

Geometria Hiperbólica

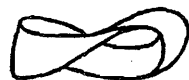
Publicações Matemáticas

Geometria Hiperbólica

3^a impressão

João Lucas Marques Barbosa
Universidade Federal do Ceará

impa



Copyright © 2007 by João Lucas Marques Barbosa
Direitos reservados, 2007 pela Associação Instituto
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger

Publicações Matemáticas

- Introdução à Análise Funcional – César R. de Oliveira
- Introdução à Topologia Diferencial – Elon Lages Lima
- Les Équations Différentielles Algébriques et les Singularités Mobiles – Ivan Pan e Marcos Sebastiani
- Criptografia, Números Primos e Algoritmos – Manoel Lemos
- Introdução à Economia Dinâmica e Mercados Incompletos – Aloísio Araújo
- Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética – Carlos Gustavo Moreira
- Geometria Hiperbólica – João Lucas Marques Barbosa
- Introdução à Economia Matemática – Aloísio Araújo
- Superfícies Míminimas – Manfredo Perdigão do Carmo
- The Index Formula for Dirac Operators: an Introduction – Levi Lopes de Lima
- Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry – Ana Cannas da Silva
- Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes) – Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau Saldanha
- The Contact Process on Graphs – Márcia Salzano
- Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds – Santiago R. Simanca
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Birational Geometry of Foliations – Marco Brunella
- Introduction to Nonlinear Dispersive Equations – Felipe Linares e Gustavo Ponce
- Introdução à Teoria das Probabilidades – Pedro J. Fernandez
- Teoria dos Corpos – Otto Endler
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist – Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito – Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi – Helena J. Nussenzweig Lopes, Milton C. Lopes Filho
- Elements of Analytic Hypoellipticity – Nicholas Hanges
- Métodos Clássicos em Teoria do Potencial – Augusto C. Ponce

Distribuição:

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br <http://www.impa.br>
ISBN: 85-244-0194-X

A meus filhos,
na esperança que um dia eles venham a ler este livro

Agradecimentos

À Comissão Organizadora do Vigésimo Colóquio Brasileiro de Matemática, por haver aceito a proposta deste livro.

Ao Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo constante apoio financeiro, em forma de bolsa de pesquisa, no decurso da elaboração do Estudo.

Ao Dr. Haroldo Vale Lyra, que conseguiu transformar meus rascunhos em lindas figuras.

Ao Professor João Vianey Campos de Mesquita, da Universidade Federal do Ceará, pela revisão criteriosa do texto.

À minha esposa Cira, pelo incentivo que deu à minha dedicação à ciência.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Fundamentos da Geometria euclidiana | 1 |
| 2 | O quinto postulado | 9 |
| 3 | Os precursores | 17 |
| 3.1 | Ptolomeu | 18 |
| 3.2 | Proclus | 19 |
| 3.3 | Nasiredin | 20 |
| 3.4 | Wallis | 22 |
| 3.5 | Saccheri | 23 |
| 3.6 | Lambert | 26 |
| 4 | Alguns teoremas de Legendre | 29 |
| 5 | Descoberta da nova Geometria | 37 |
| 5.1 | Gauss. | 37 |
| 5.2 | Bolyai | 40 |
| 5.3 | Lobachewsky | 44 |
| 6 | A Geometria hiperbólica | 47 |
| 6.1 | Introdução | 47 |
| 6.2 | O quinto postulado da Geometria hiperbólica | 47 |
| 6.3 | Propriedades elementares das paralelas | 52 |
| 6.4 | Propriedades dos triângulos generalizados | 57 |
| 6.5 | O ângulo de paralelismo | 62 |
| 6.6 | Quadriláteros especiais | 64 |
| 6.7 | A soma dos ângulos de um triângulo | 68 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.8 | Pontos ultra-ideais | 72 |
| 6.9 | A variação da distância entre duas retas | 78 |
| 6.10 | Construção de uma paralela | 82 |
| 6.11 | Horocírculos e curvas equidistantes | 92 |
| 6.12 | Área | 102 |
| 7 | A Trigonometria hiperbólica | 111 |
| 7.1 | Introdução | 111 |
| 7.2 | Arcos concêntricos de horocírculos | 111 |
| 7.3 | Sistema de coordenadas | 121 |
| 7.4 | Resolução de triângulos retângulos | 126 |
| 7.5 | Resolução de triângulos quaisquer | 130 |
| 7.6 | A função ângulo de paralelismo revisitada | 133 |
| 8 | Consistência da Geometria hiperbólica | 143 |
| 8.1 | Introdução | 143 |
| 8.2 | Um modelo para a Geometria hiperbólica | 143 |
| 8.3 | Círculos ortogonais | 144 |
| 8.4 | Transformações lineares complexas | 148 |
| 8.5 | A prova do teorema principal | 153 |
| 9 | Bibliografia | 163 |
| | Índice | 165 |

Apresentação

Este livro foi escrito para servir de texto a uma disciplina de Geometria não euclidiana dirigida a alunos de cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Contém o material padrão de um curso de Geometria hiperbólica. Constitui-se numa continuidade natural do livro Geometria euclidiana plana, de nossa autoria, publicado pela SBM, na Coleção do Professor de Matemática.

A descoberta das geometrias não euclidianas é um capítulo fascinante da história da Matemática, que se inicia no próprio momento em que Euclides trouxe a público os *Elementos*, em que apresentava a Geometria euclidiana numa forma axiomática, e só termina na primeira metade do Século XIX.

As tentativas de provar o quinto postulado a partir dos outros, ao longo de tantos séculos, transformaram-se, ao final, no estudo da Geometria absoluta (de Bolyai) e permitiram o entendimento de que havia de fato toda uma família de proposições equivalentes ao quinto postulado, entre as quais o teorema da soma dos ângulos de um triângulo.

O estudo das três hipóteses possíveis para esta soma (igual, maior ou menor do que 180 graus) levou naturalmente à descoberta da Geometria hiperbólica, por Gauss, Lobachewsky e Bolyai.

Tanto esforço despendido redundou não apenas na descoberta da nova Geometria, mas num profundo entendimento das bases sobre as quais ela e a Geometria euclidiana se assentam.

Talvez a descoberta da nova Geometria pudesse ter sido feita em época mais remota se não existissem os preconceitos de que a Geometria euclidiana era a única possível e que era a Geometria do universo. Um preconceito tão forte que impediu Gauss, a figura

dominante do mundo matemático na primeira metade do Século XIX, de publicar os próprios achados sobre o assunto. Deste ponto de vista, a descoberta da Geometria hiperbólica representa uma vitória contra uma concepção euclidiana do mundo.

A apresentação da Geometria hiperbólica neste livro segue, em grande parte, os passos dos seus descobridores. Tenta informar um pouco sobre a história que precedeu a descoberta com o intuito de possibilitar um entendimento maior sobre as conseqüências profundas do quinto postulado na Geometria euclidiana. A inclusão de cinco capítulos sobre o assunto não deve ser considerada um exagero. O aluno médio precisa de um tempo adequado para aceitar as novas idéias!... De fato, dois destes capítulos são exclusivamente sobre os personagens que estiveram envolvidos naquela descoberta e se constituem apenas em material de leitura auxiliar para um curso em que este livro venha a ser adotado.

Nos três últimos capítulos fazemos a apresentação propriamente dita da Geometria hiperbólica.

Fortaleza, julho de 1995
João Lucas Marques Barbosa

1

Fundamentos da Geometria euclidiana

A Geometria é uma ciência muito antiga. Conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como a conhecemos, podemos estabelecer o seu ponto inicial na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os *Elementos* (por volta do ano 300 a.C.).

Euclides e seus predecessores reconheceram o que, nos dias de hoje, todo estudante de Filosofia sabe: que não se pode provar tudo. Na construção de uma estrutura lógica, uma ou mais proposições devem sempre ser admitidas como axiomas a partir dos quais todas as outras são deduzidas.

Pelo tempo de Euclides, o que hoje chamamos de Geometria euclidiana estava totalmente desenvolvido. De fato, o trabalho de Euclides foi aquele de um compilador que reuniu os teoremas conhecidos, já demonstrados por seus predecessores, e os colocou em único texto com uma apresentação unificada. Segundo os que analisaram profundamente a obra de Euclides, os *Elementos* foram escritos visando a apresentar a teoria dos sólidos de Platão e a dos números racionais de Teteto, consideradas duas das grandes contribuições dos gregos à Matemática.

Euclides ficou famoso pela concepção do livro em si, considerado como o primeiro tratado científico, modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas.

Os dez axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: as *noções comuns* e os *postulados*. A distinção entre eles não é muito clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como

hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou admissíveis por qualquer pessoa inteligente, enquanto que os postulados seriam hipóteses peculiares da Geometria.

1. Noções comuns

- (a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- (b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- (c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- (d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- (e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

2. Postulados

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- IV. Todos os ângulos retos são iguais.
- V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

De fato, estes enunciados não coincidem exatamente com aqueles apresentados nos *Elementos*. Fizemos algumas alterações para que estes representem a forma pela qual Euclides realmente os utilizou nas demonstrações dos teoremas. As alterações foram incluídas entre parênteses.

Na verdade Euclides fez uso de outras hipóteses não mencionadas nas listas da página anterior. Entre elas podemos destacar as seguintes:

- a) Retas são conjuntos ilimitados.
- b) Vale o axioma de Pasch: sejam A , B e C três pontos não colineares e seja m uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se m corta o segmento AB , então ela também corta o segmento AC ou o segmento CB .
- c) As retas são contínuas (ou seja, em cada reta vale o axioma de Dedekind).

Vamos comentar apenas a hipótese (b). O postulado 2, asseverando que um segmento de reta pode ser continuamente continuado em uma reta, não assegura que retas sejam ilimitadas. Entretanto, Euclides inconscientemente assumiu este fato. Um exemplo importante de uma proposição em cuja prova esta hipótese é tacitamente assumida é o teorema do ângulo externo.

PROPOSIÇÃO I, 16. *Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado é sempre maior do que qualquer dos ângulos internos que não lhe sejam adjacentes.*

Prova. Seja ABC um triângulo. Continue o segmento BC até um ponto D (de modo que C seja agora um ponto do segmento BD). Vamos provar que

$$\hat{A}CD > \hat{B}AC.$$

Para isto, considere o ponto médio E do segmento AC e trace a semi-reta com origem B passando pelo ponto E até um ponto F

tal que $BE = EF$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos, tem-se $\angle BEA = \angle FEC$. Como consequência,

$$\hat{A}CF = \hat{B}AC .$$

Mas,

$$\hat{A}CD > \hat{A}CF .$$

Logo,

$$\hat{A}CD > \hat{B}AC .$$

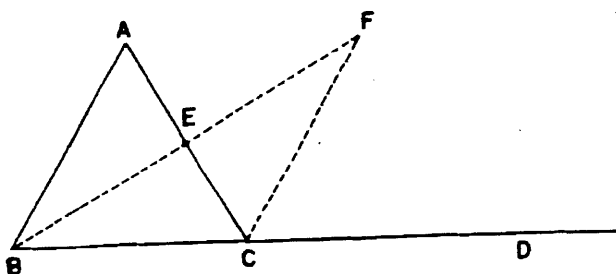


Figura 1

Observe que esta prova só vale porque a reta é ilimitada. Por exemplo, ela não é válida para triângulos esféricos quaisquer.

O leitor interessado em aprender mais sobre os fundamentos da Geometria deve ler uma das versões atuais dos *Elementos* [E], em que o texto de Euclides é intercalado com críticas e comentários. Deve também ler o livro Escrito por Hilbert [Hi], que estabeleceu definitivamente o conjunto de axiomas completo para a Geometria euclidiana.

Hilbert teve o cuidado (segundo Euclides) de apresentar um conjunto minimal de axiomas, isto é, de não incluir axiomas redundantes. Ao longo deste Século, muitos textos de Geometria foram escritos em que a preocupação de apresentar um conjunto minimal de axiomas foi substituída pelo desejo de tornar o texto mais

agradável aos iniciantes. Um exemplo típico é o livro que escrevemos para alunos de cursos de licenciatura em Matemática e que foi publicado pela SBM.

Ao escrever os *Elementos*, Euclides introduziu os postulados um a um, na ordem aqui apresentada. De fato, mesmo um exame superficial do livro I daquela obra revela que ele está dividido em três partes (embora Euclides não estabeleça formalmente esta divisão). As primeiras 26 proposições tratam da teoria elementar dos triângulos. Começando com a proposição 27, é apresentada a teoria das paralelas, que vai até a proposição 34, onde se inicia a terceira parte. Nesta, a noção de área de paralelogramos e triângulos culmina com o Teorema de Pitágoras.

É importante observar que o quinto postulado só é utilizado a partir da proposição 29, sendo as primeiras 28 proposições válidas em qualquer Geometria onde sejam assumidos os quatro primeiros postulados. Vamos apresentar a seguir as proposições 27, 28 e 29 dos *Elementos*.

PROPOSIÇÃO I, 27. *Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais, então, as duas retas são paralelas.*

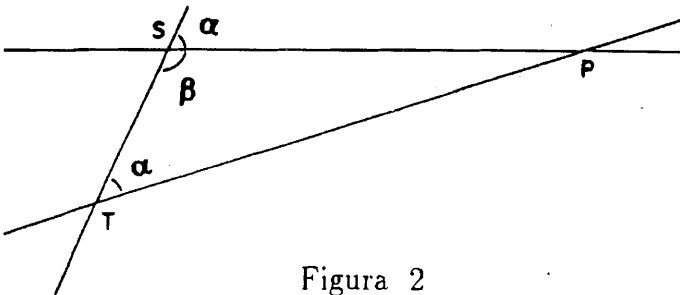


Figura 2

Prova. A demonstração desta proposição é uma simples consequência do teorema do ângulo externo. Se as duas retas se encontrassem, forma-se-ia um triângulo com um ângulo externo igual a um dos ângulos internos não adjacentes. \square

PROPOSIÇÃO I, 28. *Uma reta corta duas outras formando ângulos designados como na figura seguinte. Se $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos, então, as duas retas são paralelas.*

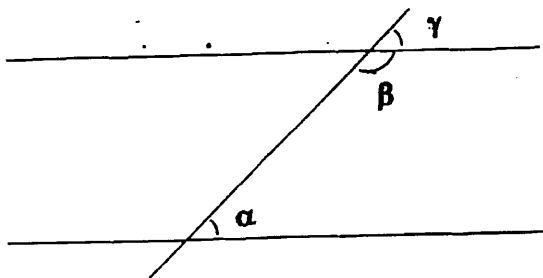


Figura 3

Demonstrar esta proposição é simples. Considere os ângulos da figura acima. Observe que $\alpha + \beta = 180^\circ$ se, e somente se, $\alpha = \gamma$. \square

Neste ponto vamos comparar esta proposição com o quinto postulado de Euclides. Em termos da notação acima, ele poderia ser reescrito como

POSTULADO V. *Uma reta corta duas outras formando ângulos designados como na figura acima. Se $\alpha + \beta$ for diferente de dois ângulos retos, então as duas retas se encontram.*¹

Assim, o quinto postulado é a afirmação inversa da proposição 28 do livro I dos *Elementos*. A próxima proposição é a primeira em que Euclides usa o quinto postulado.

PROPOSIÇÃO I, 29. *Quando uma reta corta duas paralelas formam-se ângulos correspondentes iguais.*

¹De fato, Euclides também afirma que as retas se encontram do lado em que estão os ângulos α e β . Mas isto decorre do teorema do ângulo externo.

Prova. Ainda usando a figura anterior, temos duas retas paralelas e uma transversal formando com elas ângulos α , β e γ como indicados. Devemos provar que $\alpha = \gamma$. Suponha que tal não ocorra. Segue-se que $\alpha + \beta$ é diferente de dois ângulos retos. Mas então, pelo quinto postulado, as duas retas se encontram, o que contradiz nossa hipótese. Logo $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos e, conseqüentemente, $\alpha = \gamma$. \square

Existem evidências históricas de que o quinto postulado se tornou o principal alvo de crítica aos *Elementos* ainda no tempo de Euclides. Mesmo numa leitura superficial, o quinto postulado apresenta-se muito diferente dos demais, até pelo seu tamanho. Tecnicamente, como observamos, ele é a inversa da proposição 28, e, por isto mesmo, foi considerado desde o início como uma proposição que Euclides não conseguira demonstrar.

Dois mil anos decorreram ao longo dos quais inúmeras tentativas foram feitas de completar os *Elementos* demonstrando o quinto postulado. De fato, mesmo nos nossos dias, vez por outra, ainda aparecem pessoas nos departamentos de Matemática, com longos manuscritos, afirmando que, finalmente, obtiveram a tão almejada prova. Como veremos, isto é impossível.

Exercícios

1. Prove cada um dos exercícios seguintes, indicando quais deles dependem do quinto postulado.
 - (a) Por um ponto, fora de uma reta, sempre passa uma reta que não intercepta a reta dada.
 - (b) Uma reta que encontra uma de duas paralelas, encontra também a outra.
 - (c) Duas retas são paralelas se possuem uma perpendicular comum.
 - (d) Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra.

- (e) Retas paralelas são eqüidistantes.
 - (f) Existem retângulos.
 - (g) Existem quadrados.
 - (h) Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.
 - (i) Lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
 - (j) Dois triângulos retângulos são semelhantes se um ângulo agudo de um for igual a um ângulo agudo do outro.
 - (k) Existem triângulos semelhantes e não congruentes.
2. Prove os exercícios seguintes sem usar, direta ou indiretamente, o quinto postulado.
- (a) Existem triângulos congruentes.
 - (b) No máximo um ângulo em um triângulo pode ser obtuso.
 - (c) Existem triângulos eqüiláteros.

2

O quinto postulado

Uma das conseqüências da busca de uma prova do quinto postulado foi a produção de grande número de afirmações a ele equivalentes, o que chamamos de *substitutos*. É importante que entendamos o que significa afirmar que uma determinada proposição \mathcal{P} é um substituto do quinto postulado: quer dizer que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição \mathcal{P} coincide com a Geometria de Euclides.

A maneira de provar que uma proposição \mathcal{P} é um substituto para o quinto postulado é a seguinte: primeiramente, devemos saber que \mathcal{P} é uma proposição da Geometria euclidiana. Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais \mathcal{P} , pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição¹.

O substituto mais conhecido é o seguinte:

POSTULADO V_1 (Axioma de Playfair) *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

De fato esta é a formulação mais conhecida do quinto postulado, constando na maioria dos livros-texto de Geometria. Ela é comumente atribuída ao geômetra Playfair. Na Geometria euclidiana a afirmação acima pode facilmente ser deduzida. Por um lado, dados uma reta m e um ponto P fora de m , é conseqüência dos quatro

¹Devemos assumir todos os axiomas utilizados por Euclides, exceto o quinto, inclusive os que não constaram de sua lista nos *Elementos*.

primeiros postulados que existe uma reta m' paralela a m e passando por P , sendo a sua construção (baseada na Proposição I, 27) a seguinte: trace a reta n perpendicular à m passando por P e, a partir de P , a reta m' perpendicular a n . Então m' é paralela a m .

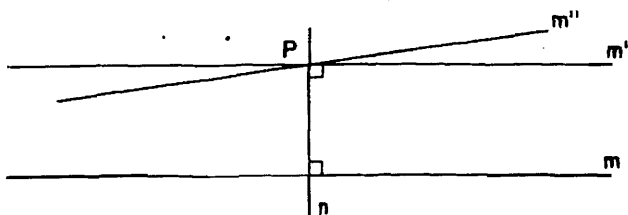


Figura 4

Para provar a unicidade, supomos que exista outra paralela à reta dada, digamos m'' passando pelo ponto P . Esta reta forma um ângulo agudo com n . Logo, por V concluímos que m'' intercepta m . Este absurdo prova o resultado.

Agora teremos de provar que V é uma proposição na teoria desenvolvida a partir dos quatro postulados de Euclides mais o V_1 . Para isto faremos uso da Figura seguinte, onde vamos supor que $\alpha + \beta$ é menor do que dois ângulos retos e que as duas retas m e m' são paralelas.

