INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS - GEAM8

As ideias de Saccheri

Traduzido livremente de Roberto Bonola, Geometria Não-Euclidiana (1906)

CAPÍTULO II.

Os precursores da Geometria não-Euclidiana.

GEROLAMO SACCHERI [1667-1733].

§. 11. A obra do Padre GEROLAMO SACCHERI: *"Euclicles ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia."* [Milão, 1733], na sua maior parte é dedicado à demonstração do V postulado. A ideia orientadora da investigação geométrica de Saccheri encontra-se na sua *"Logica demonstrativa"* [Turim, 1697], nomeadamente num tipo especial de raciocínio, já utilizado por Euclides [Livro IX, Prop. XII], segundo o qual, mesmo assumindo como hipótese a falsidade da proposição a demonstrar, se conclui finalmente que ela é verdadeira.

Unificando-se com esta ideia, o autor toma como dadas as primeiras vinte e seis proposições da Euclides, e assumindo como hipótese a falsidade do postulado V, procura entre as consequências desta hipótese uma proposição que o autorize a afirmar a verdade do próprio postulado.

Antes de expor o trabalho de Saccheri, recordemos que Euclides, para provar a sua Prop. 16a [o ângulo externo de um triângulo é maior do que cada um dos seus ângulos internos opostos], admite implicitamente que a reta é infinita, sendo o seu raciocínio substancialmente fundado na existência de um segmento duplo de um segmento dado.

Discutiremos a possibilidade de abandonar esta hipótese mais tarde: por agora, notamos que Saccheri a admite tacitamente, uma vez que utiliza a proposição d o ângulo externo em toda a sua obra. Finalmente, notamos que ele recorre novamente ao *postulado de Arquimedes* sobre a *hipótese de continuidade da reta* [1] para estender a todas as figuras desse tipo certas proposições que só são admitidas como verdadeiras para uma figura de um dado tipo.

§ 12. A figura fundamental de Saccheri é o quadrilátero isósceles com dois ângulos retos, ou seja, o quadrilátero com dois lados opostos iguais e perpendiculares à base. As propriedades desta figura podem ser deduzidas a partir do Lema 1 a seguir, que é fácil de demonstrar.

Se num quadrilátero $ABCD$, sendo os ângulos consecutivos A, B ângulos retos, os lados AD e BC são iguais, o ângulo C é também igual ao ângulo D [prop. I]; mas, se os lados AD e BC são desiguais, dos dois ângulos C e D, o adjacente ao lado menor é maior, e vice-versa.

[1] Esta hipótese é utilizada por Saccheri na sua forma intuitiva, ou seja: um segmento, que passa continuamente do comprimento a para o comprimento b, diferente de a, adquire, durante a variação, todos os comprimentos entre a e b.

Seja $ABCD$ um quadrilátero birretângulo [$A = B = 1$ reto] e isósceles [$AD = BC$]: na hipótese euclidiana, os ângulos C, D são também ângulos retos, de modo que, admitindo que estes ângulos podem ser ambos obtusos, negamos implicitamente o postulado V. Saccheri discute precisamente as três hipóteses relativas aos ângulos C, D, assim nomeadas:

Hipótese do ângulo recto [$C = D = 1$ reto];

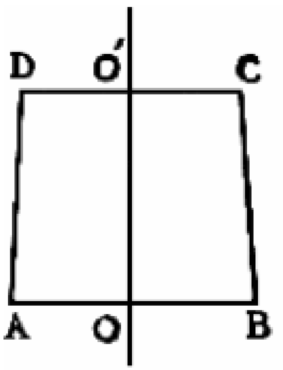
Hipótese do ângulo obtuso [$C = D > 1$ reto];

Hipótese do ângulo agudo [$C = D < 1$ reto].

Um primeiro resultado notável é o seguinte: conforme se verifica, no quadrilátero isósceles birretângulo $ABCD$, a hip. do ângulo reto, a hip. do ângulo obtuso ou a hip. do ângulo agudo, temos respectivamente: $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$ [prop. III].

De fato, na hipótese do ângulo reto, pelo lema anterior, deduzimos imediatamente que $AB = CD$.

