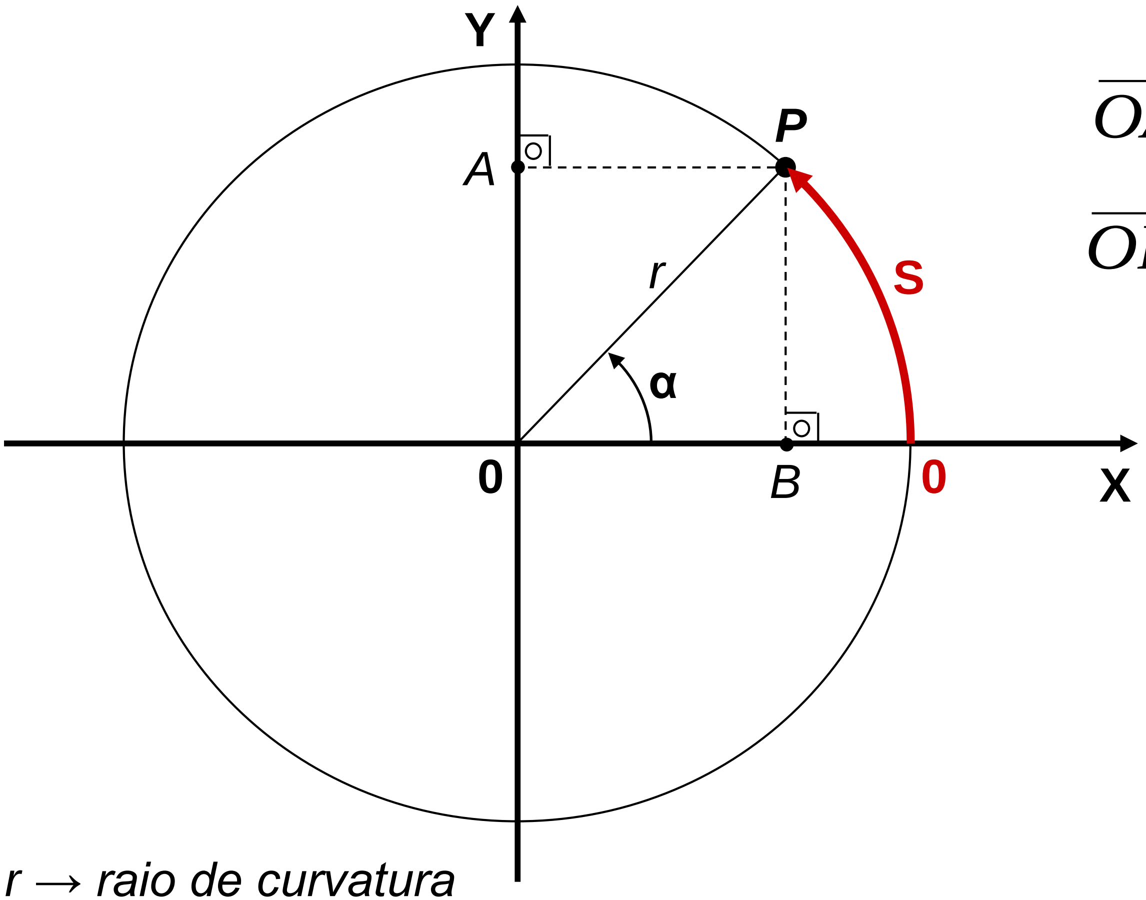
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus São Paulo

Movimento Circular

LFS 1ª série EMI

André Cipoli

Cinemática do Movimento Circular



$$\overline{OA} = \overline{BP} = \overline{OP} \times sen\,\alpha$$

$$\overline{OB} = \overline{AP} = \overline{OP} \times \cos\alpha$$

Perímetro

$$\frac{L}{r} = 2\pi\,(radiano)$$

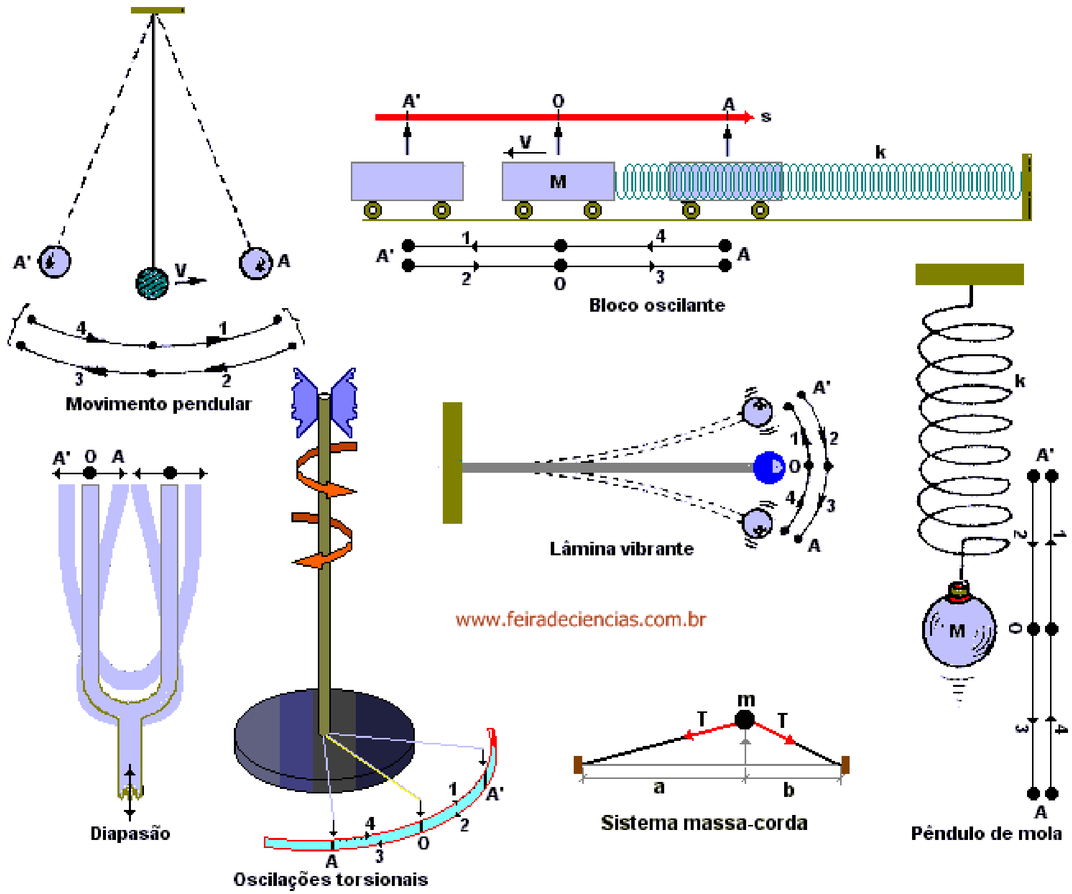
Para um arco qualquer:

$$\frac{S}{r} = \alpha(radiano)$$

r → raio de curvatura

Assim, para passar de uma linguagem linear (um arco ***S*** qualquer) para uma angular (um ângulo ***α***), basta dividir o arco pelo raio de curvatura ***r***.

Para movimentos ***repetitivos***:



T → **Período**: intervalo de tempo para ***uma*** oscilação completa (*ida e volta*), ou para ***um*** giro completo, ou para ***um*** processo completo etc.

Unidade: ***segundo/ciclo***

f → **Frequência**: número de oscilações completas, ou de giros, ou de processos completos, na unidade de tempo.

Unidade: ciclo/s, volta(rotação)/s (***n***), processo/s → hertz (***Hz***)

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

Exemplo: qual é o tempo médio entre a saída e a chegada de uma nova composição do Metrô? → (***Período***)

Quantas composições passam em uma hora? → (***Frequência***)

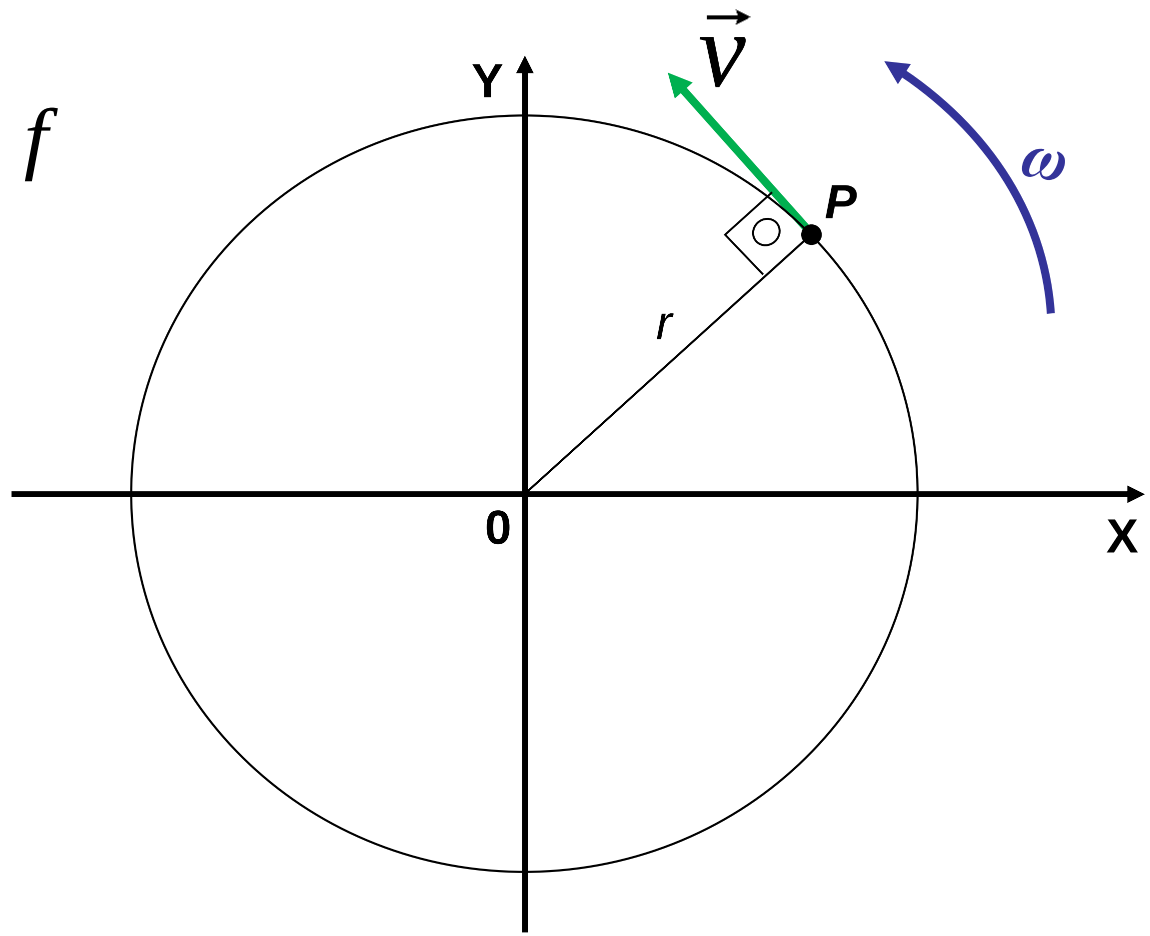
Determinação do módulo da velocidade tangencial: $$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \times \pi \times r}{T}$$

Assim, $$\omega = \frac{2 \times \pi}{T}$$ e $$\boxed{v = \omega \times r}$$

$\boldsymbol{\omega} \rightarrow$ Velocidade Angular [rad/s]

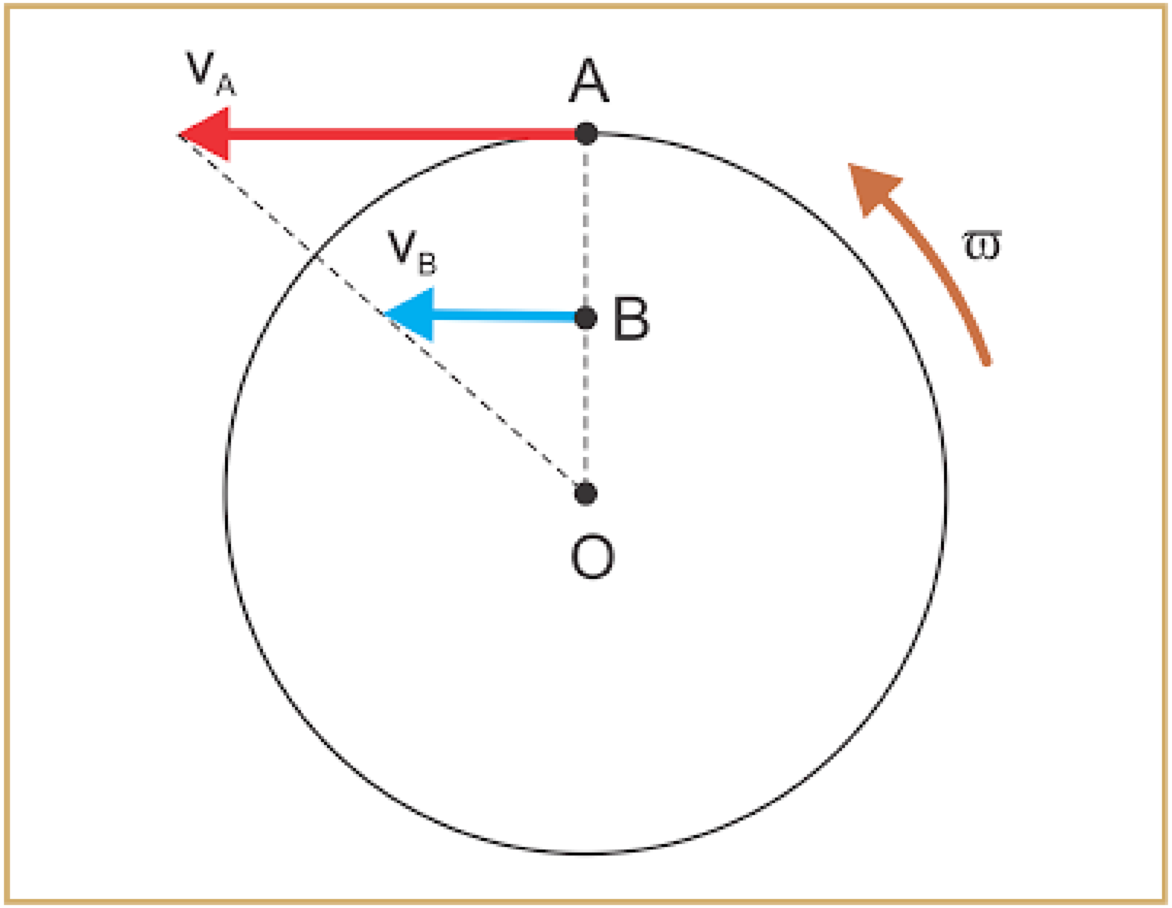
ou

$$\omega = 2 \times \pi \times f$$



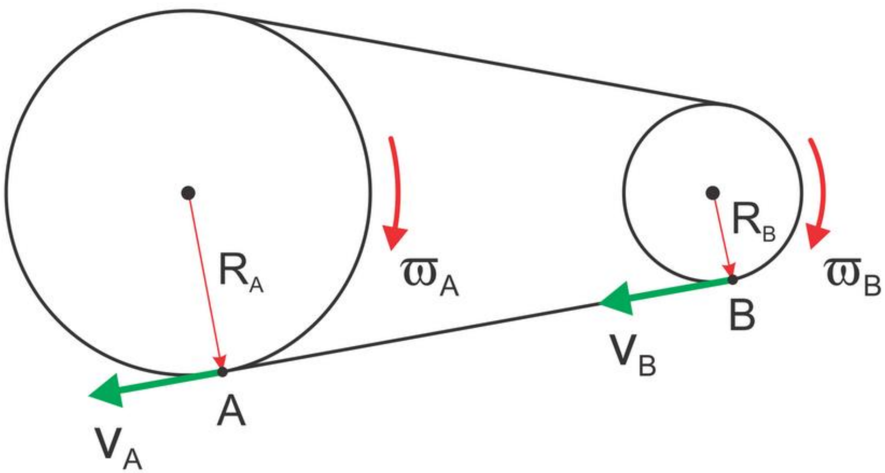
Dependência da velocidade tangencial com a distância ao centro:

$$\boxed{v = \omega \times r}$$



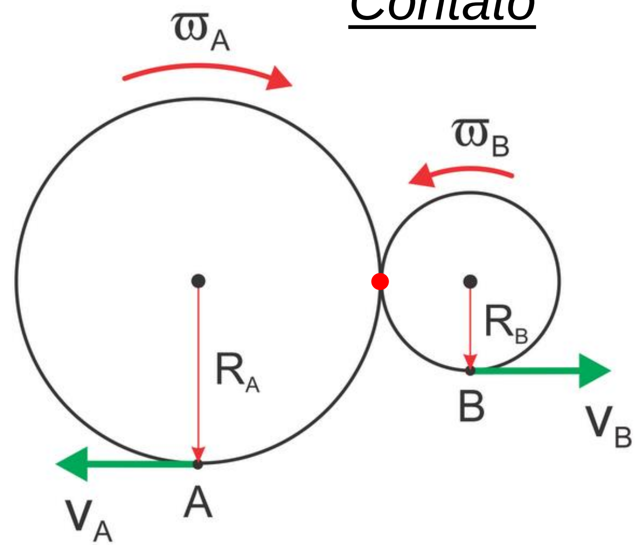
Estudo de caso: __Acoplamentos Mecânicos entre Rodas__

__Elemento de ligação__

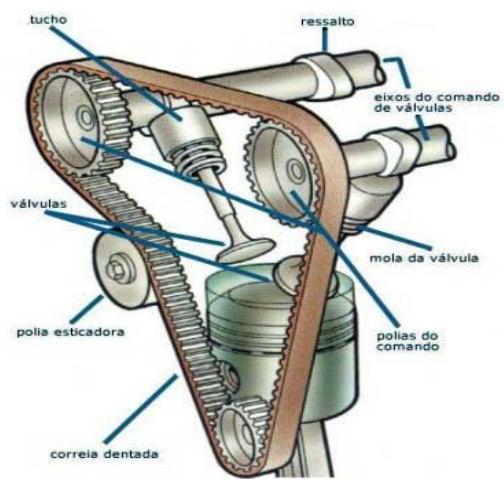


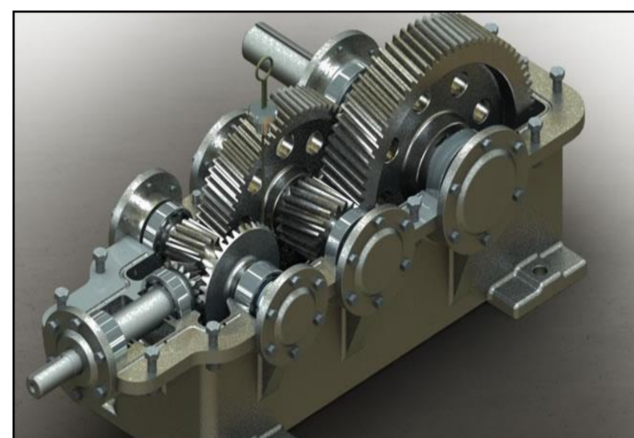
Cintas, correias, fios etc

__Contato__



Atrito, engrenagens etc

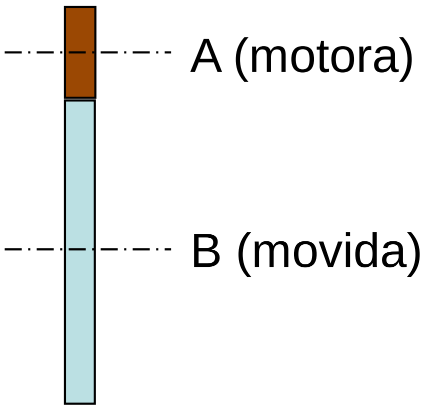




Condição de acoplamento: ***<u>não</u>*** existe escorregamento entre rodas e cinta, ou entre as rodas.