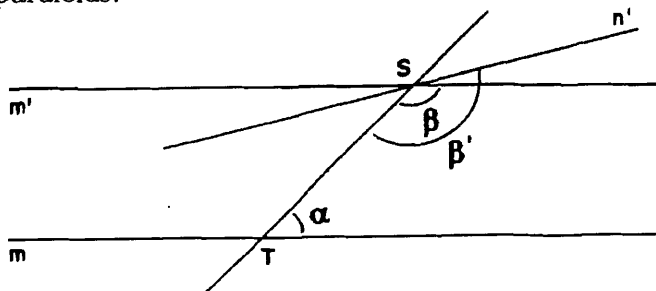


Figura 5

Traçamos pelo ponto S uma reta n' formando um ângulo β' tal que $\alpha + \beta'$ seja igual a dois retos. De acordo com a Proposição 27, esta nova reta é paralela à reta m . Mas, então, teremos duas retas

distintas passando pelo ponto S e paralelas a uma mesma reta, o que é absurdo segundo V_1 . Isto completa nossa prova.

Vamos apresentar a seguir vários outros equivalentes, selecionados com o objetivo de exibir a profundidade das repercussões do quinto postulado na Geometria euclidiana.

POSTULADO V_2 . *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*

Este é o enunciado clássico do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. Como todos sabemos, ele faz parte da Geometria euclidiana. Assim, para provar sua equivalência ao quinto postulado, é suficiente provar que, na teoria desenvolvida a partir dos quatro primeiros postulados e mais V_2 , pode-se provar o quinto postulado de Euclides ou o axioma de Playfair. Para isto, vamos necessitar dos dois lemas seguintes.

LEMA 1. *Um ângulo externo de um triângulo é sempre igual à soma dos dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

LEMA 2. *Por um ponto P , pode-se sempre traçar uma reta, formando, com uma reta dada, ângulo menor do que qualquer número positivo prefixado.*

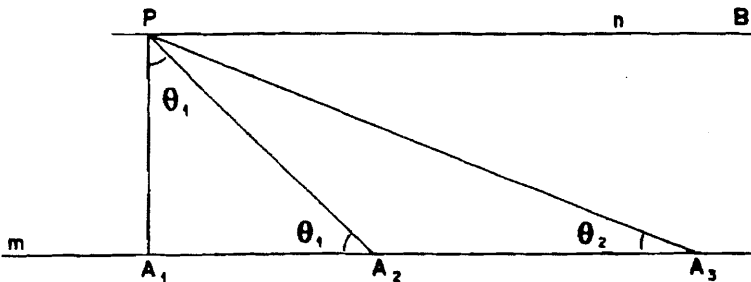


Figura 6

Prova. A prova do Lema 1 é trivial, já que estamos supondo ser a soma dos ângulos de qualquer triângulo igual a dois ângulos retos.

Para provar o Lema 2, consideremos um ponto P , uma reta m e a perpendicular baixada de P a m , cujo pé será representado por A_1 . Sobre m , seja A_2 o ponto tal que $A_1A_2 = PA_1$. O triângulo PA_1A_2 é isósceles com ângulo da base θ_1 medindo metade de um ângulo reto. Marcamos outro ponto A_3 , como na figura, tal que $A_2A_3 = PA_2$. Como no caso anterior, o ângulo da base deste triângulo será $\theta_2 = \theta_1/2$. Este argumento pode ser repetido quantas vezes se queira obtendo-se, na etapa de ordem n , um ângulo

$$\theta_n = \theta_1/2^{n-1} .$$

É então claro que, dado qualquer número positivo ϵ , podemos escolher n suficientemente grande tal que $\theta_n < \epsilon$. \square

Estamos agora preparados para provar que, se a soma dos ângulos de qualquer triângulo é dois ângulos retos, então, por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela a uma reta dada. De fato, sejam P um ponto e m uma reta. A perpendicular à reta m passando por P intercepta m no ponto A_1 . Sabemos como construir uma reta paralela à reta m passando pelo ponto P : basta tomar a reta n perpendicular ao segmento PA_1 passando por P .

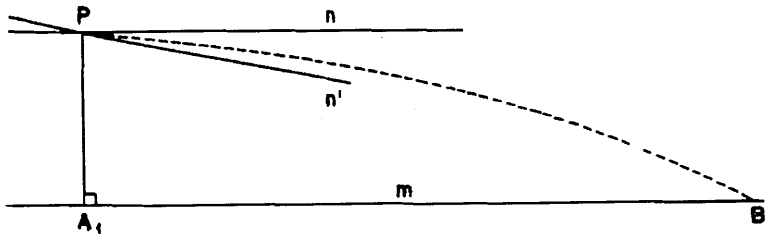


Figura 7

Seja n' qualquer outra reta que passa pelo ponto P . Seja ϵ o ângulo entre n e n' . A reta n' forma com o segmento PA_1 um

ângulo α complementar de ε . Observamos que, de acordo com o Lema 2, podemos traçar uma reta pelo ponto P que intercepta m em um ponto B , formando um ângulo menor do que ε .

Então o triângulo PA_1B , que é retângulo em A_1 , tem o ângulo em P maior do que α . Portanto, a reta n' entra no triângulo PA_1B pelo vértice P e, pelo axioma de Pasch, corta o lado oposto que é o segmento A_1B . Portanto, não é paralela a m . Isto completa a demonstração. \square

POSTULADO V_3 . *Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.*

É claro que existem tais triângulos na Geometria de Euclides e, assim, para provar a equivalência entre este e o quinto postulado, é suficiente provar que, na Geometria desenvolvida usando este, é possível deduzir-se o quinto postulado de Euclides ou qualquer um dos seus equivalentes mencionados.

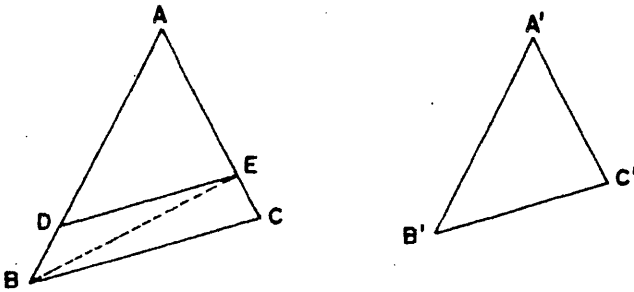


Figura 8

Sejam ABC e $A'B'C'$ os dois triângulos mencionados no Postulado V_3 . Suponha que os vértices foram nomeados de modo que se tenha $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{B} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{C}$. Vamos supor, também, que $AB > A'B'$. No segmento AB , marcamos um ponto D , de modo que $AD = A'B'$ e, no segmento AC , marcamos um ponto E tal

que $AE = AC'$. Assim, o triângulo ADE é congruente ao triângulo $A'B'C'$. É agora imediato mostrar que o quadrilátero $DECB$ tem soma dos ângulos internos igual a quatro ângulos retos.

Para concluir a demonstração, vamos precisar das seguintes posições, devidas a Legendre, cujas provas não dependem do quinto postulado e que serão apresentadas no próximo capítulo.

PROPOSIÇÃO L1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos.*

PROPOSIÇÃO L2. *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é dois ângulos retos, então, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.*

Tratando-se a reta BE , dividimos o quadrilátero $DECB$ em dois triângulos. Observe que a soma dos ângulos internos dos dois é igual à soma dos ângulos internos do quadrilátero, que já sabemos ser quatro ângulos retos. Como consequência da Proposição L1, conclui-se que a soma dos ângulos de qualquer um dos dois triângulos é igual a dois ângulos retos. Pela Proposição L2, vale o postulado V_2 , o qual, já sabemos, implica no quinto postulado de Euclides. \square

POSTULADO V_4 . *Existe um par de retas eqüidistantes.*

Uma vez que o quinto postulado de Euclides esteja em uso, sabe-se que as retas paralelas são também eqüidistantes. Por outro lado, se V_4 for adotado, podemos deduzir o quinto postulado mostrando que existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos.

De fato, se m e n são as duas retas eqüidistantes, de pontos O e Q na reta n , baixe perpendiculares à reta m e designe por P e R , respectivamente, os pés destas perpendiculares. De um ponto qualquer S do segmento PR , baixe uma perpendicular ST à reta n . Por hipótese,

$$PO = ST = RQ .$$

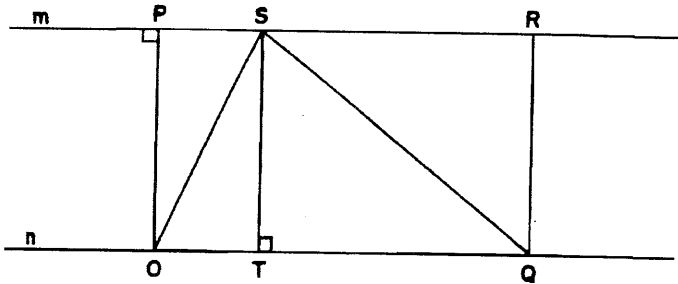


Figura 9

Por construção, os triângulos OPS , STO , SRQ e QTS são retângulos. É fácil ver que os dois primeiros e os dois últimos são congruentes, de onde se segue que:

$$T\hat{O}S = P\hat{S}O \quad \text{e} \quad T\hat{Q}S = Q\hat{S}R.$$

Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo OSQ é igual a dois ângulos retos, já que:

$$\begin{aligned} T\hat{O}S + O\hat{S}Q + S\hat{Q}T &= P\hat{S}O + O\hat{S}Q + Q\hat{S}R \\ &= P\hat{S}R = 180^\circ. \end{aligned}$$

Muitos outros substitutos são possíveis para o quinto postulado. Vamos citar mais alguns cuja prova da equivalência é deixada a cargo do leitor:

POSTULADO V_5 . *Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.*

POSTULADO V_6 . *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.*

POSTULADO V_7 . *Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.*

Estes sete substitutos têm sua própria importância e servem para mostrar a não trivialidade do quinto postulado na Geometria euclidiana. Suas conseqüências incluem as proposições mais conhecidas e mais utilizadas da Geometria. Sem ele, ou um de seus equivalentes, não teríamos o teorema da soma dos ângulos de um triângulo, toda a teoria dos triângulos semelhantes e, conseqüentemente, a Trigonometria, deixaria de existir, e o tratamento dado por Euclides para o conceito de área teria de ser amplamente revisto. Nós iremos abandonar o quinto postulado e substituí-lo por uma proposição que lhe será contraditória. A Geometria que será obtida, pelo que vimos, deverá ser bastante exótica.

Exercícios

1. Prove que V_5 é um substituto do quinto postulado de Euclides.
2. Prove que V_6 é um substituto do quinto postulado de Euclides.
3. Prove que V_7 é um substituto do quinto postulado de Euclides.
4. Considere as seguintes afirmações:

V_8 . *Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

V_9 . *Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.*

V_{10} . *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta a outra.*

V_{11} . *Existem duas retas e um número α com a propriedade de que a distância de qualquer ponto da primeira à segunda é menor do que α .*

Prove que cada uma delas é um substituto do quinto postulado de Euclides.

Os precursores

Grande parte das informações que temos hoje sobre a história da Geometria grega nos chegou através da obra de Proclus¹, filósofo, matemático e historiador (410-485). Ele relata que, mesmo na época de Euclides, foram feitas tentativas de provar o quinto postulado como um teorema ou de livrar-se dele através da adoção de outra definição de retas paralelas. Ao longo dos séculos, estas tentativas continuaram com a participação de praticamente todos os grandes matemáticos, que viveram até o século XIX. Para dar um exemplo, o livro *Saggio di una bibliografia Euclideana*, Parte IV, Bolonha 1890, apresenta 24 páginas de títulos de monografias relativas ao quinto postulado publicadas entre os anos 1607 e 1887. Vamos apresentar a seguir algumas destas tentativas.

Antes de iniciar, esclarecemos que todas as informações históricas contidas neste volume foram obtidas das seguintes fontes:

1) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traduzido do texto de Heiberg, com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath, Dover Publications Inc., segunda edição (1956).

2) *Non-Euclidean Geometry*, a Critical and Historical Study of its Development, por Robert Bonola, Dover Publications Inc., (1955).

3) *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, por H. E. Wolfe, Holt Rinehart and Winston (1945).

Entretanto, em várias ocasiões, para benefício do leitor, estaremos mencionando, em notas de roda-pé ou mesmo no texto, referências que foram usadas como fontes nos livros a que nos referi-

¹ Edição de G. Friedlein: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, (Leipzig, Teubner, 1873).

mos.

3.1 Ptolomeu

Segundo Proclus, Euclides viveu durante o reinado do primeiro Ptolomeu que escreveu um livro sobre o quinto postulado, incluindo uma prova dele. Proclus, nos comentários sobre o livro I dos *Elementos*, afirma: *...ele (o quinto postulado) deveria ser retirado completamente da relação dos postulados, pois é um teorema difícil, o qual Ptolomeu propôs-se a demonstrar, Sua inversa foi, de fato, estabelecida por Euclides como um teorema.* Proclus não reproduz a prova de Ptolomeu, mas, por seus comentários, pode-se inferir que ela deve ter sido algo como a que apresentamos a seguir.

Inicialmente, considere duas retas cortadas por uma transversal, formando ângulos nomeados como na figura abaixo

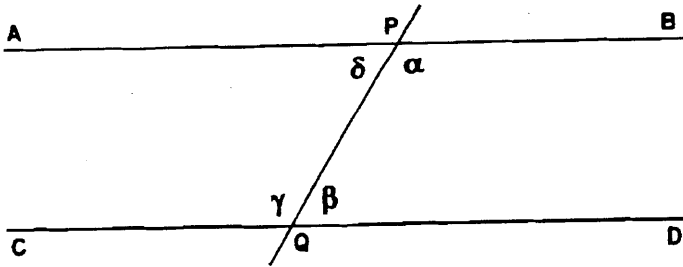


Figura 10

Se $\alpha + \beta = 180^\circ$, então, também teremos $\gamma + \delta = 180^\circ$. É, então, fácil concluir que $\alpha = \gamma$ e que $\beta = \delta$. Logo, a figura $R_{\alpha\beta}$, formada pelas semi-retas S_{PB} e S_{QD} e pelo segmento PQ , é congruente à figura $R_{\gamma\delta}$, formada pelas semi-retas S_{PA} e S_{QC} e pelo segmento PQ . Daí se segue que, se as duas retas se interceptam de um lado da reta que passa por PQ , então, também se interceptam do outro lado. Neste caso, teríamos duas retas distintas com dois pontos comuns, o que é absurdo.

Como vemos, esta parte do raciocínio de Ptolomeu é perfeita e oferece alternativa para provar a Proposição I, 28 sem fazer uso do teorema do ângulo externo. Agora, seguindo a mesma idéia, ele tentou oferecer a demonstração para o quinto postulado.

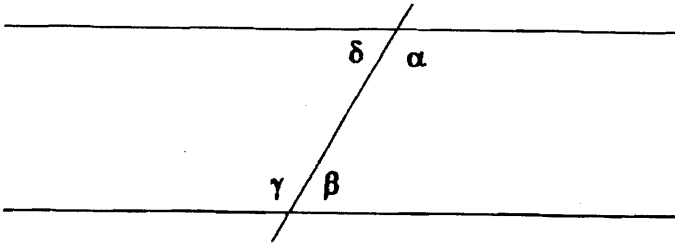


Figura 11

Considere duas retas cortadas por uma transversal, como na figura acima, mas, agora, suponha que as duas retas são paralelas. Segue-se daí que as figuras $R_{\alpha\beta}$ e $R_{\gamma\delta}$ são congruentes, já que não pode haver diferença entre o paralelismo em uma direção do paralelismo na outra direção. Como conseqüência, concluiu-se que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ e daí, trivialmente, que qualquer uma destas somas vale 180° .

De fato, assumindo a congruência entre as duas figuras, o leitor não terá dificuldade de escrever todos os detalhes desta demonstração. O erro de Ptolomeu foi exatamente assumir que paralelismo acarreta na congruência das duas figuras. Como veremos, isto só ocorre na Geometria Euclidiana.

3.2 Proclus

O próprio Proclus indicou a falácia no argumento de Ptolomeu e propôs uma demonstração. Sua idéia era provar que, se uma transversal corta uma de duas paralelas, então, corta também a segunda. O leitor é desafiado a demonstrar como exercício que esta afirmação é um substituto para o quinto postulado. O argumento de Proclus era o seguinte.

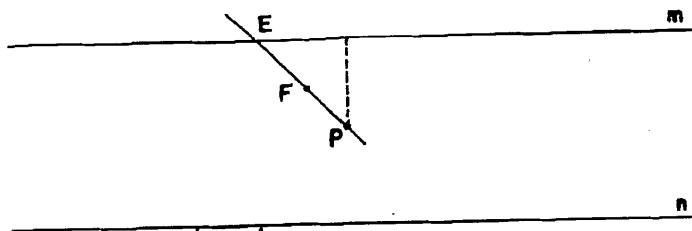


Figura 12

Sejam duas retas paralelas m e n . Considere uma reta que corta m no ponto E , e seja F um ponto desta reta na região limitada pelas duas retas paralelas. Seja P um ponto da semi-reta S_{EF} . Designe por $d(P, m)$ a distância deste ponto à reta m . Esta é uma função do ponto P , que cresce à proporção que PE cresce. De fato, esta distância pode tornar-se maior do que qualquer número prefixado e, portanto, eventualmente, torna-se maior do que a distância entre as retas m e n . Mas, então, S_{EF} corta n .

Como o leitor pode verificar, o raciocínio de Proclus está correto, desde que admitamos que retas paralelas são equidistantes. Mas, vimos que a existência de retas equidistantes é equivalente à adoção do quinto postulado.

3.3 Nasiredin

Os árabes sucederam os gregos como líderes nas descobertas matemáticas. Como eles, também investigaram o quinto postulado. Nasiredin (Nasir-Edin), (1201-1274), astrônomo e matemático persa, editor de uma versão dos *Elementos* de Euclides, em árabe, escreveu um tratado sobre os Postulados de Euclides², no qual observou pela primeira vez a importância do teorema da soma dos ângulos de um triângulo em relação ao quinto postulado. Em sua

²Conforme: *Euclidis elementorum libri XII studii Nassiredini*, Roma (1594). Este trabalho foi escrito em árabe, republicado em 1657 e 1801, mas, infelizmente, nunca foi traduzido para qualquer outra língua.

tentativa de prova, encontramos o gene de idéias importantes que seriam desenvolvidas muito depois de seu tempo.

Nasiredin primeiramente supôs, sem demonstração, a validade da seguinte afirmação:

AXIOMA: Sejam m e n duas retas, A um ponto de m , B um ponto de n , tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m . Então as perpendiculares baixadas de m à reta n , do lado do ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB .

Nasiredin usou, então, este axioma para deduzir o quinto postulado³. Para isto, utilizou-se de uma figura que veio a se tornar famosa, associada ao nome de outro matemático.

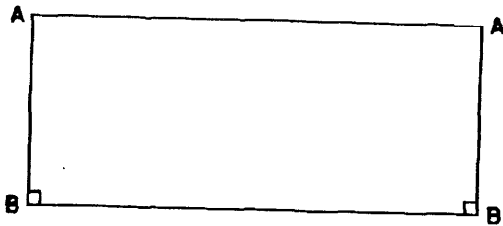


Figura 13

Ele considerou um quadrilátero $ABB'A'$ em que os ângulos \hat{B} e \hat{B}' são retos e em que $AB = A'B'$. Utilizando o método de *reductio ad absurdum*, e, sem muito cuidado, o axioma acima, ele concluiu que os ângulos \hat{A} e \hat{A}' são também retos. Para isto, supôs inicialmente que o ângulo \hat{A} fosse agudo, deduzindo, então, que $AB > A'B'$, o que é absurdo. O mesmo tipo de prova mostra que este ângulo não pode ser obtuso. Daí o resultado.

³A demonstração de Nasiredin é reproduzida no volume II da obra de J. Wallis: *De Postulato Quinto; et Definizione Quinta; Lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica*, Opera Math. Oxford, 1693.

Observe que aqui Nasiredin usou, sem se aperceber, que se o ângulo \hat{A} for agudo, então, o ângulo \hat{B} deve ser obtuso. De fato, como veremos, é uma conseqüência dos quatro primeiros postulados o fato de estes dois ângulos serem congruentes. Continuando o argumento de Nasiredin, o quadrilátero $ABB'A'$ tem os quatro ângulos internos retos e os lados opostos congruentes. É, portanto, um retângulo. Traçando uma diagonal, o dividimos em dois triângulos retângulos congruentes. Daí ele conclui pela existência de um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° fato que sabemos acarretar a validade do quinto postulado.

3.4 Wallis

As primeiras versões dos *Elementos* feitas nos séculos XII e XIII, baseadas em textos árabes, e as elaboradas no século XV e início do século XVI, com base em textos gregos, não continham qualquer nota crítica relativa ao quinto postulado. Tais críticas apareceram somente depois do ano 1550, principalmente sob a influência dos *Comentários de Proclus*⁴. Nos séculos XVI e XVII, entre os que escreveram trabalhos críticos sobre o quinto postulado, e que tentaram a prova-lo, deve-se citar F. Comandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537-1612), P. A. Cataldi (?-1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), e J. Wallis (1616-1703). Todos eles, excetuando Wallis, trabalharam a idéia de retas eqüidistantes.

