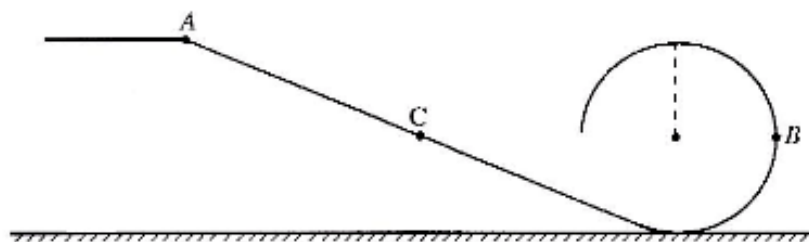
A curva no gráfico abaixo mostra como a força gravitacional  $F_G = \frac{GMm}{r^2}$ , que uma galáxia de massa  $M$  exerce sobre uma estrela externa à galáxia, deve variar em função da distância  $r$  da estrela em relação ao centro da galáxia, considerando-se  $m = 1,0 \times 10^{30} \text{ kg}$  para a massa da estrela. A constante de gravitação  $G$  vale  $6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .



a) Determine a massa  $M$  da galáxia.

b) Calcule a velocidade de uma estrela em órbita circular a uma distância  $r = 1,6 \times 10^{20} \text{ m}$  do centro da galáxia.

- 12) (UERJ – 1998) A figura mostra uma plataforma que termina em arco de círculo. Numa situação em que qualquer atrito pode ser desprezado, uma pequena esfera é largada do repouso no ponto A, a uma altura do solo igual ao diâmetro do círculo. A intensidade da aceleração local da gravidade é  $g$ .



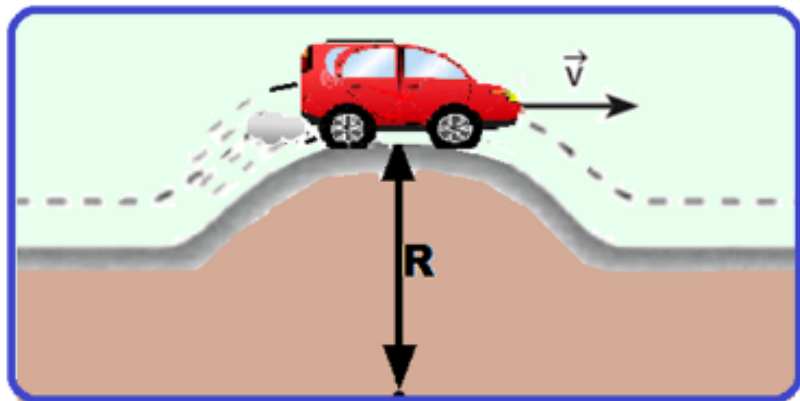
Com relação ao instante em que a esfera passa pelo ponto B, situado a uma altura igual ao raio do círculo,

a) indique se o módulo de sua velocidade é maior, igual ou menor que no ponto C, situado à mesma altura que B, e justifique sua resposta;

b) determine as componentes tangencial ( $a_t$ ) e centrípeta ( $a_c$ ) e de sua aceleração ( $a_v$ )

- 13) UEMG – 2017

A figura representa o instante em que um carro de massa  $M$  passa por uma lombada existente em uma estrada.



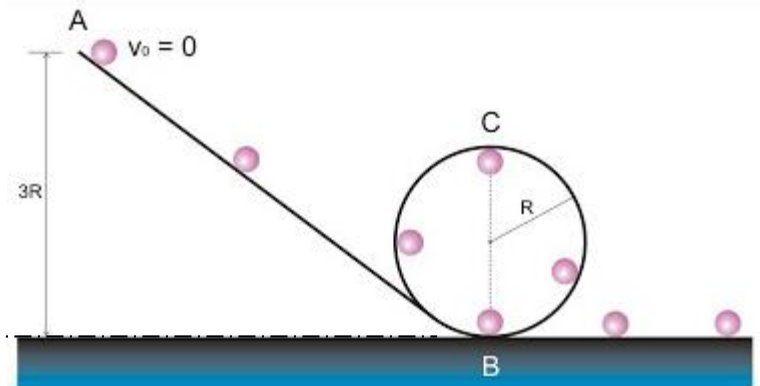
Considerando o raio da lombada igual a  $R$ , o módulo da velocidade do carro igual a  $V$ , e a aceleração da gravidade local  $g$ , a força exercida pela pista sobre o carro, nesse ponto, pode ser calculada por

