Trigonometria Hiperbólica

Adaptado de *Geometria Hiperbólica*, de João Lucas Marques Barbosa, IMPA, 2007

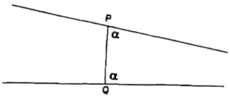
GEAM8

IFSP-SPO

2º semestre de 2023

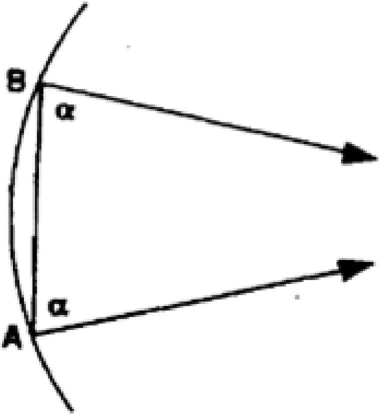
Horocírculos

Definição 1: Dadas duas retas m e n e dois pontos P e Q, sendo $P \in m$ e $Q \in n$, dizemos que P e Q são *pontos correspondentes* se o segmento PQ forma, com as duas retas, ângulos congruentes, no mesmo lado da reta que passa por P e Q.



Definição 2: Consideremos a família de retas que passa por um ponto ideal Ω. Seja A um ponto de uma delas. O conjunto de pontos correspondentes a A é chamado de *horocírculo* de centro Ω passando por A. Se B é qualquer ponto desse horocírculo, então $B\Omega$ é chamado de raio do horocírculo.

Horocírculos



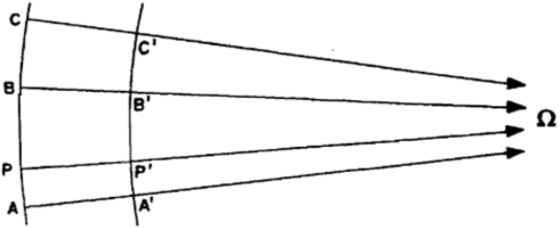
Fatos sobre horocírculos

- Um horocírculo não é uma reta. E se uma reta corta um horocírculo em dois pontos P e Q, PQ formará com os raios $P\Omega$ e $Q\Omega$ ângulos iguais.
- Segmentos de raios entre dois horocírculos concêntricos são congruentes.
- Se os pontos P_1, P_2, ..., P_n dividem um arco AB de um horocírculo em n partes iguais, os raios passando por esses pontos, cortam o arco $A'B'$ correspondente (de um horocírculo concêntrico), em pontos P_1', P_2', ..., P_n', dividindo também este em n partes iguais.

Teorema

Sejam h e h' horocírculos concêntricos. Dados pontos A, B e C de h, representemos por A', B' e C' os pontos de h' determinados pelos raios que passam pelos três primeiros pontos, então:

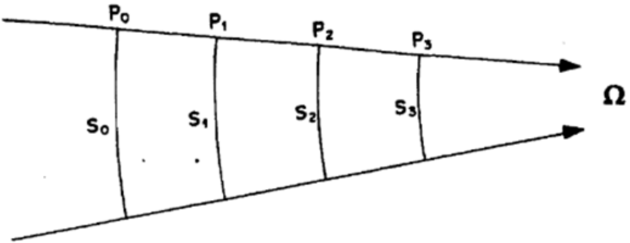
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



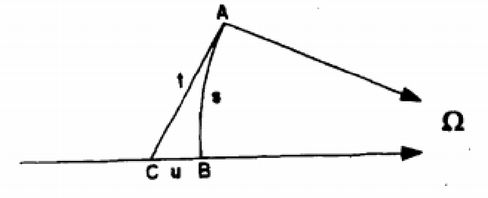
Teorema

Se s_o e s_x representam os comprimentos de dois arcos correspondentes de horocírculos concêntricos, sendo $s_x < s_o$ e sendo x a distância entre eles ao longo de um raio comum, então:

$$s_x = s_o e^{-x}$$



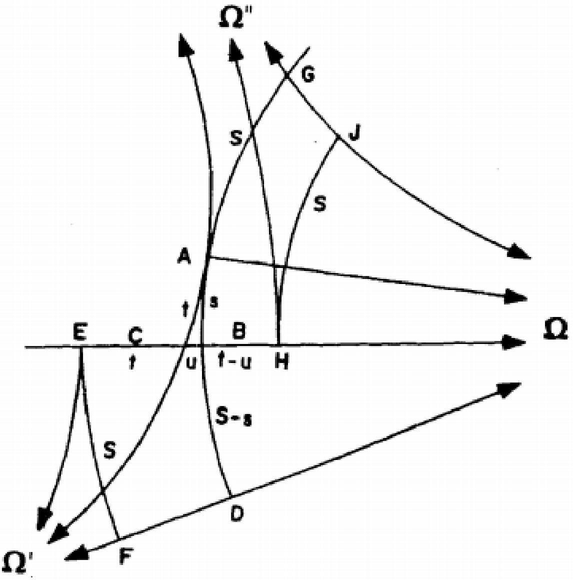
Considere a região ABC delimitada pelo arco AB de um horocírculo h de centro Ω de comprimento s, pela tangente ao horocírculo no ponto A, interceptando $B\Omega$ em C e pelo raio $B\Omega$, sendo que AC tem comprimento t e CB tem comprimento u.



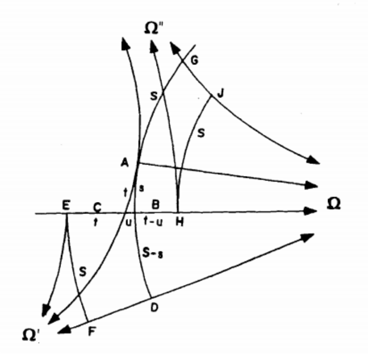
Teorema:
Na figura, valem as seguintes relações:

$$S - s = Se^{-(t+u)} \qquad S + s = Se^{(t-u)}$$

Prova:



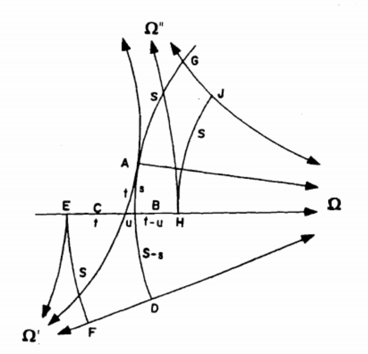
Prova de 1ª parte:



Considere um ponto D do horocírculo h tal que B pertença ao arco AD, cujo comprimento é S. Seja $\Omega'\Omega$ o raio que passa pelo ponto D. A reta $A\Omega'$ é a tangente ao horocírculo passando por A, contendo o segmento AC.

Prova da 1ª parte:
Considere, ainda, um ponto E sobre a reta que passa por C e D, sendo que C pertence ao segmento EB e EC tenha comprimento t.
Os triângulos $CA\Omega$ e $CE\Omega'$ são congruentes, logo $E\Omega'$ é perpendicular a EC.
O horocírculo de centro Ω passando por E tem $E\Omega'$ como reta tangente.
O arco EF entre as retas $E\Omega$ e $\Omega\Omega'$ mede S. Os arcos EF e BD tem seus comprimentos como $S - s = Se^{-(t+u)}$

Prova da 2ª parte:



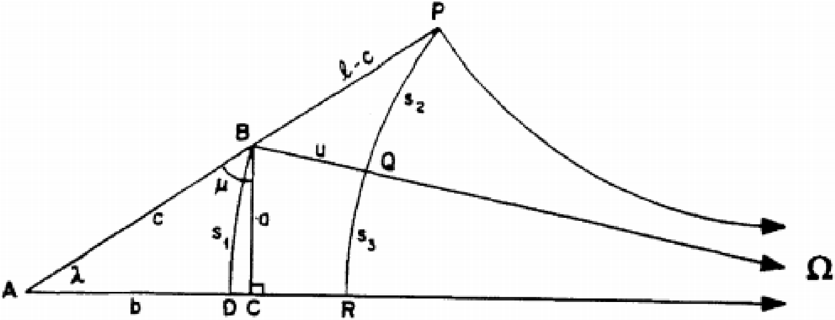
Considere um ponto G sobre h, de forma que A pertença ao arco BG e o arco AG tenha medida S.