Na hipótese do ângulo obtuso a perpendicular OO' no ponto médio do segmento AB divide o quadrilátero fundamental em dois quadriláteros iguais e retangulares em O e O'. Como o ângulo $D > A$, pelo lema citado devemos ter $AO > DO'$, logo $AB > CD$.



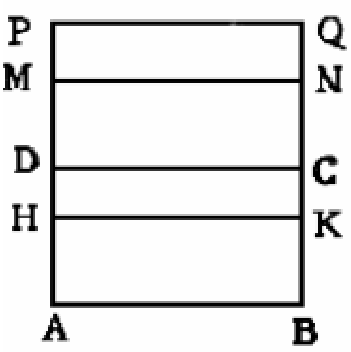
Na hipótese do ângulo agudo estas desigualdades mudam de sentido, assim: $AB < CD$. O teorema recíproco é provado por redução ao absurdo [prop. IV].

Se a hipótese do ângulo reto é verdadeira num caso, é verdadeira em todos os outros casos. [prop. IV].

Suponha que se verifique no quadrilátero isósceles $ABCD$ a hipótese do ângulo reto. Se os pontos H e K em AD e BC forem equidistantes de AB, forma-se o quadrilátero $ABKH$. Se HK é perpendicular a AH e BK também no novo quadrilátero a hipótese do ângulo reto é verificada também no novo quadrilátero. Caso contrário, suponha que o ângulo AHK seja agudo, e consequentemente o seu adjacente DHK obtuso. Então, no quadrilátero $ABKH$, pela hipótese do ângulo agudo, teríamos $AB < HK$, enquanto que no quadrilátero $HKCD$, devido ao ângulo obtuso, seria $HK < DC$. Mas estas duas desigualdades são contraditórias, sendo $AB = DC$ [pela hipótese do ângulo reto em $ABCD$]. Portanto, AHK não pode ser agudo; e como com o mesmo raciocínio prova-se que AHK não pode ser obtuso, concluindo-se que mesmo no quadrilátero $ABKH$ é verdadeira a hipótese do ângulo reto.

Nos prolongamentos de AD e BC tomam-se os pontos M, N equidistantes da base AB. Digo que também no quadrilátero $ABNM$ a hipótese do ângulo reto é válida. De fato, se AM é múltiplo de AD a proposição é imediata; caso contrário, tome-se um múltiplo de AD maior que AM [Postulado de Arquimedes] e sobre os lados produzidos AD e BC tomamos os segmentos AP e BQ iguais a este múltiplo. Pelo que foi dito acima, no quadrilátero $ABQP$ a hipótese do ângulo reto é válida, e consequentemente a mesma hipótese é ainda válida no quadrilátero $ABNM$.

Finalmente, esta hipótese aplica-se a um quadrilátero de qualquer base, uma vez que, na figura abaixo, um dos lados perpendiculares a AB pode ser tomado como base.



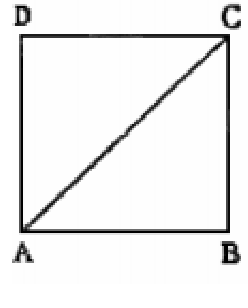
Se a hipótese do ângulo obtuso é verdadeira num só caso, é verdadeira em todos os outros casos. [prop. VI].

Se a hipótese do ângulo agudo é verdadeira num só caso, é verdadeira em todos os outros casos. [prop. VII].

Conforme se verifique a hipótese do ângulo reto, a hipótese do ângulo obtuso ou a hipótese do ângulo agudo, a soma dos ângulos de um triângulo é, respectivamente, igual a, maior que ou menor que dois ângulos retos. [prop. IX]

Seja ABC um triângulo retângulo em B. Complete o quadrilátero desenhando AD igual a BC e perpendicular a AB, e depois unindo D a C.

No ângulo reto, os dois triângulos ABC, ACD são iguais, logo: $BAC = DCA$. Segue-se imediatamente, no triângulo ABC: $A + B + C = 2$ retos.



Na hipótese do ângulo obtuso, como $AB > DC$, temos $ACB > DAC$, então no triângulo em discussão teremos: $A + B + C > 2$ retos.

Na hipótese do ângulo agudo, $AB < DC$ sendo AB, segue-se que $ACB < DAC$, portanto, no triângulo dado $A + B + C < 2$ retos.