- a)  $\frac{MV^2}{g} + Mg$       b)  $Mg - \frac{MV^2}{R}$       c)  $Mg - \frac{MR^2}{V}$   
d)  $\frac{MR^2}{V} + Mg$

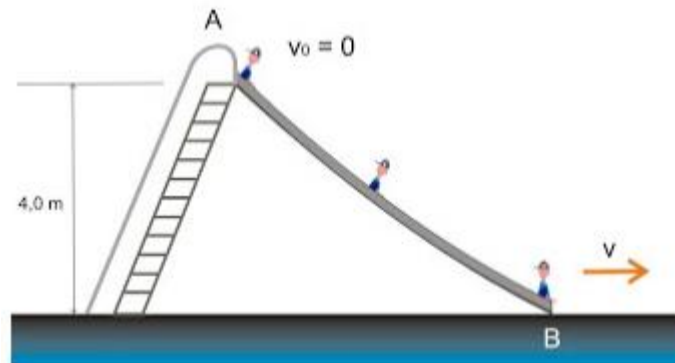
- 14) Uma pequena esfera é abandonada do ponto A e efetua um looping. Calcule a velocidade da esfera ao passar pelas posições B e C, indicadas na figura. Despreze os atritos e considere dados o raio  $R$  da trajetória circular e a aceleração local da gravidade  $g$ .

Calcule a força normal que o *looping* aplica sobre a esfera nos pontos B e C. Considere conhecida a massa  $m$  da esfera e que ela só escorregue ao longo do movimento, isto é, não há rolamento. Calcule a menor altura de onde a esfera pode ser abandonada para que realize a volta no *looping*.

P.H.R ( $h = 0\text{m}$ ,  $E_{pot} = 0\text{J}$ )



- 15) Um menino desce por um escorregador de altura 4,0 m, a partir do repouso. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e que 20% da energia mecânica é dissipada durante o trajeto, determine a velocidade com que o menino atinge o solo.





Resolução do ex. 14, usando a *Lei de Conservação da Energia* e *Leis de Newton*:

- Cálculo da velocidade da esfera no ponto B:

$$E_A = E_B$$

Como só estão presentes formas de energia mecânica, tem-se que

$$E_{MecA} = E_{MecB}$$

$$\cancel{E_{cin_A}} + E_{pot_A}^{0 \text{ (Repouso)}} = E_{cin_B} + \cancel{E_{pot_B}}^{0 \text{ (P.H.R.)}}$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_A} \rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot 3 \cdot R}$$

$$v_B = \sqrt{6 \cdot g \cdot R}$$

- Cálculo da velocidade da esfera no ponto C:

Como só estão presentes formas de energia mecânica, tem-se que

$$E_{MecA} = E_{MecC}$$

0 (Repouso)

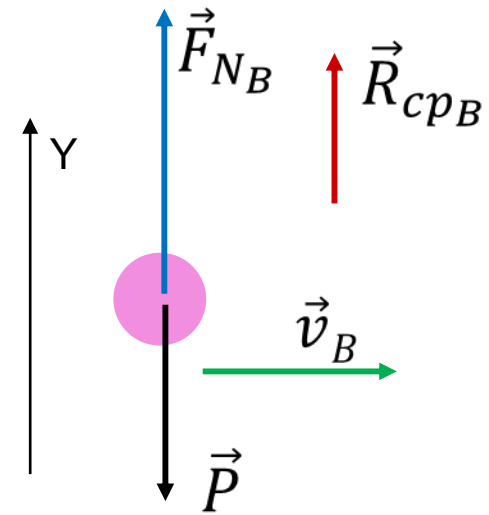
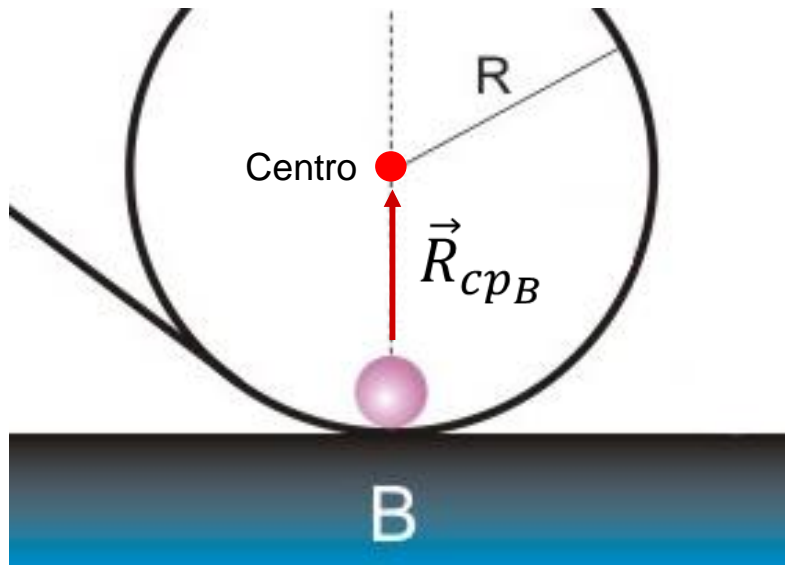
$$\cancel{E_{cinA}} + E_{potA} = E_{cinC} + E_{potC}$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_C^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_C$$