Grandeza cinemática comum aos dois modelos:

$$\boxed{v_A = v_B}$$



$$\omega_A \times r_A = \omega_B \times r_B$$

$$\boxed{\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A}}$$

$$\boxed{\frac{f_A}{f_B} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{r_B}{r_A}}$$

$$\boxed{\frac{T_B}{T_A} = \frac{r_B}{r_A}}$$

Relação de Transmissão $\underline{i}$

$$\boxed{i = \frac{r_{movida}}{r_{motora}}}$$

<u>Velocidade</u>

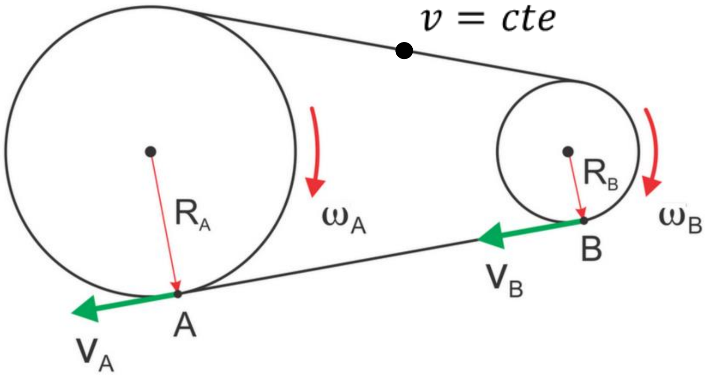
i > 1 → redução

i < 1 → ampliação

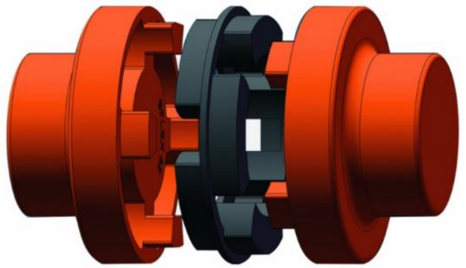
Exemplos de Acoplamentos

- ***Correia Dentada* e *Corrente*:**

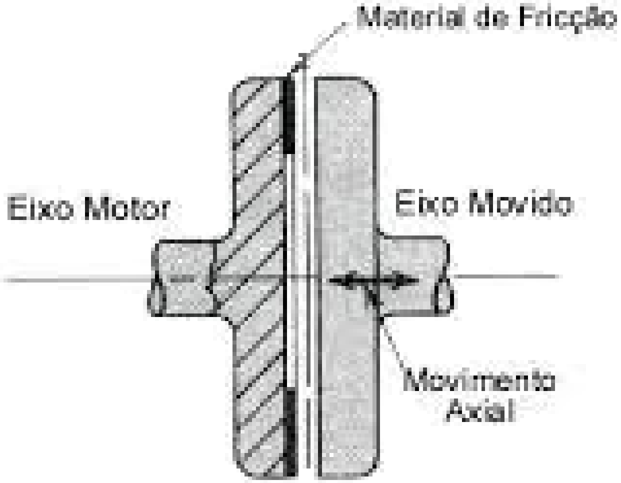




- ***Contato***

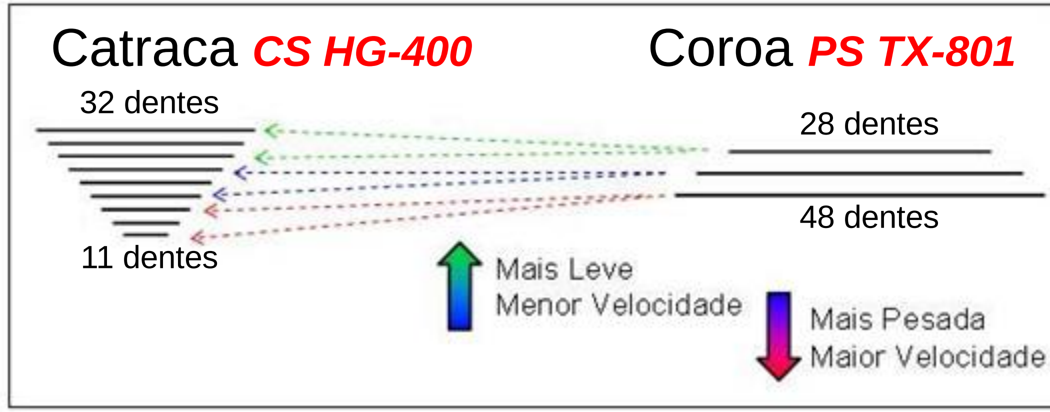



Permanente



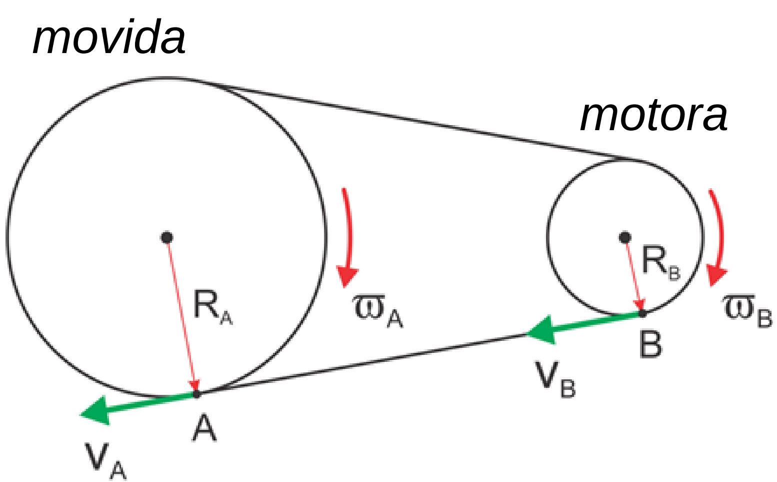
Progressivo

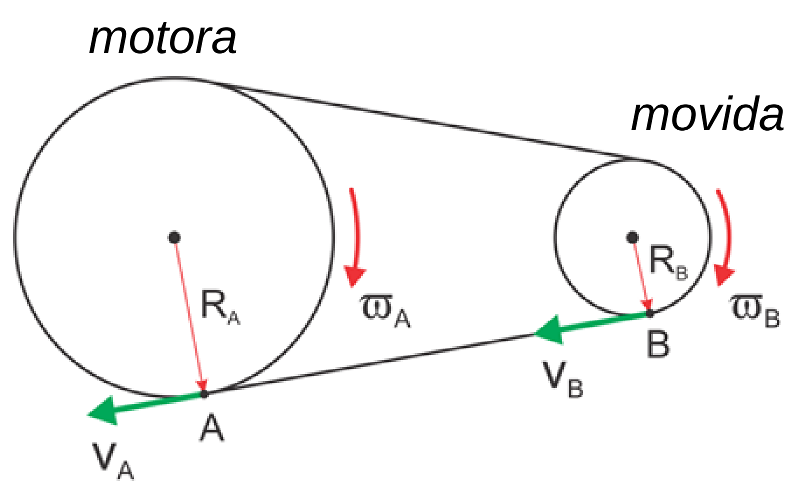
Exemplos



11, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28 e 32 dentes

28, 38 e 48 dentes



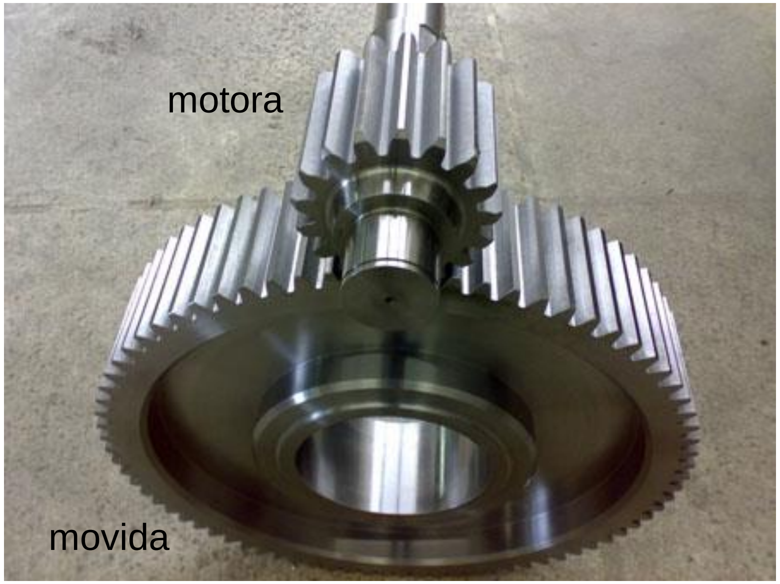


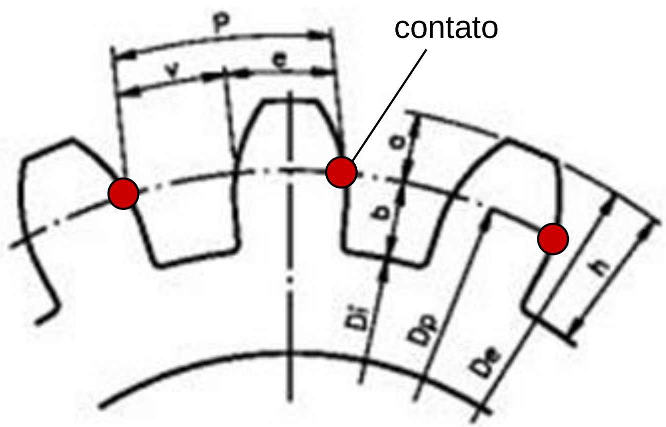
i > 1 → redução

Rotação

i < 1 → ampliação

Engrenagem Cilíndrica de Dente Reto

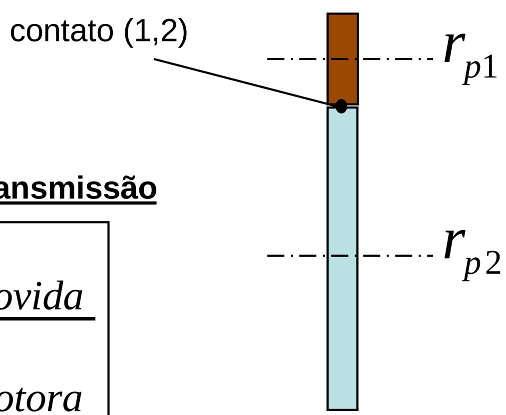




Legenda:

- $D_i \rightarrow$ diâmetro interno
- $D_p \rightarrow$ **diâmetro primitivo**
- $D_e \rightarrow$ diâmetro externo

$$\boxed{d_p = m.Z \rightarrow} \quad r_p = \frac{m.Z}{2}$$



$$v_1 = v_2 \rightarrow \omega_1.r_{p1} = \omega_2.r_{p2} \rightarrow$$

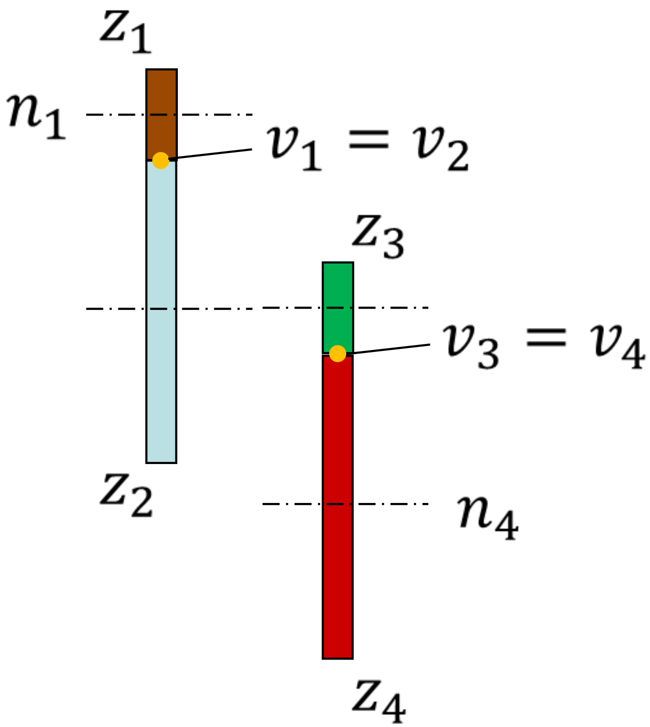
$$\rightarrow \cancel{2}.\cancel{\pi}.f_1.\frac{\cancel{m}.Z_1}{\cancel{2}} = \cancel{2}.\cancel{\pi}.f_2.\frac{\cancel{m}.Z_2}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{n_1}{n_2} = i}$$

Relação de Transmissão

$$\boxed{i = \frac{r_{movida}}{r_{motora}}}$$

Para o sistema de engrenagens abaixo, determine a rotação de entrada (***n_1***) para que a engrenagem ***<u>4</u>*** dê uma volta (***n_4*** = 1 volta).



$$v_1 = v_2$$

$$\omega_1 . R_1 = \omega_2 . R_2$$

$$\cancel{2.\pi}. n_1 . R_1 = \cancel{2.\pi}. n_2 . R_2$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

$$v_3 = v_4$$

$$\omega_3 . R_3 = \omega_4 . R_4$$

$$\cancel{2.\pi}. n_3 . R_3 = \cancel{2.\pi}. n_4 . R_4$$

$$\boxed{\frac{n_3}{n_4} = \frac{R_4}{R_3}}$$

Como as engrenagens 2 e 3 estão ligadas solidariamente ao mesmo eixo, suas rotações são iguais:

$$\boxed{n_2 = n_3}$$

$$n_2 = n_3$$

$$n_2 = n_1 . \frac{R_1}{R_2} \qquad n_3 = n_4 . \frac{R_4}{R_3}$$

$$n_1 . \frac{R_1}{R_2} = n_4 . \frac{R_4}{R_3}$$

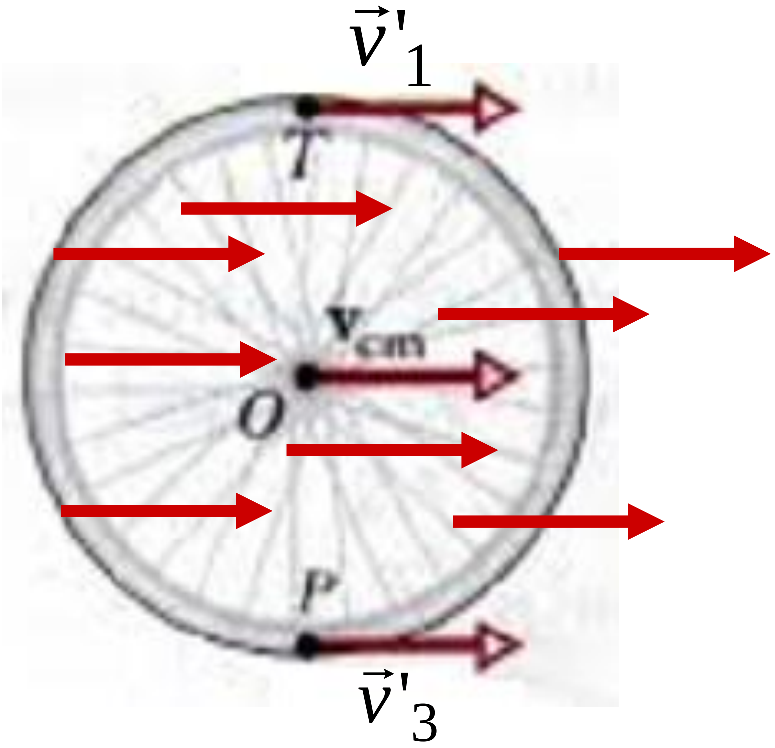
$$n_1 = n_4 . \frac{R_2}{R_1} . \frac{R_4}{R_3}$$ Como $$\frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = i_1$$ e $$\frac{R_4}{R_3} = \frac{z_4}{z_3} = i_2$$

$$\boxed{n_1 = n_4 . i_1 . i_2}$$

Exemplo: z_1 = 10 dentes; z_2 = 20 dentes; z_3 = 10 dentes; z_4 = 20 dentes.

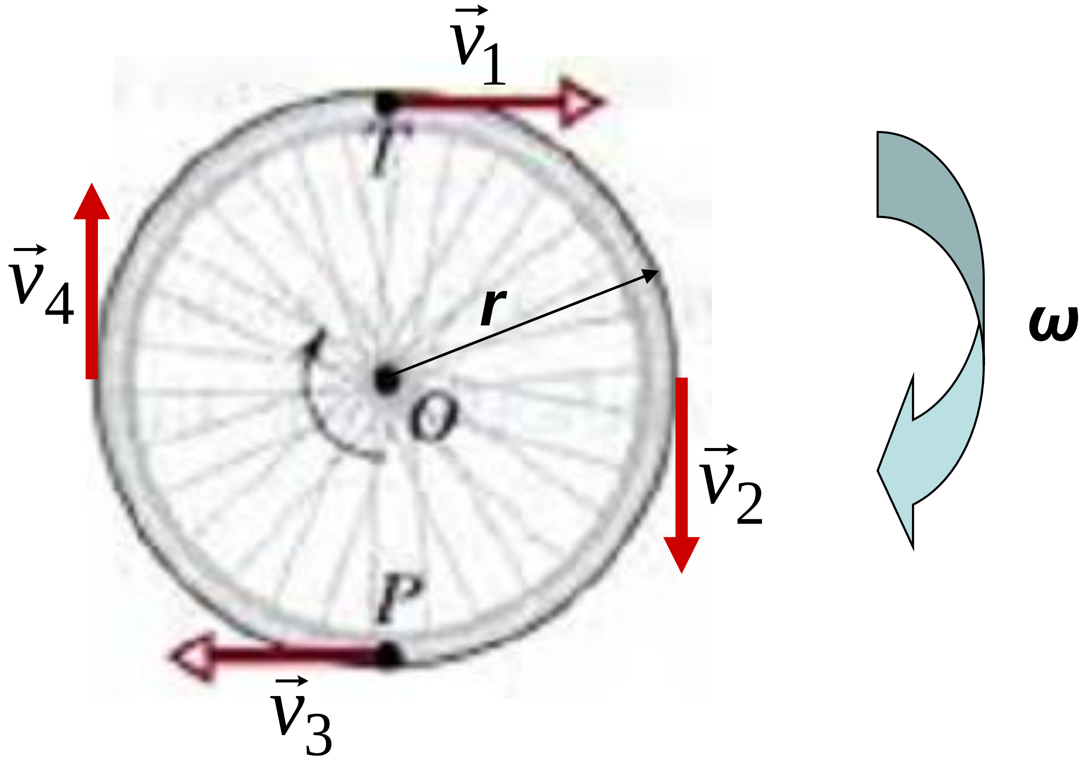
$$n_1 = 1 . \frac{20}{10} . \frac{20}{10} \rightarrow \boxed{n_1 = 4\ voltas}$$

Translação



$$v'_1 = v'_3 = v_{CM}$$

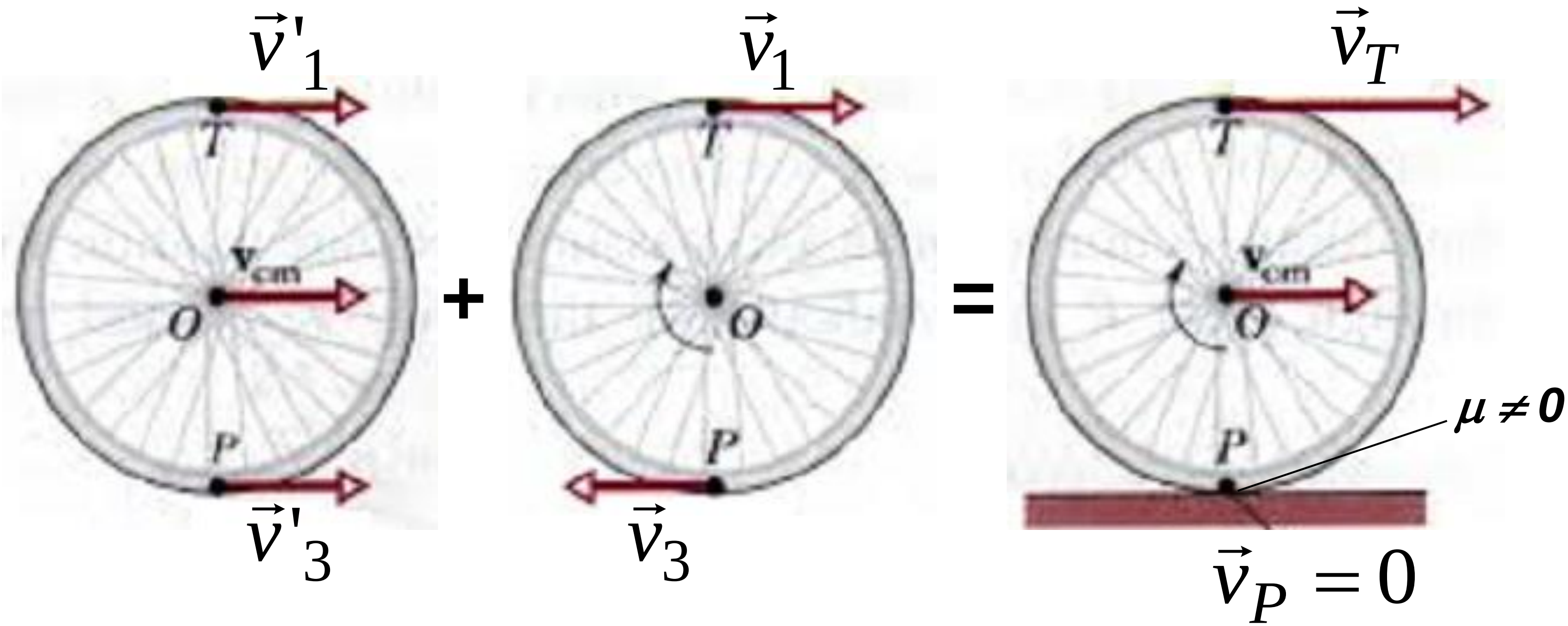
<u>Rotação</u>



$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v = \omega . r$$

<u>Rolamento</u> = <u>Translação</u> + <u>Rotação</u>

O ***<u>rolamento</u>*** ocorre quando $\boldsymbol{v_P}$ (a velocidade no ponto de contato entre o pneu e o piso) é igual a ***<u>zero</u>***, ou seja, não existe escorregamento.