O teorema provado, que se estende facilmente a qualquer triângulo, com a decomposição da figura em dois triângulos retos, tem sua recíproca na proposição XV, provada por meio de uma redução ao absurdo.

Uma consequência destes resultados é o teorema seguinte:

Se num triângulo a soma dos ângulos é igual, maior ou menor que dois ângulos retos, em todos os outros triângulos a soma em questão é respectivamente igual, maior ou menor que dois ângulos rectos.

Este teorema, que Saccheri não enuncia explicitamente, na primeira e terceira hipóteses, foi encontrado e dado a conhecer por Legendre, cerca de um século mais tarde.

Os teoremas anteriores sobre o quadrilátero isósceles foram provados por Saccheri, e mais tarde por outros geômetras, com a ajuda do postulado de Arquimedes e do princípio da continuidade. O matemático alemão Max Dehn[2] demonstrou, no entanto, que eles dependem disso.

Podemos estabelecer este fato de uma forma elementar, como segue:

Sobre a reta r, fixamos dois pontos B, D, a partir dos quais elevamos os dois segmentos perpendiculares e iguais BA, DC, depois unimos os dois pontos A e C pela reta s. A figura obtida, na qual evidentemente temos $BAC = DCA$, é fundamental para nossas considerações, e a ela nos referiremos constantemente.
Sejam E e E' dois pontos de s, o primeiro situado entre A e C, o segundo não; sejam F e F' os pés das perpendiculares descidas por E e E' na reta r. Aplicam-se então os seguintes teoremas:

Se $EF = AB$, ou: $E'F' = AB$, os ângulos BAC, DCA são ângulos retos.

Se $EF > AB$ ou $E'F' < AB$, os ângulos BAC, DCA são obtusos.

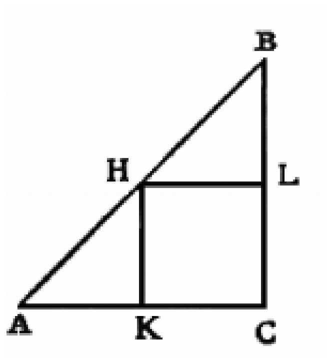
Se $EF < AB$ ou $E'F' > AB$, os ângulos BAC, DCA são agudos.

Querendo agora passar dos teoremas sobre os quadriláteros para os teoremas sobre os triângulos, enunciados no início deste parágrafo, podemos certamente remeter para o raciocínio de Saccheri, uma vez que este raciocínio não depende em nada do postulado em discussão.

Com isto, obtém-se o resultado que tínhamos proposto. Para abreviar a exposição do trabalho de Saccheri, destacamos da Prop. XI, XII o conteúdo do 2º lema seguinte.

[2]Cf. Math. Ann. t. 53, p. 405-439: 'Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck".

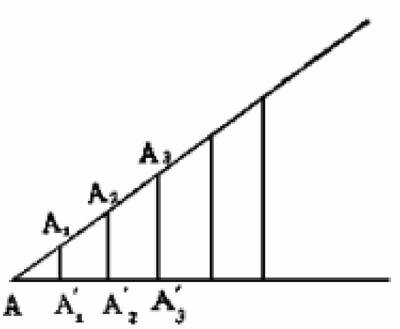
Seja ABC um triângulo retângulo em C, seja H o ponto médio de AB e K o pé da reta perpendicular que passa por H em AC. Então teremos: $AK = KC$, na hipótese do ângulo reto; $AK < KC$, na hipótese do ângulo obtuso; e $AK > KC$, na hipótese do ângulo agudo.



A parte relativa à hipótese do ângulo reto é imediata. Na hipótese do ângulo obtuso, sendo a soma dos ângulos de um quadrilátero maior que quatro ângulos retos, teremos: $AHK < HBC$. Então, descendo de H a BC, a perpendicular HL, os dois triângulos AHK, HBL, com hipotenusas iguais, em virtude da relação anterior dão origem à seguinte desigualdade: $AK < HL$. Mas no triângulo quadrilátero $HKCL$ o ângulo H é obtuso [hipótese do ângulo obtuso], logo: $HL < KC$ e $AK < KC$.