$$v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_A - h_C)} \rightarrow v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot (3 \cdot R - 2 \cdot R)}$$

$$v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$$

- Cálculo da Força Normal sobre a esfera no ponto B:

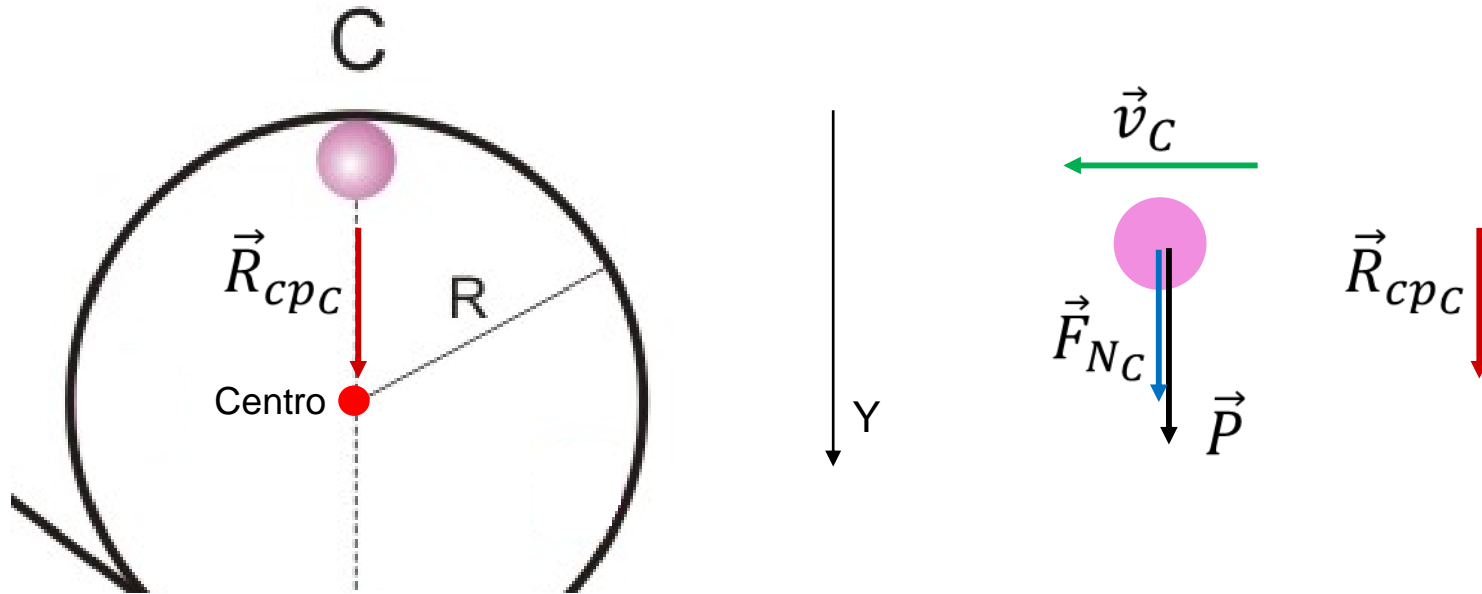


$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Sigma F_{Y_B} = m \cdot a_{Y_B} \rightarrow R_{cpB} = m \cdot a_{cpB} \rightarrow$$

$$+F_{NB} - P = m \cdot a_{cpB} \rightarrow F_{NB} = m \cdot \frac{v_B^2}{R} + m \cdot g \rightarrow \boxed{F_{NB} = +7 \cdot m \cdot g}$$