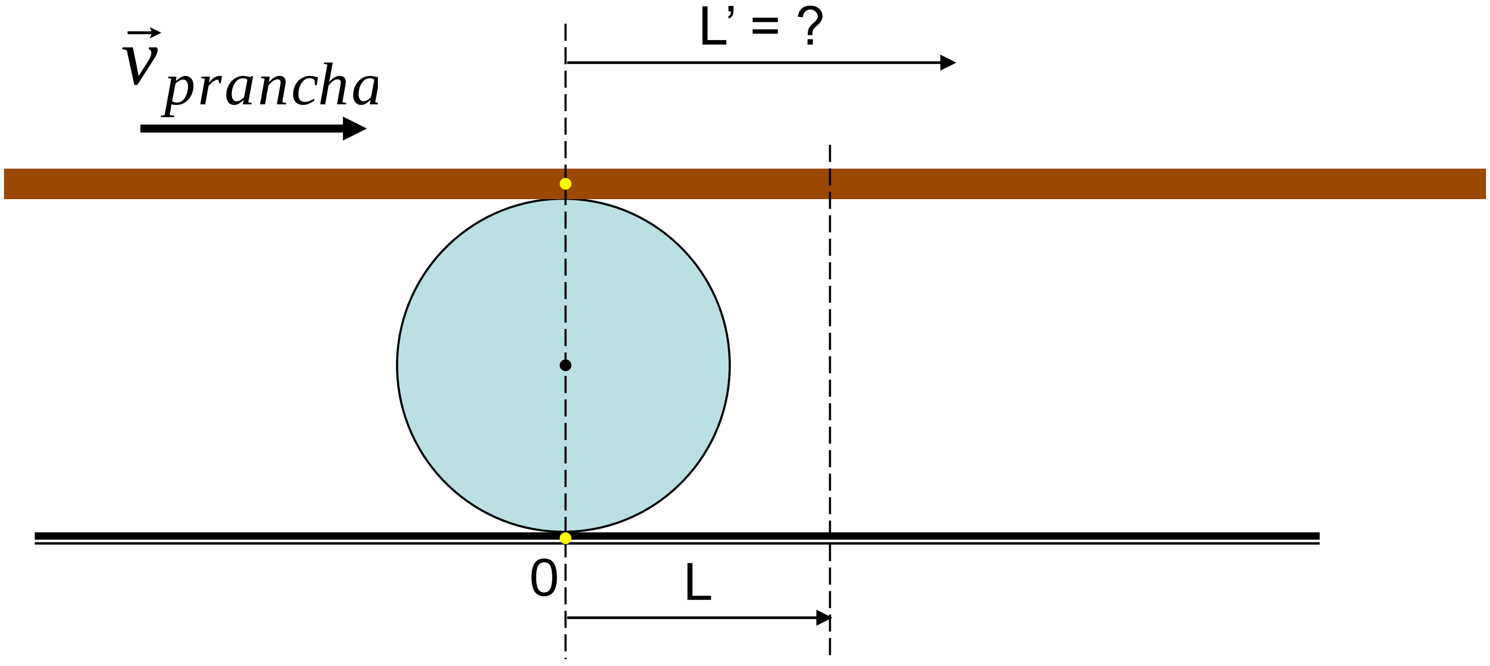


$$\boxed{\vec{v}_3 + \vec{v}'_3 = 0} \qquad \boxed{v_3 = v'_3} \qquad v_3 = \omega.r \quad ,\therefore v'_3 = \omega.r$$

$$v_{CM} = \omega.r \quad \text{e} \quad v_T = 2.\omega.r \quad \text{ou} \quad v_T = 2.v_{CM}$$

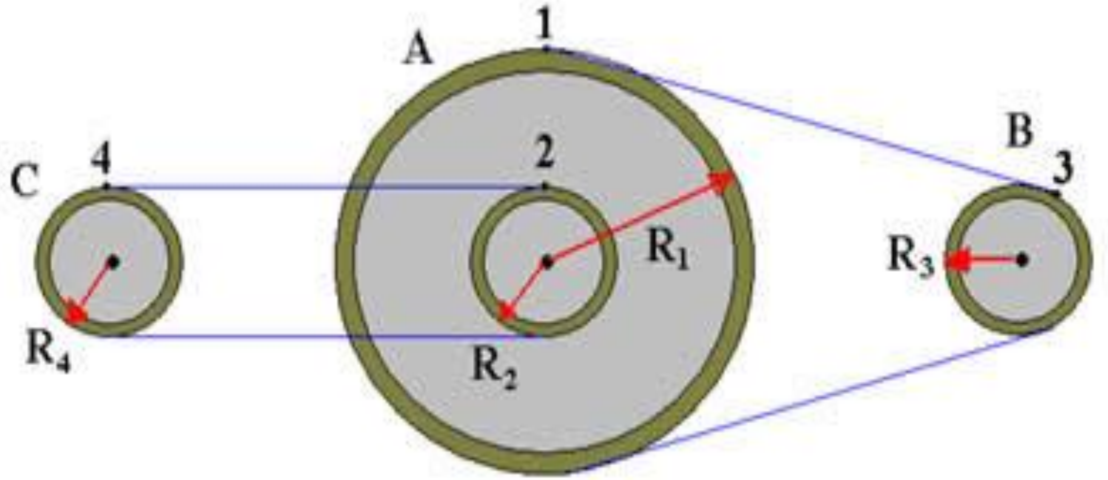
Desafio

Determine a velocidade da prancha de madeira quando ela é empurrada sobre um cilindro maciço com diâmetro D. Admita as superfícies com atrito, portanto, o movimento do cilindro respeita as condições de ***rolamento***.



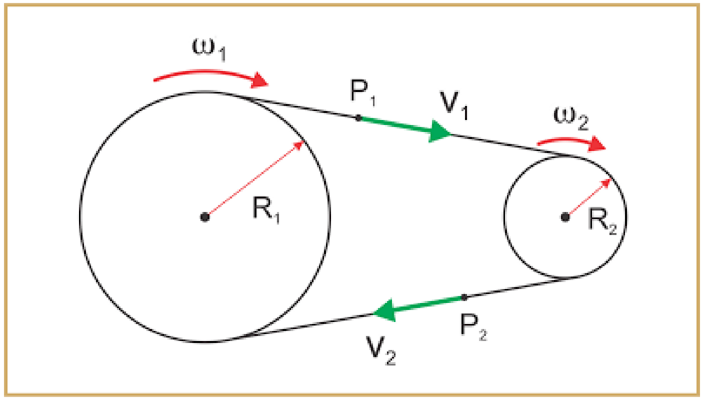
Exercícios

1. Determine a rotação de saída nas rodas ***B*** e ***C***, sabendo que ***R_1 = 2.R_2 , R_2 = R_3 = R_4***.



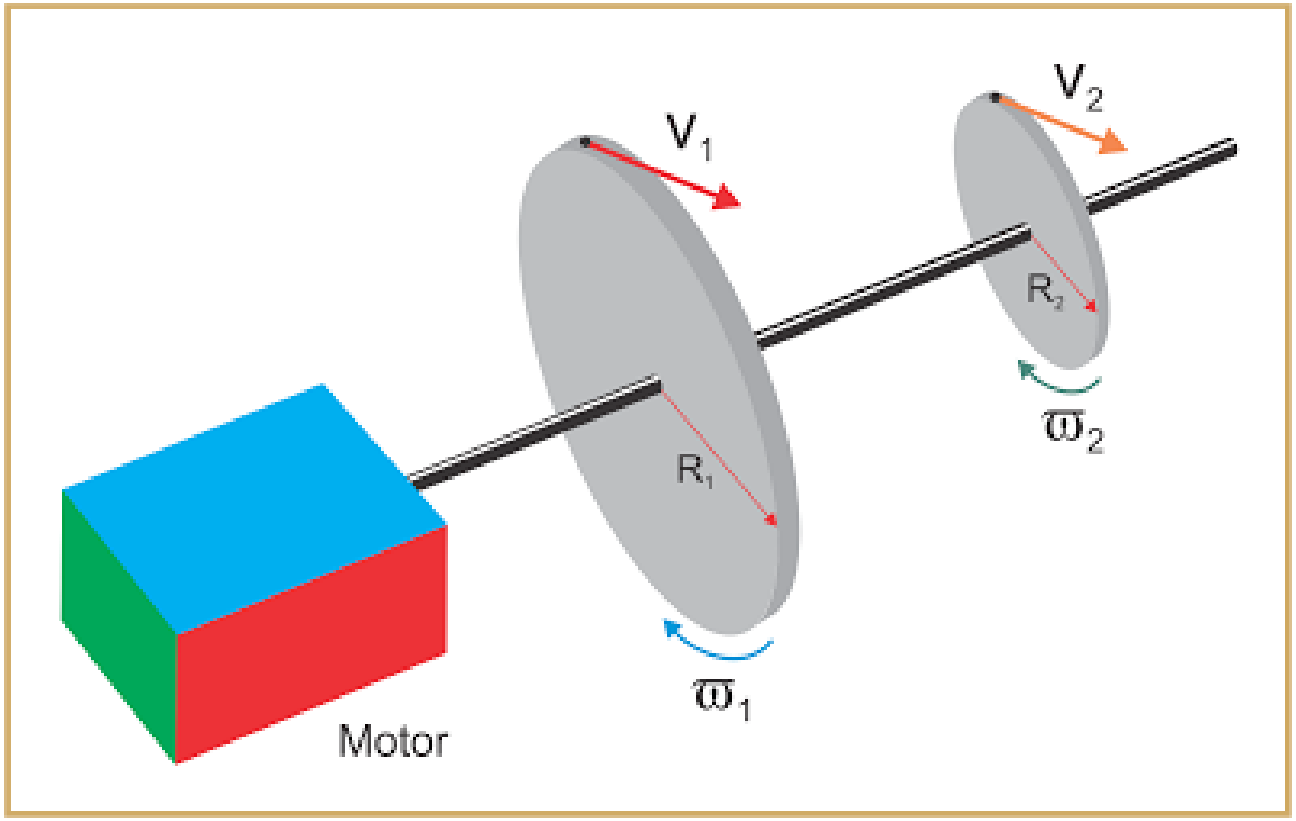
2. Duas polias, 1 e 2, são ligadas por uma correia. A polia 1 possui raio R_1 = 20 cm, gira com frequência f_1 = 30 rpm. A polia 2 possui raio R_2 = 15 cm, gira com frequência f_2. Não há escorregamento da correia sobre as polias. Determine:

   a) a frequência f_2;
   b) as velocidades lineares v_1 e v_2 dos pontos P_1 e P_2.

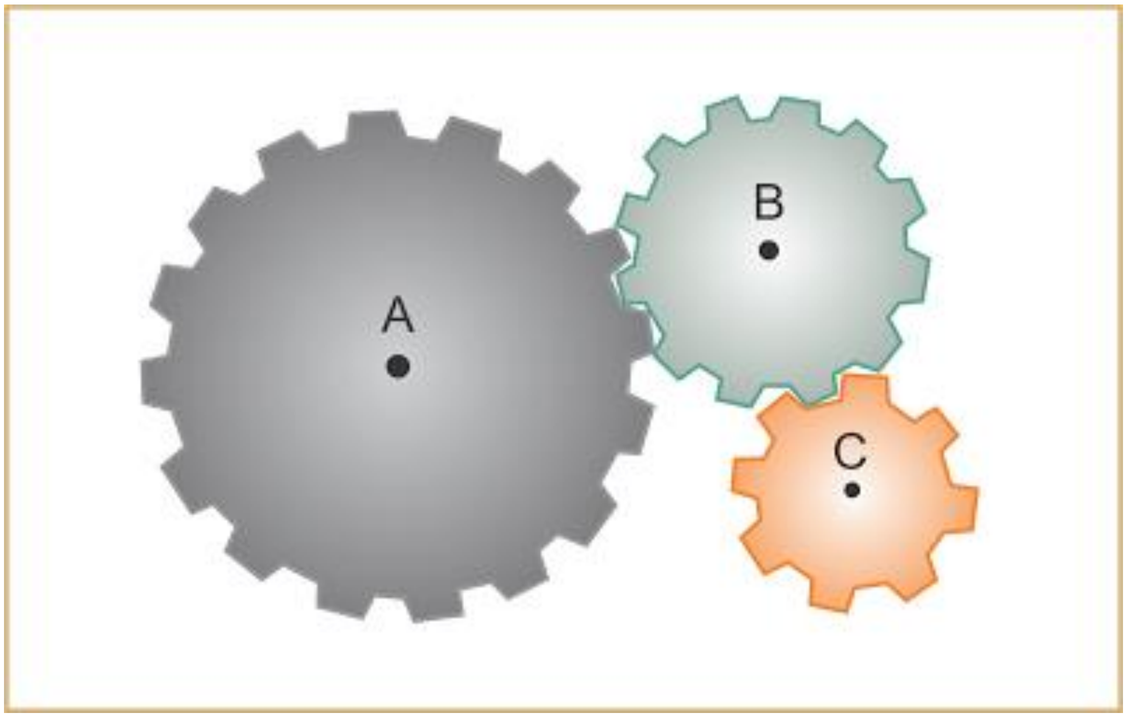


3. Duas polias, 1 e 2, giram ligadas ao eixo de um motor. A polia 1 possui raio R_1 = 20 cm, gira com velocidade angular ω_1 = 12 rad/s. A polia 2 possui raio R_2 = 15 cm. Determine:

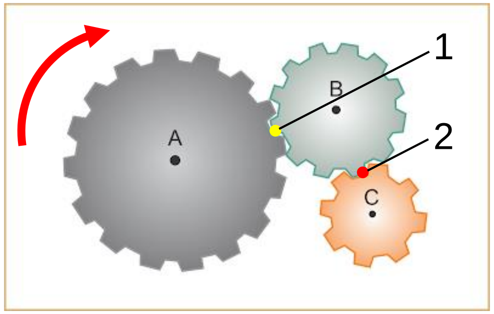
a) a frequência f_1 da polia 1;
b) a velocidade angular ω_2 e a frequência f_2 da polia 2;
c) as velocidade lineares v_1 e v_2 dos pontos P_1 e P_2.



4. Três engrenagens giram vinculadas conforme a figura. A engrenagem A gira no sentido horário com velocidade angular 30 rad/s. As engrenagens C, B e A possuem raios ***R***, ***2.R e 3.R***, respectivamente. Determine as velocidades angulares de B e C e seus sentidos de rotação.



- Resolução do exercício 4:



$$Ponto\ 1 \rightarrow V_A = V_B \qquad Ponto\ 2 \rightarrow V_B = V_C$$

$$\boxed{V_1 = V_2}$$

$$\omega_A = 30\frac{rad}{s}$$

$$R_A = 3.R$$

$$R_B = 2.R$$

$$R_C = R$$

$$\boxed{V_A = V_B = V_C}$$

$$\omega_A.R_A = \omega_B.R_B = \omega_C.R_C$$

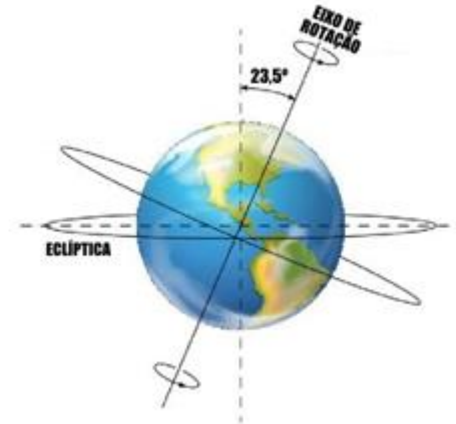
$$30.3.\cancel{R} = \omega_B.2.\cancel{R} \qquad 30.3.\cancel{R} = \omega_C.\cancel{R}$$

$$\boxed{\omega_B = 45\frac{rad}{s}} \qquad \boxed{\omega_C = 90\frac{rad}{s}}$$

Sentido anti-horário

Sentido horário

Outro exemplo: Determine as seguintes grandezas físicas para a rotação do planeta Terra:



a) Período (T) → 1 dia/rotação → 24 h/rotação → 1440 min/rotação → 86400 s/rotação

b) Frequência (f) → 1 rotação/dia → 1 rotação/24 h → 1 rotação/1440 min → 1 rotação/86400 s

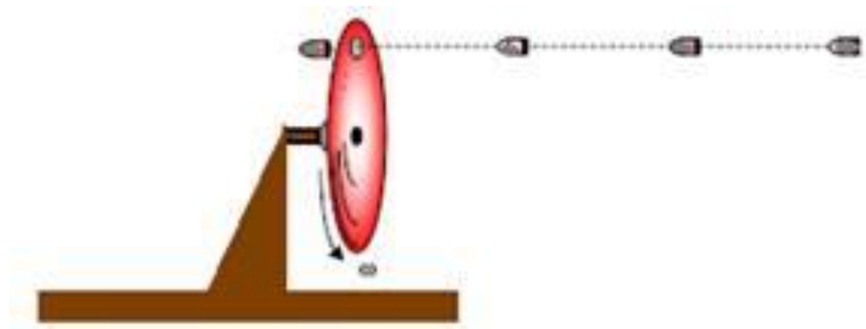
c) Velocidade angular (ω) → $\omega = \frac{2.\pi}{T} \rightarrow \quad \omega = \frac{2.\pi}{1} \rightarrow \omega = 2.\pi \frac{rad}{dia}$

d) Velocidade tangencial na linha do Equador (use o raio da Terra = 6.400 km)

$$v_{tg} = \omega.r \rightarrow \quad v_{tg} = \frac{2.\pi}{86400}.6400 \rightarrow \quad v_{tg} = \frac{2.\pi}{86400}.6400\,\frac{km}{s}$$

$$v_{tg} = 0{,}465\,\frac{km}{s}$$

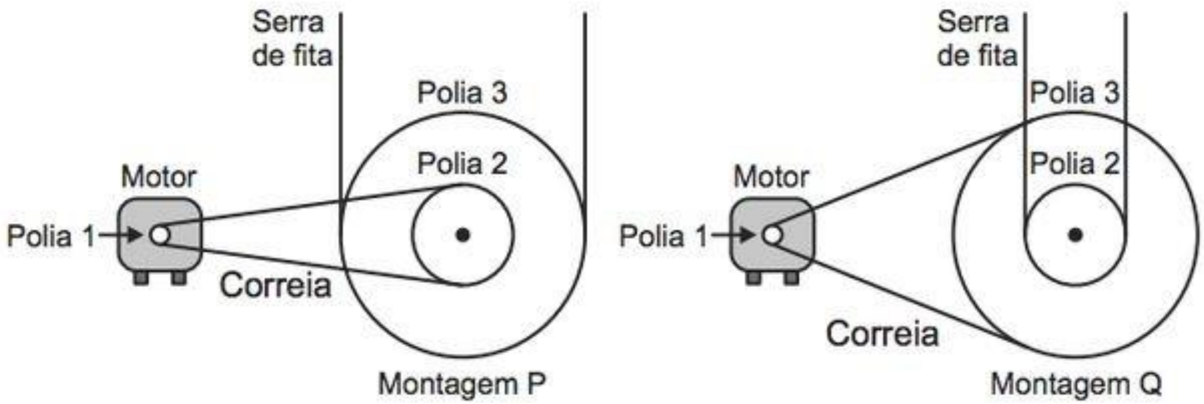
5. (UFPE) Uma arma dispara 30 balas por minuto. Essas balas atingem um disco girante sempre num mesmo ponto atravessando um orifício. Qual é a frequência do disco, em rotações por minuto?



6. (PUC-RJ-09) O ponteiro dos minutos de um relógio tem 1 cm. Supondo que o movimento deste ponteiro é contínuo e que ¶ = 3, a velocidade de translação na extremidade deste ponteiro é:

a) 0,1 cm/min. b) 0,2 cm/min. c) 0,3 cm/min. d) 0,4 cm/min. e) 0,5 cm/min.

7. D***ESAFIO*** (ENEM 2013) Para serrar os ossos e carnes congeladas, um açougueiro utiliza uma serra de fita que possui três polias e um motor. O equipamento pode ser montado de duas formas diferentes, P e Q. Por questão de segurança, é necessário que a serra possua menor velocidade linear.



Por qual montagem o açougueiro deve optar e qual a justificativa desta opção?

A) Q, pois as polias 1 e 3 giram com velocidades lineares iguais em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.
B) Q, pois as polias 1 e 3 giram com frequências iguais e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
C) P, pois as polias 2 e 3 giram com frequências diferentes e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
D) P, pois as polias 1 e 2 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver menor raio terá maior frequência.
E) Q, pois as polias 2 e 3 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.

8. (FGV-SP) Toda caneta esferográfica possui em sua ponta uma pequena esfera feita de liga de tungstênio, cuja finalidade é transferir a tinta do reservatório para o papel. Quando um desenhista traça uma linha reta, transladando sua caneta com velocidade constante v = 0,2 m/s, a pequena esfera de 0,8 mm de diâmetro gira sobre seu centro com velocidade angular ω, em rad/s, de valor:

a) 160 b) 200 c) 250 d) 400 e) 500

9. (UEJF-MG) Um velocímetro comum de carro mede, na realidade, a velocidade angular do eixo da roda, e indica um valor que corresponde à velocidade do carro. O velocímetro para um determinado carro sai da fábrica calibrado para uma roda de 20 polegadas de diâmetro (isso inclui o pneu). Um motorista resolve trocar as rodas do carro para 22 polegadas de diâmetro. Assim, quando o velocímetro indica 100km/h, a velocidade real do carro é:

a) 100km/h b) 200km/h c) 110km/h d) 90km/h e) 160km/h

10. (FUVEST-SP) A figura ilustra uma roda d’água constituída de 16 cubas. Cada cuba recebe 5L de água de uma bica cuja vazão é 160L/min. A roda gira em movimento uniforme.

a) Qual é o período de rotação da roda?
b) Qual é a quantidade de água utilizada em 1 hora de funcionamento do sistema?