J. Wallis abandonou a idéia de eqüidistancia, empregada sem sucesso pelos matemáticos que o precederam, e apresentou nova demonstração do quinto postulado. Ele baseou seus argumentos no seguinte axioma: dado um triângulo, é possível construir-se um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes.

Foi a seguinte a prova de Wallis. Dados segmentos AB e CD cortados pela transversal EF em pontos G e H , respectivamente,

⁴Os *Comentários de Proclus* foram impressos pela primeira vez em Basle (1533), e, posteriormente, em Padua (1560) na tradução latina de Barozzi.

suponha que

$$\hat{B}GH + \hat{G}HD < 180^\circ .$$

Devemos provar que as retas que passam por A e B , e por C e D se encontram. É fácil ver que

$$\hat{E}GB > \hat{G}HD .$$

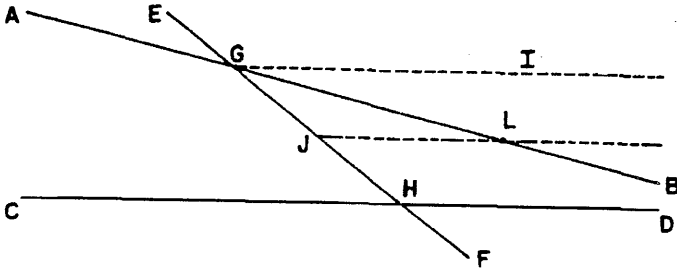


Figura 14

Se o segmento HG for deslocado ao longo da reta que passa por E e F , mantendo HD rigidamente a ele ligado, até que H coincida com a posição inicial de G , então HD tomará uma posição GI ficando inteiramente acima de GB . Portanto, durante este movimento, HD deve, em algum momento, cortar GB em um ponto, digamos L . Seja J a posição do ponto G neste instante. Formamos, assim, um triângulo GJL . Agora construa um triângulo semelhante a GJL , tendo GH como lado correspondente a GJ . É evidente, agora, que as duas retas devem se encontrar.

3.5 Saccheri

Em 1889, foi descoberto um livro que havia sido publicado em Milão em 1733, escrito por Girolamo Saccheri (1667-1733), um padre jesuíta professor da Universidade de Pavia. O livro era intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus*⁵. Nele, Saccheri apresentava uma

⁵O título completo do livro era: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Postulate*. O livro era

tentativa de prova do quinto postulado. Sua contribuição é considerada mais importante do que todas as anteriores, por ter sido a primeira a contemplar a possibilidade de hipóteses outras que a de Euclides e trabalhar um grande número de suas conseqüências. Por isto, Saccheri é considerado o precursor de Legendre, Lobachewsky e Riemann.

Enquanto ensinava Gramática e estudava Filosofia em Milão, Saccheri leu os *Elementos* de Euclides tendo ficado particularmente impressionado pelo seu uso do método de prova pela redução a um absurdo. Este método consiste em assumir, como hipótese, que a proposição a ser demonstrada é falsa; se uma contradição resultar ao longo das deduções feitas utilizando esta hipótese, conclui-se que a proposição é verdadeira. Posteriormente, antes de ir para Pavia, Saccheri lecionou Filosofia na Universidade de Turim. Como fruto desta experiência, publicou, em 1697, um tratado de lógica - *Logica Demonstrativa* - cuja inovação era a aplicação do método usado por Euclides no tratamento da Lógica Formal.

Foi, então, muito natural que ele tivesse utilizado o seu conhecimento de Lógica, e nesta, o seu método favorito, na tentativa de demonstrar o quinto postulado. Segundo se tem notícia, foi o primeiro que tentou demonstrá-lo através de sua substituição por um outro que lhe fosse contraditório. Saccheri estava bem preparado para efetuar esta tentativa. Por um lado, ele dominava muito bem a ferramenta lógica necessária. Por outro, tinha familiaridade com o trabalho dos que haviam tentado provar o quinto axioma, tendo, inclusive, indicado as falhas nas provas de Nasiredin e de Wallis.

Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, em que os lados AB e DC são congruentes e perpendiculares ao lado BC . Usando apenas os quatro primeiros postulados, provou que os ângulos em C e D são congruentes. A validade do quinto postulado é equivalente a assumir que estes ângulos são retos. Em geral, existem três hipóteses

dividido em duas partes: a primeira e mais importante, foi traduzida para o inglês: *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicated* (Halsted, Chicago, 1920).

para estes ângulos. São:

1. retos,
2. obtusos,
3. agudos.

Saccheri assumiu a negação da hipótese (1) e estudou as conseqüências das duas outras, na busca por contradições. Entre suas conclusões, devemos destacar as seguintes:

1. *se uma das hipóteses é verdadeira para um único quadrilátero do tipo considerado, então, é verdade para todos tais quadriláteros;*
2. *nas hipóteses (1), (2) e (3) consideradas, a soma dos ângulos dos triângulos é, respectivamente, igual, maior e menor do que 180° ;*
3. *se existe um único triângulo para o qual a soma dos ângulos é igual a, maior do que, ou menor do que 180° , então, vale, respectivamente, a hipótese (1), (2) ou (3);*
4. *duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas.*

Assumindo, como Euclides, que a reta é ilimitada, Saccheri não teve dificuldade de descartar a hipótese (2). Entretanto, ao procurar uma contradição no caso da hipótese (3), provou uma longa série de resultados, alguns dos quais viriam a se tornar teoremas clássicos da Geometria não euclidiana. No final Saccheri concluiu que aquela hipótese acarretava a existência de duas retas assintóticas possuidoras de uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito. Aparentemente, Saccheri não estava convencido de que havia chegado realmente a uma contradição, tanto que tentou uma segunda prova, também sem sucesso.

Se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia uma contradição para ser encontrada, a descoberta da Geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes. Seu trabalho é admirável e, retirados o final e alguns pequenos defeitos, o resto é uma prova inequívoca de que Saccheri possuiu grande intuição geométrica e profundo conhecimento de Lógica. Ele foi, sem dúvida, o primeiro a ter um vislumbre das geometrias possíveis, mesmo sem saber disto.

3.6 Lambert

G.S.Klügel publicou, em 1763, um trabalho⁶ em que examinava trinta pseudo-demonstrações do quinto postulado. Este trabalho é interessante, principalmente por sua conclusão, expressando, talvez pela primeira vez, dúvidas sobre a possibilidade de se obter uma demonstração do famoso postulado, e observando que a certeza que se tinha, naquela época, da validade da hipótese Euclidiana não provinha de uma série de deduções rigorosas e sim de observações experimentais.

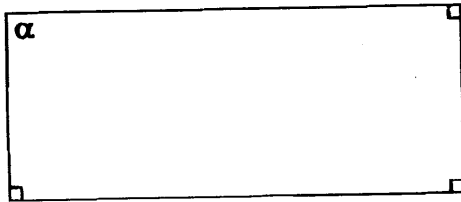


Figura 15

Esta obra teve o grande mérito de ter chamado a atenção de Johann Heinrich Lambert (1728-1777) para a teoria das paralelas. Seu trabalho *Theorie der Parallellinien* foi escrito em 1766 e publicado,

⁶O trabalho de Klügel era denominado *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*.

após sua morte, por G. Bernoulli e C.F.Hindenburg⁷.

Há uma grande semelhança entre este trabalho e o de Saccheri. Lambert escolheu para sua figura fundamental um quadrilátero com três ângulos retos. Ele considerou três hipóteses a respeito do quarto ângulo: (1) hipótese do ângulo reto, (2) hipótese do ângulo obtuso e (3) hipótese do ângulo agudo. Como a hipótese (1) é equivalente ao quinto postulado, estudou as conseqüências das outras duas, tendo ido muito mais longe do que Saccheri na dedução de novas proposições. Entre elas, devemos destacar a seguinte:

A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos.

Portanto, a expressão numérica da área Δ de um triângulo ABC é, sob a hipótese do ângulo agudo:

$$\Delta = k(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}),$$

e, sob a hipótese do ângulo obtuso:

$$\Delta = k(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi),$$

onde k é uma constante positiva.

Além disto, ele fez algumas observações profundas as quais apresentamos em tradução livre:

Em conexão com estas fórmulas, devemos observar que a hipótese do ângulo obtuso vale se considerarmos triângulos esféricos ao invés de triângulos planos, porque, neste último caso, também a soma dos ângulos é maior do que dois ângulos retos e a área do triângulo é proporcional ao excesso.

⁷Este tratado, bem como o tratado de Saccheri, foram reproduzidos por Engel e Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895).

Parece ainda mais interessante que o que aqui afirmo sobre triângulos esféricos, pode ser demonstrado independentemente da dificuldade das paralelas.

Estou inclinado a concluir que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário.

As observações de Lambert foram confirmadas posteriormente pelos matemáticos Riemann e Lobachewsky. Como Saccheri, ele foi capaz de eliminar a hipótese do ângulo obtuso ao assumir que a reta é ilimitada. Todavia, suas conclusões finais sobre a hipótese do ângulo agudo são insatisfatórias. Ele pareceu perceber que os argumentos contra a Geometria baseada nesta hipótese eram muito mais resultado de noções preconcebidas sobre a validade da Geometria euclidiana.

Não podemos deixar de notar que, embora os geômetras daquele tempo ainda estivessem tentando provar o quinto postulado, no entanto, o estavam fazendo com mentes muito mais abertas. Os velhos preconceitos estavam começando a desaparecer. A época das grandes descobertas estava quase chegando!

Exercícios

1. Considere a afirmação: V_{12} . *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta a outra.* Prove que esta afirmação é um substituto do quinto postulado.
2. Complete a prova de Nasiredin, provando que o seu axioma é um substituto do quinto postulado.
3. Discuta o argumento de Wallis apresentado neste capítulo e indique o seu erro.

Alguns teoremas de Legendre

Ao longo dos séculos, desde a época de Euclides, muitos matemáticos tentaram deduzir o quinto postulado a partir dos outros quatro. Algumas tentativas ficaram famosas, entre elas as de Proclus, Nasiredin, John Wallis, Girolamo Saccheri, Johann Heinrich Lambert e Adrien Marie Legendre. Vamos falar um pouco sobre o trabalho de Legendre. Não que ele tenha dado qualquer contribuição original ao assunto, pois os seus resultados haviam sido obtidos substancialmente pelos seus predecessores. Mas o estilo direto e simples de suas demonstrações formou gerações de estudantes e ajudou a renovar o interesse sobre as bases da Geometria. Algumas delas, pela sua elegância, são de um valor inestimável. Apresentaremos a seguir duas delas, que constituem parte da Geometria euclidiana, baseando-se apenas nos 4 primeiros postulados, e também uma de suas tentativas de provar o quinto postulado

PROPOSIÇÃO L1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos.

Prova. Para provar este teorema, Legendre usou o seguinte lema.

Lema 1 *Dado um triângulo ABC , existe um triângulo $A'B'C'$ satisfazendo a:*

- 1. a soma dos ângulos de $A'B'C'$ é igual a soma dos ângulos de ABC ,*
- 2. o triângulo $A'B'C'$ possui um ângulo menor ou igual a metade do menor ângulo do triângulo ABC .*

Suponha que este lema tenha sido estabelecido e que exista um triângulo cuja soma dos ângulos seja $180^\circ + \alpha$. Seja, então, θ_0 o menor ângulo deste triângulo. Aplicando o lema obtemos um novo triângulo, digamos $A_1B_1C_1$, com mesma soma dos ângulos e cujo menor ângulo, θ_1 , satisfaz a:

$$\theta_1 \leq (1/2)\theta_0.$$

Aplicando agora o lema a este triângulo, conclui-se pela existência de novo triângulo $A_2B_2C_2$, com mesma soma dos ângulos e menor ângulo, θ_2 , satisfazendo a

$$\theta_2 \leq (1/4)\theta_0.$$

Aplicando este lema n vezes, chegamos a um triângulo $A_nB_nC_n$, cuja soma dos ângulos ainda é $180^\circ + \alpha$ e cujo menor ângulo, θ_n , satisfaz a

$$\theta_n \leq (1/2^n)\theta_0.$$

Escolhendo-se n suficientemente grande, teremos $\theta_n < \alpha$. Mas, neste caso, a soma dos outros dois ângulos será maior do que 180° , o que é absurdo. Isto conclui a prova da Proposição. \square

Prova (do Lema). Dado o triângulo ABC , suporemos que o ângulo \hat{A} é menor do que os outros dois ângulos.

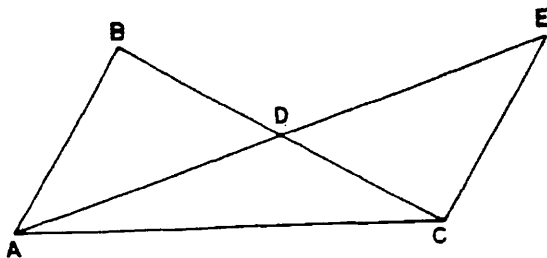


Figura 16

Seja D o ponto médio do segmento BC . Sobre a semi-reta de origem A passando por D , marque o ponto E , de sorte que $AD = DE$. Os triângulos ABD e ECD são, por conseguinte, congruentes. Segue-se trivialmente que a soma dos ângulos do triângulo AEC é igual a soma dos ângulos do triângulo original.

A observação importante agora é que a soma dos ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{E}C$ é igual ao ângulo \hat{A} do triângulo original. Conseqüentemente, o novo triângulo AEC possui um ângulo, que chamaremos de θ , satisfazendo a desigualdade

$$\theta \leq \hat{A}/2.$$

Como falamos no início deste capítulo, Legendre fez várias tentativas de provar o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro. Uma das mais interessantes é a que vamos descrever a seguir.

Suponha que a soma dos ângulos de um triângulo ABC seja $180^\circ - \alpha$, para algum número positivo menor do que 180 , e que o ângulo \hat{A} é o menor ângulo deste triângulo.

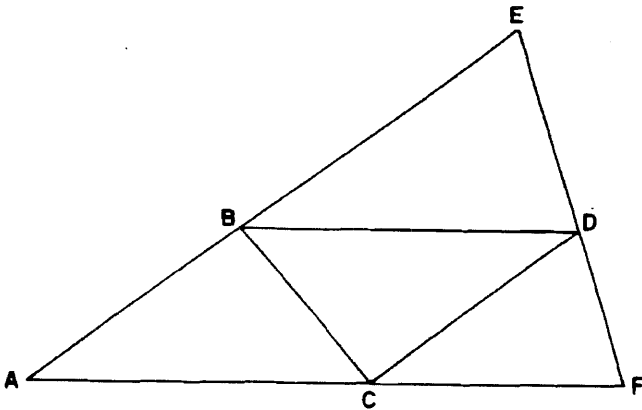


Figura 17

Construa sobre o lado BC um triângulo BCD , congruente ao triângulo ABC com $D\hat{B}C = A\hat{C}B$ e $D\hat{C}B = A\hat{B}C$. Trace pelo

ponto D uma reta que encontre os lados do ângulo \hat{A} nos pontos E e F , como indicado na Figura acima. Como a soma dos ângulos do triângulo BCD é $180^\circ - \alpha$, então, usando a Proposição L1, concluímos que a soma dos ângulos do triângulo AEF é menor ou igual a $180^\circ - 2\alpha$. Este procedimento repetido recursivamente n vezes vai produzir um triângulo com soma dos ângulos menor ou igual a $180^\circ - 2^n \alpha$.

Assim, para n suficientemente grande, obteremos um número negativo como soma dos ângulos de um triângulo, o que é impossível. Portanto, concluímos que não pode existir triângulo com soma dos ângulos menor do que 180° . \square

Esta é uma conclusão falsa, como o próprio Legendre verificou. O erro da prova está no fato de supormos que, por um ponto dentro de um ângulo, podemos sempre traçar uma reta que intercepte os dois lados do ângulo! Como observamos no capítulo anterior, esta afirmação é equivalente ao quinto postulado¹.

LEMA L1. *Se a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, o mesmo é verdade para todos os triângulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.*

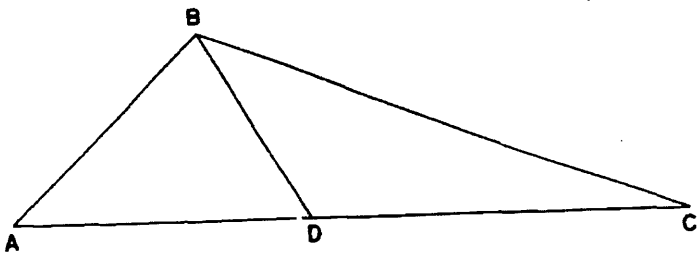


Figura 18

¹Observe que esta prova pode ser adaptada para mostrar a equivalência de V_5 e V .

Prova. Dado um triângulo ABC , considere um ponto qualquer D do lado AC e trace BD . Se a soma dos ângulos do triângulo ABC é 180° , então, a soma dos ângulos dos triângulos ABD e DBC será $\hat{A} + \hat{ABC} + \hat{C} + 180^\circ = 360^\circ$. Pela Proposição L1, nenhum destes dois triângulos tem soma dos ângulos superior a 180° . Logo, cada um deles tem soma dos ângulos exatamente igual a 180° . \square

LEMA L2. *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, pode-se construir triângulos retângulos isósceles com a soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e catetos maiores do que qualquer segmento dado.*

Prova. Seja ABC o triângulo cuja soma dos ângulos é 180° . Se este já não for um triângulo retângulo isósceles, baixe uma altura do vértice com maior ângulo ao lado oposto. Na Figura seguinte isto foi realizado traçando-se BD .

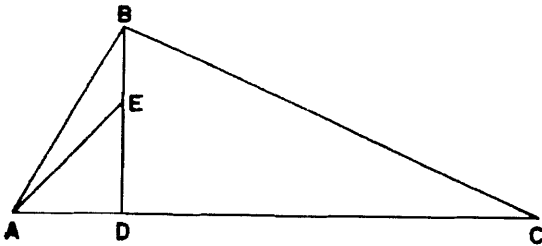


Figura 19

Formamos, assim, dois triângulos retângulos, cada um com soma dos ângulos igual a 180° . Se nenhum destes for isósceles, escolha um deles, por exemplo, o triângulo ADB com ângulo reto em D . Verifique qual dos catetos AD ou BD tem maior comprimento. Vamos supor que seja BD . Trace, então, um segmento ligando o vértice A a um ponto E do segmento BD , tal que $DA = DE$. Do lema anterior, obtemos que o triângulo retângulo isósceles ADE tem soma dos ângulos igual a 180° .

Vamos agora nos restringir a este triângulo retângulo isósceles com soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e observar que a junção de dois deles, ao longo da hipotenusa, produz um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados arbitrariamente grandes. A diagonal de um deles o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma dos ângulos é 180° . Com isto concluímos a demonstração. \square

PROPOSIÇÃO L2. *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.*

Prova. Suponha que exista um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° , e seja ABC um triângulo retângulo qualquer com ângulo reto no vértice C . Pelo Lema L2 acima, existe um triângulo retângulo isósceles DEF , com ângulo reto em E , cujos catetos são maiores do que qualquer dos catetos de ABC e cuja soma dos ângulos é 180° .

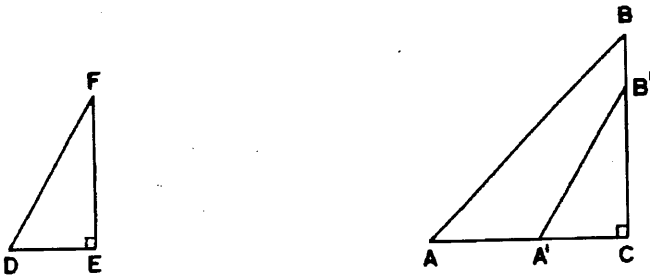


Figura 20

Podemos, então, marcar pontos A' na semi-reta S_{CA} , de modo que $A'C = DE$, e B' na semi-reta S_{CB} , de modo que $B'C = FE$. Tem-se, então, $A'CB' = DEF$, logo $A'CB'$ tem soma dos ângulos igual a 180° . Trace o segmento $A'B$ para concluir que ABC tem soma dos ângulos igual a 180° . O leitor não terá dificuldade em concluir agora que o resultado vale para qualquer triângulo. \square

Exercícios

1. Prove que, uma Geometria em que valem os quatro primeiros axiomas e existe um quadrilátero com soma dos ângulos igual a dois ângulos retos, é a Geometria euclidiana.
2. Prove que, em uma Geometria em que valem os quatro primeiros axiomas e existe um triângulo cuja soma dos ângulos é menor do que 180 graus, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que 180 graus.
3. Considere a afirmação: V_{13} . *Existe um ângulo inscrito em um semicírculo que é reto.* Prove que ela é um substituto do quinto postulado de Euclides.
4. Mostre que, se a soma dos ângulos de um triângulo for menor do que dois ângulos retos, então, os ângulos do topo de qualquer quadrilátero de Saccheri são agudos.
5. Mostre que, se existe um quadrilátero de Saccheri cujos ângulos do topo são agudos, então, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.
6. Considere a afirmação: V_{14} . *Quaisquer duas retas que não se encontram têm uma perpendicular comum.* Prove que ela é um substituto para o quinto postulado de Euclides.
7. Considere a afirmação: V_{15} . *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes.* Prove que ela é um substituto para o quinto postulado de Euclides.