- Cálculo da Força Normal sobre a esfera no ponto C:



$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Sigma R_{Y_C} = m \cdot a_{Y_C} \rightarrow \Sigma R_{cpC} = m \cdot a_{cpC} \rightarrow$$

$$+F_{N_C} + P = m \cdot a_{cpC} \rightarrow F_{N_C} = m \cdot \frac{v_C^2}{R} - m \cdot g \rightarrow F_{N_C} = m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot R}{R} - m \cdot g$$

$$F_{N_C} = m \cdot g$$

- Cálculo da menor altura:

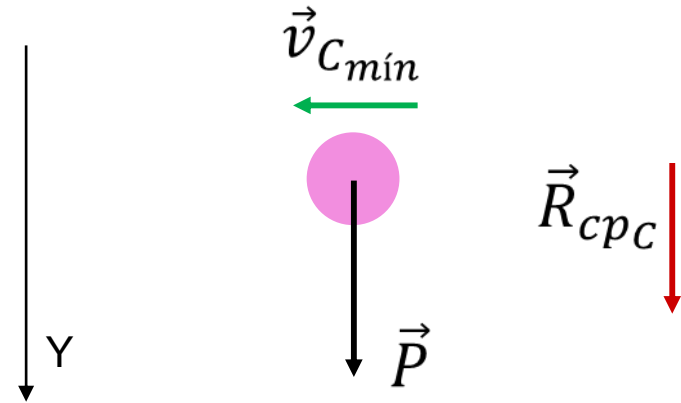
“A condição de menor altura no ponto A para que a esfera complete a volta no looping é que o módulo da força normal em C seja nulo. Dessa forma, a velocidade em C será a **mínima**.”

$$\cancel{+F_{N_C}} + P = m \cdot a_{cpC}$$

$$P = m \cdot \frac{v_{C_{mín}}^2}{R}$$

$$\cancel{m \cdot g} = \cancel{m} \cdot \frac{v_{C_{mín}}^2}{R}$$

$$v_{C_{mín}} = \sqrt{g \cdot R}$$



$$E_{MecA} = E_{MecC}$$

$$E_{cinA} + E_{potA} = E_{cinC} + E_{potC}$$

0 (Repouso)

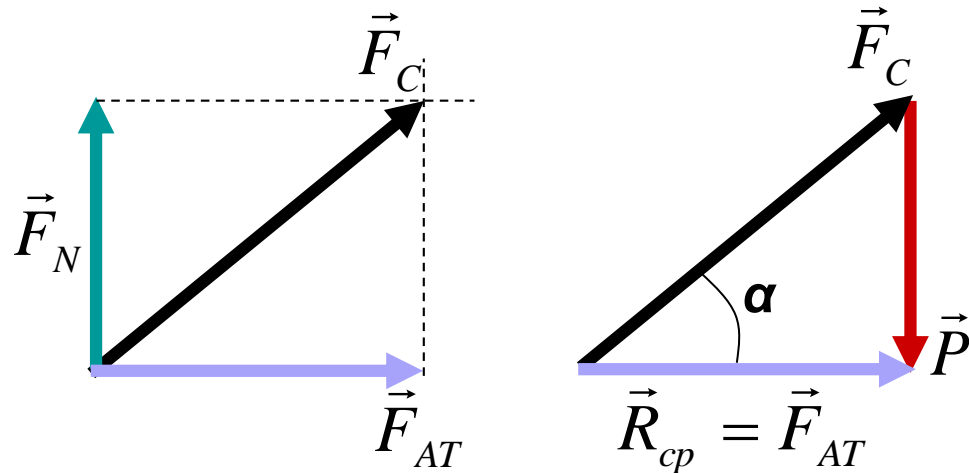
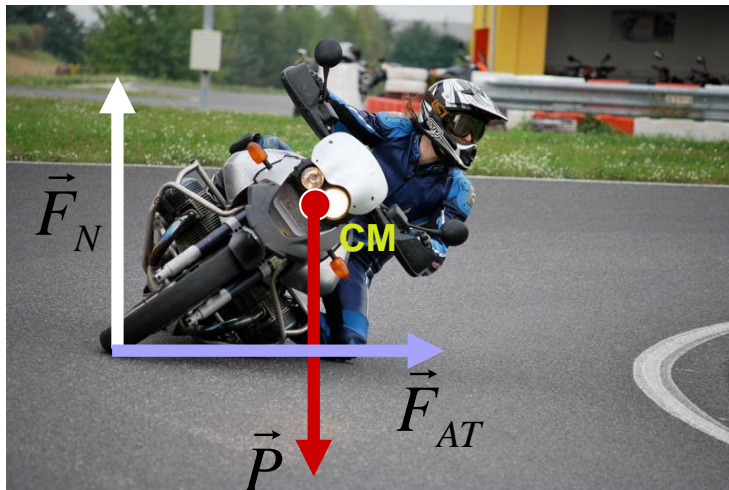
$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_{A_{\min}} = \frac{\cancel{m} \cdot v_{C_{\min}}^2}{2} + \cancel{m} \cdot g \cdot 2 \cdot R$$