11. (PUC-RJ) Um ciclista pedala em uma trajetória circular de raio R = 5 m, com a velocidade de translação v = 150 m/min. A velocidade angular do ciclista em rad/min é:

a) 60 b) 50 c) 40 d) 30 e) 20

12. (UNESP-SP) Satélites de órbita polar giram numa órbita que passa sobre os pólos terrestres e que permanece sempre em um plano fixo em relação às estrelas. Pesquisadores de estações oceanográficas, preocupados com os efeitos do aquecimento global, utilizam satélites desse tipo para detectar regularmente pequenas variações de temperatura e medir o espectro da radiação térmica de diferentes regiões do planeta. Considere o satélite a 5.298 km acima da superfície da Terra, deslocando-se com velocidade de 5.849 m/s em uma órbita circular. Estime quantas passagens o satélite fará pela linha do equador em cada período de 24 horas. Utilize a aproximação $\pi = 3{,}0$ e suponha a Terra esférica, com raio de 6400 km.

13. (UNESP-SP) Um cilindro oco de 3,0m de comprimento, cujas bases são tampadas com papel fino, gira rapidamente em torno de seu eixo com velocidade angular constante. Uma bala disparada com velocidade de 600m/s, paralelamente ao eixo do cilindro, perfura suas bases em dois pontos, P na primeira base e Q na segunda. Os efeitos da gravidade e da resistência do ar podem ser desprezados.

a) Quanto tempo a bala levou para atravessar o cilindro?
b) b) Examinando as duas bases de papel, verifica-se que entre P e Q há um deslocamento angular de 9°. Qual é a frequência de rotação do cilindro, em *hertz*, sabendo que não houve mais do que uma rotação do cilindro durante o tempo que a bala levou para atravessá-lo?

14. (UFSCAR-SP) Para possibilitar o translado da fábrica até a construção, o concreto precisa ser mantido em constante agitação. É por esse motivo que as betoneiras, quando carregadas, mantêm seu tambor misturador sob rotação constante de 4 r.p.m. Esse movimento só é possível devido ao engate por correntes de duas engrenagens, uma grande, presa ao tambor e de diâmetro 1,2m, e outra pequena, de diâmetro 0,4 m, conectada solidariamente a um motor. Na obra, para que a betoneira descarregue seu conteúdo, o tambor é posto em rotação inversa, com velocidade angular 5 vezes maior que a aplicada durante o transporte. Nesse momento, a frequência de rotação do eixo da engrenagem menor, em r.p.m., é

a) 40 b) 45 c) 50 d) 55 e) 60

15. (UFPR) Um ciclista movimenta-se com sua bicicleta em linha reta a uma velocidade constante de 18 km/h. O pneu, devidamente montado na roda, possui diâmetro igual a 70 cm. No centro da roda traseira, presa ao eixo, há uma roda dentada de diâmetro 7,0 cm. Junto ao pedal e preso ao seu eixo há outra roda dentada de diâmetro 20 cm. As duas rodas dentadas estão unidas por uma corrente. Não há deslizamento entre a corrente e as rodas dentadas. Supondo que o ciclista imprima aos pedais um movimento circular uniforme, assinale a alternativa correta para o número de voltas por minuto que ele impõe aos pedais durante esse movimento. Nesta questão, considere $\pi = 3$.

a) 0,25 rpm b) 2,50 rpm c) 5,00 rpm d) 25,0 rpm e) 50,0 rpm.

16) Em 1885, Michaux lançou o biciclo com uma roda dianteira diretamente acionada por pedais (Fig. A). Através do emprego da roda dentada, que já tinha sido concebida por Leonardo da Vinci, obteve-se melhor aproveitamento da força nos pedais (Fig. B). Considere que um ciclista consiga pedalar 40 voltas por minuto em ambas as bicicletas.

Fig. A

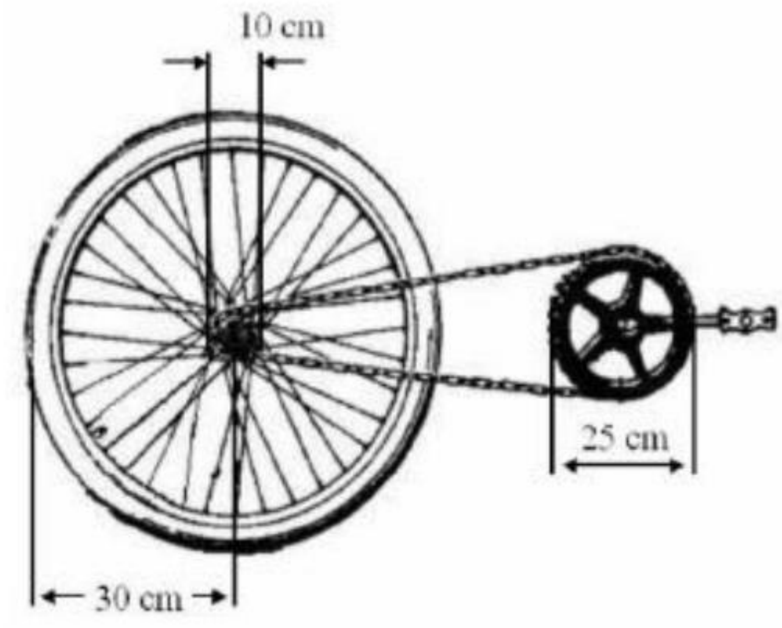


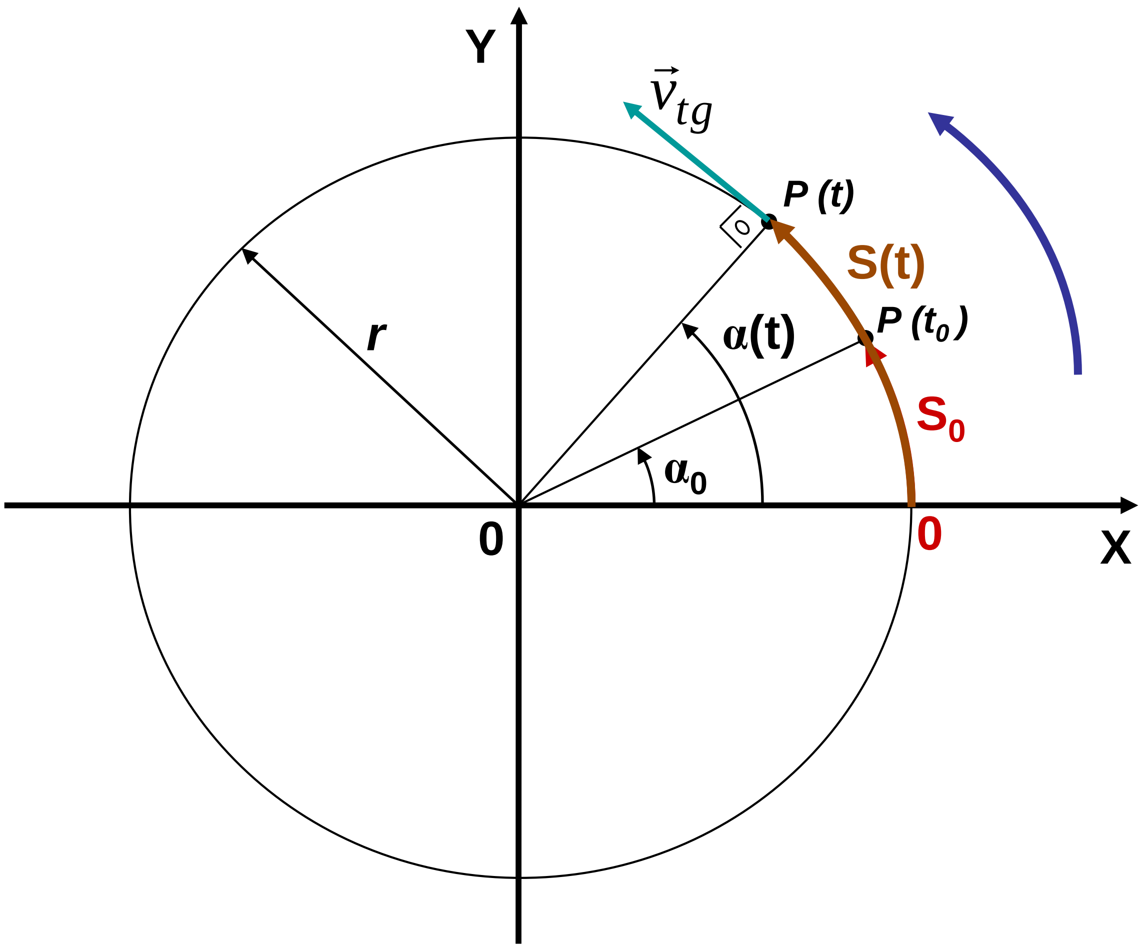
Fig. B

a) Qual a velocidade de translação do biciclo de Michaux para um diâmetro da roda de 1,20 m?

b) Qual a velocidade de translação para a bicicleta padrão aro 60 (Fig. B)?

https://www.comvest.unicamp.br/vest_anteriores/vest_ant.html

Cinemática Escalar do Movimento Circular



$t_0 \rightarrow$ Instante inicial (que pode ser 0)

$\alpha_0 \rightarrow$ Ângulo inicial (em t_0)

$S_0 \rightarrow$ Posição inicial (em t_0)

$t \rightarrow$ Instante final qualquer

$\alpha(t) \rightarrow$ Ângulo final (em t)

$S(t) \rightarrow$ Posição final (em t)

$v_{tg} \rightarrow$ velocidade tangencial

Para movimento circular uniforme (v_{tg} = cte):

$$a_{tg} = \frac{\Delta v_{tg}}{\Delta t} = 0$$

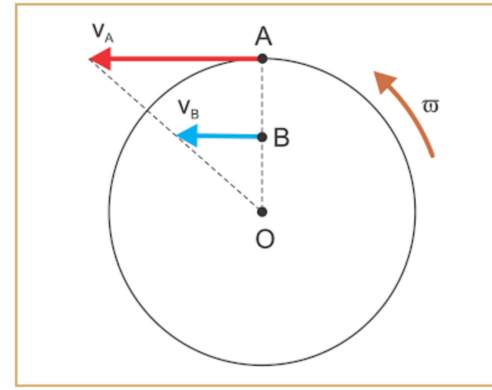
$$\boxed{S(t) = S_0 + v_{tg} \times (t - \cancelto{0}{t_0})} \quad \textbf{(1)}$$

$$S(t) = S_0 + v.t$$

Determinação do módulo da velocidade tangencial: $$v_{tg} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\times\pi\times r}{T}$$

T → Período (Para eventos **repetitivos**, representa o intervalo de tempo para **um** evento)

ω → Velocidade Angular [Relação entre uma volta completa (rad) e o Período (s)]



Assim, $\omega = \dfrac{2\times\pi}{T} \left[\dfrac{rad}{s}\right]$ e $\boxed{v_{tg} = \omega\times r}$ $\left[\dfrac{m}{s}\right]$

Multiplicando os dois lados da igualdade **(1)** por 1/r, tem-se que:

$$\underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{r}\right)\times S(t)}}_{\alpha(t)} = \left[\underbrace{\cancel{S_0}}_{\alpha_0} + \underbrace{\cancel{v_{tg}}}_{\omega}\times(t-t_0)\right] \times\left(\frac{1}{r}\right)$$

<u>Posição angular no MCU</u>

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 + \omega\times\left(t - \overset{0}{\cancel{t_0}}\right)} \rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 + \omega.t$$

Relação entre Período (T) e Frequência (f)

T → Período (Intervalo de tempo para um evento acontecer) $\rightarrow [s]$

f → Frequência (Número de repetições de um evento na unidade de tempo) $\rightarrow \left[\frac{ev}{s}\right] \rightarrow [hertz] \rightarrow [Hz]$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{v_{tg} = 2.\pi.f.r}$$

Relação entre Velocidade Angular (ω) e Rotação (n)

Rotação (n) → ***rpm*** (rotações por minuto)

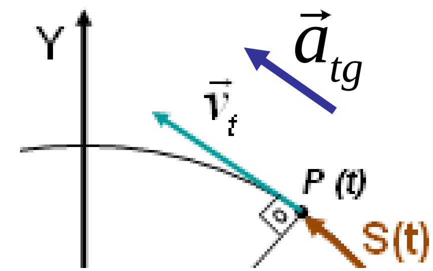
No caso do movimento circular, a frequência (f) corresponde à rotação (n):

$$\omega\left[\frac{rad}{s}\right] = 2.\pi.n$$

rps ou ***Hz***

Para movimento **circular** uniformemente variado (aceleração tangencial $\boldsymbol{a_{tg} = cte}$):

$$\boxed{S(t) = S_0 + v_{tg_0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{tg} \times (t - t_0)^2} \quad \textbf{(2)}$$



Multiplicando os dois lados da igualdade **(2)** por 1/r, tem-se que:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{r}\right) \times S(t)}_{\alpha(t)} = \left\{ \underbrace{S_0}_{\alpha_0} + \underbrace{v_{tg_0}}_{\omega_0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times \underbrace{a_{tg}}_{\gamma} \times (t - t_0)^2 \right\} \times \left(\frac{1}{r}\right)$$

γ → Aceleração angular

<u>Posição angular no MCUV</u>

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_o \times \left(t - \overset{0}{\cancel{t_0}}\right) + \frac{1}{2} \times \gamma \times \left(t - \overset{0}{\cancel{t_0}}\right)^2}$$

Descobrindo o que é a aceleração angular:

$$a_{tg} = \frac{\Delta v_{tg}}{\Delta t}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade acima por 1/r, tem-se que:

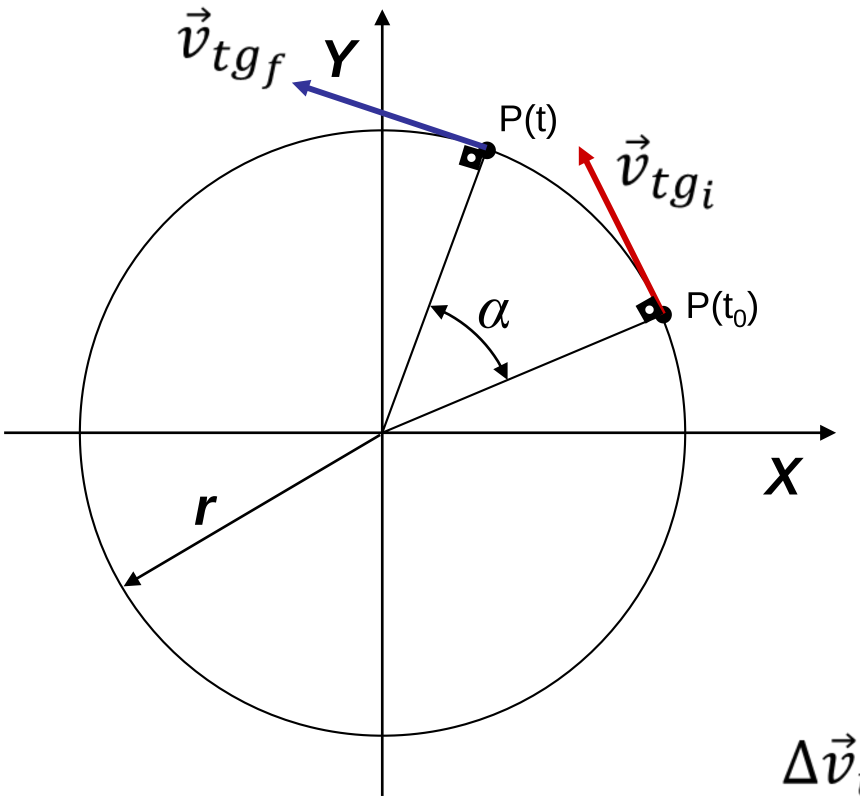
$$\left(\frac{1}{r}\right) \times a_{tg} = \frac{v_{tg_f} - v_{tg_i}}{\Delta t} \times \left(\frac{1}{r}\right) \longrightarrow \frac{a_{tg}}{r} = \frac{\frac{v_{tg_f}}{r} - \frac{v_{tg_i}}{r}}{\Delta t}$$

Lembrando que $\boxed{v_{tg} = \omega \times r}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{a_{tg}}{r} = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t}$

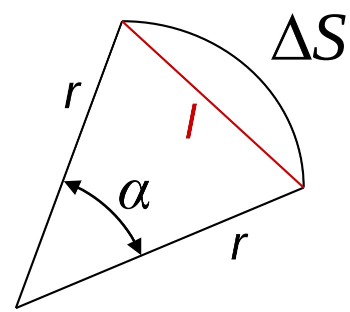
$$\boxed{\gamma = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}}$$ *Aceleração Angular Escalar*

Revisão sobre Dinâmica do Movimento Circular Uniforme

$$\boxed{v_{tg_i} = v_{tg_f}}$$



Análise geométrica no 1º Quadrante

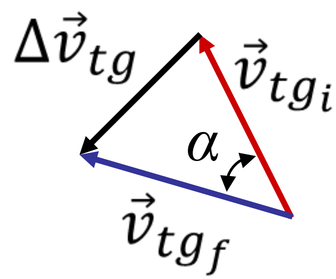


$$\Delta S \gg l$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta S \approx l}$$

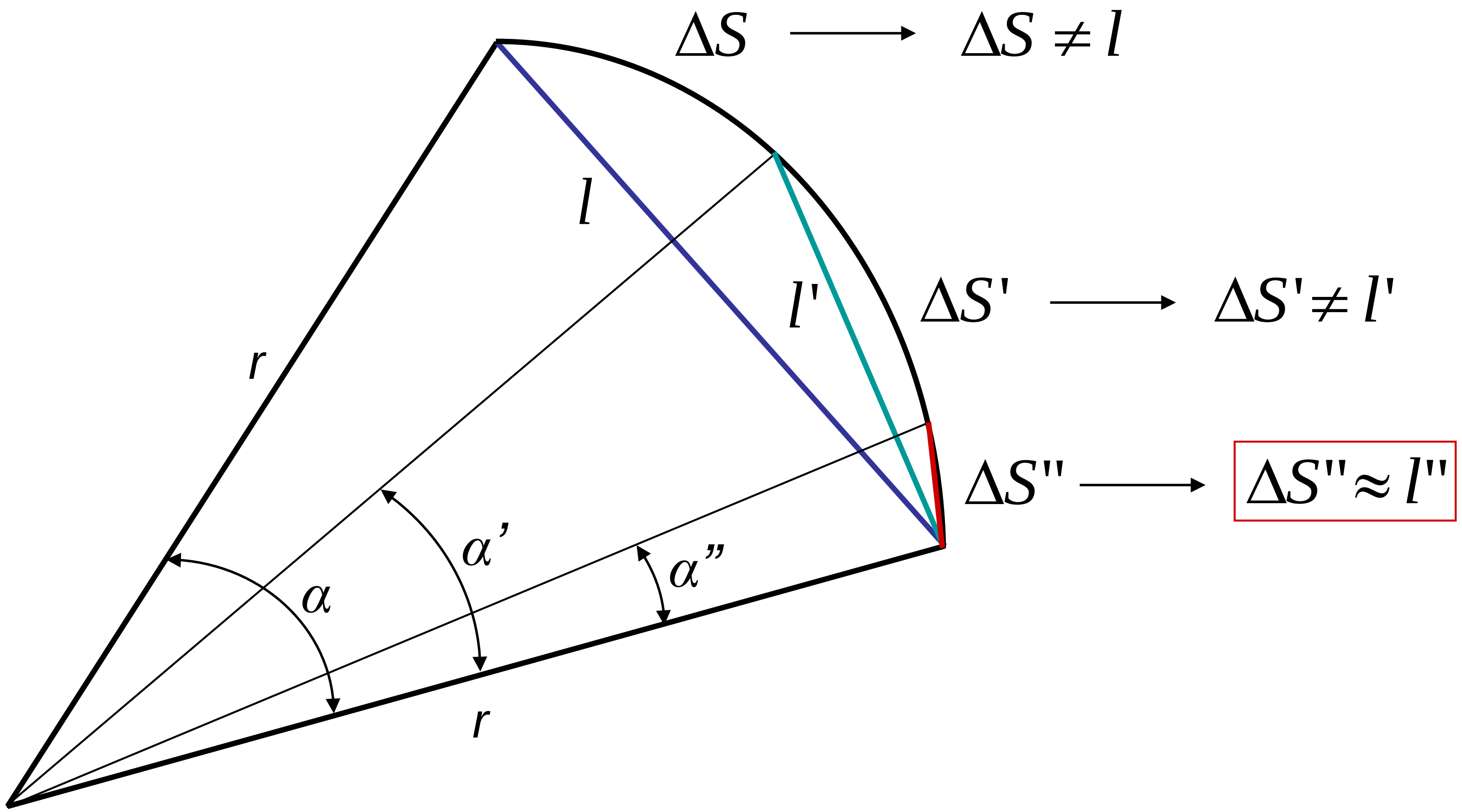
Análise cinemática vetorial



$$\vec{v}_{tg_f} = \vec{v}_{tg_i} + \Delta\vec{v}_{tg}$$

$$\Delta\vec{v}_{tg} = \vec{v}_{tg_f} - \vec{v}_{tg_i}$$

Uma aproximação possível, diminuindo o ângulo $\underline{\alpha}$:



Da semelhança de triângulos, para ***α*** *muito pequeno*

$$\alpha = \frac{\Delta S}{r} \quad e \quad \alpha = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v_{tg}}$$

Igualando as duas expressões e multiplicando os dois lados por 1/Δt

$$\frac{1}{\Delta t} \times \frac{\Delta S}{r} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v_{tg}} \times \frac{1}{\Delta t}$$

Lembrando que $v_{tg} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, $a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$ e $v_{tg} = \omega . r$

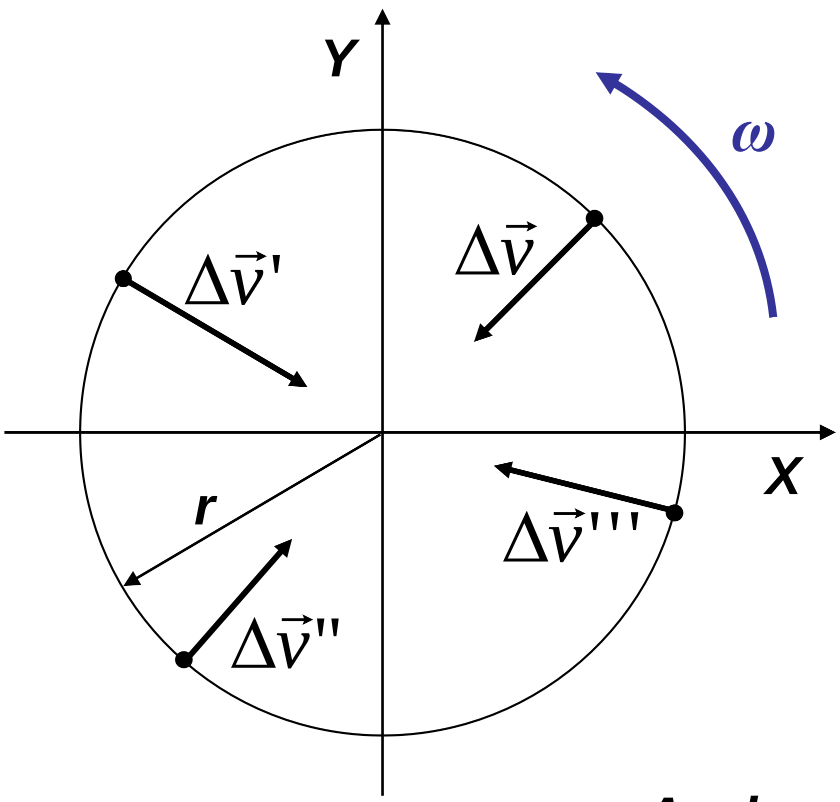
conclui-se que $\boxed{a = \frac{{v_{tg}}^2}{r}}$ ou $\boxed{a = \omega^2 . r}$

Sabe-se que a aceleração ***tangencial*** muda o ***módulo*** da velocidade tangencial.