Descoberta da nova Geometria

O começo do século XIX encontrou os geômetras ainda na busca de uma prova do quinto postulado de Euclides. Entretanto, os esforços feitos ao longo de tantos séculos nesta busca haviam acumulado frutos e um entendimento profundo da Geometria euclidiana havia sido alcançado por muitas mentes. Como ocorre freqüentemente na Matemática, quando a descoberta ocorreu, não foi feita por um único homem.

5.1 Gauss.

Nos anos críticos que antecederam a descoberta da nova Geometria, a figura dominante no mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que deu uma grande contribuição no desenvolvimento das idéias que levaram à sua descoberta. Poucos dos seus resultados, fruto de muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado, foram tornados públicos durante sua vida. Algumas cartas a outros interessados naqueles problemas, críticas de tratados sobre paralelas, e notas inéditas descobertas entre seus trabalhos, são toda a evidência disponível de que ele foi o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma Geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides. Foi ele o primeiro a designar a nova Geometria de *não euclidiana*.

Parece claro na documentação existente que, ao fim da primeira década do século XIX, Gauss ainda estava tentando provar o quinto postulado pelo método de redução a um absurdo. Este havia sido o processo tentado por Saccheri e Lambert no passado e cujas

obras lhes eram familiar. Mas também está comprovado que ele reconhecia, mais do que qualquer outro no passado, a profundidade do problema. Foi durante a segunda década daquele século que ele começou a desenvolver as idéias da nova Geometria, formulando os seus teoremas. É desta época a carta escrita a F.A.Taurinus, em Göttingen, em 8 novembro de 1824. A seguir uma tradução (livre) deste importante documento:

Li com prazer sua carta de 30 de Outubro e o resumo a ela anexo, principalmente porque até agora eu estava acostumado a encontrar poucos traços de real intuição geométrica na maioria das pessoas que se têm lançado na investigação do chamado Teorema das paralelas.

Com relação à sua tentativa, não tenho nada (ou quase nada) a dizer, excetuando que ela é incompleta. É verdade que sua prova de que a soma dos três ângulos de um triângulo plano não pode ser maior do que 180° está, de alguma forma, com ausência de rigor geométrico. Mas isto pode facilmente ser remediado, não pairando nenhuma dúvida de que esta impossibilidade pode ser provada rigorosamente. Mas a situação é muito diferente na segunda parte, que a soma dos ângulos não pode ser menor do que 180° ; este é o ponto crítico, a rocha responsável por todos os naufrágios.

Imagino que este problema não o tenha envolvido por muito tempo. Tenho refletido sobre ele durante 30 anos e não acredito que qualquer outro possa ter pensado mais sobre esta segunda parte, embora eu não tenha publicado nada sobre o assunto. A hipótese de que a soma dos ângulos é menor do que 180° leva a uma Geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante, que não pode ser fixada a priori. Quão maior for esta constante, mais próximo nos encontramos da Geometria euclidiana, e se ela for escolhida infinitamente grande, as duas geometrias coincidem.

Os teoremas desta Geometria parecem paradoxais e, para um não

iniciado, absurdos; mas, reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível. Por exemplo, os três ângulos de um triângulo tornam-se tão pequeno quanto se queira, se os lados são tomados arbitrariamente grandes; entretanto, a área de um triângulo nunca pode exceder um limite definido, não importando quão grandes os lados sejam tomados, e, de fato, nem alcançar este limite.

Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe à nossa concepção é que, se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (por nós desconhecida). Mas, me parece que conhecemos, apesar do que dizem os metafísicos, muito pouco, ou muito próximo de nada, a respeito da verdadeira natureza do espaço, para considerar como absolutamente impossível aquilo que se nos apresenta como não natural. Se esta Geometria não euclidiana fosse verdadeira, e se fosse possível comparar aquela constante com as nossas medições feitas na terra e nos céus, ela poderia então ser determinada a posteriori. Conseqüentemente, tenho algumas vezes expressado o desejo de que a Geometria euclidiana não seja verdadeira, por que então teríamos a priori uma unidade absoluta e universal de medida.

Não receio que qualquer um que tenha demonstrado possuir uma mente matemática deixe de entender o que foi dito acima, mas, de qualquer forma, considere-a uma comunicação privada da qual nenhum uso público, ou qualquer uso que leve de qualquer maneira a sua publicidade, poderá ser feito. Talvez eu mesmo, se tiver no futuro mais tempo livre do que na presente circunstância, divulgue minhas investigações.

Apesar de a prudência de Gauss na divulgação de seus achados ter permitido que outros viessem com ele dividir a glória da descoberta da nova Geometria, sua atitude é por demais compreensível. Nos seus dias, a filosofia de Kant havia sido assimilada pela Igreja Romana e considerada como dogma. Era a época em que as sombras da Inquisição assustavam todos, particularmente as pessoas

que adquiriam o domínio de qualquer conhecimento que pudesse ser considerado, de qualquer forma, contrario à doutrina. Na base da explicação do universo daqueles dias, estava a Geometria euclidiana. Daí a sabedoria da prudência de Gauss.

Em uma carta a Schumacher, datada de 17 de maio de 1831, referindo-se ao problema das paralelas, Gauss escreveu: *Comecei a escrever, durante as últimas semanas, algumas de minhas meditações, parte das quais nunca pus por escrito, de modo que tive de repensar tudo de novo três ou quatro vezes. Mas desejo que isto não morra comigo.*

Entre seus trabalhos existe uma pequena exposição da teoria elementar das paralelas para novos geômetras. Ele não foi longe escrevendo estas notas, interrompidas em 14 de fevereiro de 1832, quando recebeu uma cópia do famoso *Apêndice*, escrito por Johann Bolyai, do livro *Tentamen*¹, de autoria de seu pai, Wolfgang Bolyai.

5.2 Bolyai

Enquanto estudava em Göttingen, Gauss incluiu entre seus amigos o húngaro Wolfgang Bolyai (Bolyai Farkas, 1775-1856), que ali estudou de 1796 a 1799. É quase certo que os dois frequentemente discutiram problemas relacionados com a teoria das paralelas.

Depois de deixarem a universidade, continuaram esta discussão por correspondência. Uma carta escrita por Gauss a Bolyai, em 1799, mostra que ambos ainda estavam, ao mesmo tempo, tentando provar o quinto postulado. Em 1804, Bolyai, convencido de ter resolvido o problema, apresentou suas idéias em um pequeno tratado intitulado *Theoria parallelarum*, o qual enviou a Gauss juntamente com uma carta. Mas a sua prova estava errada e Gauss, ao responder, indicou o erro.

¹O título completo é: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi.*

Bolyai continuou tentando ao longo da mesma linha de raciocínio e, quatro anos mais tarde, enviou a Gauss um trabalho suplementando sua prova. Gauss não respondeu comentando este trabalho. Desencorajado, ele mudou sua atenção para outros problemas. No entanto, durante as duas décadas seguintes, apesar dos seus afazeres como professor, poeta, dramaturgo, músico e inventor, conseguiu tempo para colocar suas idéias no livro em dois volumes, intitulado *Tentamen* ao qual nos referimos. Wolfgang Bolyai foi um homem talentoso, mas ficou mais conhecido por ser o pai de Johann.

Em 15 de dezembro de 1802, nasceu Johann Bolyai (Bolyai Janos, 1802-1860). Durante os anos que levaram à publicação do *Tentamen*, Johann tornou-se adulto. Estudou Matemática com seu pai, de modo que foi natural que se tenha interessado, ainda muito jovem, pela teoria das paralelas. Na época em que ingressou no Royal College para engenheiros, em Viena, em 1817, já tinha devotado muito esforço ao problema de provar o quinto postulado, apesar de seu pai ter expressamente recomendado que este problema deveria ser deixado de lado.

Por volta do ano 1820, seus esforços para provar o postulado, através da sua substituição por uma afirmação que lhe fosse contraditória, começaram a fornecer resultados de uma natureza especial. Sua atenção foi gradualmente mudando na direção da possibilidade de formular uma Geometria geral, uma *Ciência absoluta do espaço*, com a Geometria euclidiana como caso particular.

Ao negar o quinto postulado, havia duas hipóteses possíveis a considerar. Primeiramente, poderia não existir qualquer reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora desta reta. Entretanto, como vimos, é uma conseqüência dos quatro primeiros postulados a existência de tais retas paralelas. Segundo, poderia haver mais de uma retas paralelas à reta dada passando pelo ponto.

Iniciando deste ponto, Bolyai observou que a existência de duas tais retas acarreta na existência de uma infinidade delas. Os resultados que se seguiam desta observação (e que apresentaremos mais adiante), constituíam o cerne da nova Geometria.

O que parece ter mais impressionado o jovem Bolyai foram as proposições que não dependiam do quinto postulado, e que, portanto, valiam em qualquer Geometria, não importando qual hipótese fosse assumida a respeito das paralelas. Isto ele considerou como a base de uma Geometria absoluta para o espaço.

Suas idéias tinham começado a tomar forma por volta de 1823, quando tinha apenas 21 anos, como bem demonstra uma carta que escreveu ao seu pai em 3 de novembro daquele ano, da qual apresentamos um trecho:

No momento é minha decisão publicar um trabalho sobre as paralelas, logo que complete e organize o material e uma oportunidade se me apresente; no momento, ainda não vejo claramente todo o meu caminho, mas a trilha que tenho seguido apresenta evidência positiva de que o objetivo será alcançado, se isto for possível. Ainda não cheguei lá, mas já descobri coisas tão maravilhosas que me surpreenderam, e seria um grande azar se elas se perdessem; no momento, não posso lhe dizer nada, excetuando que: do nada eu criei um novo e estranho universo. Tudo o que lhe enviei anteriormente é como um castelo de cartas de baralho em comparação com uma torre.

Em resposta, Wolfgang Bolyai sugeriu que o trabalho fosse publicado como um apêndice de seu *Tentamen*, e urgiu que isto fosse feito no menor espaço de tempo possível. Mas, foi apenas em 1829 que o manuscrito foi submetido, tendo sido publicado em 1832.

Em 1831, desejoso de saber a opinião de Gauss sobre as descobertas de seu filho, Wolfgang lhe enviou as provas do Apêndice que, infelizmente, nunca chegaram a Gauss. Em fevereiro de 1832, Gauss recebeu uma das primeiras cópias do Apêndice. Sua resposta, escrita a Wolfgang em 6 de março de 1832, continha as seguintes observações sobre o trabalho de Johann.

Se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria; mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto

que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo.

Minha intenção era, com relação ao meu trabalho, do qual muito pouco até o presente foi publicado, não permitir que fosse conhecido durante minha vida. A maioria das pessoas não tem a perspicácia para entender nossas conclusões, e encontrei (na vida) apenas uns poucos que receberam com interesse o que lhes comuniquei. Para entender estas coisas, a pessoa primeiramente deve ter uma percepção aguda do que é necessário, e sobre isto a maioria é confusa. Por outro lado, era meu plano colocar tudo por escrito eventualmente, de modo que, pelo menos, não se perdesse comigo.

Assim, estou muito surpreso de ter sido poupado deste esforço, e super feliz de que tenha sido o filho do meu velho amigo que passou à minha frente de forma tão extraordinária.

Quando Johann recebeu do seu pai uma cópia desta carta, ficou desapontado. Ao invés dos elogios que antecipara, ela lhe trouxe, na sua opinião, somente a notícia de que um outro havia feito as mesmas descobertas, independente e possivelmente antes dele. Ele chegou a suspeitar que, antes de o Apêndice estar completo, seu pai tivesse confidenciado algumas de suas idéias a Gauss, o qual, por sua vez, tivesse delas se apropriado. Estas suspeitas foram eventualmente esquecidas, mas Johann nunca admitiu que Gauss houvesse lhe concedido a honra que lhe era devida.

Johann Bolyai nada mais publicou em sua vida, embora tenha continuado nas investigações. Notas encontradas entre seus pertences mostram que ele esteve interessado em extensões de suas idéias em espaços de dimensão três e também na comparação de sua Geometria não euclidiana com a Trigonometria esférica conhecida na época.

Em 1848, Bolyai tomou conhecimento de que a honra pela descoberta da nova Geometria devia ser dividida com uma outra pessoa.

5.3 Lobachewsky

Embora Bolyai tenha sabido do trabalho de Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) apenas em 1848, este havia publicado suas conclusões em 1829, dois anos antes da publicação do Apêndice.

Lobachewsky formou-se na Universidade de Kasan em 1813. Tornou-se imediatamente instrutor daquela Universidade, tendo sido mais tarde promovido a professor. Estudou com Johann M. C. Barrels, um dos primeiros a reconhecer o gênio de Gauss.

Uma cópia de suas notas de aula de 1815 e dos dois anos seguintes, revela que, naquela época, ele estava tentando provar o quinto postulado. Em 1823, Lobachewsky completou o manuscrito de um livro-texto de Geometria, manuscrito que nunca foi publicado. Ali, ele fez a afirmação de que nenhuma prova rigorosa do postulado das paralelas tinha sido jamais obtida e que as provas, até então sugeridas, não eram provas matemáticas.

É conhecido que, em 1826, ele fez uma conferência para a seção de Física e Matemática da Universidade de Kasan, quando sugeriu uma nova Geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor do que dois retos. Em 1829-1830, publicou umas memórias sobre as bases da Geometria, no *Kasan Bulletin*, referindo-se a aula mencionada e expondo totalmente a sua teoria das paralelas. Esta publicação, a primeira sobre Geometria não euclidiana, atraiu pouca atenção no seu próprio país e, por ser escrita em russo, praticamente nenhuma no resto mundo.

Lobachewsky escreveu vários outros trabalhos sobre a nova Geometria, na esperança de trazer alguma atenção sobre sua obra. Talvez o mais importante deles tenha sido um pequeno livro intitulado *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallelen*², escrito em alemão e publicado em 1840, com a idéia de que

²Ver Lobatschewsky: *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*, traduzido para o inglês por G.B. Halsted (Austin, Texas 1891).

isto pudesse torná-lo mais universalmente lido. Um ano antes de sua morte, embora estivesse cego, escreveu em francês um trabalho contendo todos os seus resultados de pesquisa: *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*³. Infelizmente ele faleceu sem ver seu trabalho reconhecido.

As informações sobre novas descobertas circulavam tão devagar naquele tempo, que Gauss, a figura científica mais importante daquela época, não soube das descobertas de Lobachewsky por muitos anos. Alguns autores concordam que, só em 1841, este conhecimento chegou a Gauss. De qualquer forma, em 1846, ele escreveu a Schumacher mencionando que estava relendo o livro de Lobachewsky (*Untersuchungen*), do qual reconhece o mérito, afirmando que os resultados obtidos já eram do seu conhecimento, mas que eram demonstrados por método totalmente diferente dos seus.

Em 1848, Wolfgang Bolyai ouviu falar sobre Lobachewsky e escreveu a Gauss solicitando o nome do seu livro. Gauss replicou recomendando *aquele admirável livrinho* como contendo uma exposição adequada da teoria e sendo fácil de obter.

Através de Wolfgang, Johann tomou conhecimento do trabalho de Lobachewsky. Após sua morte, entre seus pertences foram encontradas umas notas não publicadas intituladas *Bemerkungen über Nicolaus Lobatchefskij's Geometrische Untersuchungen*. Ali ele escreveu:

Mesmo se neste admirável trabalho métodos diferentes são utilizados, no entanto, o espírito e os resultados são tão parecidos com aqueles do Apêndice do Tentamen matheseos que apareceu no ano 1832 em Maros-Vásárhely, que qualquer um que perceba este fato ficará maravilhado. Se Gauss ficou, como ele afirma, surpreso ao extremo, primeiramente com o Apêndice e depois com a incrível concordância entre os matemáticos húngaro e russo, verdadeiramente

³Ver David Eugene Smith: *A Source Book in Mathematics*, p. 360 (New York, 1929).

mais surpreso fiquei eu.

A natureza da verdade, é claro, não pode deixar de ser a mesma tanto em Maros-Vásárhely, como em Kamschatka e na lua, ou, para ser breve, em qualquer lugar do mundo; e, o que um ser finito e sensível descobre não é impossível que seja descoberto por um outro.

Comentário

Os trabalhos de Lobatschewsky e Bolyai não receberam, na época em que foram publicados, o reconhecimento esperado pelo coroamento de tantos séculos de investigação. No entanto, isto não nos deve surpreender. A história das descobertas científicas nos ensina que, toda mudança radical em um dos compartimentos da ciência, não produz, de imediato, alterações nas convicções e nas pressuposições nas quais os cientistas baseiam suas visões particulares da parte da ciência a que se dedicam.

No caso particular da Geometria hiperbólica, sua aceitação foi retardada por várias razões: o trabalho de Lobatschewsky foi escrito em russo, numa época em que o latim, o alemão e o francês eram as principais línguas da ciência; os dois pesquisadores, Lobatschewsky e Bolyai, eram membros novos na comunidade científica internacional, sendo quase desconhecidos; a concepção filosófica dominante apontava na direção oposta à sua descoberta. Por tudo isso, a nova Geometria atraiu pouca atenção por cerca de 35 anos. A primeira tradução francesa do *Untersuchungen* foi publicada em 1866, acompanhada de alguns extratos da correspondência entre Gauss e Schumacher. A do *Appendix*, apareceu no ano seguinte, precedida por *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai*, escrito pelo arquiteto Fr. Schmidt. No mesmo ano Richard Baltzer incluiu, na segunda edição do seu *Elemente der Mathematik*, uma referência aos dois matemáticos e à sua obra.

Estas publicações trouxeram, finalmente, o crédito e a consideração devidos à nova Geometria.

6

A Geometria hiperbólica

6.1 Introdução

Estas notas foram escritas com a pretensão de constituírem uma continuação do livro *Geometria euclidiana plana* de nossa autoria publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática. É importante observar que os postulados que adotamos naquele livro são equivalentes aos de Euclides (incluindo as hipóteses não escritas que ele utilizou). Mais ainda, os quatro primeiros grupos de axiomas daquele livro dão origem à mesma Geometria obtida por Euclides, sem a inclusão do seu famoso quinto postulado. O leitor familiar com o livro *Geometria euclidiana plana*, deve ter observado que todas as proposições provadas nos seus primeiros cinco capítulos não dependem do quinto postulado, introduzido apenas no seu capítulo seis.

6.2 O quinto postulado da Geometria hiperbólica

Como vimos, o quinto postulado de Euclides é equivalente à afirmação de que, por um ponto fora de uma reta, pode ser traçada apenas uma reta paralela à reta dada. No seu lugar, usaremos o seguinte postulado característico da Geometria hiperbólica.

POSTULADO. Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.

É imediato observar que, se existem duas retas passando por um ponto e não interceptando uma dada reta, então, existem infinitas

retas com esta propriedade. De fato, considere duas de tais retas m e m' passando pelo ponto P e não interceptando uma reta n . Elas formam quatro ângulos, sendo que a reta n esta completamente contida em um deles. Todas as retas traçadas pelo ponto P e contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, nenhum dos quais contendo n , são exemplos de retas que também não interceptam a reta n . E existem infinitas delas.

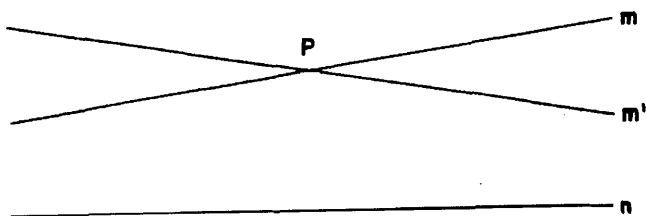


Figura 21

Com tantas retas que não interceptam a reta n , é conveniente mudar a definição de paralelismo. Vamos chamar de paralela a reta n passando por P a apenas duas de tais retas, que iremos descrever mais adiante.