A terceira parte do lema é demonstrada da mesma forma. Uma extensão fácil deste lema é a seguinte proposição:

Se, no primeiro lado de um ângulo com vértice A, os segmentos iguais AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3, $\ldots$ forem tomados consecutivamente e os respectivos segmentos AA'_1 , $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $\ldots$ forem construídos como projeções sobre o segundo lado do ângulo, os seguintes resultados são válidos:



$AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \ldots$, na hipótese do ângulo reto;

$AA'_1 < A'_1A'_2 < A'_2A'_3 < \ldots$, na hipótese do ângulo obtuso;

$AA'_1 > A'_1A'_2 > A'_2A'_3 > \ldots$, na hipótese do ângulo reto;

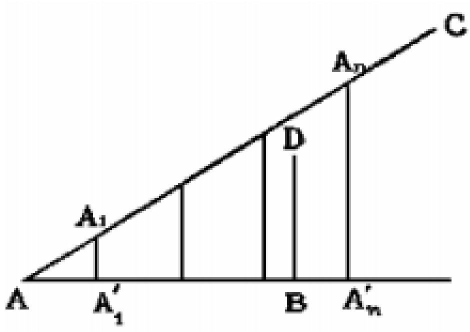
Por uma questão de brevidade, omitimos a fácil demonstração.

Vejamos antes que consequências importantes podem ser deduzidas desta proposição nas hipóteses do ângulo reto e do ângulo obtuso.

Sejam AC e BD duas retas, a primeira oblíqua e a segunda perpendicular à reta AB. Em AC, a partir do lado do ângulo agudo CAB e da perpendicular BD, toma-se o segmento arbitrário AA_1, e constrói-se a sua projeção AA'_1, sobre AB. Em seguida, fixa um número n suficientemente grande, tal que o n-ésimo múltiplo de AA'_1 , seja maior que AB; depois, em AC, a partir da lado de A_1 , constrói-se o segmento AA_n, múltiplo de AA_1 de acordo com o número n. Em seguida, tendo traçado a partir de A_n a perpendicular $A_nA'_n$ sobre AB,

$AA'_n = (AA'_1).n > AB$, na hipótese do ângulo reto;

$AA'_n > (AA'_1).n > AB$, na hipótese do ângulo obtuso.

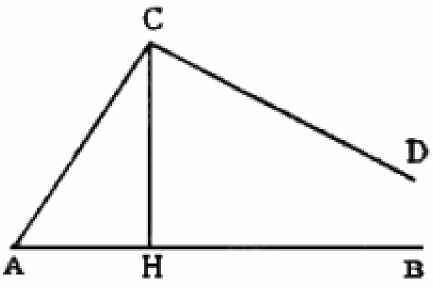


Portanto, BD, perpendicular ao lado AA'_n , do triângulo retângulo $AA_nA'_n$, vai necessariamente encontrar a hipotenusa AA_n; ou seja, na hipótese do ângulo reto e na hipótese do ângulo obtuso, uma perpendicular e uma oblíqua à mesma reta interceptam-se. [prop. XI, XII][3]. Daí se deduz o seguinte teorema:

Na hipótese do ângulo reto e na do ângulo obtuso, o quinto postulado de Euclides é verdadeiro [prop. XIII].

Sejam AB e CD duas retas intersectadas pela linha AC. Suponhamos que se verifique: $BAC + ACD < 2$ retos. Então um dos ângulos BAC, ACD, por exemplo o primeiro, será agudo. A partir de C, é traçada a perpendicular CH incidindo sobre AB. No triângulo ACH, em virtude das suposições efetuadas, temos: $\hat{A} + \hat{C} + \hat{H} \geqslant 2$ retos.

[3]O método seguido por Saccheri para provar esta proposição é essencialmente idêntico ao de Nasîr-Eddin. No entanto, este último apenas se refere à hipótese do ângulo reto, tendo anteriormente demonstrado que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Note-se que Saccheri conheceu e criticou a obra do geômetra árabe.



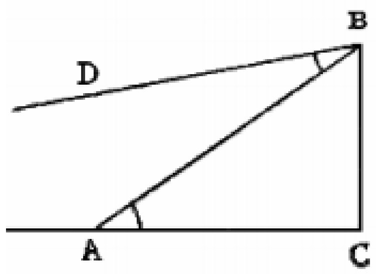
Mas, para efeitos de argumentação, ainda temos: $BAC + ACD < 2$ retos.