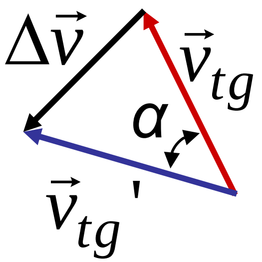
Então, qual é a interpretação física dessa nova aceleração?

Interpretação geométrica de a:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$



para **α** *muito pequeno*



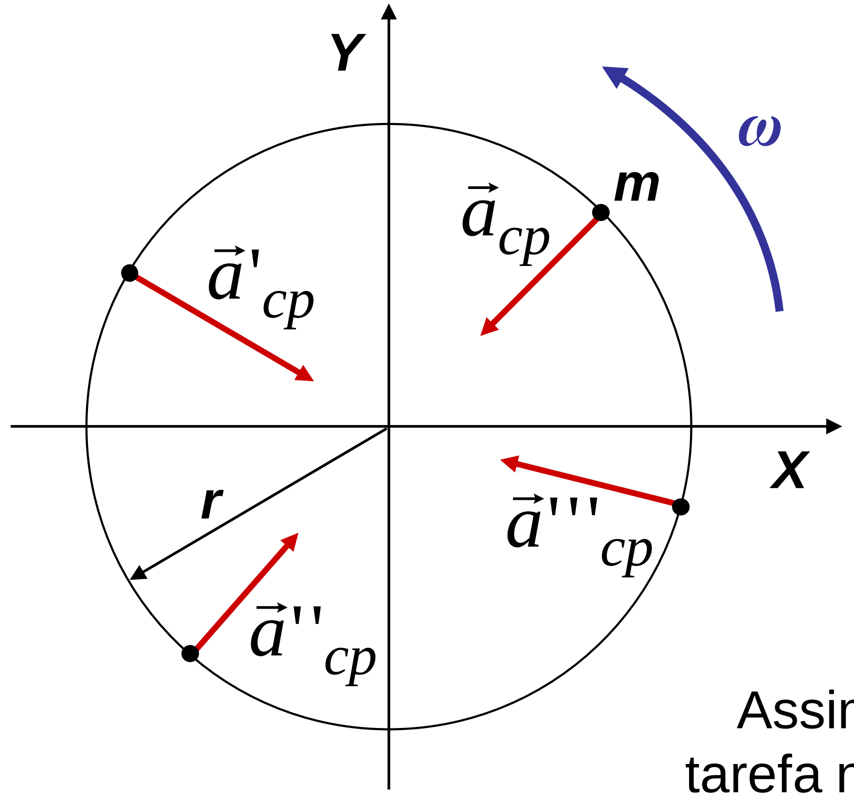
O vetor ***Δv*** determina a direção e o sentido do vetor ***a***, o qual ***sempre*** deve apontar para o centro de curvatura.

Aceleração Centrípeta

$$\boxed{a_{cp} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_{tg}^2}{r}}$$

Aceleração Centrípeta →

$$a_{cp} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_{tg}^2}{r}$$



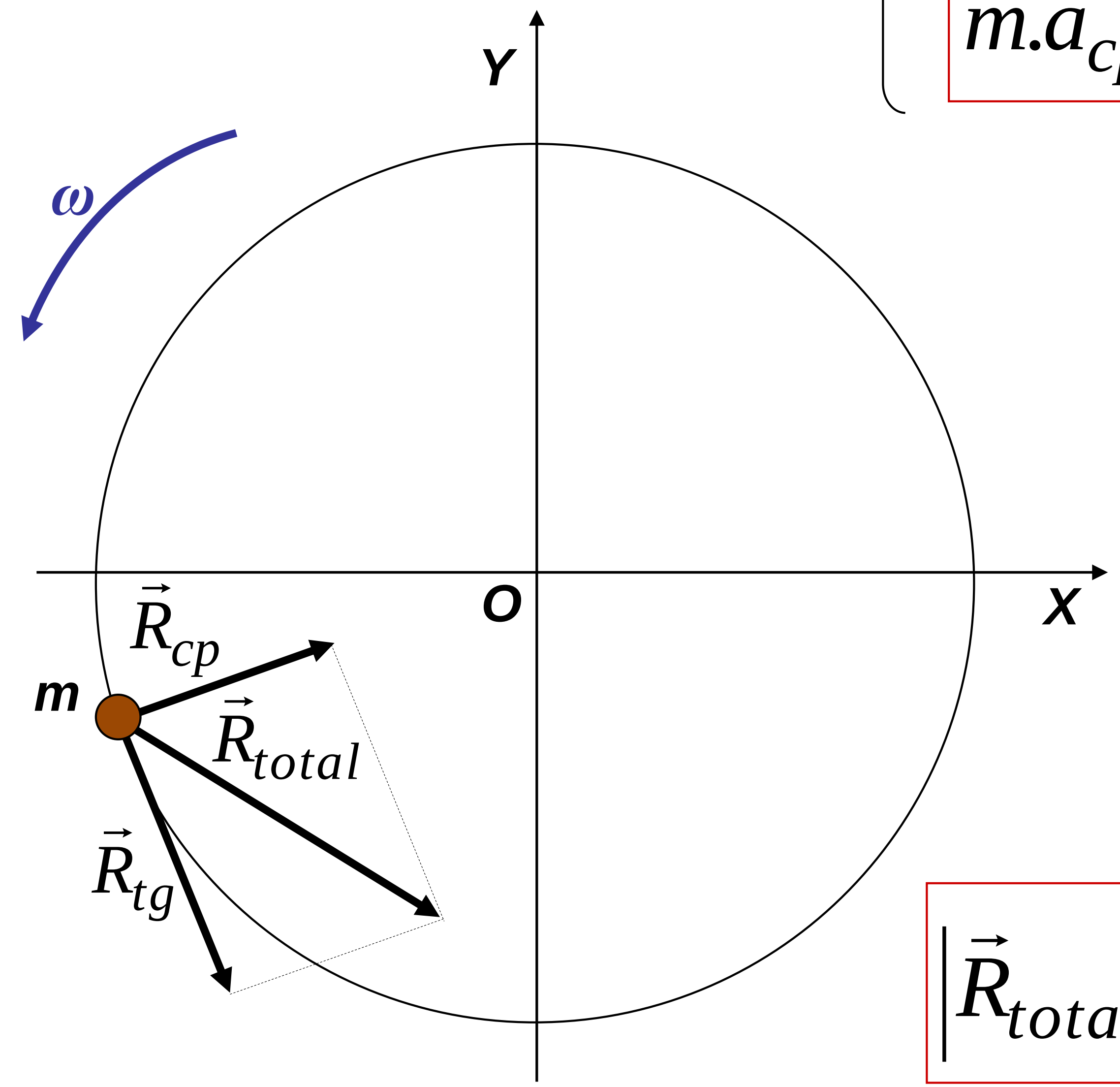
Para um corpo com massa ***m***:

$$m.\vec{a}_{cp} = \vec{R}_{cp}$$

Assim, a principal tarefa na *Dinâmica de Rotações* é descobrir *que forças representam* a ***Resultante Centrípeta***.

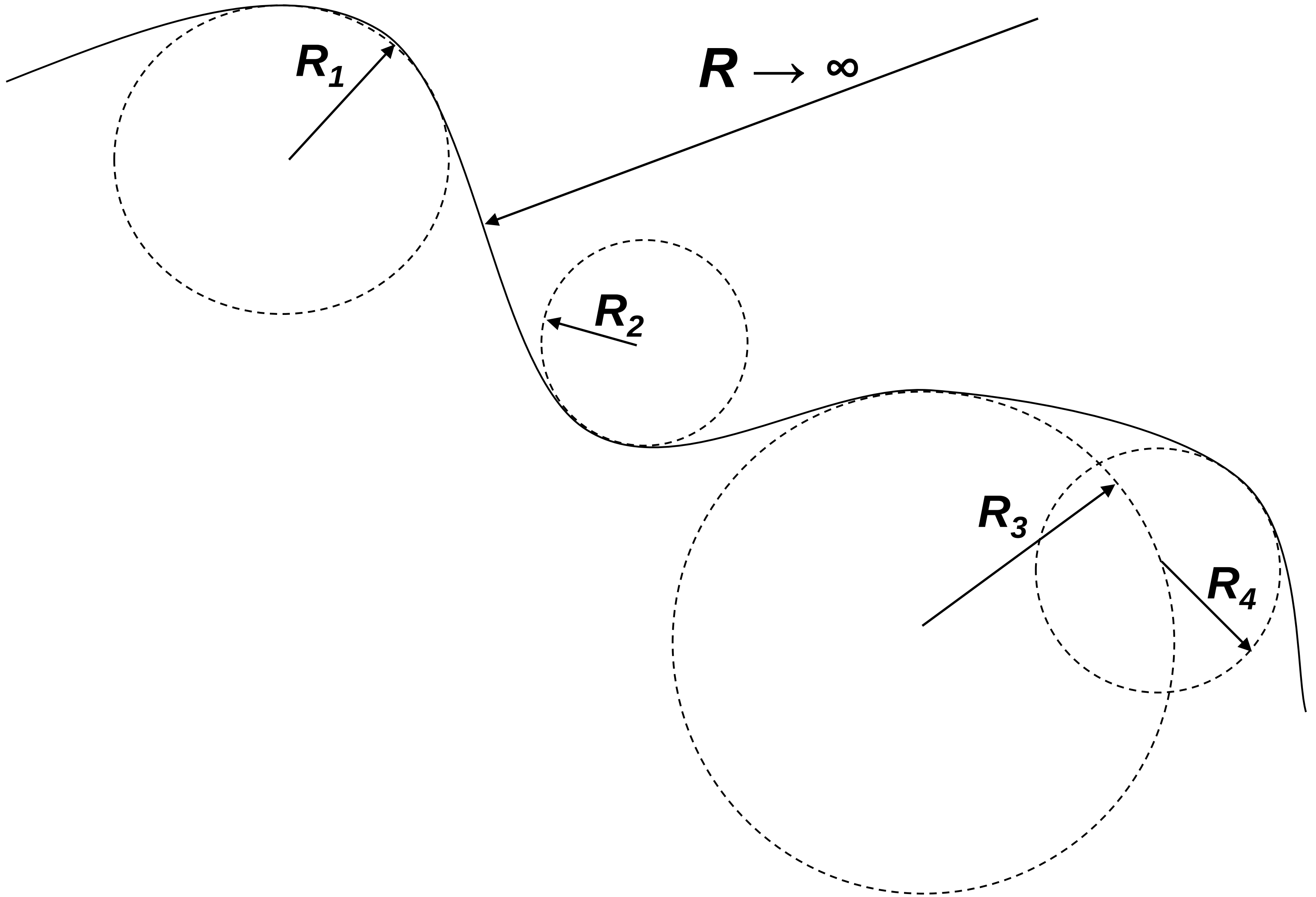
Para um movimento circular *variado*

$$\begin{cases} \boxed{m.\vec{a}_{tg} = \vec{R}_{tg}} \\ \boxed{m.\vec{a}_{cp} = \vec{R}_{cp}} \end{cases}$$

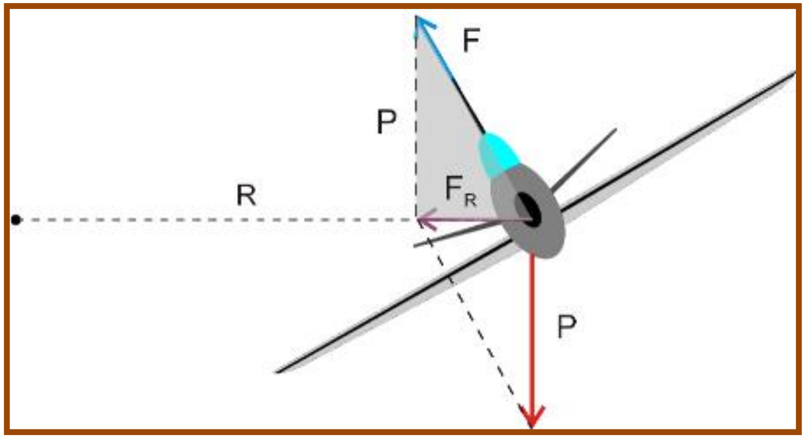


$$\boxed{\left|\vec{R}_{total}\right|^2 = \left|\vec{R}_{tg}\right|^2 + \left|\vec{R}_{cp}\right|^2}$$

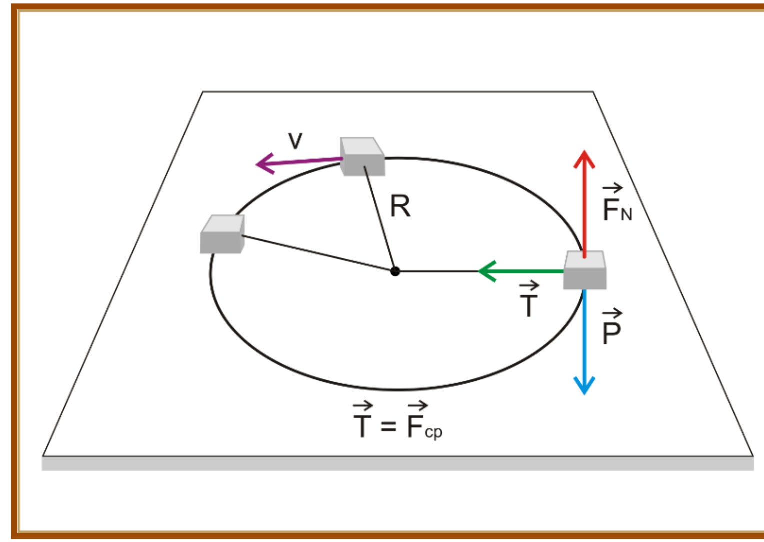
Para um movimento geral:



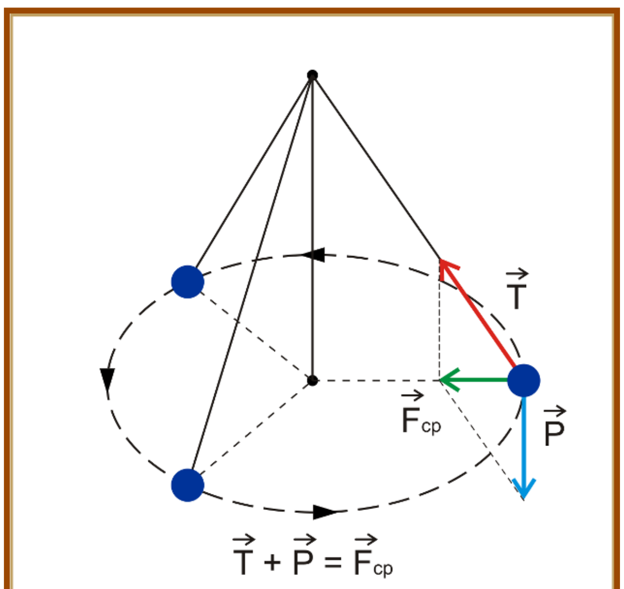
Exemplos



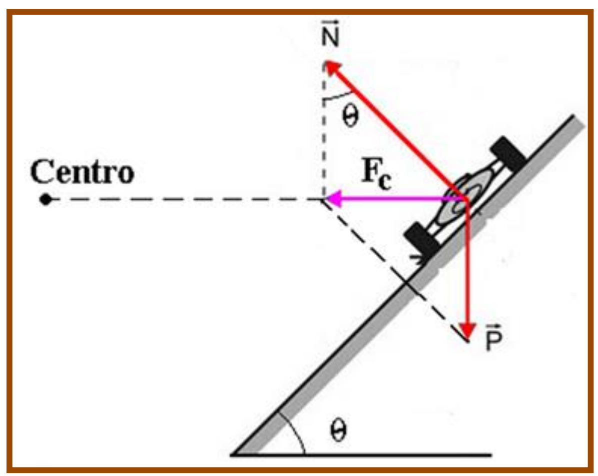
Avião em curva



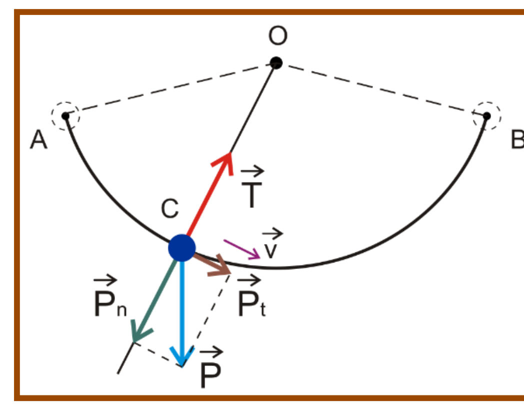
Objeto sobre um plano horizontal



Pêndulo cônico



Carro sobre curva inclinada com atrito nulo

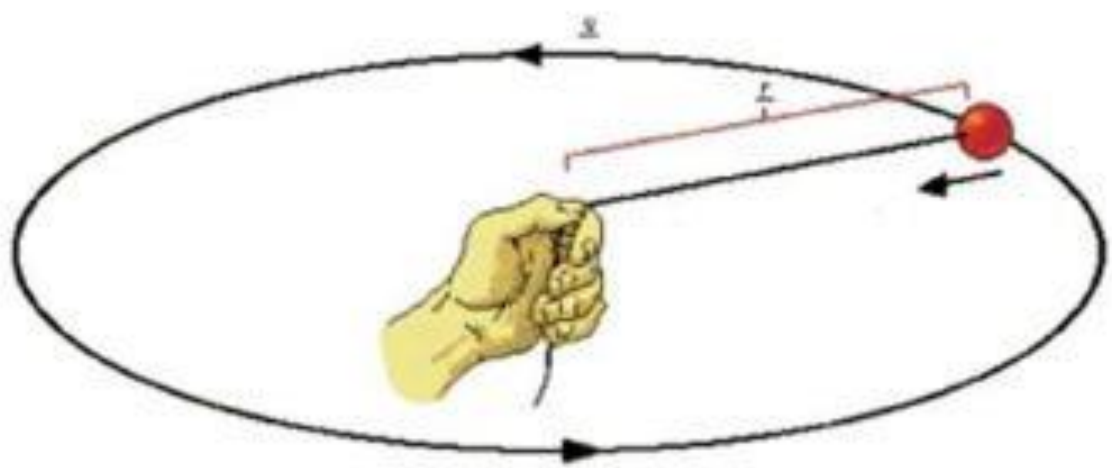


Pêndulo simples

https://www.youtube.com/watch?v=ubRukj6ti0Y

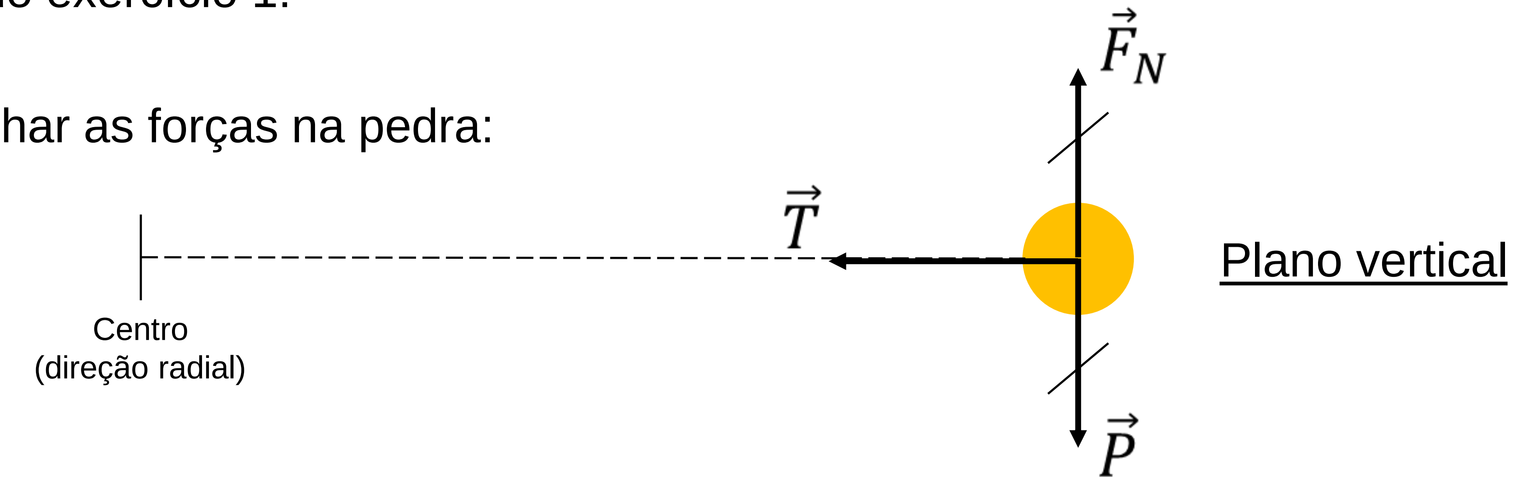
Exercícios sobre Dinâmica do Movimento Circular

1) Uma pedra amarrada em um arame realiza um movimento circular e uniforme, em um plano horizontal sem atrito, com velocidade de 1 m/s. A) Desenhe as forças atuantes na pedra. B) Qual é a força que representa a resultante centrípeta? C) Sendo o valor do raio da circunferência igual a 1m, determine a aceleração centrípeta. D) Considerando que a massa da pedra vale 0,2kg, calcule o módulo da resultante centrípeta. E) Represente a resultante centrípeta em três pontos diferentes da trajetória da pedra. F) Considerando, agora, a presença de uma aceleração tangencial constante e igual a 1m/s^2 no mesmo sentido do movimento inicial, determine os módulos das resultantes tangencial, centrípeta e total, em t = 3s. G) Represente as resultantes em um ponto qualquer, quando o sistema é visto de cima. H) Determine o número de voltas que a pedra deu após 3s, depois de ser acelerada.