Proposição 2 *Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n .*

Prova. Baixe a perpendicular do ponto P à reta n e designe por Q o pé desta perpendicular. Em seguida, trace a reta passando por P e perpendicular ao segmento PQ , a qual sabemos que não intercepta a reta n .

Escolha dois pontos E e F sobre esta reta, de modo que P pertença ao segmento EF . Considere o triângulo EFQ . Como o ponto P pertence ao lado EF , todas as retas que passam por P , com exceção da reta que passa por E e F , são retas que cortam o segmento EF

em um ponto, e que, conseqüentemente, cortam também o segmento EQ ou o segmento QF . Vamos nos restringir, inicialmente, às que cortam o segmento EQ . Observe que, neste segmento, cada ponto representa uma das retas que passa por P .

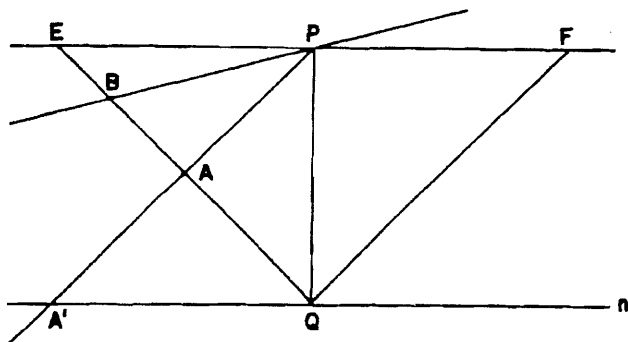


Figura 22

Estes pontos podem ser separados em duas classes, a dos que representam retas que não interceptam n , e que chamaremos de \mathcal{N} , e a dos que representam retas que interceptam n , e que chamaremos de \mathcal{M} . É claro que $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ é vazio, que $E \in \mathcal{N}$ e que $Q \in \mathcal{M}$. Além disto, se $A \in \mathcal{M}$, então, $QA \subset \mathcal{M}$. Para ver que isto ocorre, seja A' o ponto de n onde a reta que passa por P e A intercepta n ; observe que qualquer reta que penetre no triângulo PQA' pelo vértice P deve cortar o lado QA' . Da mesma forma, se $B \in \mathcal{N}$, então, $EB \subset \mathcal{N}$. Aqui o raciocínio é o mesmo que já utilizamos para garantir a existência de infinitas retas que não interceptam a reta n .

Segue-se, então, do axioma de Dedekind para os números reais, que vale para os pontos de uma reta ou de um segmento, que existe exatamente um ponto S que separa os conjuntos \mathcal{M} e \mathcal{N} . A questão que se coloca imediatamente é se este ponto de separação pertence ao conjunto \mathcal{M} ou ao conjunto \mathcal{N} . Suponha que pertence ao conjunto \mathcal{M} , ou seja, a reta que passa por P e S intercepta n em

um ponto S' . Tome agora qualquer ponto da semi-reta de origem Q passando por S' e que esteja fora do segmento QS' . É claro que esta reta intercepta EQ em um ponto que fica fora do segmento QS , o que é absurdo. Logo $S \in \mathcal{N}$.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento QF , obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias – as que interceptam n e as que não interceptam n . Além disto, estas duas retas não interceptam n .

□

Chamaremos estas duas retas de *paralelas à reta n passando por P* .

Proposição 3 *As retas paralelas a n passando por P formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P à reta n . Além disto, o ângulo mencionado é agudo.*

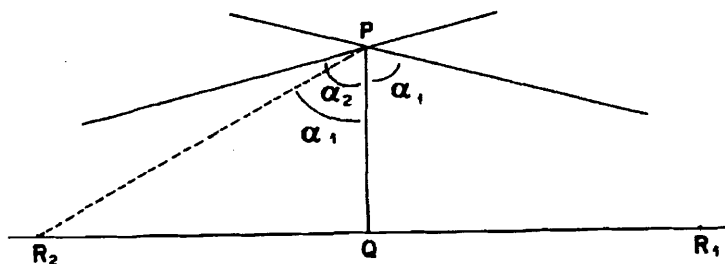


Figura 23

Prova. Como anteriormente, seja PQ o segmento perpendicular a n traçado a partir de P . Sejam α_1 e α_2 os dois ângulos referidos. Suponha que $\alpha_1 < \alpha_2$. No lado em que está o ângulo α_2 , trace uma reta passando por P e que forme ângulo α_1 com PQ . É, então, claro da escolha das paralelas que tal reta cortará a reta n em um ponto, que chamaremos de R_2 . Seja, então, R_1 um ponto na reta n , tal que Q seja o ponto médio de R_1R_2 . Os triângulos PQR_1 e PQR_2

são, então, congruentes. Conseqüentemente, o ângulo $QPR_1 = \alpha_1$, o que é absurdo. \square

Em várias ocasiões será importante, para simplificar as demonstrações, distinguir as duas retas paralelas, uma da outra, denominando uma delas, de reta paralela à direita e a outra, de reta paralela à esquerda. Falaremos, assim, em paralelas em um determinado sentido.

Concluimos observando que é única a paralela a uma dada reta em um sentido predeterminado passando por um ponto.

Exercícios

1. Prove que, se as retas que contêm os segmentos BC e AC são ambas paralelas a uma reta n , então, a bissetriz do ângulo $\hat{A}CB$ é perpendicular à reta n .
2. Revisando os substitutos do quinto postulado de Euclides, diga o que se deve esperar ocorrer nesta Geometria com relação a:
 - a) Uma reta que corta uma de duas paralelas.
 - b) Ângulos correspondentes formados por uma transversal a duas retas que não têm pontos em comum.
 - c) O número de perpendiculares comuns a duas retas que não têm pontos em comum.
 - d) A soma dos ângulos de um triângulo.
 - e) Existência de retas equidistantes.
 - f) Ângulos inscritos em semicírculos.
3. Responda aos itens $b)$ e $c)$ do exercício anterior no caso de retas paralelas.

6.3 Propriedades elementares das paralelas

Certas propriedades das paralelas euclidianas valem na Geometria hiperbólica. Três destas são apresentadas a seguir.

Teorema 4 *Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é, em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.*

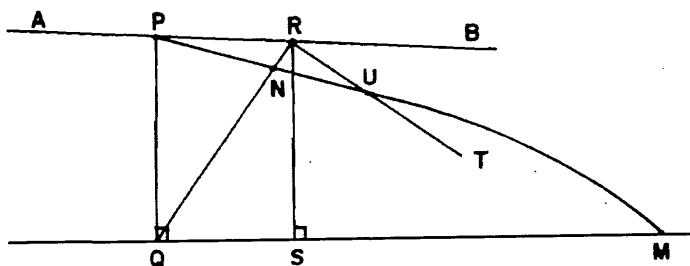


Figura 24

Prova. Na figura acima, suponha que a reta m que passa por A e B seja uma das paralelas a n passando por P . Digamos, a paralela à direita. Seja R um ponto qualquer de m . Devemos mostrar que m é também uma das retas paralela à reta n passando no ponto R e que é paralela à direita. Existem dois casos a considerar.

CASO 1. O ponto R está no lado do ponto P que fica na direção do paralelismo. Trace PQ e RS perpendiculares a n . Vamos mostrar que toda reta passando por R e entrando no ângulo $S\hat{R}B$ corta a reta n . Seja RT um segmento de uma de tais retas. Escolha nele um ponto qualquer U . Trace PU e RQ . Pelo paralelismo no ponto P , temos que a reta PU deve cortar n em um ponto M e, pelo axioma de Pasch, deve cortar o segmento RQ em um ponto N . Novamente usando o axioma de Pasch, concluímos que RU , se prolongado, deve cortar o lado QM do triângulo QNM . Daí o resultado.

CASO 2. O ponto R está no lado do ponto P oposto ao paralelismo. Neste caso, a prova é essencialmente a mesma e é deixada como exercício para o leitor. \square

Teorema 5 *Se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela à primeira.*

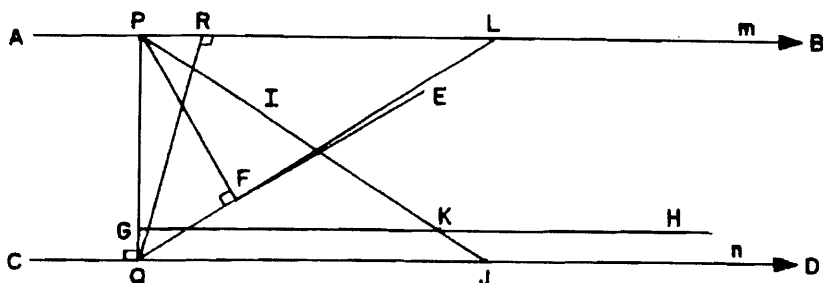


Figura 25

Considere as retas m e n que passam pelos pontos A e B , e C e D , respectivamente, como na figura acima. Seja P um ponto do segmento AB . Suponha que m seja a paralela à reta n passando por P em uma direção, digamos a da direita. Trace PQ perpendicular a n e QR perpendicular a m . O ponto R ficará à direita do ponto P (do lado do paralelismo), do contrário o triângulo PQR teria dois ângulos não agudos, o que é proibido pelo teorema do ângulo externo. Devemos provar que a reta n é paralela à reta m passando pelo ponto Q .

Para isto, temos de provar que toda reta que passa pelo ponto Q e divide o ângulo RQD , intercepta a reta m . Considere uma de tais retas e seja E um de seus pontos dentro daquele ângulo. Trace PF perpendicular a esta reta. O ponto F pertence à semi-reta de origem Q passando por E . O leitor deve verificar este fato como exercício. Na semi-reta SPQ (semi-reta de origem P e passando por Q), marque um ponto G , de modo que $PG = PF$. O ponto $G \in PQ$, já que $PF < PQ$, como cateto e hipotenusa de

um triângulo retângulo. Trace a perpendicular GH ao segmento PQ e construa um ângulo $G\hat{P}I$ igual ao ângulo $F\hat{P}B$. Seja J o ponto onde a semi-reta SP_I corta a reta n . Como a semi-reta SGH corta o lado PQ do triângulo PQJ , mas não corta o lado QJ , então, deve cortar PJ em algum ponto K . Em SP_B marque um ponto L tal que $PL = PK$ e trace FL . Observe que os triângulos PGK e PFL são congruentes (primeiro caso de congruência). Conseqüentemente, $P\hat{F}L = P\hat{G}K = 90^\circ$. Logo, os pontos Q, F, E e L são colineares. Portanto, a semi-reta S_{QE} corta a reta m , como queríamos demonstrar. \square

Teorema 6 *Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas entre si.*

Prova. Primeiro, vamos considerar o caso em que a terceira reta está entre as outras duas.

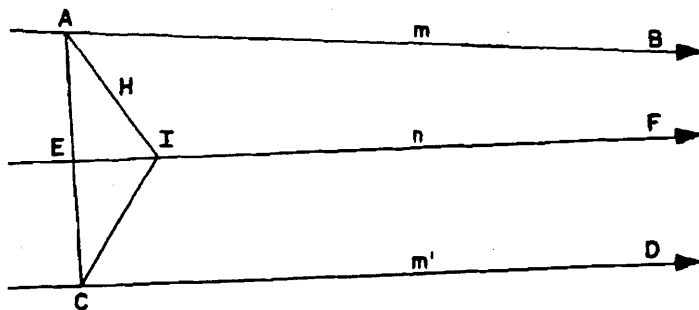


Figura 26

Considere as retas como na figura acima, sendo, a reta m , que passa por A e B , e a reta m' , que passa por C e D , paralelas à reta n , que passa por E e F , ambas na mesma direção. Podemos supor que o segmento AC é perpendicular a CD . Considere uma reta que passe nos pontos A e H , este último situado dentro do ângulo $C\hat{A}B$. Como m é paralela a n , esta corta a reta que passa pelos pontos E e F em algum ponto, digamos I . Trace CI . Usando o Teorema anterior, sabemos que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D . Logo, a reta que entra no ângulo $C\hat{I}F$ deve

interceptar a que passa por C e D . Isto prova o resultado neste caso.

Agora, vamos considerar o caso em que as duas retas, m e m' , estão do mesmo lado da terceira, n . Considere as retas como na figura abaixo. Suponha que m' seja a reta que está entre as outras duas. Tome um ponto $P \in m$. Considere a reta m'' , passando por P , paralela a m' , na mesma direção do paralelismo (de m com relação a n).

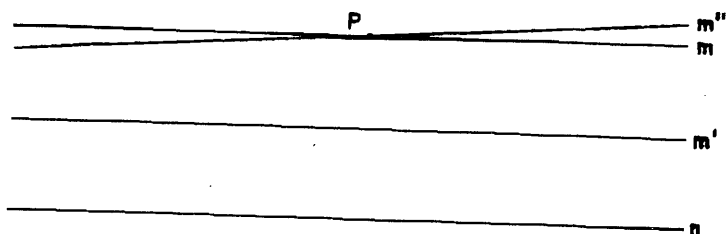


Figura 27

De acordo com a primeira parte provada, m'' é paralela a n . Como m também é paralela a n e o paralelismo de m e m'' é na mesma direção, concluímos que $m = m''$, já que a paralela, em uma determinada direção e passando pelo mesmo ponto, é única. Conseqüentemente, m é paralela a m' . \square

Para simplificar os nossos enunciados, introduziremos a noção de *ponto ideal*. Vamos acrescentar dois pontos a cada reta do plano, os quais, na ordenação destas retas, localizam-se, um, antes de todos os seus pontos, e o outro, depois de todos eles. (É o mesmo procedimento usado para incluir os pontos $+\infty$ e $-\infty$ no conjunto dos números reais.) Eles serão denominados pontos ideais. Admitiremos que estes novos pontos são adicionados de modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo, ou seja, o mesmo ponto ideal é adicionado a retas paralelas, no lado

do paralelismo. Assim, duas retas são paralelas se têm um ponto ideal em comum.

Muitas noções e enunciados serão simplificados com a introdução desta idéia. Por exemplo, poderemos considerar a noção de *triângulo generalizado*, formado por dois pontos ordinários e por um ponto ideal, ou por dois pontos ideais e um ponto ordinário, ou até por três pontos ideais. Estas figuras são de interesse na Geometria hiperbólica e seu estudo se inicia na próxima seção.

Como no caso de triângulos (ordinários), estes triângulos generalizados separam o plano em duas regiões, uma, que chamaremos de *interior*, constituída por todos os pontos dos segmentos de reta ligando dois pontos de seus lados, e a região complementar desta, que chamaremos de *exterior* do triângulo generalizado. Desde que a região interior de um triângulo generalizado é sempre a interseção de três semiplanos, ela é convexa. Como no caso de triângulos (ordinários), vamos nos referir ao interior do triângulo generalizado quando, de fato, queremos falar da região interior àquele triângulo. Diremos que um ponto pertence ao triângulo generalizado quando ele pertencer ao seu interior. Falaremos de uma reta penetrando num triângulo generalizado quando queremos dizer que ela tem pontos em comum com o seu interior. De uma maneira geral, usaremos, para triângulos generalizados, todas as simplificações de linguagem, com que já nos acostumamos, para triângulos (ordinários). Por último, aos poucos, esqueceremos a distinção entre triângulos e triângulos generalizados.

Exercícios

1. Formalize a construção dos pontos ideais. Para isto, considere o conjunto das semi-retas do plano. Defina como equivalentes duas semi-retas que são paralelas. Mostre que esta é uma relação de equivalência. Introduza a noção de ponto ideal, formalmente, como classe de equivalência de semi-retas paralelas, ou seja, acrescente ao conjunto dos pontos do plano o

conjunto das classes de eqüivalencia da relação acima. Redefina a noção de reta, acrescentando a cada reta do plano, da forma adequada, duas das classes eqüivalencia.

6.4 Propriedades dos triângulos generalizados

Consideraremos, inicialmente, os triângulos generalizados formados por dois pontos ordinários e um ponto ideal. Vamos representar os pontos ideais por letras gregas maiúsculas. Assim, nos referiremos ao triângulo generalizado $AB\Omega$, que tem vértices ordinários A e B , e vértice ideal Ω . A figura é, portanto, formada pelo segmento AB e por duas semi-retas paralelas com origens nos pontos A e B .

Teorema 7 *Se uma reta penetra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então, ela corta o lado oposto a este vértice.*

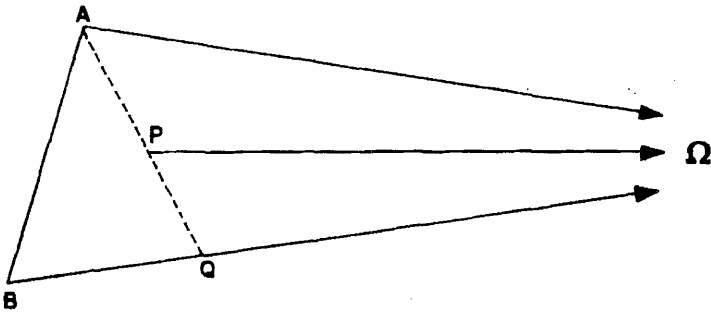


Figura 28

Prova. Se a reta penetra por A , ou por B , então, deve interceptar o lado oposto. Isto ocorre simplesmente porque as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas. Considere, pois, uma reta que vem do ponto Ω e passa em algum ponto P interior ao triângulo. Pelo paralelismo, a semi-reta S_{AP} intercepta $B\Omega$ em um ponto Q . Pelo axioma de Pasch, a reta que vem de Ω e passa por P deve interceptar um dos outros

dois lados do triângulo ABQ . Não pode interceptar BQ , pois do contrário, coincidiria com o lado $B\Omega$. Logo, intercepta AB . \square

Teorema 8 *Se uma reta corta um dos lados do triângulo generalizado $AB\Omega$ e não passa por nenhum de seus vértices, então, intercepta um e somente um dos outros dois lados.*

Prova. Se a reta intercepta $A\Omega$ ou $B\Omega$, o resultado se segue do paralelismo e do axioma de Pasch. Se ela intercepta AB em um ponto R , o leitor deve traçar $R\Omega$, reduzindo a prova ao teorema anterior. \square

Como no caso de triângulos ordinários, podemos falar aqui de *ângulos internos* e de *ângulos externos* de um triângulo generalizado. Se $AB\Omega$ é um tal triângulo, então, $A\hat{B}\Omega$ e $B\hat{A}\Omega$ são os seus ângulos internos. Como no caso ordinário, os ângulos externos são, simplesmente, os suplementos destes ângulos, os quais podem ser visualizados geometricamente através da extensão do lado AB .

Teorema 9 (TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO). *Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.*

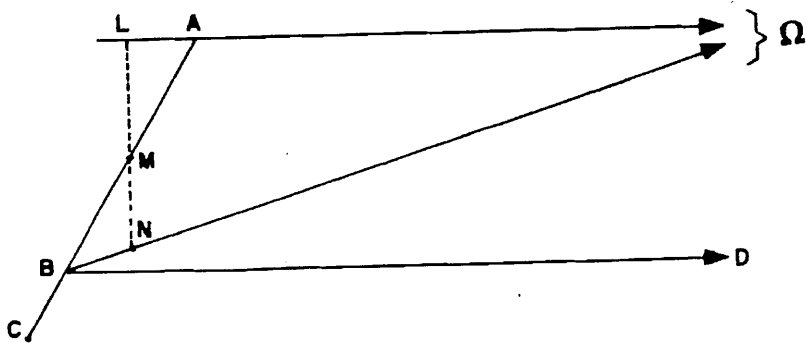


Figura 29

Prova. Dado o triângulo generalizado $AB\Omega$, seja C um ponto na semi-reta S_{AB} , fora do segmento AB . Temos que $C\hat{B}\Omega$ é um ângulo

externo do triângulo. Desejamos provar que $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$. Para isto, trace, a partir de B , um segmento BD , tal que $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$. Como decorrência dos quatro primeiros postulados, a reta que passa por B e D não intercepta $A\Omega$. Conseqüentemente, o ponto D não pode estar na região interior ao triângulo $AB\Omega$. Se o ponto D ficar fora do triângulo, como na figura anterior, então, o resultado fica demonstrado. Resta, portanto, apenas excluir a possibilidade de que o ponto D esteja sobre $B\Omega$.