A combinação destas duas relações resulta em: $\hat{H} > HCD$. E como $\hat{H}$ é reto, o ângulo HCD é agudo. Então, em virtude das proposições XI, XII, as rectas CD e AB encontram-se.

Este resultado permite a Saccheri concluir que a hipótese do ângulo obtuso é falsa [prop. XIV]. De fato, nesta hipótese, o postulado de Euclides é válido [prop. XIII] e consequentemente os teoremas ordinários que se deduzem deste postulado são válidos. Mas então no quadrilátero fundamental a soma dos ângulos é igual a quatro ângulos retos, ou seja, a hipótese do ângulo reto é verdadeira.

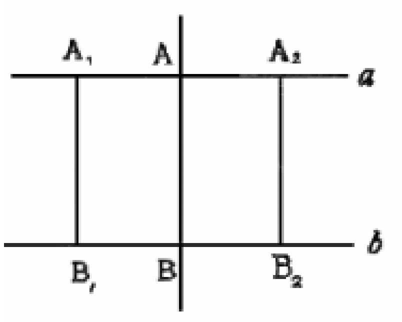
Querendo Saccheri provar que o postulado V é incondicionalmente válido, está também prestes a destruir a hipótese do ângulo agudo.

Entretanto, convém notar que nesta hipótese existe uma perpendicular e uma oblíqua à mesma reta que não se encontram [Prop. XVII]. Para as construirmos, a partir do vértice B do triângulo ABC, retângulo em C, tracemos a recta BD. De modo que seja: $ABD = BAC$. Então, para a hipótese do ângulo agudo, o ângulo CBD é agudo e as duas retas CA, BD, que não se encontram (Euclides, definição XXVII], são uma oblíqua e a outra perpendicular a BC.



De agora em diante, vamos nos referir exclusivamente à hipótese do ângulo agudo.

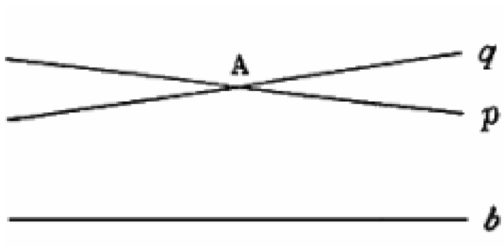
Sejam a e b duas retas coplanares não coincidentes. A partir dos pontos A_1, A_2 de a, as perpendiculares A_1B_1 , A_2B_2 incidem sobre b. Os ângulos A_1 , A_2 do quadrilátero obtido podem ser: 1°) um reto e outro agudo; 2°) ambos agudos; 3°) um agudo e outro obtuso.



No primeiro caso, a perpendicular comum às duas retas a, b existe indubitavelmente; no segundo caso, a existência da perpendicular comum às duas rectas é provada por um raciocínio de continuidade [Saccheri, prop. XXII]. De fato, se movermos a reta A_1B_1 continuamente, mantendo-a perpendicular a b, até a levarmos a A_2B_2, o ângulo $B_1A_1A_2$, agudo na posição inicial, aumenta até se tornar obtuso: segue-se que existe uma posição intermediária AB, em que o ângulo BAA_2 é reto. Então AB é a perpendicular comum às duas retas a, b.

No 3º caso, ou as retas a, b não admitem uma perpendicular comum, ou a perpendicular comum, caso exista, não se situa entre B_1 e B_2.

Dada, como hipótese, a existência de duas retas coplanares que não se interceptam e não têm perpendicular comum, Saccheri demonstra que essas retas se aproximam cada vez mais [Prop. XXIII] e que a sua distância acaba por ser inferior a qualquer segmento por menor que seja [Prop. XXV]. Em outras palavras, se existem duas retas coplanares não secantes, sem perpendicular comum, elas devem comportam-se assimptoticamente entre si[4].



Para provar a existência real de retas assintóticas, Saccheri raciocinou aproximadamente da seguinte forma.