$$\cancel{g} \cdot h_{A_{\min}} = \frac{\cancel{g} \cdot R}{2} + \cancel{g} \cdot 2 \cdot R$$

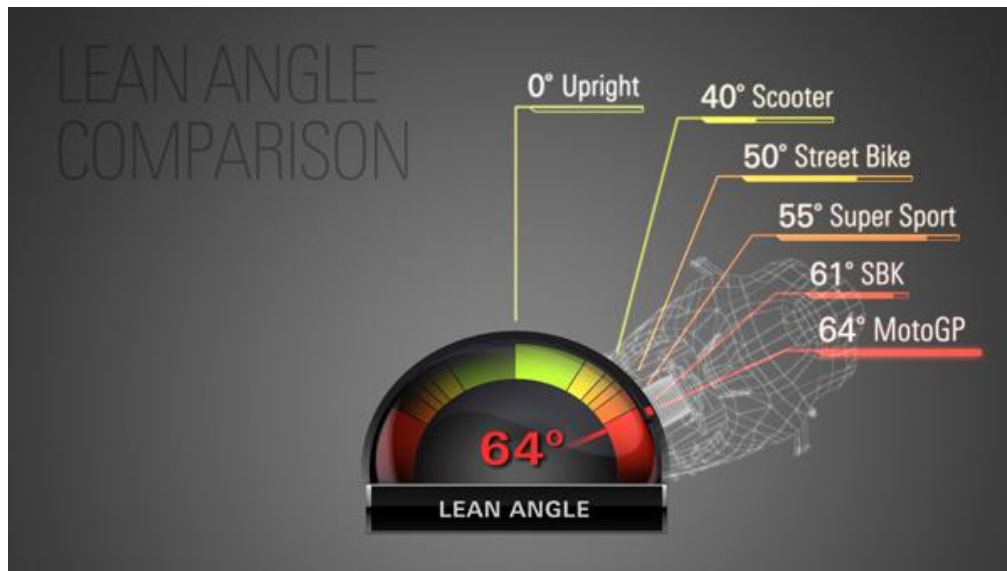
$$h_{A_{\min}} = \frac{R}{2} + 2 \cdot R$$