Resolução do exercício 1:

A) Desenhar as forças na pedra:



B) A força que representa a Resultante Centrípeta é a **Tração do fio**. $\boxed{\vec{R}_{cp} = \vec{T}}$

C) Cálculo da aceleração centrípeta: $v_{tg} = 1\frac{m}{s}$ $r = 1m$

$$a_{cp} = \frac{v_{tg}^2}{R} \rightarrow \quad a_{cp} = \frac{1^2}{1} \rightarrow \boxed{a_{cp} = 1\frac{m}{s^2}}$$

D) Módulo da Resultante Centrípeta (m = 0,2kg):

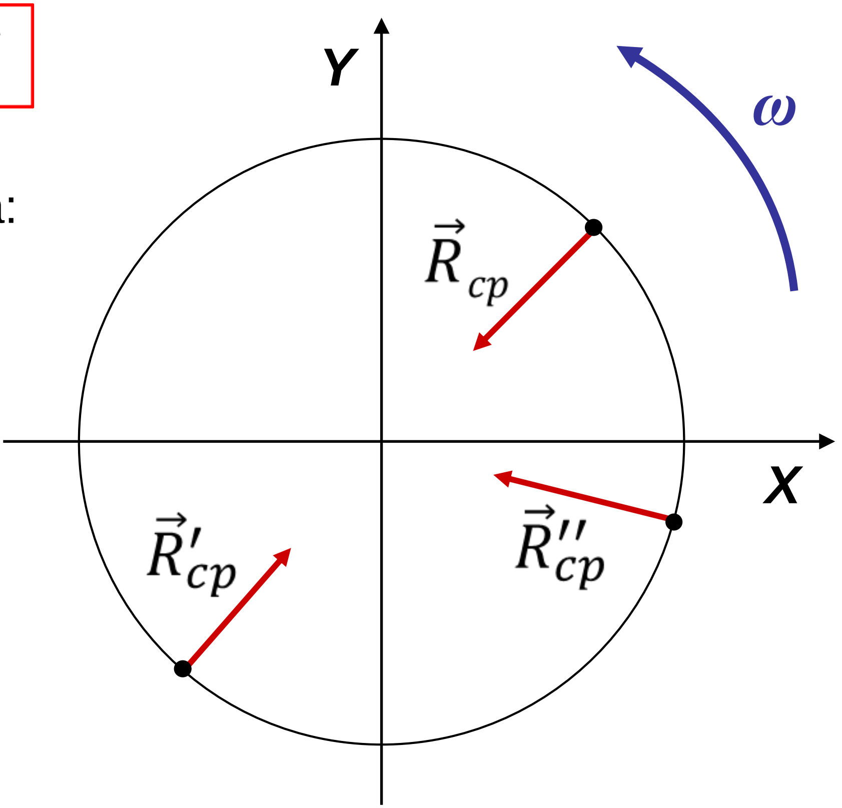
$$\vec{R}_{cp} = m.\vec{a}_{cp}$$

Na direção radial, $$R_{cp} = m.a_{cp}$$

$$R_{cp} = 0{,}2.1$$

$$\boxed{R_{cp} = 0{,}2N}$$

E) Representação da Resultante Centrípeta:



F) $a_{tg} = 1m/s^2$; t = 3s:

$$\vec{R}_{tg} = m.\vec{a}_{tg} \rightarrow \quad R_{tg} = m.a_{tg} \rightarrow \quad R_{tg} = 0{,}2.1 \rightarrow \boxed{R_{tg} = 0{,}2N}$$

$$\vec{R}_{cp} = m.\vec{a}_{cp} \rightarrow \quad R_{cp} = m.\frac{v_{tg}^2}{R} \rightarrow \quad R_{cp} = 0{,}2.\frac{(4)^2}{1}$$

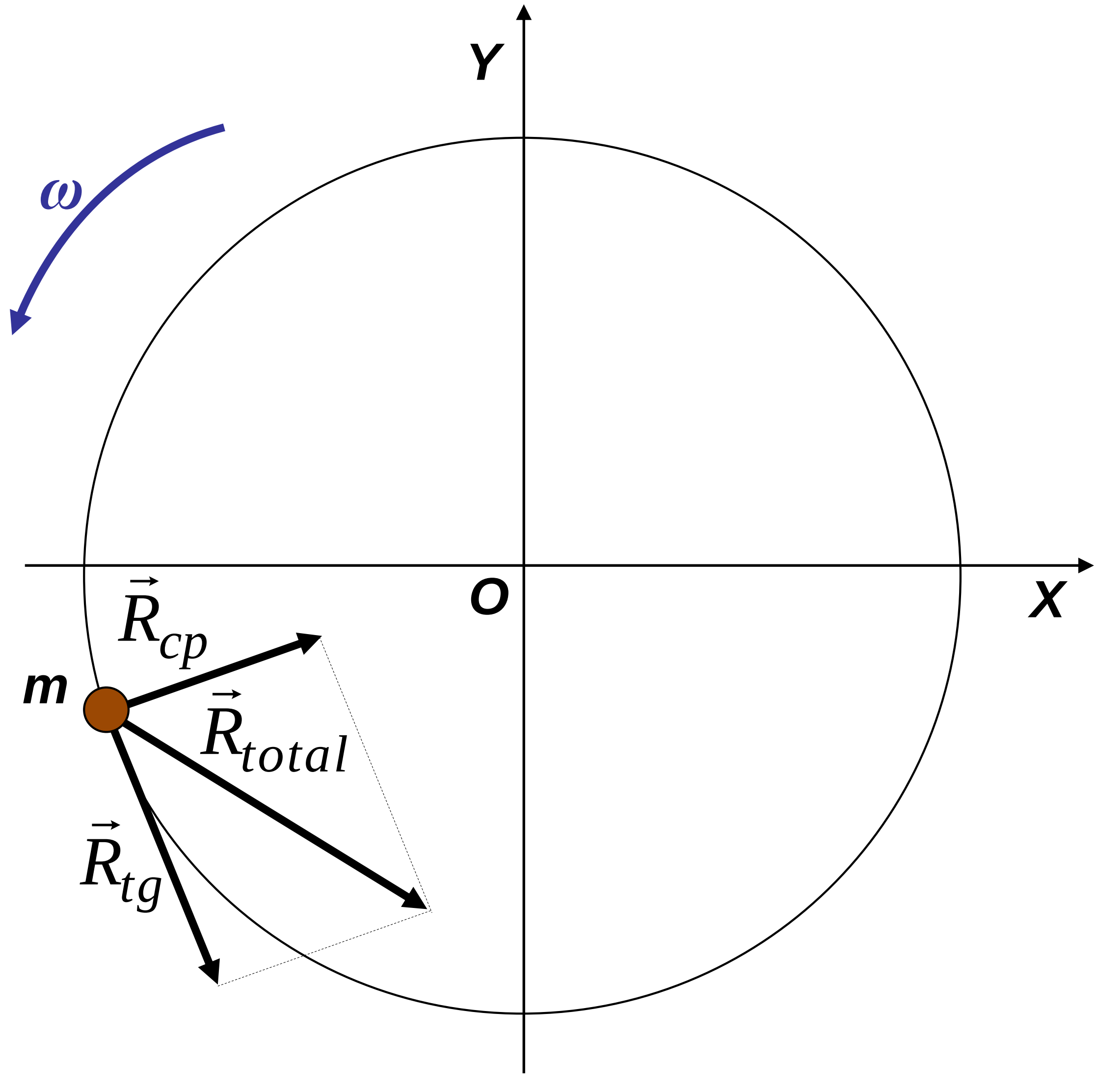
$$\boxed{R_{cp} = 3{,}2N}$$

$$v_{tg} = v_{tg_0} + a_{tg}.t \rightarrow \quad v_{tg} = 1 + (+1).3 \rightarrow \boxed{v_{tg} = 4\frac{m}{s}}$$

$$R_{total}^2 = R_{cp}^2 + R_{tg}^2$$

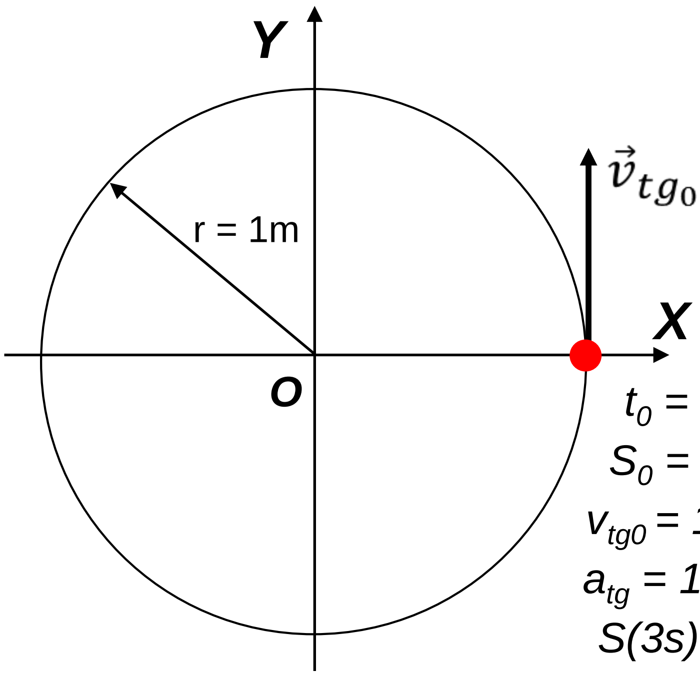
$$R_{total}^2 = (3{,}2)^2 + (0{,}2)^2 \rightarrow \boxed{R_{total} = 3{,}21N}$$

G) Desenho fora de escala



H)

$$\boxed{S(t) = S_0 + v_{tg_0} \times (t - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{tg} \times (t - t_0)^2}$$



$t_0 = 0s$

$S_0 = 0m$

$v_{tg0} = 1m/s$

$a_{tg} = 1m/s^2$

$S(3s) = ?$

- Determinação da posição da pedra em t = 3s:

$$S(3s) = 0 + 1.3 + \frac{1}{2}.(+1).3^2$$

$$\boxed{S(3s) = 7{,}5m}$$

- Determinação do perímetro:

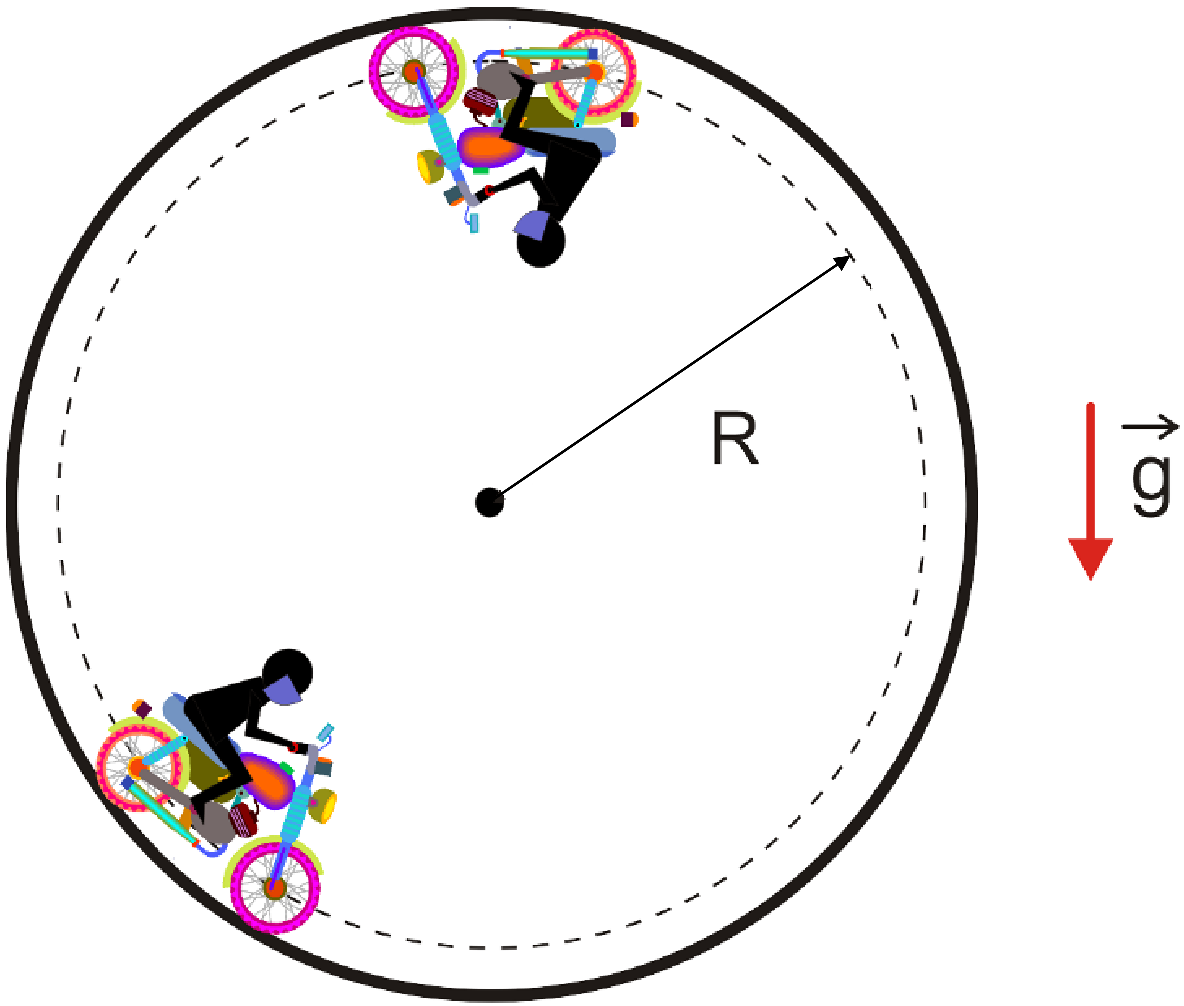
$$L = 2.\pi.r$$

$$L = 2.\pi.1 \rightarrow \; L = 6{,}28m$$

- Determinação do número (n) de voltas:

$$n = \frac{S(3s)}{L} \rightarrow \quad n = \frac{7{,}5}{6{,}28} \rightarrow \boxed{n \approx 1{,}2\ volta}$$

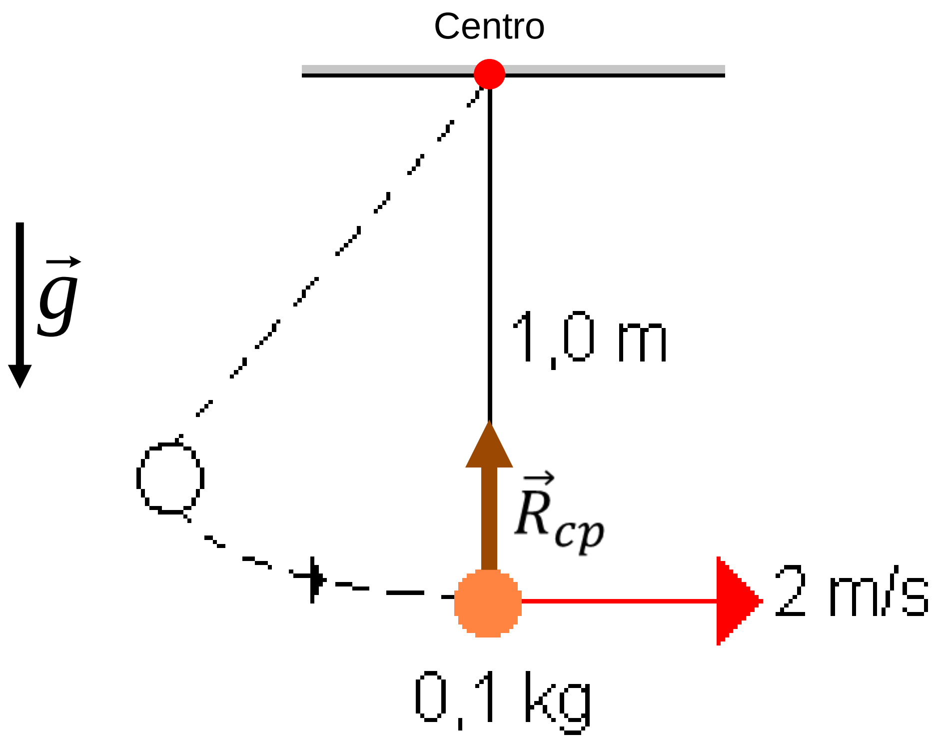
2) (Fatec-SP) Um motociclista move-se no interior de um globo metálico de raio R = 2,5m. Num determinado momento ele passa pelo ponto mais alto da trajetória. Qual deve ser a velocidade mínima, nesse instante, para que a moto não perca o contato com a superfície do globo? Adote g = 10 m/s².

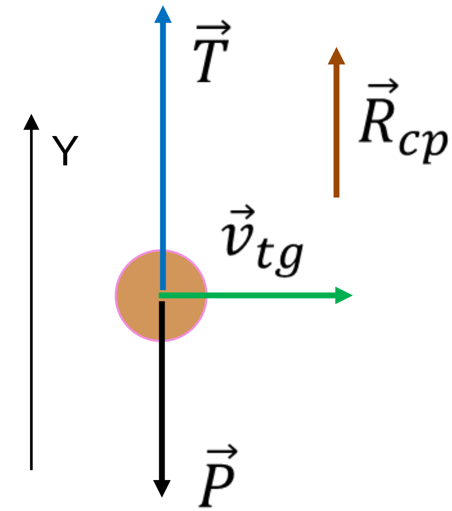


3) (Vunesp-SP) Uma esfera metálica de massa 0,1 kg, presa à extremidade de um fio leve e inextensível de 1,0 m de comprimento, é abandonado de certa altura e passa pelo ponto mais baixo da trajetória com velocidade de 2,0 m/s, como mostra a figura. Determine, no ponto mais baixo da trajetória:

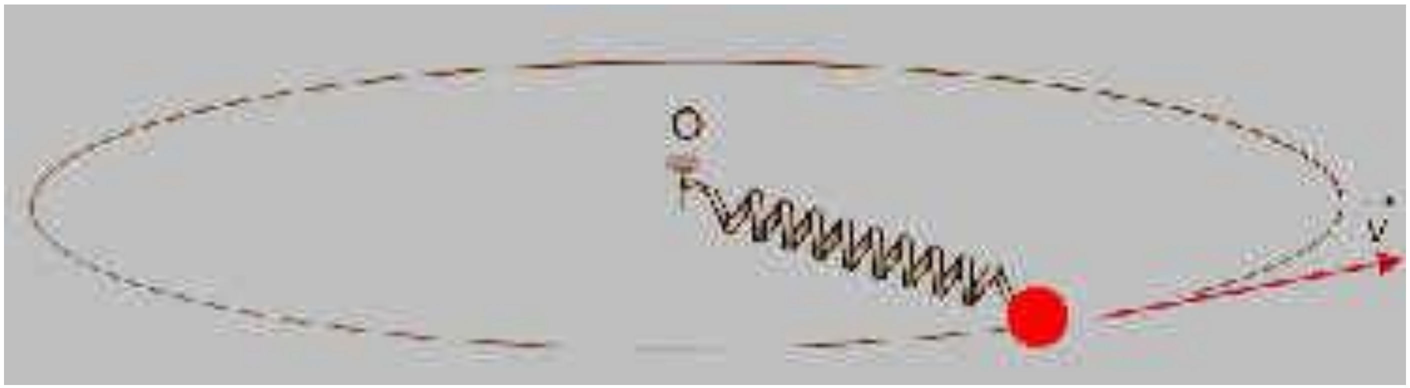
a) o valor da força centrípeta sobre a esfera;
b) a tensão no fio.