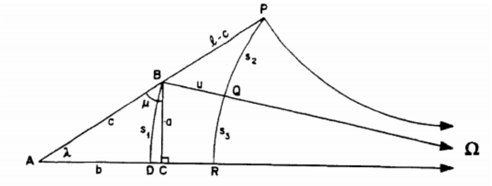
Prova da 2ª parte:
O raio $G\Omega$ pertence à reta $\Omega\Omega''$ e a reta $A\Omega''$ é tangente ao horocírculo h no ponto A.
O ponto H pertence à reta $C\Omega$ tal que CH me de t.
Os triângulos $HC\Omega''$ e $AC\Omega'$ são congruentes, logo $H\Omega'$ é perpendicular a CH.
O horocírculo de centro Ω passando por H tem $H\Omega''$ como reta tangente e o arco entre os pontos H e J tem comprimento S.
A comparação entre os arcos concêntricos BG (de comprimento $S + s$) e HJ (de comprimento S) resulta em:
$S + s = Se^{t-u}$

Corolário:

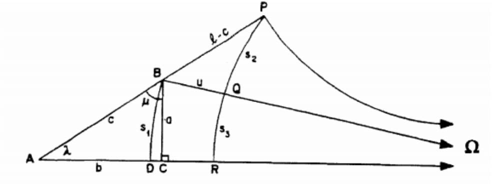
$$e^u = \cosh t$$

$$s = S \operatorname{tgh} t$$

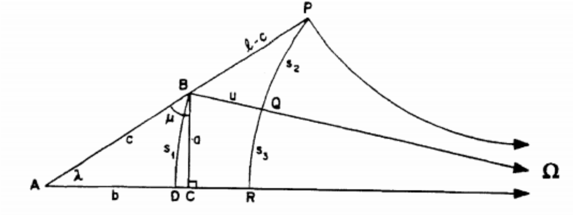

P
ℓ-c
s2
B
u
Q
μ
c
-θ
s1
s3
λ
A
b
D
C
R
Ω



ABC é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C.
a, b e c são os comprimentos dos lados BC, AC e AB.
λ e μ são as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
ℓ é o comprimento cujo ângulo de paralelismo é λ.



P pertence à semi-reta AB de tal forma que AP é igual a ℓ.
Ω é o ponto ideal da semi-reta AC.
$P\Omega$ é perpendicular a AP.
h_1 e h_2 são horocírculos de centro Ω (um passando por B e o outro passando por P)



$$s_1 = S \operatorname{senh} a$$

$$s_1 = s_3 \; e^u$$

$$e^u = \cosh(\ell - c)$$

$$s_2 + s_3 = S \operatorname{tgh} \ell$$

$$s_2 = S \operatorname{tgh} \, (\ell - c)$$

Em um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ e μ, tem-se:

$$\mathrm{senh}(c) = \mathrm{senh}(a)\cosh(l) \text{ e } \mathrm{senh}(c) = \mathrm{senh}(b)\cosh(m)$$

E, mais ainda:

$$\cosh(l) = \mathrm{senh}(c)\,\mathrm{senh}(a')$$

$$\cosh(m) = \mathrm{senh}(c)\cosh(b')$$

$$\cosh(c) = \mathrm{senh}(l)\,\mathrm{senh}(m)$$

$$\cosh(a) = \mathrm{senh}(l)\,\mathrm{senh}(b')$$

$$\cosh(b) = \mathrm{senh}(m)\,\mathrm{senh}(a')$$

Sendo a e a' complementares, b e b' complementares, $\Theta(l) = \lambda$ e $\Theta(m) = \mu$.

Teorema de Pitágoras Hiperbólico: Em um triângulo retângulo de hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b vale

$$cosh(c) = cosh(a)cosh(b)$$