$$h_{A_{\min}} = 2,5 \cdot R$$

## Desafio

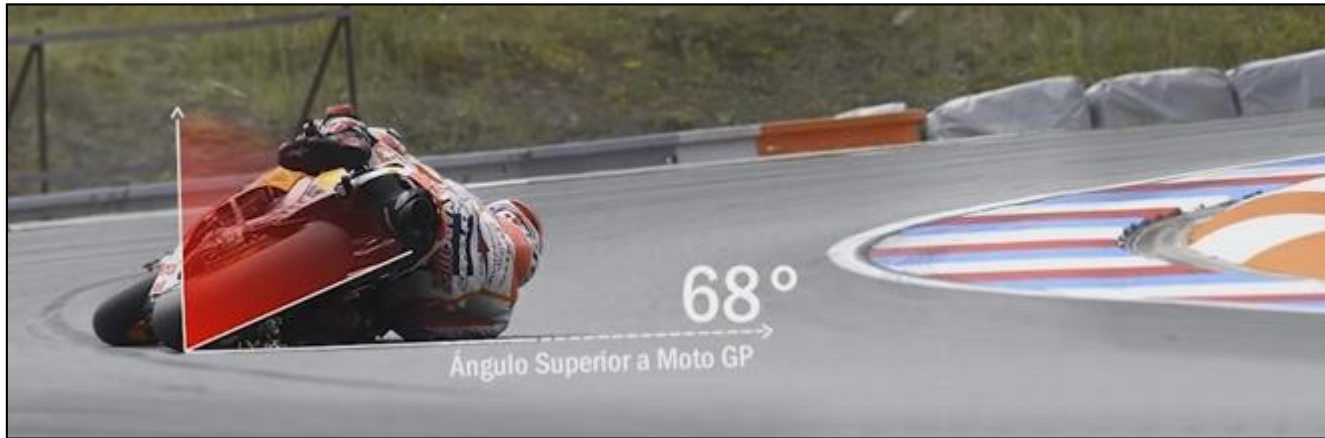


Supondo uma pista plana, isto é, sem sobrelevações, determine a **Resultante Centrípeta** para todas as situações descritas na ilustração ao lado [utilize os dados abaixo e suponha que os ângulos fornecidos sejam os de inclinação máxima (iminência de escorregamento)]. Que força faz o papel de resultante centrípeta para todos os casos? Calcule o coeficiente de atrito  $\mu_{\text{est}}$  entre pneu e o piso para cada situação.



**Dados:**  $m_{\text{scooter}} = 127 \text{ kg}$ ;  $m_{\text{moto de rua}} = 153 \text{ kg}$ ;  $m_{\text{super sport}} = 167 \text{ kg}$ ;  $m_{\text{superbike}} = 168 \text{ kg}$ ;  
 $m_{\text{motogp}} = 157 \text{ kg}$ ;  $\text{massa}_{\text{piloto}} = 60 \text{ kg}$ . Adote  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

## Além do limite...



18 Agosto de 2014, em Brno, República Tcheca



**Marc Marquez**



Massa do piloto: **59 kg**  
Massa da moto: **157 kg**

Com base nos dados fornecidos, determine o valor da força de atrito máxima e o coeficiente de atrito estático entre pneu e piso, supondo que o piloto e a moto estejam raspando levemente no piso.



# **Referências Sitigráficas**

- [http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2011/01/preparando-se-para-as-provas\\_8965.html](http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2011/01/preparando-se-para-as-provas_8965.html)
- [http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2014/06/cursos-do-blog-mecanica\\_16.html](http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2014/06/cursos-do-blog-mecanica_16.html)
- [http://fisicaevestibular.com.br/exe\\_cin\\_16.htm](http://fisicaevestibular.com.br/exe_cin_16.htm)
- <http://www.blogdaengenharia.com/wp-content/uploads/2013/05/PoliaseCorreias.pdf>
- [https://www.comvest.unicamp.br/vest\\_anteriores/vest\\_ant.html](https://www.comvest.unicamp.br/vest_anteriores/vest_ant.html)
- <http://www.yamaha-motor.com.br/nmax160/ficha-tecnica>
- <http://yamaha-motor.com.br/fazer250/ficha-tecnica>
- [http://yamaha-motor.com.br/r3/home\\_realidade.html#](http://yamaha-motor.com.br/r3/home_realidade.html#)
- <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/leis-de-conservacao/exercicios-de-vestibulares-e-enem/>
- <https://fisicaevestibular.com.br/novo/vestibulares-recentes/mecanica/dinamica/>
- [http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/09/preparando-se-para-as-provas\\_27.html](http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/09/preparando-se-para-as-provas_27.html)
- [http://ensinodefisica.ca.ifes.edu.br/wp-content/uploads/2018/02/Material\\_produto\\_professor\\_aluno\\_full.pdf](http://ensinodefisica.ca.ifes.edu.br/wp-content/uploads/2018/02/Material_produto_professor_aluno_full.pdf)
- [https://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2019/06/cursos-do-blog-mecanica\\_10.html](https://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2019/06/cursos-do-blog-mecanica_10.html)