As retas de um feixe de centro A podem, em relação a uma recta b, coplanar ao feixe e não passando por A, dividir-se em dois grupos:

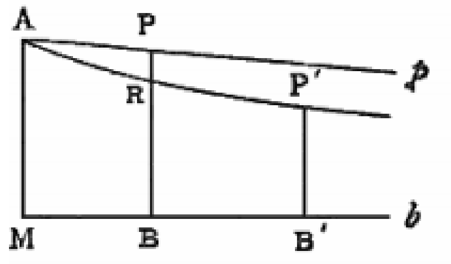
1°) retas do feixe incidentes em b;

2°) retas do feixe que admitem uma perpendicular comum a b. Em virtude do princípio Por razões de continuidade, há duas retas p, q que dividem o feixe em duas partes. À primeira parte pertencem as retas incidentes em b, à segunda parte as retas não incidentes em b e que têm uma

[4]Este resultado justifica a dúvida levantada pelos gregos sobre a possível existência de linhas coplanares assintóticas

perpendicular comum a b. Quanto às retas p, q, mostra-se que não pertencem nem a uma nem a outra.

De fato, o fato de p não ser incidente a b é manifesto. Para provar que p não é perpendicular a b, raciocinamos por absurdo. Seja PB a hipotética perpendicular às duas retas p e b. Baixe-se a perpendicular AM de A até b e eleve-se o ponto B', no lado oposto de M em relação a B, a $B'P'$, perpendicular a b, e baixe-se a perpendicular AP' até $B'P'$.



A reta AP' não é incidente em b, pois admite com b uma perpendicular comum e intersecta PB num ponto R. O ângulo ARB, suplementar do ângulo agudo BRP', é obtuso, pelo que a semi-reta AR cairá no ângulo MAP. Mas então AR seria simultaneamente secante e não secante a b. Esta contradição invalida a hipótese de uma perpendicular comum a b e a p. Concluímos, portanto, que as duas retas p e q são assintóticas à reta b[5].

Neste ponto, Saccheri tenta concluir, apoiando-se mais na intuição e na fé na validade do V postulado do que na lógica. Para demonstrar que a hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, por ser repugnante à natureza da reta [prop. XXXIII], recorre a cinco palavras de ordem, espalhadas por 16 páginas: no essencial, porém, reduz-se a afirmar que "se isto fosse verdade, a recta AP' (figura abaixo) teria uma perpendicular comum com MB num ponto comum ao infinito, o que é contrário à natureza da linha reta". A pretensa demonstração de Saccheri baseia-se, assim, na extensão ao infinito de certas propriedades, válidas para figuras situadas a uma distância finita.

Saccheri, no entanto, não está satisfeito com o seu raciocínio e tenta obter a prova desejada retomando o velho conceito de equidistância. Não vale a pena relatar a nova discussão, uma vez que não representa nada melhor do que o que os seus antecessores fizeram.

Embora o trabalho de Saccheri fique aquém do seu objetivo, é de grande importância: não só nos dá a maior tentativa a favor do postulado V, como o próprio fato de não ter descoberto contradições entre as consequências da hipótese do ângulo agudo só coloca a dúvida de que um sistema geométrico logicamente consequente pudesse ser construído sobre esta hipótese e que o postulado euclidiano não fosse demonstrável[6].

[5] Antes deste resultado, há muitas outras proposições interessantes na obra de Saccheri, entre as quais se destaca a seguinte: Se duas retas se aproximam cada vez mais, e a sua distância é sempre superior a um certo segmento dado, a hipótese do ângulo agudo é inválida.

[6] A obra de P. SACCHERI foi bastante difundida após a sua publicação, e duas histórias da matemática falaram dela: a de J. C. HEILBRONNER [Leipzig, 1742] e a de MONTUCLA [Paris, 1758]. É também minuciosamente analisada por G. S. KLÜGEL, na sua dissertação citada abaixo [(3)]. No entanto, caiu no esquecimento. Só em 1889 é que E. BELTRAMI, com a sua nota: "Um precursor italiano de Legendre e Lobatschewsky". [Rend. Acc. Lincei, (4), V, p. 441- 448], chamou a atenção dos geómetras. A obra de SACCHERI foi posteriormente traduzida para inglês por G. B. HALSTED [Am. Math. Montly, I, 1894 e seguintes], para alemão por SS. STÄCKEL e ENGEL [Th. der P., 1895], para italiano por G. BOCCARDINI [Milão, Hoepli, 1904].