Suponha que tal ocorra. Seja M o ponto médio de AB . Baixe uma perpendicular de M até um ponto $N \in B\Omega$. Na reta que passa por A e Ω , marque um ponto L de modo que $LA = BN$ e que L e N estejam em lados opostos relativamente à reta que passa por A e B . Pelo primeiro caso de congruência de triângulos (ordinários), $LAM = NBM$. Segue-se facilmente, que os pontos L , M e N são colineares e, conseqüentemente, LN é uma perpendicular comum a $L\Omega$ e a $N\Omega$. Mas isto contradiz a Proposição 3. \square

Diremos que dois triângulos generalizados, $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$, são *congruentes* se existe uma correspondência entre seus vértices, de modo que, os seus lados finitos se correspondam, e sejam congruentes, e os ângulos correspondentes sejam também congruentes.

Como no caso dos triângulos ordinários, escreveremos $AB\Omega = A'B'\Omega'$, para dizer que os dois triângulos são congruentes e que a congruência leva A em A' , B em B' e Ω em Ω' . A seguir, apresentamos as condições mínimas sob as quais dois triângulos generalizados, do tipo que vimos considerando, são congruentes.

Teorema 10 (CASO 1 DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS). *Se $AB = A'B'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.*

Prova. Devemos mostrar que $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$.

Tome, pois, uma semi-reta S_{BC} tal que $A\hat{B}C = A'\hat{B}'\Omega'$. Esta semi-reta penetra no ângulo $A\hat{B}\Omega$. Logo, pelo Teorema 7, ela corta

o lado $A\Omega$ em um ponto D . Tome o ponto D' em $A'\Omega'$, de sorte que $A'D' = AD$. Segue-se de nossas hipóteses que $ABD = A'B'D'$.

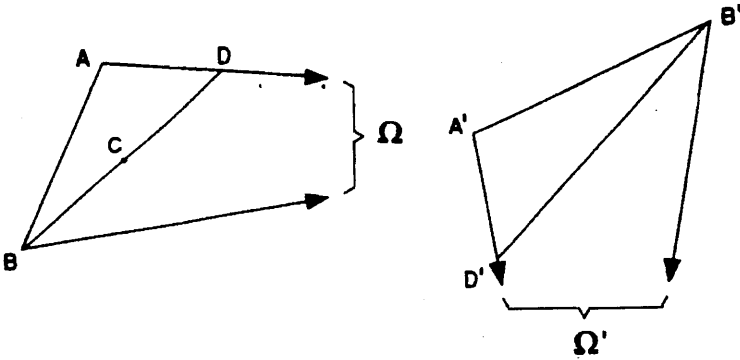


Figura 30

Conseqüentemente,

$$A'\hat{B}'D' = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega',$$

o que é absurdo. □

Teorema 11 (CASO 2 DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS). Se $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

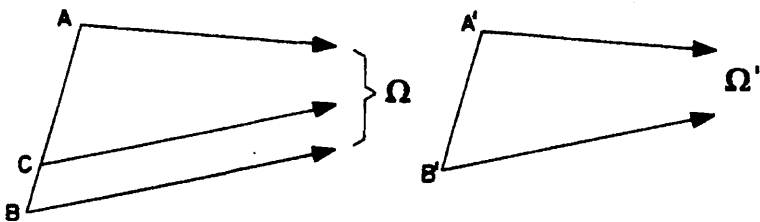


Figura 31

Prova. Devemos provar que $AB = A'B'$. Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $AB > A'B'$. Seja C um ponto de AB tal que $AC = A'B'$. Considere a reta $C\Omega$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos generalizados, teremos que $AC\Omega = A'B'\Omega'$. Portanto, $A\hat{C}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Como este último é, por hipótese, igual a $A\hat{B}\Omega$, então, o triângulo $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que está em contradição com o Teorema 9. \square

Teorema 12 Se $AB = A'B'$, $A\hat{B}\Omega = B\hat{A}\Omega$ e $A'\hat{B}'\Omega' = B'\hat{A}'\Omega'$, então, $AB\Omega = A'B'\Omega'$.

Prova. É suficiente provar que $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$. Vamos supor que este não seja o caso. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$. Construa, então, ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$, iguais entre si e iguais a $A'\hat{B}'\Omega'$. Pelo Teorema 7 e pelo axioma de Pasch, concluímos que as semi-retas S_{AD} e S_{BC} se interceptam em um ponto, que chamaremos de E , no interior do triângulo $AB\Omega$.

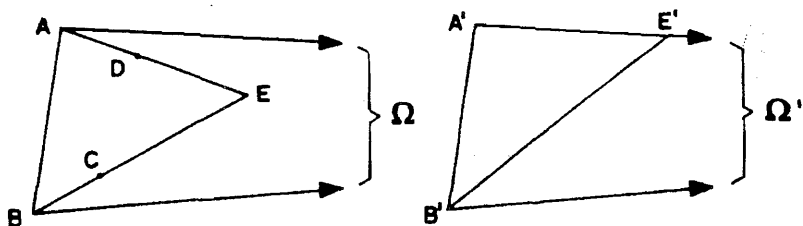


Figura 32

Marque, no lado $A'\Omega'$, um ponto E' , tal que $A'E' = AE$. Segue-se que os triângulos ABE e $A'B'E'$ são congruentes. Mas, então, teremos $A'\hat{B}'E' = A\hat{B}E$. Como este último é igual a $A'\hat{B}'\Omega'$, o

ponto E' deve pertencer a $B'\Omega'$, o que é absurdo. Isto prova o teorema. \square

Exercícios

1. Em um triângulo generalizado $AB\Omega$, a soma dos dois ângulos finitos é sempre menor do que dois ângulos retos.
2. Se uma transversal corta duas retas, formando ângulos interiores (do mesmo lado) cuja soma é igual a dois ângulos retos, então, as duas retas não se interceptam e não são paralelas.
3. Dados duas retas paralelas $A\Omega$ e $B\Omega$, e quatro pontos A' , B' , C' e D' , se ocorrer que $AB = A'B'$, $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}\Omega$ e $B'\hat{A}'D' = B\hat{A}\Omega$, então, as retas que contêm $A'D'$ e $B'C'$ são paralelas.
4. Quando os ângulos finitos do triângulo $AB\Omega$ são iguais, diremos que o triângulo generalizado é isósceles. Prove que, em tais triângulos, se M é o ponto médio de AB , a reta $M\Omega$ é perpendicular a AB . Inversamente, mostre que, se M é o ponto médio de um segmento AB e $M\Omega$ é perpendicular a AB , então, $AB\Omega$ é isósceles.
5. Dados $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$, nos quais $A'\hat{B}'\Omega' = A\hat{B}\Omega$ e $AB > A'B'$, tem-se $B'\hat{A}'D' > B\hat{A}\Omega$.

6.5 O ângulo de paralelismo

Considere um triângulo generalizado $AP\Omega$, em que o ângulo $\hat{A} = 90^\circ$. Pelo Teorema do ângulo externo para triângulos generalizados, é fácil concluir que o ângulo \hat{P} é agudo. A este chamaremos de *ângulo de paralelismo*. Do primeiro caso de congruência de triângulos generalizados, provado na seção anterior, podemos

deduzir, imediatamente, que o ângulo de paralelismo depende somente do comprimento do segmento AP . Vamos representar por h tal comprimento e por $\Theta(h)$ o ângulo de paralelismo. De fato, é consequência imediata do teorema do ângulo externo que Θ é uma função decrescente, isto é,

$$\text{Se } h_1 < h_2 \text{ então } \Theta(h_1) > \Theta(h_2).$$

Como o tamanho do segmento AP é arbitrário, a função Θ está definida para qualquer número real não negativo, sendo igual a um ângulo reto quando $h = 0$. Provaremos mais adiante que a função Θ tem por imagem o conjunto de todos os ângulos no intervalo $(0, 90^\circ]$, decrescendo para zero, enquanto h cresce para $+\infty$. Assim sendo, ela é contínua, já que é estritamente decrescente.

Para utilização futura, é interessante estender a definição de Θ para valores negativos de h através da equação:

$$\Theta(h) + \Theta(-h) = 180^\circ.$$

Isto permite que coloquemos coordenadas em uma reta, na forma usual, e tenhamos a função Θ definida para cada ponto desta reta.

Também é conveniente poder considerar Θ expresso em radianos, de modo que

$$\Theta(0) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \Theta(h) + \Theta(-h) = \pi.$$

A expressão de Θ em radianos será utilizada mais adiante neste livro, mas o leitor será alertado sobre o fato.

Exercícios

1. Prove que, se uma função da reta na reta é crescente e sobre, então, é contínua.
2. Prove o exercício anterior para o caso de funções definidas em um intervalo cuja imagem é também um intervalo.

6.6 Quadriláteros especiais

Como vimos, Saccheri usou, como base de suas investigações, quadriláteros $ABCD$ nos quais $AB = CD$ e os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{B}CD$ são retos. Tais quadriláteros são comumente referidos como *quadriláteros de Saccheri*. Na Geometria euclidiana, eles seriam retângulos, mas isso não ocorre na Geometria hiperbólica. Em um quadrilátero de Saccheri, o lado comum aos dois ângulos retos é chamado de *base*; o lado oposto à base é chamado de *topo*; os outros dois são chamados simplesmente de *lados* do quadrilátero; os dois ângulos não retos são denominados de *ângulos do topo* ou simplesmente de ângulos do quadrilátero.

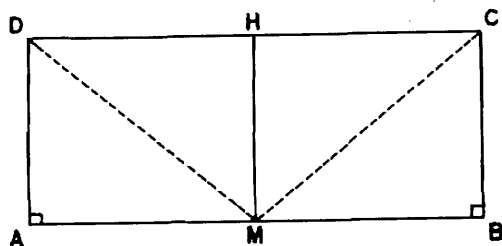


Figura 33

Proposição 13 *A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e à base; os ângulos do topo são congruentes.*

Prova. Seja AB a base do quadrilátero de Saccheri $DABC$. Sejam M e H os pontos médios da base e do topo respectivamente. É fácil provar que $DAM = CBM$, e que, em conseqüência, $DMH = CMH$. Segue-se daí que MH é perpendicular a DC e, somando ângulos em M , que MH é também perpendicular a AB . Somando ângulos em D e C , obtemos a igualdade dos ângulos do topo. \square

Corolário 14 *A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas que não se interceptam.*

Teorema 15 *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

Prova. Usaremos as mesmas letras da figura anterior. Seja Ω um dos pontos ideais da reta que passa por A e B . Sem perda de generalidade, podemos supor que $B \in A\Omega$. Considere, então, as semi-retas $D\Omega$ e $C\Omega$. Seja E um ponto tal que $C \in DE$.

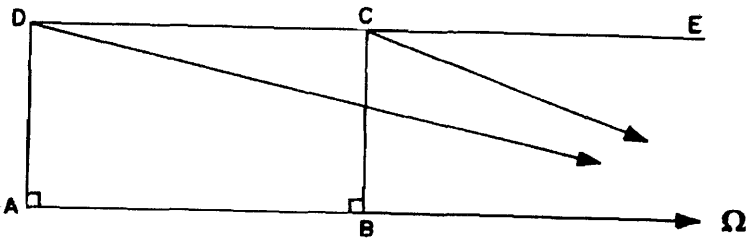


Figura 34

Devido ao corolário (14), sabemos que $D\Omega$ está contida no ângulo $A\hat{D}E$, e que $C\Omega$ está contida no ângulo $B\hat{C}E$. Tem-se que $A\hat{D}\Omega = B\hat{C}\Omega$, por serem ângulos de paralelismo correspondentes a segmentos congruentes. Além disto, no triângulo generalizado $CD\Omega$, o ângulo externo $E\hat{C}\Omega$ é maior do que o ângulo interno não adjacente $C\hat{D}\Omega$. Portanto, $B\hat{C}E > A\hat{D}C = B\hat{C}D$. Por conseguinte, $B\hat{C}D$ é agudo. \square

Observe que a Proposição (13) depende apenas dos quatro primeiros postulados, sendo, portanto, também válida na Geometria euclidiana. Por outro lado, o Teorema, é consequência do quinto postulado que adotamos.

Lambert utilizou, como figura fundamental no seu estudo da Geometria, um quadrilátero com três ângulos retos. Tais quadriláteros serão referidos simplesmente como *quadriláteros de Lambert*. Seu

único ângulo não conhecido será referido apenas como o *ângulo do quadrilátero de Lambert*.

Teorema 16 *O ângulo de um quadrilátero de Lambert é sempre agudo.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert com $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$. Na semi-reta S_{BA} , marque o ponto E , tal que $EA = AB$. Em sua extremidade, trace o segmento FE perpendicular a AB e congruente a BC . Trace FA , FD e AC . É imediato verificar que $FEA = CBA$.

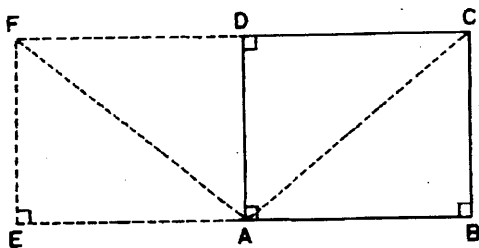


Figura 35

Como consequência, obtém-se a congruência dos triângulos FAD e CAD . Portanto, o ângulo \hat{ADF} é reto e, então, os pontos F , D e C são colineares. Por construção, $FEBC$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o ângulo \hat{BCD} é agudo. \square

Teorema 17 *Seja $ABCD$ um quadrilátero no qual $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Então, $\hat{C} > \hat{D}$ se e só se $AD > CB$.*

Prova. Se $AD > BC$, tome $E \in AD$, tal que $AE = BC$ e trace EC . Então, $EABC$ é um quadrilátero de Saccheri e, logo, $\hat{AEC} = \hat{BCE}$. Como \hat{AEC} é ângulo externo do triângulo DEC e, claramente, $\hat{BCD} > \hat{BCE}$, podemos concluir que $\hat{ADC} < \hat{BCD}$.

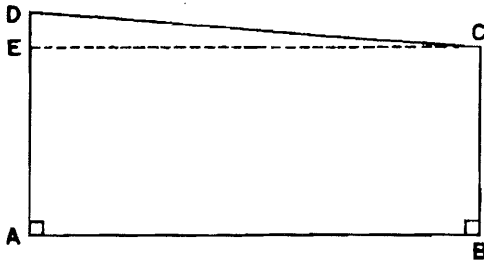


Figura 36

A prova da afirmação inversa pode ser feita sem maiores problemas e é deixada como exercício.

Exercícios

1. Seja $ABCD$ um quadrilátero, como na figura anterior, em que os ângulos nos vértices A e B são retos. Mostre que, se os outros dois ângulos são iguais, $ABCD$ é quadrilátero de Saccheri.
2. Prove que, num quadrilátero de Lambert, os lados adjacentes ao ângulo agudo são maiores do que os respectivos lados opostos.
3. O que é maior: a base ou o topo, em um quadrilátero de Saccheri?
4. Prove que, se perpendiculares forem traçadas, das extremidades de um lado de um triângulo até tocarem na reta que passa pelos pontos médios dos outros dois lados, forma-se um quadrilátero de Saccheri. Como consequência, prove que a reta perpendicular a um lado de um triângulo e passando pelo seu ponto médio é perpendicular à reta ligando os pontos médios dos outros dois lados.

5. Prove que, o segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é menor do que a metade do terceiro lado.
6. Prove que, a reta ligando os pontos médios dos lados iguais de uma quadrilátero de Saccheri é perpendicular à reta ligando os pontos médios dos outros dois lados, e que, ela divide ao meio as diagonais do quadrilátero.

6.7 A soma dos ângulos de um triângulo

Teorema 18 *A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Prova.¹ Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C . Sabemos, com base nos quatro primeiro postulados, que a soma de quaisquer dois ângulos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Assim, os outros dois ângulos do triângulo dado são agudos.

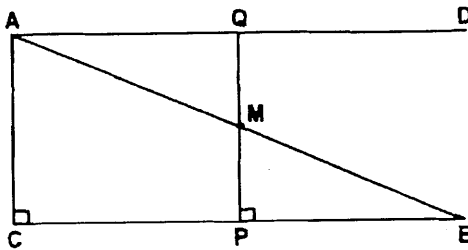


Figura 37

Trace o segmento AD de sorte que $D\hat{A}B = A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio de AB . Baixe perpendicular MP ao lado BC . Na semi-reta S_{AD} , marque um ponto Q tal que $AQ = PB$. Temos, então,

¹Esta é a prova original de Lobachevski

$AQM = BPM$. Conseqüentemente, $M\hat{Q}A$ é um ângulo reto e P , M e Q são colineares. Portanto, $ACPQ$ é quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A . Logo, a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo ABC , que é exatamente igual ao ângulo $C\hat{A}D$, é menor do que um ângulo reto, daí o resultado. \square

Teorema 19 *A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Este é de fato apenas um corolário do Teorema anterior, e o leitor não terá dificuldade em demonstrá-lo.

Corolário 20 *A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

Teorema 21 *Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

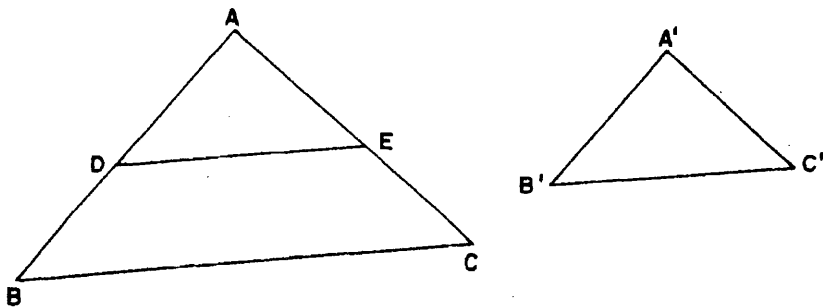


Figura 38

Prova. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Suponha que os lados correspondentes não sejam iguais. Por exemplo, suponha que $AB > A'B'$. Seja, então, D um ponto de AB tal que $AD = A'B'$. Na semi-reta S_{AC} , marque um ponto E tal que $AE = A'C'$. Então, tem-se $ADE = A'B'C'$. Admita por um instante que $AE < AC$. Então, $BDEC$ é um

quadrilátero em que a soma dos ângulos internos é exatamente quatro ângulos retos, o que está em contradição com o corolário (20). Isto conclui a demonstração.

Para provar que $AE < AC$, vamos considerar os dois outros casos possíveis. Se $AE = AC$, então, E coincide com C . Como os ângulos $B\hat{C}A$ e $D\hat{E}A$ são iguais, D teria de coincidir com B , o que seria uma contradição. Se $AE > AC$, obtem-se um triângulo com um ângulo externo igual a um interno não adjacente. O leitor é solicitado a fazer uma figura desta situação e verificar o que afirmamos. \square

Teorema 22 *A função ângulo de paralelismo Θ está definida para qualquer número real não negativo e é sobre o intervalo $(0, 90]$.*

Prova. Vamos mostrar que, dado qualquer ângulo agudo α , existe um número não negativo h tal que $\Theta(h) = \alpha$. Construa um ângulo $B\hat{A}C$ cuja medida seja α . Afirmamos que existe uma reta perpendicular a S_{AC} e que não intercepta S_{AB} . Vamos supor que isso não ocorra, ou seja, que todas as retas perpendiculares a S_{AC} também cortam S_{AB} , e vamos mostrar que isto leva a um absurdo. Para isto, marque um ponto qualquer C_1 em S_{AC} .

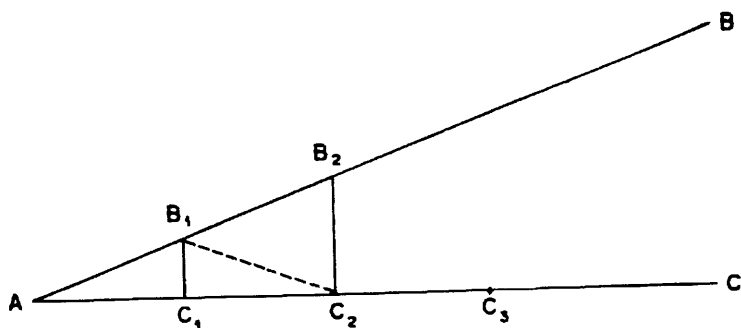


Figura 39

Seja B_1 o ponto em que a perpendicular a S_{AC} corta S_{AB} . Sabemos que a soma dos ângulos do triângulo AB_1C_1 é $180 - \varepsilon$. Marque

agora um ponto C_2 em S_{AC} , fora de AC_1 , tal que $AC_2 = AC_1$, e considere o ponto B_2 onde a perpendicular a S_{AC} corta S_{AB} . Observe que os triângulos AB_1C_1 e $C_2B_1C_1$ são congruentes. Segue-se que a soma dos ângulos do triângulo AB_2C_2 é menor do que $180 - 2\varepsilon$. Repetindo-se indutivamente este argumento, chegamos a triângulos com soma dos ângulos $180 - n\alpha$. Tomando n suficientemente grande, obtém-se um triângulo cuja soma dos ângulos é negativa, o que é um absurdo. Isto conclui a prova de nossa afirmação.