Considere g = 10 m/s²:

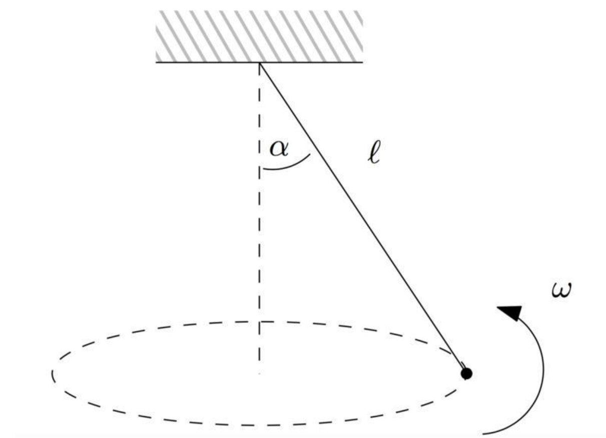




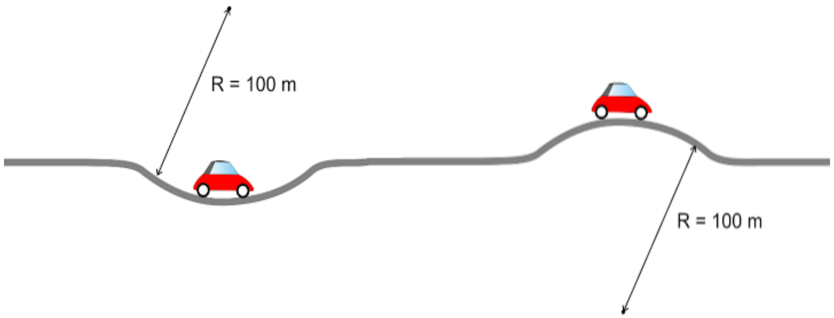
4) (Unicamp-SP) Uma bola de massa igual a 1,0 kg, presa à extremidade livre de uma mola esticada de constante elástica k = 2000 N/m, descreve um MCU de raio R = 0,50 m com velocidade v = 10 m/s sobre uma mesa horizontal e sem atrito. A outra extremidade da mola está presa a um pino em *O*, segundo a figura a seguir. Determine a deformação da mola.



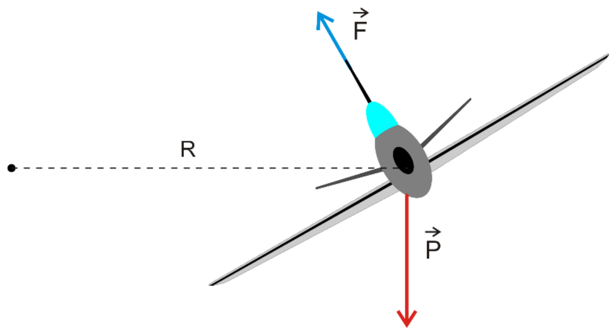
5) Um pêndulo cônico é constituído por um corpo mantido em trajetória plana, horizontal, circular, por meio de um fio de comprimento L preso a um ponto fixo. Se o fio tem comprimento 2m e forma com a vertical um ângulo α (senα = 0,6 e cosα = 0,8), determine a intensidade da aceleração centrípeta do corpo, sabendo-se que sua velocidade escalar é 3,0m/ s. Represente também a aceleração centrípeta em diferentes pontos da trajetória.



6) Um carro de 800 kg, deslocando-se numa estrada, passa pelo ponto mais baixo de uma depressão com velocidade de 72 km/h, conforme indica a figura. Qual é a intensidade da força normal que a pista exerce no carro? É dado g = 10 m/s². Mantidas as condições anteriores, resolva o exercício quando o veículo passa pelo ponto mais alto.



7) (Mackenzie-SP) Um avião descreve uma trajetória circular horizontal com velocidade escalar constante v. As asas formam um ângulo θ com a horizontal. Devem ser considerados apenas o peso do avião e a força de sustentação, que é perpendicular à asa. Sendo g a aceleração da gravidade, o raio da trajetória descrita é:

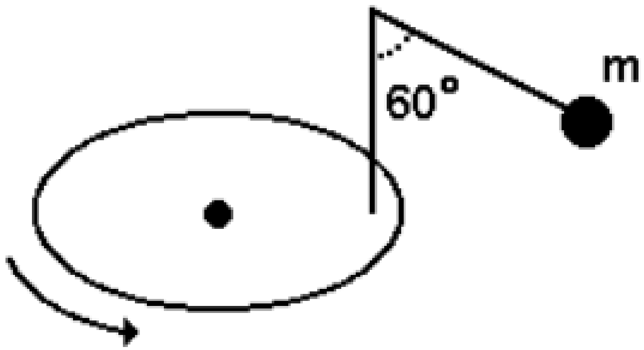


8) Na figura, o fio ideal prende uma partícula de massa m a uma haste vertical presa a um disco horizontal que gira com velocidade angular ω constante. A distância do eixo de rotação do disco ao centro da partícula é igual a $0{,}1\sqrt{3}$ m. A velocidade angular do disco é:

Dado: $g = 10 m/s^2$

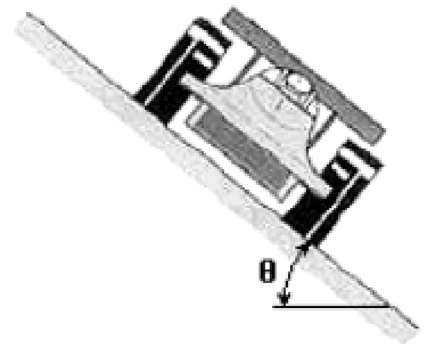
a) 3 rad/s b) 5 rad/s c) $5\sqrt{2}$ rad/s

d) $8\sqrt{3}$ rad/s e) 10 rad/s



9) Um circuito de Fórmula Mundial circular, com 320 m de raio, tem como velocidade de segurança 40 m/s. Calcule a tangente do ângulo de inclinação da pista.

Observação: velocidade de segurança é a velocidade com a qual o carro pode trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.

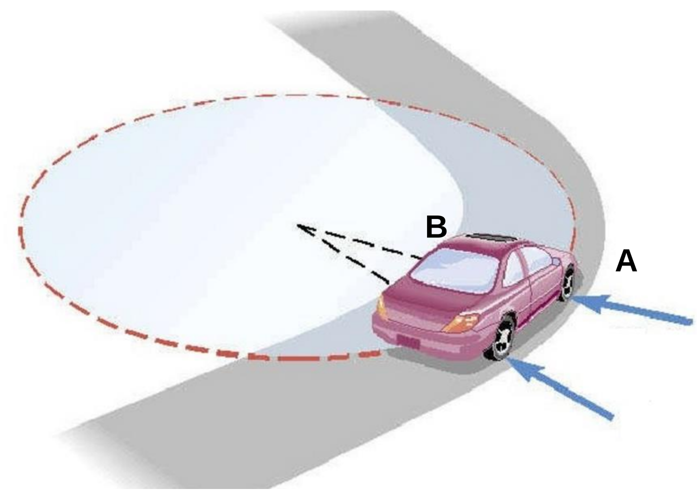


10) A figura a seguir mostra um carro fazendo uma curva horizontal plana, de raio R = 50 m, em uma estrada asfaltada. O módulo da velocidade do carro é constante e suficientemente baixo para que se possa desprezar a resistência do ar sobre ele.

1 - Cite as forças que atuam sobre o carro e desenhe, na figura, vetores indicando a direção e o sentido de cada uma dessas forças.

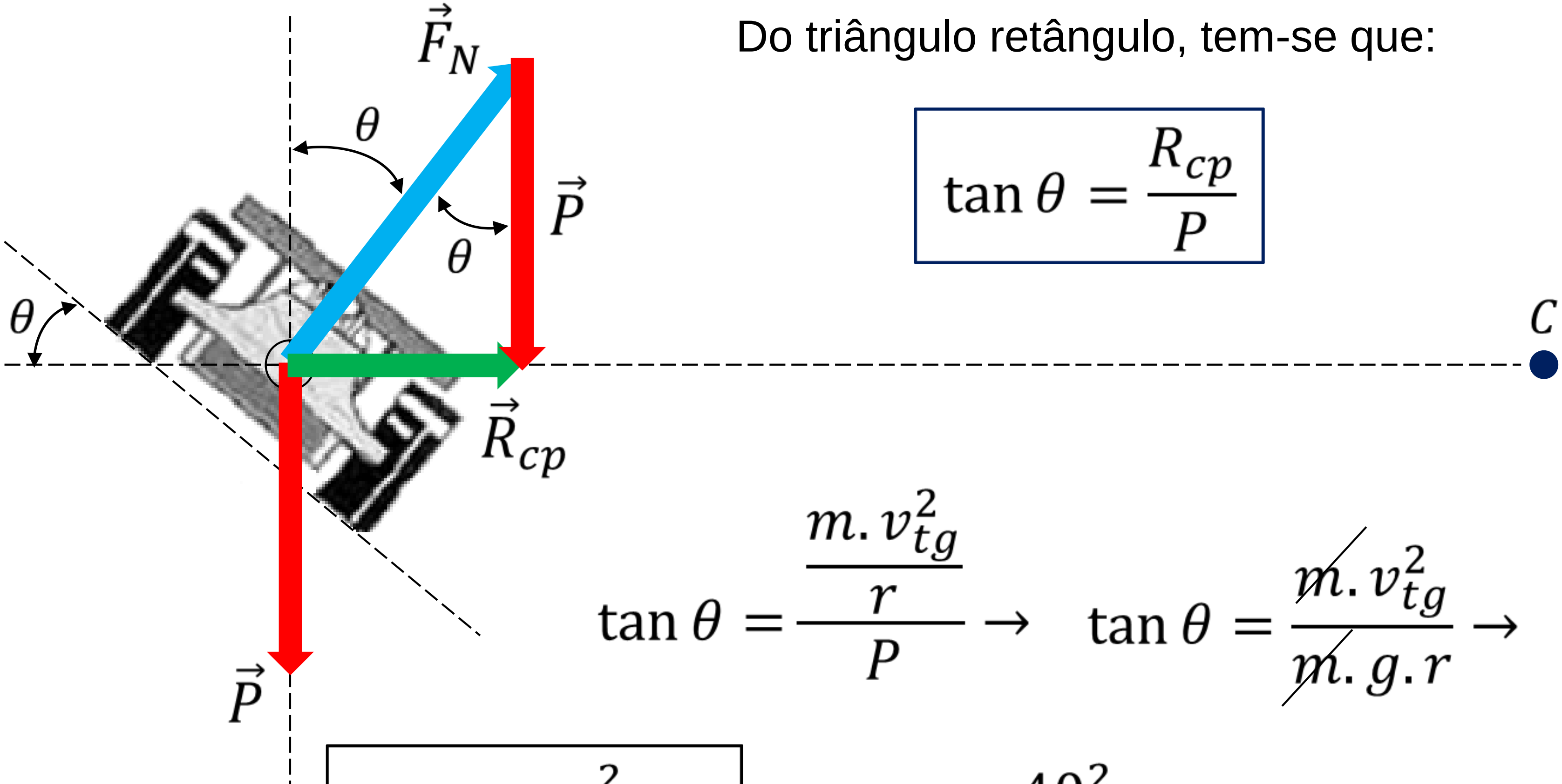
2 - Supondo valores numéricos razoáveis para as grandezas envolvidas, determine a velocidade que o carro pode ter nessa curva.

3 - O carro poderia ter uma velocidade maior nessa curva se ela fosse inclinada. Indique, nesse caso, se a parte externa da curva, ponto A, deve ser mais alta ou mais baixa que a parte interna, ponto B. Justifique sua resposta.



Resolução do exercício 9:

- Isolar o carro e aplicar as forças externas atuantes sobre ele:



Do triângulo retângulo, tem-se que:

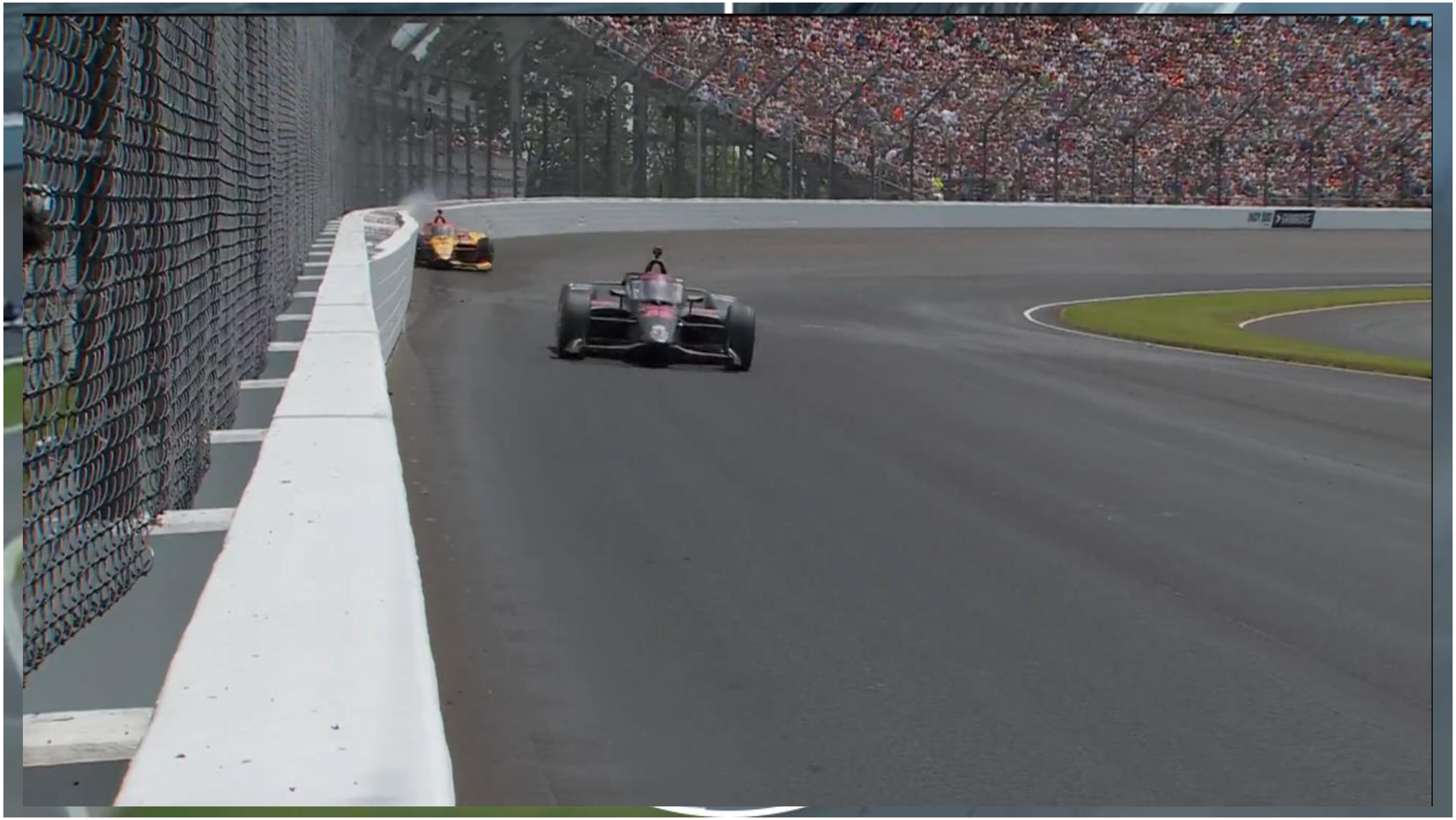
$$\boxed{\tan\theta = \frac{R_{cp}}{P}}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{m.v_{tg}^2}{r}}{P} \rightarrow \tan\theta = \frac{\cancel{m}.v_{tg}^2}{\cancel{m}.g.r} \rightarrow$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v_{tg}^2}{g.r} \rightarrow} \tan\theta = \frac{40^2}{10.320} \rightarrow \boxed{\tan\theta = 0{,}5}$$

$$\theta \approx 26{,}6^{\circ}$$

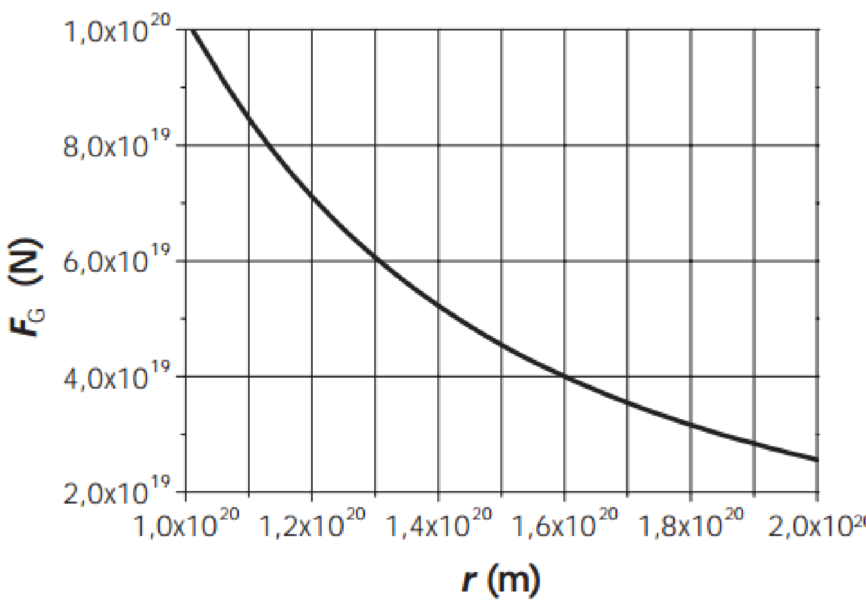
Não se esqueça de assistir ao seguinte vídeo:



https://www.youtube.com/watch?v=ubRukj6ti0Y - Moto 3

11) Observações astrônomicas indicam que as velocidades de rotação das estrelas em torno de galáxias são incompatíveis com a distribuição de massa visível das galáxias, sugerindo que grande parte da matéria do Universo é escura, isto é, matéria que não interage com a luz. O movimento de rotação das estrelas resulta da força de atração gravitacional que as galáxias exercem sobre elas.

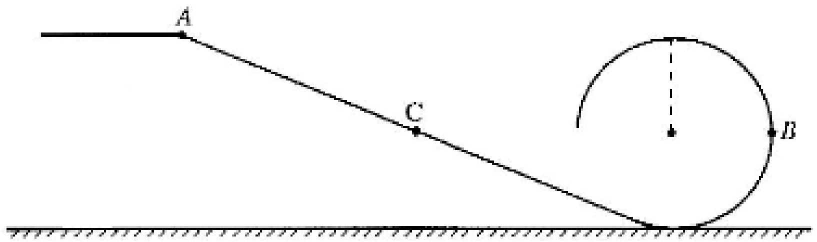
A curva no gráfico abaixo mostra como a força gravitacional $F_G = \frac{GMm}{r^2}$, que uma galáxia de massa M exerce sobre uma estrela externa à galáxia, deve variar em função da distância r da estrela em relação ao centro da galáxia, considerando-se $m = 1{,}0 \times 10^{30}$ kg para a massa da estrela. A constante de gravitação G vale $6{,}7 \times 10^{-11}$ $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$.



a) Determine a massa M da galáxia.

b) Calcule a velocidade de uma estrela em órbita circular a uma distância $r = 1{,}6 \times 10^{20}$ m do centro da galáxia.

12) **(UERJ – 1998)** A figura mostra uma plataforma que termina em arco de circulo. Numa situação em que qualquer atrito pode ser desprezado, uma pequena esfera é largada do repouso no ponto A, a uma altura do solo igual ao diâmetro do círculo. A intensidade da aceleração local da gravidade é g.