O conjunto de todas as retas perpendiculares a S_{AC} pode ser separado em dois subconjuntos, o das que interceptam S_{AB} e o das que não interceptam, e existe exatamente uma reta m que separa estes dois subconjuntos. É fácil ver que m não intercepta S_{AB} . Vamos mostrar que m é paralela a S_{AB} .

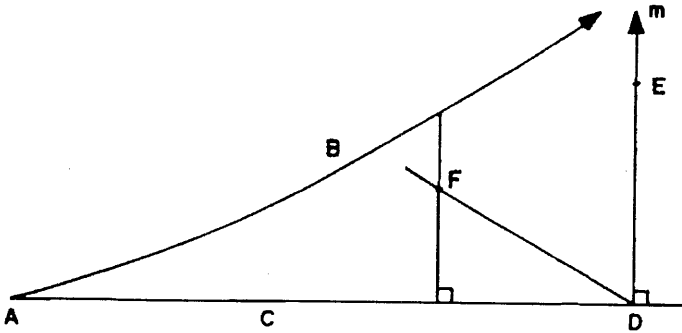


Figura 40

Seja D o ponto onde m corta S_{AC} e E um ponto de m como na figura. Considere uma semi-reta qualquer S_{DF} que divida o ângulo $\hat{A}DE$. Afirmamos que S_{DF} corta S_{AB} . Se DF já não intercepta S_{AB} , F pertence a uma das retas perpendiculares a S_{AC} que intercepta S_{AB} . A afirmação é agora consequência do axioma de Pasch.

Mas, se qualquer semi-reta que divide o ângulo $\hat{A}DE$ intercepta S_{AB} , então S_{DE} é paralela a S_{AB} . Portanto, o comprimento h do segmento AD tem α como ângulo de paralelismo. \square

Exercícios

1. Prove que dois quadriláteros de Saccheri com topos congruentes e ângulos do topo congruentes são congruentes.
2. Prove que dois quadriláteros de Saccheri com bases congruentes e ângulos do topo congruentes são congruentes.
3. O defeito de um triângulo é definido com a diferença entre 180° e a soma dos seus ângulos internos. Considere um triângulo e o subdivide traçando um segmento ligando um de seus vértices a algum ponto do lado oposto. Mostre que a soma dos defeitos dos dois triângulos da subdivisão é igual ao defeito do primeiro triângulo. Suponha, agora, que cada um dos triângulos seja novamente subdividido. Como você expressa o defeito do triângulo maior relativamente aos defeitos dos menores?
4. Prove que a soma dos ângulos de um polígono de n lados é menor do que $(n - 2)$ vezes dois ângulos retos.

6.8 Pontos ultra-ideais

Vamos agora voltar nossa atenção às retas que não se interceptam. Sabemos que, se duas retas têm uma perpendicular comum, então, elas são retas que não se interceptam. A afirmação inversa é também verdade e se constitui em uma das propriedades importantes da Geometria hiperbólica.

Teorema 23 *Duas retas que não se interceptam têm uma e somente uma perpendicular comum.*

Prova. (EXISTÊNCIA). Sejam m e n um par de retas que não se interceptem. Escolha dois pontos quaisquer A e B em n e trace os segmentos AC e BD perpendiculares a m . Se $AC = BD$, $ACDB$

é um quadrilátero de Saccheri. Segue-se daí imediatamente que n e m possuem uma perpendicular comum.

Se AC não for congruente a BD , podemos supor, sem perda de generalidade, que $AC > BD$. Vamos chamar de Ω o ponto ideal da semi-reta S_{AB} . Marque $E \in AC$ tal que $EC = BD$, e marque um ponto qualquer H na semi-reta S_{CD} fora do segmento CD . Construa o ângulo $C\hat{E}F = D\hat{B}\Omega$ com o ponto F no quadrilátero $ACDB$.

Vamos mostrar que a semi-reta S_{EF} intercepta n . Para isto, considere semi-retas $C\Omega$ e $D\Omega$ que ficam respectivamente dentro dos ângulos $A\hat{C}H$ e $B\hat{D}H$. Desde que $H\hat{D}\Omega > H\hat{C}\Omega$ (teorema do ângulo externo), podemos traçar uma linha CJ , penetrando no ângulo $A\hat{C}\Omega$, tal que $H\hat{C}J = H\hat{D}\Omega$. Tal reta interceptará a reta n em um ponto, o qual podemos, por simplicidade, supor que é o ponto J .

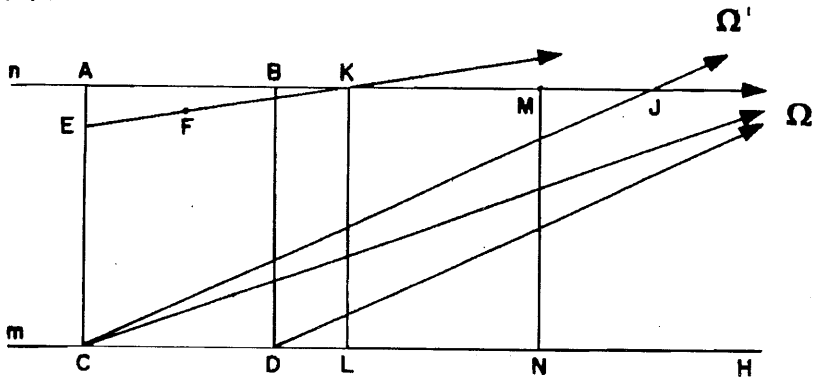


Figura 41

Uma inspeção das informações que temos sobre as figuras $FECJ$ e $JBD\Omega$ nos convence de que S_{EF} é paralela a S_{CJ} . Conseqüentemente, S_{EF} intercepta a reta n em um ponto K situado no intervalo AJ

Trace o segmento KL perpendicular à reta m como na figura. Na semi-reta $B\Omega$, marque um ponto M tal que $MB = EK$. Na semi-reta S_{DH} , marque um ponto N tal que $ND = CL$. Trace

MN . Usando congruência de triângulos, é fácil mostrar que os quadriláteros $EKLC$ e $BMND$ são congruentes. Conseqüentemente, MN é perpendicular a m e $MN = KL$. Portanto, $KLNM$ é um quadrilátero de Saccheri e o resultado se segue.

(UNICIDADE) Se existissem duas retas perpendiculares às duas retas, teríamos um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que, como vimos, é impossível. Isto conclui a demonstração. \square

Estenderemos outra vez o plano, acrescentando nova família de pontos que denominaremos de *pontos ultra-ideais*. O conjunto dos pontos ultra-ideais será indexado pelas retas do plano, ou seja, vamos associar a cada reta m um de tais pontos que representaremos por Γ_m . Estes pontos são adicionados aos pontos ordinários e ideais, segundo a seguinte regra:

em uma reta n serão acrescentados os pontos ultra ideais Γ_m , onde m é qualquer reta perpendicular a n .

Como conseqüência desta regra, e do teorema anterior, duas retas que não se interceptam têm agora em comum exatamente um ponto ultra-ideal. Além disto, o conjunto de todas as retas que passam pelo ponto ultra-ideal Γ_m é constituído exatamente pelo feixe de retas perpendiculares à reta m . Observe que, agora, duas retas quaisquer sempre se interceptam! O ponto comum às duas retas pode ser

1. ordinário.
2. ideal (caso de retas paralelas),
3. ultra-ideal (caso de retas que não se interceptam!).

Como no caso dos pontos ideais, estes novos pontos são introduzidos apenas para facilitar a notação e o enunciado e prova de certas proposições, como é o caso da seguinte.

Teorema 24 *As mediatrizes² dos lados de um triângulo são concorrentes (em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal).*

Prova. ³ Consideraremos os três casos possíveis.

CASO I. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ordinário do plano.* O resultado pode ser obtido pelo uso de congruência de triângulos e a prova é deixada a cargo do leitor.

CASO II. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ultra-ideal Γ_m .* Neste caso, m é perpendicular comum às duas, e devemos mostrar que a terceira mediatriz também é perpendicular a m , o que é equivalente a mostrar que ela passa também no ponto Γ_m .

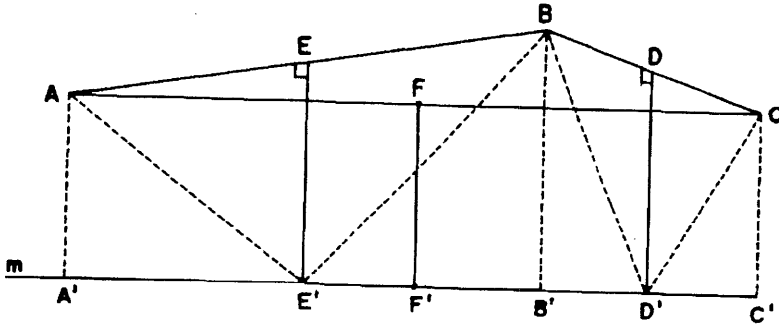


Figura 42

Seja ABC um triângulo e D , E e F os pontos médios dos lados BC , BA e AC , respectivamente. Suponha que as mediatrizes dos lados AB e BC têm m como perpendicular comum. Na figura acima estas mediatrizes são DD' e EE' e m é a reta passando por D' e E' . Trace os segmentos AA' , BB' e CC' , todos perpendiculares a m . Trace também AE' , BE' , BD' e CD' . Tem-se, então,

$$AEE' = BEE' \quad \text{e} \quad BDD' = CDD'.$$

²Chama-se mediatriz de um segmento a reta que lhe é perpendicular e passa no seu ponto médio.

³Esta prova é devida a Lobachewski.

Como consequência, tem-se também

$$AA'E' = BB'E' \quad e \quad BB'D' = CC'D'.$$

Segue-se que

$$AA' = BB' = CC'.$$

Portanto, $AA'C'C$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o segmento $F'F'$ ligando os pontos médios de sua base e de seu topo é também perpendicular à base e ao topo, ou seja, é perpendicular a AC e a m . O resultado fica assim demonstrado.

CASO III. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ideal Ω .* Vamos mostrar que a terceira mediatriz também passa por Ω , ou seja, que as três mediatrizes são paralelas em uma mesma direção.

Se a terceira mediatriz intercepta uma das duas outras, em um ponto ordinário do plano ou em um ponto ultra-ideal, então, pelos dois casos considerados, chegamos a uma contradição. Por isto, podemos concluir que a terceira mediatriz intercepta cada uma das outras duas em ponto ideal. Existem, então, duas situações possíveis, ilustradas na figura seguinte.

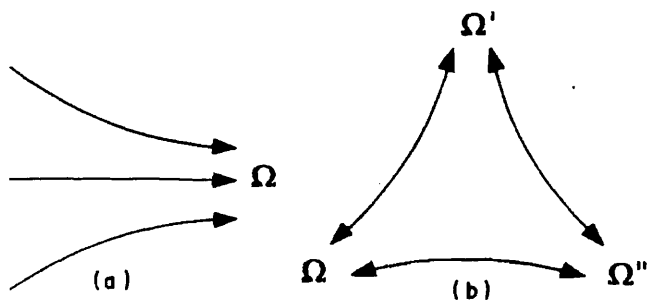


Figura 43

Vamos mostrar que a situação (b), em que as três mediatrizes formam um triângulo generalizado $\Omega\Omega'\Omega''$, não pode ocorrer. Observe que nenhuma reta pode cortar os três lados deste triângulo em pontos ordinários. De fato, se uma reta n corta $\Omega\Omega'$ em um ponto A

e corta $\Omega'\Omega''$ em um ponto B , traçando-se a reta $B\Omega$ vemos que n fica dentro da região limitada por dois ângulos opostos pelo vértice, enquanto a reta $\Omega\Omega''$ fica dentro do outro par. Portanto, n não pode cortar $\Omega\Omega''$ em um ponto ordinário.

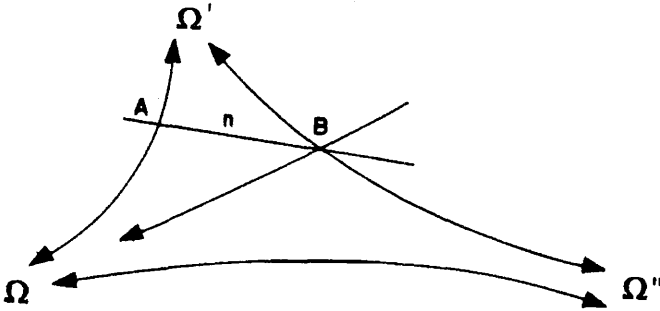


Figura 44 .

Por outro lado, sempre existe uma reta que corta as três mediatrizes de um triângulo em pontos ordinários! De fato, no triângulo ABC , seja \hat{A} o seu maior ângulo. Sejam K e L pontos sobre BC tais que $B\hat{A}K = A\hat{B}K$ e $C\hat{A}L = A\hat{C}L$. Então, K é ponto da mediatriz do lado AB e L é ponto da mediatriz do lado AC . Assim, BC intercepta as três mediatrizes.

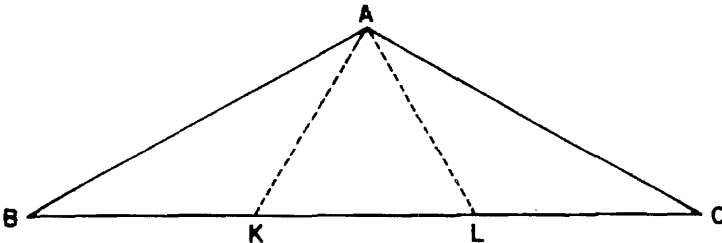


Figura 45

Logo, a situação (b) é impossível. Isto demonstra o teorema.

Exercícios

1. Prove que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes.
2. Explique por que, na Geometria hiperbólica três pontos não colineares nem sempre determinam um círculo.

6.9 A variação da distância entre duas retas

Considere duas retas m e n . Tome sobre m um ponto P e considere a perpendicular baixada de P à reta n . Seja Q o pé desta perpendicular. O comprimento do segmento PQ é referido como a distância do ponto P à reta n . É nosso intento investigar como varia esta distância enquanto o ponto P se move sobre a reta m . Vamos considerar os três casos: retas que se interceptam, paralelas e que não se interceptam.

Teorema 25 *Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Seja P um ponto de m . A distância do ponto P à reta n cresce quando P se desloca ao longo da reta m se afastando do ponto O , tornando-se maior do que qualquer comprimento prefixado. Esta distância decresce quando P se move na direção de O tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado.*

Prova. Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Sejam P_1 e P_2 dois pontos de m tais que $P_1 \in OP_2$. Sejam P_1Q_1 e P_2Q_2 segmentos perpendiculares a n como indicados na figura seguinte. Então, no quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, os ângulos dos vértices Q_1 e Q_2 são retos, o ângulo em P_1 é obtuso e o ângulo em P_2 é agudo. Segue-se que $P_1Q_1 < P_2Q_2$. Isto mostra que a distância cresce quando o ponto variável sobre m se afasta do ponto O , e decresce quando ele se aproxima.

Considere o ângulo $P_1\hat{O}Q_1$ como ângulo de paralelismo correspondente a uma distância h . Seja M um ponto de n tal que o

comprimento de OM seja h . Trace por M a reta m' perpendicular a n . Então, m e m' são paralelas, ou seja, elas se interceptam em um ponto ideal Ω .

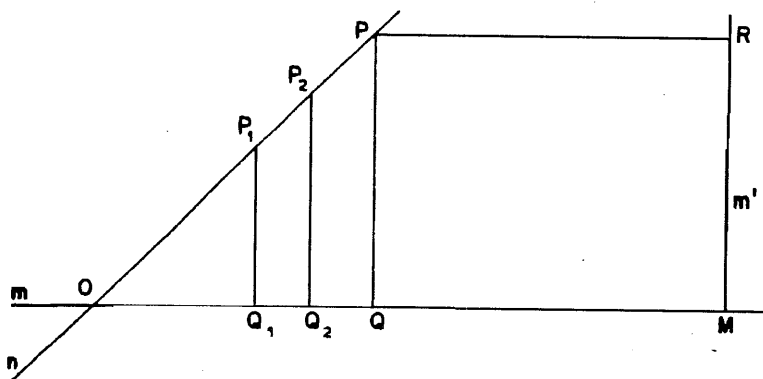


Figura 46

Se r é um número positivo qualquer, escolha um ponto R em $M\Omega$ tal que o comprimento de MR seja r e trace a perpendicular a m' que passa por R . Esta reta intercepta m em um ponto P . Seja Q o pé da perpendicular baixada de P à reta n . Então, $PQMR$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo em P . Logo, $PQ > RM$. Isto conclui a prova do Teorema. \square

Teorema 26 *Sejam m e n duas retas paralelas e P um ponto de m . A distância de P à reta n decresce quando P se move na direção do paralelismo, tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado. A distância cresce na direção oposta ao paralelismo, tornando-se maior do que qualquer valor prefixado.*

Prova. Sejam m e n duas retas paralelas e seja Ω o ponto ideal onde as duas se interceptam. Sejam P_1 e P_2 dois pontos sobre m e Q_1 e Q_2 , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n . Suponha que $P_2 \in P_1\Omega$. Segue-se que $Q_2 \in Q_1\Omega$ e que o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$ (com ângulos retos nos vértices

Q_1 e Q_2) tem ângulo agudo em P_1 e ângulo obtuso em P_2 . Logo, $P_1Q_1 > P_2Q_2$.

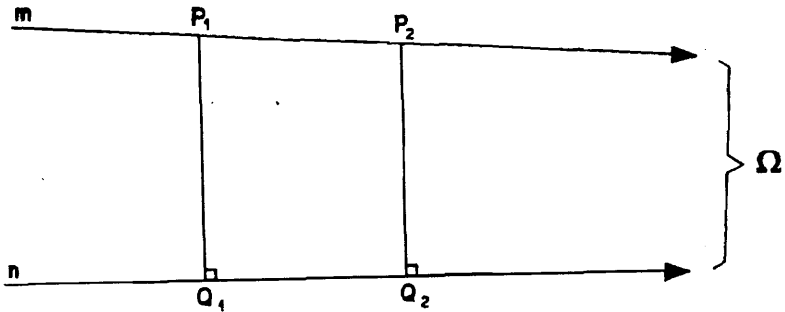


Figura 47

Resta, portanto, apenas provar que a distância pode tornar-se tão grande ou tão pequena quanto se queira. Vamos de fato provar que qualquer que seja o número positivo r dado, existe um ponto R sobre m tal que a distância deste ponto à reta n é exatamente r .

Tome $P \in m$ e seja Q o pé da perpendicular baixada deste ponto à reta n . Se o comprimento de PQ é r então P é o ponto desejado. Se não for, então marque na semi-reta S_{QP} um ponto R tal que o comprimento de RQ seja r e trace por R a reta m' paralela a n na direção oposta a do paralelismo de m e n .

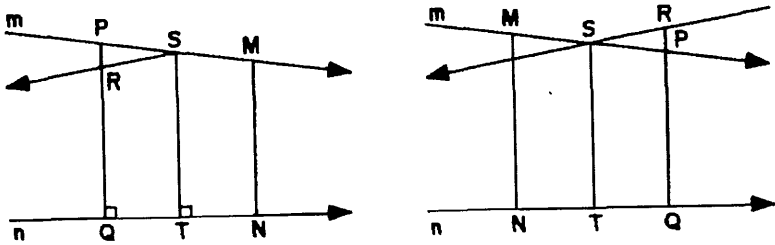


Figura 48

É claro que m' intercepta m em um ponto S . Seja T o pé da perpendicular baixada de S à reta n . Sobre as retas m e n , marque pontos M e N tais que $SM = SR$ e $TQ = TN$. Comparação entre os quadriláteros $STNM$ e $STQR$ permite concluir que eles são congruentes e, portanto, $MN = RQ$ e MN é perpendicular a n . Daí o resultado. \square

Fica, portanto, claro que retas paralelas não são equidistantes como no caso da Geometria euclidiana. Como a distância entre retas paralelas diminui para zero na direção do paralelismo, concluímos que retas paralelas são assintóticas. O leitor dispõe agora de todas as informações para concluir que as figuras formada por pares de retas paralelas são sempre congruentes.