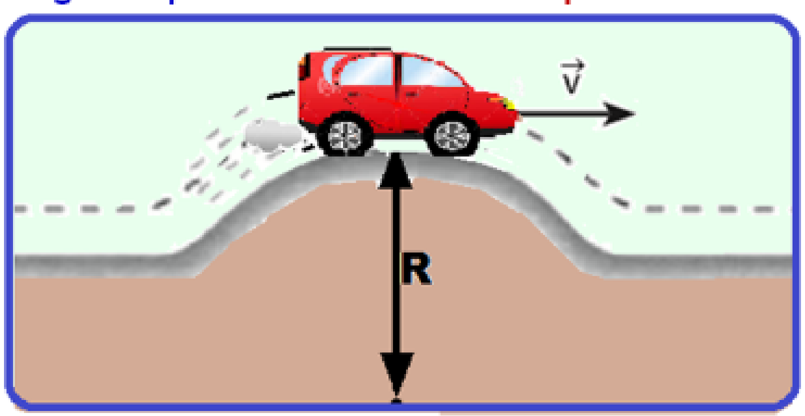
Com relação ao instante em que a esfera passa pelo ponto B, situado a uma altura igual ao raio do círculo,

a) indique se o módulo de sua velocidade é maior, igual ou menor que no ponto C, situado à mesma altura que B, e justifique sua resposta;

b) determine as componentes tangencial (a_t) e centrípeta (a_c) e de sua aceleração (a_v))

13) UEMG – 2017

A figura representa o instante em que um carro de massa M passa por uma lombada existente em uma estrada.



Considerando o raio da lombada igual a R, o módulo da velocidade do carro igual a V, e a aceleração da gravidade local g, a força exercida pela pista sobre o carro, nesse ponto, pode ser calculada por

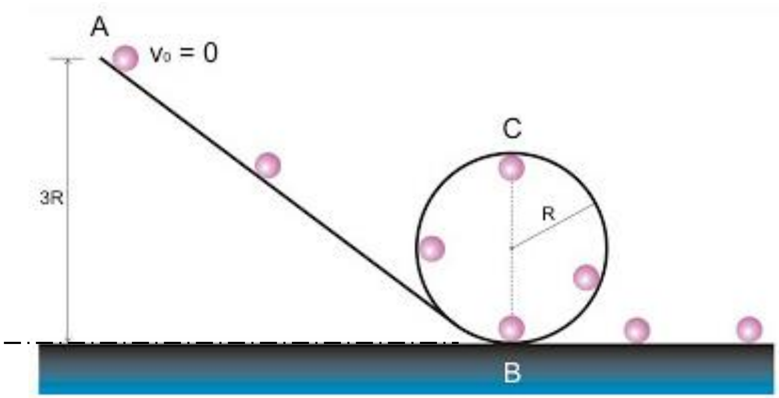
a) $\frac{MV^2}{g} + Mg$ b) $Mg - \frac{MV^2}{R}$ c) $Mg - \frac{MR^2}{V}$

d) $\frac{MR^2}{V} + Mg$

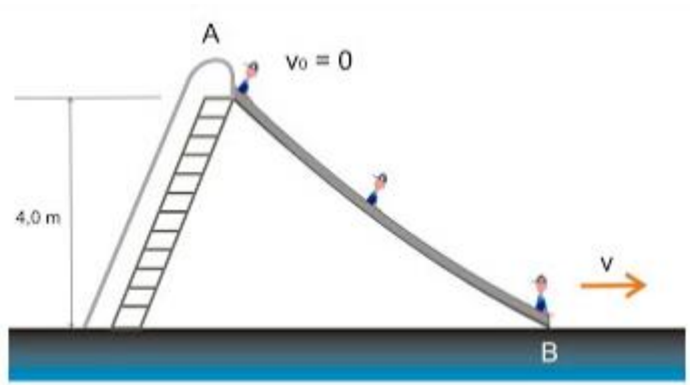
14) Uma pequena esfera é abandonada do ponto A e efetua um looping. Calcule a velocidade da esfera ao passar pelas posições B e C, indicadas na figura. Despreze os atritos e considere dados o raio R da trajetória circular e a aceleração local da gravidade g.

Calcule a força normal que o *looping* aplica sobre a esfera nos pontos B e C. Considere conhecida a massa m da esfera e que ela só escorregue ao longo do movimento, isto é, não há rolamento. Calcule a menor altura de onde a esfera pode ser abandonada para que realize a volta no *looping*.

P.H.R ($h = 0m$, $E_{pot} = 0J$)



15) Um menino desce por um escorregador de altura 4,0 m, a partir do repouso. Considerando g = 10 m/s^2 e que 20% da energia mecânica é dissipada durante o trajeto, determine a velocidade com que o menino atinge o solo.



Resolução do ex. 14, usando a *Lei de Conservação da Energia* e *Leis de Newton*:

- Cálculo da velocidade da esfera no ponto B:

$$\boxed{E_A = E_B}$$

Como só estão presentes formas de energia *mecânica*, tem-se que

$$\boxed{E_{Mec_A} = E_{Mec_B}}$$

$$\underbrace{\cancel{E_{cin_A}}}_{0 \text{ (Repouso)}} + E_{pot_A} = E_{cin_B} + \underbrace{\cancel{E_{pot_B}}}_{0 \text{ (P.H.R)}}$$

$$\cancel{m}.g.h_A = \frac{1}{2}.\cancel{m}.v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2.g.h_A} \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2.g.3.R}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{6.g.R}}$$

- Cálculo da velocidade da esfera no ponto C:

Como só estão presentes formas de energia *mecânica*, tem-se que

$$\boxed{E_{Mec_A} = E_{Mec_C}}$$

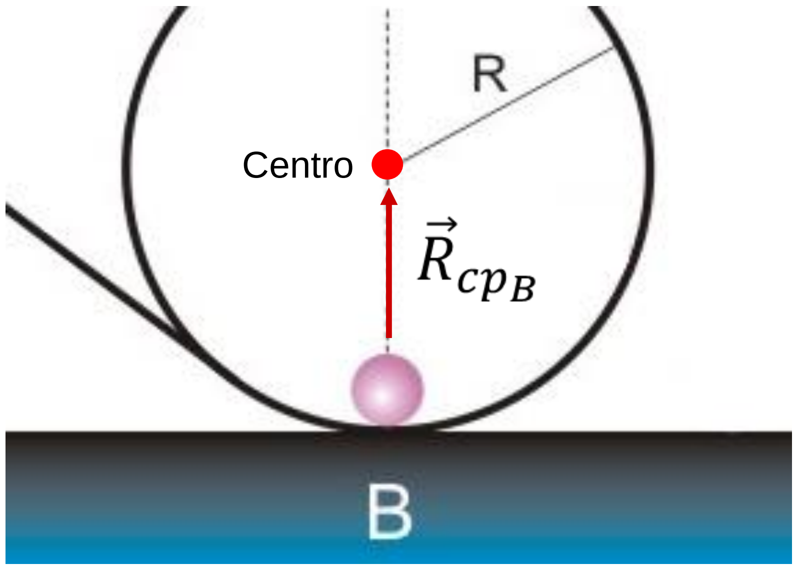
$$\underbrace{\cancel{E_{cin_A}}}_{0\ \text{(Repouso)}} + E_{pot_A} = E_{cin_C} + E_{pot_C}$$

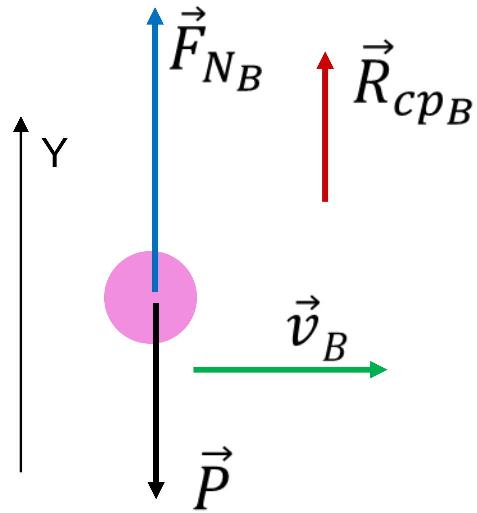
$$\cancel{m}.g.h_A = \frac{1}{2}.\cancel{m}.v_C^2 + \cancel{m}.g.h_C$$

$$v_C = \sqrt{2.g.(h_A - h_C)} \rightarrow \quad v_C = \sqrt{2.g.(3.R - 2.R)}$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{2.g.R}}$$

- Cálculo da Força Normal sobre a esfera no ponto B:



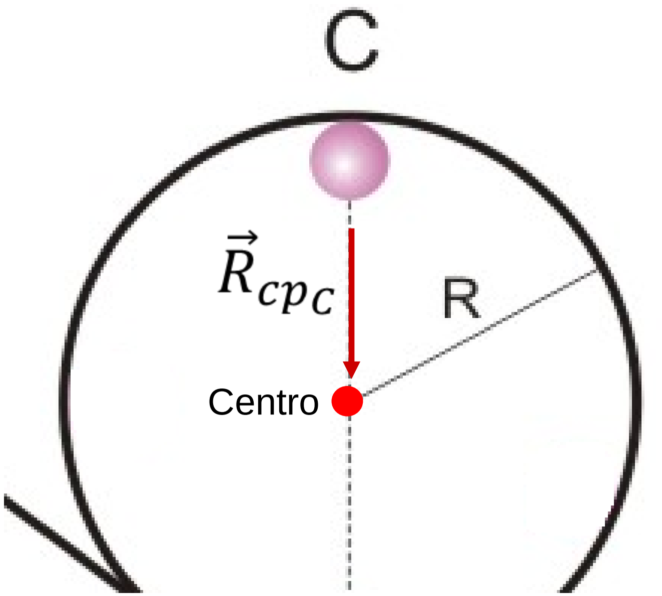


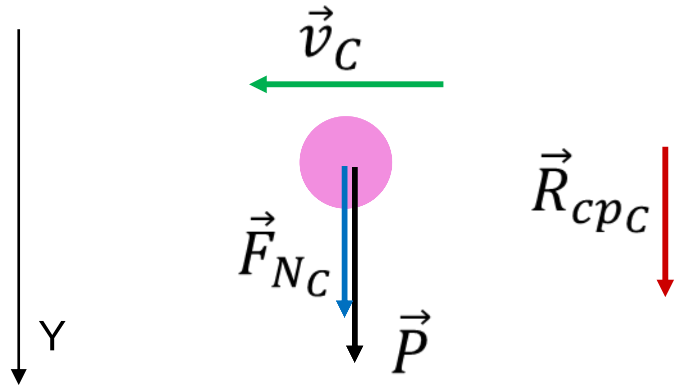
$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\Sigma F_{Y_B} = m.a_{Y_B} \rightarrow \quad R_{cp_B} = m.a_{cp_B} \rightarrow$$

$$+F_{N_B} - P = m.a_{cp_B} \rightarrow \ F_{N_B} = m.\frac{v_B^2}{R} + m.g \rightarrow \ \boxed{F_{N_B} = +7.m.g}$$

- Cálculo da Força Normal sobre a esfera no ponto C:





$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\Sigma R_{Y_C} = m.a_{Y_C} \rightarrow \quad \Sigma R_{cp_C} = m.a_{cp_C} \rightarrow$$

$$+F_{N_C} + P = m.a_{cp_C} \rightarrow F_{N_C} = m.\frac{v_C^2}{R} - m.g \rightarrow F_{N_C} = m.\frac{2.g.\cancel{R}}{\cancel{R}} - m.g$$

$$\boxed{F_{N_C} = m.g}$$

- Cálculo da menor altura:

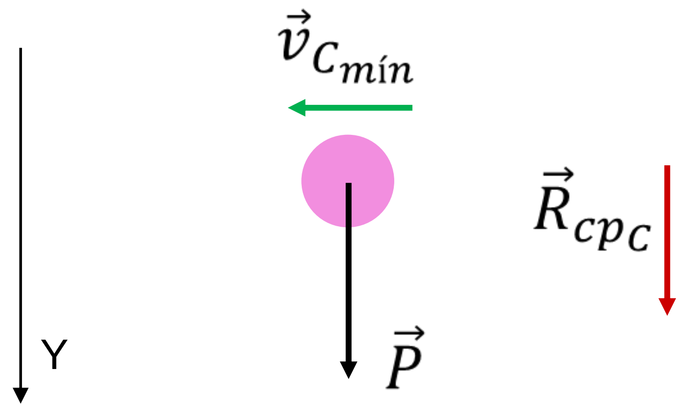
“A condição de menor altura no ponto A para que a esfera complete a volta no looping é que o módulo da força normal em C seja nulo. Dessa forma, a velocidade em C será a ***<u>mínima</u>***.”

$$+\cancelto{0}{F_{N_C}} + P = m.a_{cp_C}$$

$$P = m.\frac{v^2_{C_{mín}}}{R}$$

$$\cancel{m}.g = \cancel{m}.\frac{v^2_{C_{mín}}}{R}$$

$$\boxed{v_{C_{mín}} = \sqrt{g.R}}$$



$$E_{Mec_A} = E_{Mec_C}$$

$$\cancel{E_{cin_A}} + E_{pot_A} = E_{cin_C} + E_{pot_C}$$

0 (Repouso)

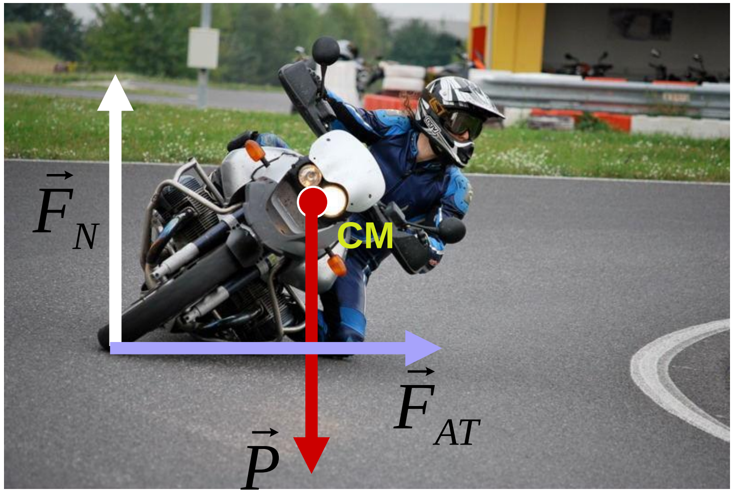
$$\cancel{m}.g.h_{A_{mín}} = \frac{\cancel{m}.v_{C_{mín}}^2}{2} + \cancel{m}.g.2.R$$

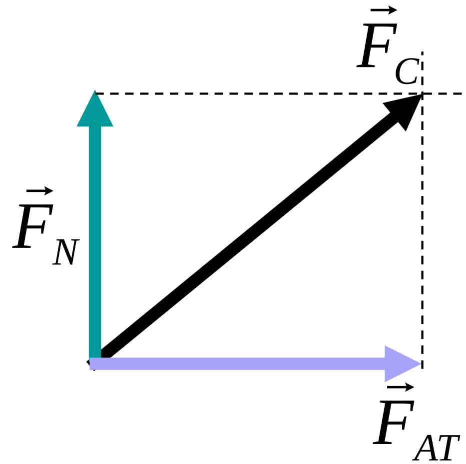
$$\cancel{g}.h_{A_{mín}} = \frac{\cancel{g}.R}{2} + \cancel{g}.2.R$$

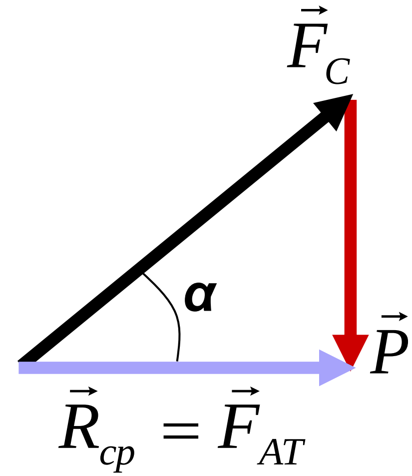
$$h_{A_{mín}} = \frac{R}{2} + 2.R$$

$$\boxed{h_{A_{mín}} = 2{,}5.R}$$

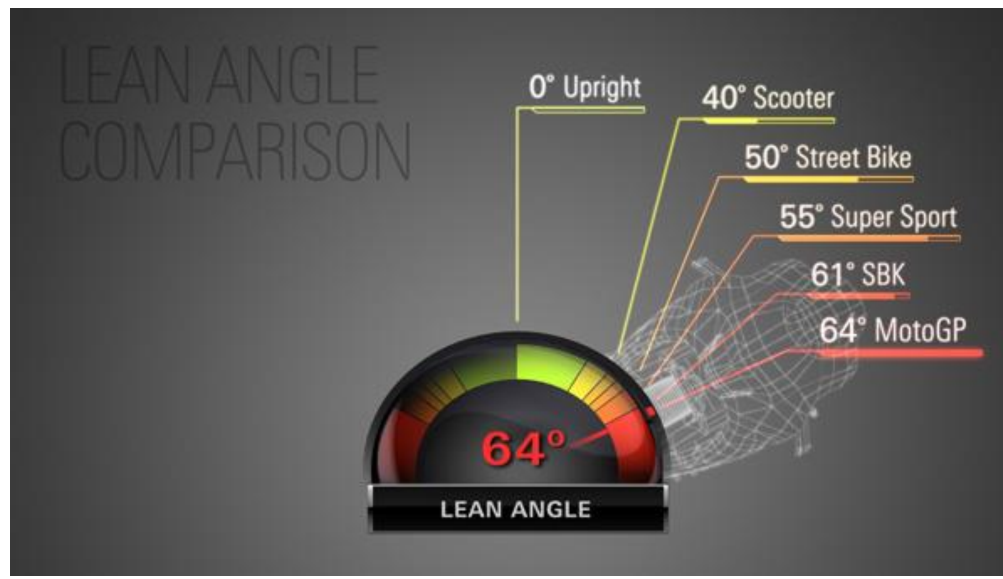
Desafio





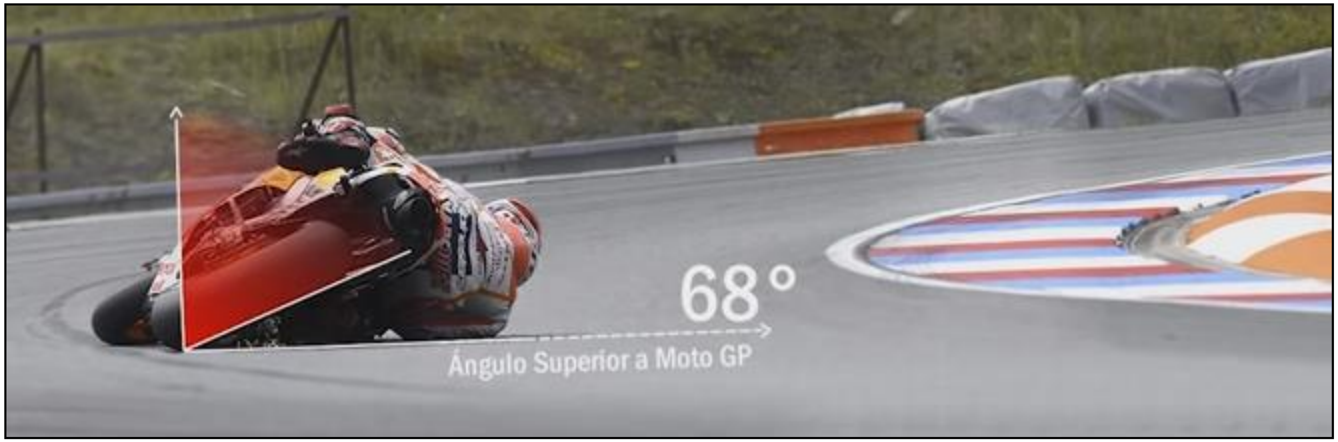


Supondo uma pista plana, isto é, sem sobreelevações, determine a ***Resultante Centrípeta*** para todas as situações descritas na ilustração ao lado [utilize os dados abaixo e suponha que os ângulos fornecidos sejam os de inclinação máxima (iminência de escorregamento)]. Que força faz o papel de resultante centrípeta para todos os casos? Calcule o coeficiente de atrito μ_{est} entre pneu e o piso para cada situação.



Dados: $m_{scooter}$ = 127 kg; $m_{moto\ de\ rua}$ = 153 kg; $m_{super\ sport}$ = 167 kg; $m_{superbike}$ = 168 kg; m_{motogp} = 157 kg; $massa_{piloto}$ = 60 kg. Adote g = 9,8 m/s^2.

Além do limite...



18 Agosto de 2014, em Brno, República Tcheca

Marc Marquez

Com base nos dados fornecidos, determine o valor da força de atrito máxima e o coeficiente de atrito estático entre pneu e piso, supondo que o piloto e a moto estejam raspando levemente no piso.

Massa do piloto: **59 kg**
Massa da moto: **157 kg**

Referências Sitiográficas

- http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2011/01/preparando-se-para-as-provas_8965.html
- http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2014/06/cursos-do-blog-mecanica_16.html
- http://fisicaevestibular.com.br/exe_cin_16.htm
- http://www.blogdaengenharia.com/wp-content/uploads/2013/05/PoliaseCorreias.pdf
- https://www.comvest.unicamp.br/vest_anteriores/vest_ant.html
- http://www.yamaha-motor.com.br/nmax160/ficha-tecnica
- http://yamaha-motor.com.br/fazer250/ficha-tecnica
- http://yamaha-motor.com.br/r3/home_realidade.html#
- https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/leis-de-conservacao/exercicios-de-vestibulares-e-enem/
- https://fisicaevestibular.com.br/novo/vestibulares-recentes/mecanica/dinamica/
- http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/09/preparando-se-para-as-provas_27.html
- http://ensinodefisica.ca.ifes.edu.br/wp-content/uploads/2018/02/Material_produto_professor_aluno_full.pdf
- https://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2019/06/cursos-do-blog-mecanica_10.html

<u>Referências Sitiográficas</u>

- https://fisicaevestibular.com.br/novo/mecanica/cinematica/movimento-circular/exercicios-de-vestibulares-sobre-movimento-circular/ - estroboscopia