Teorema 27 *Sejam m e n duas retas que não se interceptam e P um ponto de m . Seja MN o segmento da perpendicular comum com $M \in m$ e $N \in n$. A distância de P à reta n cresce quando P se afasta do ponto M tornando-se maior do que qualquer valor prefixado, e decresce quando o ponto P se aproxima de M até tornar-se igual a AB quando $P = A$.*

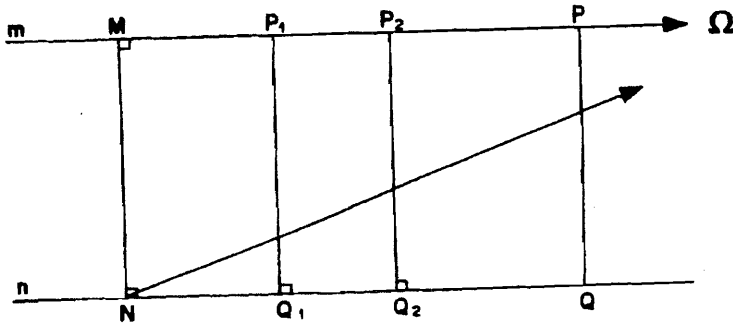


Figura 49

Prova. Sejam m e n retas que não se interceptam e seja MN um segmento da perpendicular comum, com $M \in m$ e $N \in n$. Sejam

P_1 e P_2 dois pontos de m situados do mesmo lado relativamente ao ponto M e tais que $MP_1 < MP_2$. Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n .

No quadrilátero de Lambert MNQ_1P_1 , tem-se $P_1Q_1 > MN$. Exame do quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo e um ângulo obtuso, permite concluir que $P_1Q_1 < P_2Q_2$. Isto mostra que a distância de um ponto de m a n cresce quando o ponto se afasta do ponto M .

Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{MP_1} . Considere a semi-reta $N\Omega$. É fácil ver que toda perpendicular baixada de um ponto de S_{MP_1} à reta n corta $N\Omega$. Segue-se daí e do Teorema 26 que o comprimento de tais perpendiculares cresce arbitrariamente. \square

Exercícios

1. Mostre que as figuras formadas por pares de retas paralelas são sempre congruentes.
2. Sob que hipótese adicional, as figuras formadas por pares de retas que não se interceptam são congruentes?
3. Prove que segmentos realizam a menor distância entre dois pontos.
4. Mostre que a circunferência de um círculo é maior do que 6 vezes o seu raio.
5. Prove que, se duas retas são assintóticas, então, são paralelas.

6.10 Construção de uma paralela

Dada uma reta ℓ e um ponto P que não pertence a esta reta, o método de construção de uma de suas paralelas, passando pelo ponto P , é descrito a seguir:

Teorema 28 Trace a perpendicular PQ do ponto P à reta ℓ . Marque, agora, na reta ℓ , um ponto R diferente do ponto Q . Trace a reta m perpendicular ao segmento PQ passando pelo ponto P . Trace, em seguida, a perpendicular RS do ponto R à reta m . Formamos, assim, um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no ponto R . Com P como centro e raio igual a QR , trace um círculo. Este interceptará o segmento RS em um ponto T . A reta que passa por P e T é uma das paralelas à reta ℓ passando pelo ponto P . A outra pode ser construída de forma análoga, escolhendo-se o ponto R do outro lado do ponto Q .

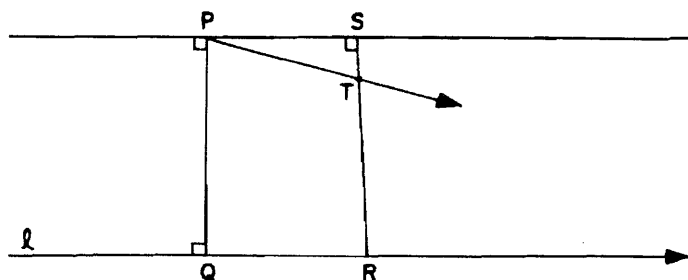


Figura 50

A prova deste teorema é baseada em dois lemas, os quais serão úteis para o capítulo de trigonometria hiperbólica. Vamos iniciar fazendo algumas considerações sobre triângulos retângulos.

Seja ABC um triângulo retângulo tendo C como vértice do ângulo reto. Designe por λ e μ as medidas dos ângulos A e B e por a , b e c as medidas dos lados opostos aos vértices A , B e C , respectivamente.

Vamos representar os ângulos $\Theta(a)$, $\Theta(b)$ e $\Theta(c)$, respectivamente, por α , β e γ . Os comprimentos correspondentes aos ângulos λ e μ , considerados como ângulos de paralelismo, serão designados por ℓ e m , de modo que $\Theta(\ell) = \lambda$ e $\Theta(m) = \mu$. Os complementos dos ângulos α , β , γ , λ e μ serão representados por α' , β' , γ' , λ' e μ' . Como eles são ângulos agudos, possuem distâncias associadas que

serão designadas por a' , b' , c' , ℓ' e m' , respectivamente. Com esta escolha de notação, teremos, por exemplo, que $\Theta(a) + \Theta(a')$ é um ângulo reto.

Assim, associado a um triângulo retângulo, temos 20 números! Ou seja, vinte variáveis devem ter seus valores prescritos para que tenhamos um triângulo. Felizmente elas não são independentes.

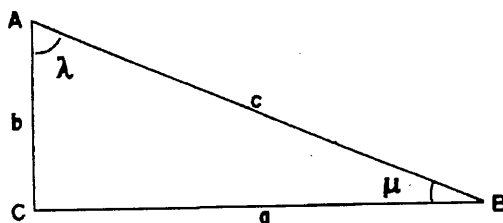


Figura 51

De fato, um triângulo retângulo pode ser construído quando a hipotenusa e um de seus ângulos agudos são dados. Por exemplo, se forem dados c e μ , o triângulo retângulo, na figura seguinte, pode ser construído traçando-se o segmento AB de comprimento c , em seguida o ângulo μ com vértice no ponto B e, por último, baixando-se a perpendicular do ponto A ao outro lado do ângulo. Esta construção é, de fato, a mesma usada na Geometria euclidiana. Assim sendo, todas as variáveis mencionadas podem ser determinadas pela hipotenusa e um ângulo.

Vamos tentar determinar as relações existentes entre as variáveis associadas a um triângulo. Primeiramente, temos as mais simples que são:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \pi/2, ^4$$

⁴A partir de agora, estaremos usando como unidade de medida de ângulos o radiano, isto é, escolhemos como unidade de medida para o ângulo raso o número π . Esta escolha permitirá a obtenção de fórmulas mais simples na trigonometria hiperbólica.

$$\Theta(a) = \alpha, \quad \Theta(b) = \beta, \quad \Theta(c) = \gamma, \quad \Theta(\ell) = \lambda, \quad \Theta(m) = \mu,$$

$$\Theta(a') = \alpha', \quad \Theta(b') = \beta', \quad \Theta(c') = \gamma', \quad \Theta(\ell') = \lambda', \quad \Theta(m') = \mu'.$$

Além destas 15 relações temos mais as seguintes, as quais não são independentes.

Lema 29 *Em um triângulo retângulo, valem as seguintes relações:*

$$\lambda + \Theta(c + m) = \beta, \quad \mu + \Theta(c + \ell) = \alpha,$$

$$\lambda + \beta = \Theta(c - m), \quad \mu + \alpha = \Theta(c - \ell),$$

$$\Theta(b + \ell) + \Theta(m - a) = \pi/2, \quad \Theta(m + a) + \Theta(\ell - b) = \pi/2.$$

Próva. Inicialmente, queremos observar que as equações na coluna da direita, são conseqüência direta das correspondentes equações da coluna esquerda, quando trocamos os papéis dos catetos a e b , dos ângulos λ e μ e de todas as grandezas correspondentes. Assim, só é necessário provar as equações de uma das colunas, por exemplo, as da esquerda. Provaremos com detalhes a primeira destas equações e indicaremos como devem ser feitas as provas nos outros dois casos.

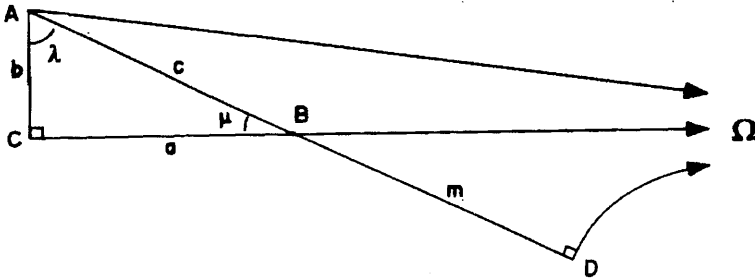


Figura 52

Consideraremos o triângulo ABC com a notação estabelecida. Na semi-reta S_{AB} , marque um ponto D tal que BD tenha comprimento m . Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{CB} . Trace a semi-reta $D\Omega$ formando um triângulo generalizado $BD\Omega$. Como $\Theta(m) = \mu$, então concluímos que o ângulo com vértice em D é reto. Trace agora a

semi-reta $A\Omega$, formando o triângulo generalizado $AD\Omega$ com ângulo reto em D . Segue-se que o ângulo

$$D\hat{A}\Omega = \Theta(c + m)$$

e que

$$C\hat{A}\Omega = \Theta(b) = \beta.$$

O resultado agora se segue da observação de que $\lambda + D\hat{A}\Omega = C\hat{A}\Omega$. A prova de cada uma das duas outras equações é feita de maneira similar. As figuras seguintes indicam como estas provas devem ser feitas. \square

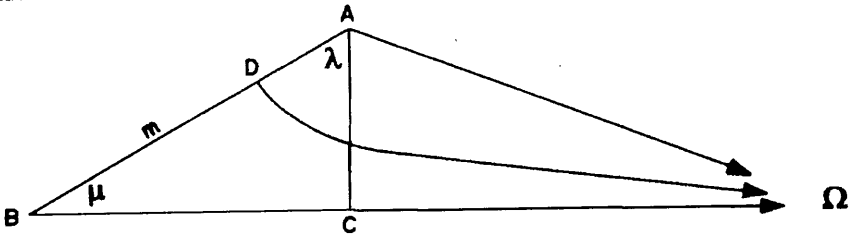


Figura 53

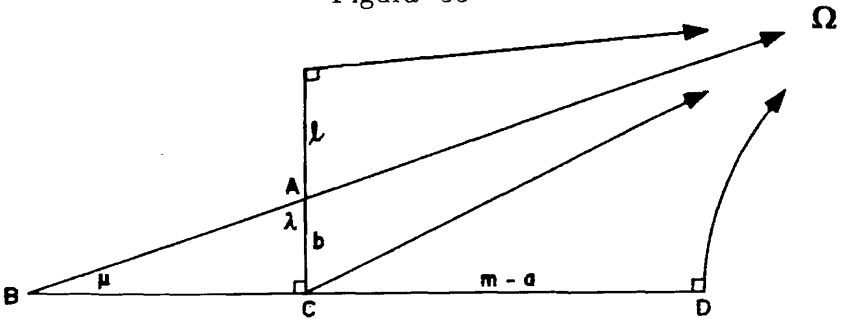


Figura 54

Embora as figuras tenham sido feitas supondo $a < m < c$, isto não é essencial nas provas. O leitor pode concluir facilmente cada uma das provas sob esta hipótese e depois assumir as outras possibilidades.

Tratamento similar pode ser dado à quadriláteros de Lambert. Associados a cada quadrilátero temos as seguintes variáveis: o seu ângulo agudo β_1 , os seus lados, nominados a partir do ângulo, c_1 , m'_1 , a_1 e ℓ_1 . A razão da escolha destas letras ficará clara logo mais. As outras variáveis são definidas de forma similar as definições no caso de triângulos. Assim teremos:

$$\gamma_1 = \Theta(c_1), \alpha_1 = \Theta(a_1), \beta_1 = \Theta(b_1), \mu'_1 = \Theta(m'), \lambda_1 = \Theta(\ell_1),$$

$$\beta'_1 + \beta_1 = \gamma'_1 + \gamma_1 = \alpha'_1 + \alpha_1 = \mu_1 + \mu'_1 = \lambda + \lambda'_1 = \pi/2,$$

$$\gamma'_1 = \Theta(c'_1), \alpha'_1 = \Theta(a'_1), \beta'_1 = \Theta(b'_1), \mu_1 = \Theta(m), \lambda'_1 = \Theta(\ell'_1).$$

A observação importante a ser feita é que temos o mesmo número de variáveis que no caso de triângulos e as relações simples são as mesmas. Podemos provar, então, o seguinte lema.

Lema 30 *Em um quadrilátero de Lambert valem as seguintes relações:*

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1, & \gamma_1 + \Theta(\ell_1 + a'_1) = \beta_1, \\ \lambda_1 + \beta_1 = \Theta(c_1 - m_1), & \gamma_1 + \beta_1 = \Theta(\ell_1 - a'_1), \\ \Theta(b_1 + \ell_1) + \Theta(m_1 - a_1) = \pi/2, & \Theta(a'_1 - m'_1) + \Theta(c_1 + b_1) = \pi/2. \end{array}$$

Prova. Como no caso de triângulos, as fórmulas na coluna da direita podem ser deduzidas das da coluna da esquerda, trocando-se c_1 por ℓ_1 , m'_1 por a_1 e fazendo-se as trocas dos ângulos e segmentos correspondentes. Assim, λ_1 será trocado por γ_1 e m_1 por a'_1 . Por esta razão, só precisamos apresentar a demonstração das três equações da coluna à esquerda. Vamos provar a primeira delas e deixar ao leitor a prova das outras duas, a título de exercício.

Seja $ABCD$ o quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A , e os lados AB , BC , CD e DA medindo, respectivamente, c_1 , m'_1 , a_1 e ℓ_1 . Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{DC} e seja E um ponto da semi-reta S_{AB} tal que BE tenha comprimento m_1 . Trace $A\Omega$, $B\Omega$ e $E\Omega$. É evidente que λ_1 é a medida do ângulo $D\hat{A}\Omega$ e que μ'_1 é a medida do ângulo $C\hat{B}\Omega$. Logo, $E\hat{B}\Omega$ tem μ_1 por medida e, conseqüentemente, o ângulo $B\hat{E}\Omega$ é um ângulo reto. Feitas estas considerações, é claro que $E\hat{A}\Omega = \Theta(c_1 + m_1)$ e que $\lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1$. Isto prova a validade da primeira equação.

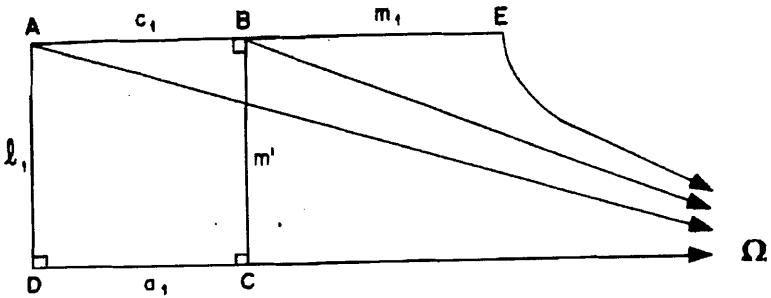


Figura 55

É sempre possível associar a um triângulo retângulo um quadrilátero de Lambert, de uma forma biunívoca. Para isto vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa c e um dos ângulos agudos μ , e o restantes elementos representados por a , b e λ , como fizemos acima. Da mesma forma, considere um quadrilátero de Lambert no qual um dos lados do ângulo agudo é c e o próximo lado é $m' = \Theta(\mu')$ (onde $\mu + \mu' = \pi/2$), sendo os outros elementos do quadrilátero designados por a_1 , l_1 e β_1 . Isto equivale, nos dois conjuntos de equações que determinamos, um para triângulos retângulos e outro para quadriláteros de Lambert, a assumir que

$$c_1 = c \quad \text{e} \quad m'_1 = m'.$$

Então, $m_1 = m$ e a comparação entre as duas primeiras equações da coluna à esquerda para triângulos e para quadriláteros nos mostra que devemos também ter:

$$\beta_1 = \beta \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \lambda.$$

A última equação da coluna à esquerda para triângulos e para quadriláteros agora nos assegura que:

$$a_1 = a.$$

Isto demonstra o seguinte resultado:

Proposição 31 *A cada triângulo retângulo com partes a, b, c, λ e μ podemos associar sempre um quadrilátero de Lambert com partes c, m', a, ℓ e β , sendo esta uma correspondência biunívoca.*

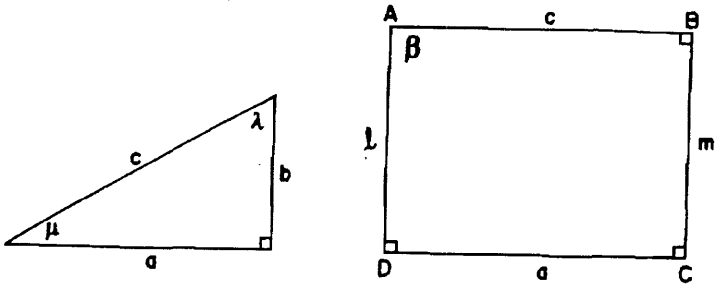


Figura 56

Prova (do Teorema (28)). Tome um quadrilátero de Lambert $ABCD$ com partes c, m', a, ℓ e β , como fizemos acima. Centrado no ponto C e com raio igual a c , trace um círculo. Este interceptará o lado DA em um ponto E . Trace, então, a semi-reta S_{CE} . Devemos provar que esta é paralela à semi-reta S_{BA} . Para isto, considere o triângulo retângulo de partes a, b, c, λ e μ associado ao quadrilátero de Lambert. Construa este triângulo sobre o lado CD do quadrilátero: marque na semi-reta S_{DA} um ponto E' tal que DE' tenha comprimento b ; o triângulo DCE' é o triângulo desejado. Assim, CE' mede c e, conseqüentemente, o ponto E' coincide com o ponto E . Portanto, o ângulo $E\hat{C}D$ mede μ e logo o ângulo $B\hat{C}E$ mede μ' . Como BC mede m' segue-se que a semi-reta S_{CE} é paralela à semi-reta S_{BA} , terminando, assim, a demonstração. \square

Voltamos agora nossa atenção para uma aplicação simples da proposição (31). Começamos com o triângulo de partes

$$a, b, c, \lambda \text{ e } \mu.$$

A ele esta associado o quadrilátero de Lambert com partes c , m' , a , ℓ e β . Tomando as partes deste quadrilátero na outra ordem, temos um quadrilátero de Lambert com partes ℓ , a , m' , c e β . Associado a este, temos um triângulo cujas partes são:

$$m', b, \ell, \gamma \text{ e } \alpha'.$$

Este é um resultado importante por si só, na medida em que garante que estes números são as partes de um triângulo retângulo. Evidentemente, podemos considerar as partes deste triângulo em outra ordem: b , m' , ℓ , α' e γ . A ele está associado ao quadrilátero ℓ , c' , b , a' e μ' . Considerando o seu refletido obtemos como triângulo associado:

$$c', m', a', \lambda \text{ e } \beta'.$$

Procedendo de forma similar, obtemos um quarto triângulo:

$$\ell', c', b', \alpha' \text{ e } \mu,$$

e, em seguida, um quinto triângulo:

$$a, \ell', m, \beta' \text{ e } \gamma.$$

Prosseguindo mais uma etapa, reencontramos o triângulo original. Assim, a existência de um triângulo retângulo implica na existência de outros quatro com ele associados. Registramos nossos achados no seguinte corolário.

Corolário 32 *Se a, b, c, λ e μ são partes de um triângulo retângulo, também o são:*

$$m', b, \ell, \gamma \text{ e } \alpha',$$

$$c', m', a', \lambda \text{ e } \beta',$$

$$\ell', c', b', \alpha' \text{ e } \mu, \text{ e}$$

$$a, \ell', m, \beta' \text{ e } \gamma.$$

Exercícios

1. Considere um triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 10cm e um de seus ângulos agudos mede 30 graus. Descreva como fazer para construir geométricamente o triângulo.
2. Construa um triângulo retângulo dados os dois ângulos agudos λ e μ . Deixe claro, na sua construção, como a restrição de que a soma dos ângulos é menor do que dois retos é levada em conta.
3. Construa um quadrilátero de Lambert sendo dados os dois lados que incluem o ângulo agudo. Este processo de construção pode sempre ser feito não importando o tamanho dos dois lados dados?
4. Construa um quadrilátero de Saccheri sendo dados a base e o ângulo do topo. Faça o mesmo exercício agora supondo dados o ângulo do topo e o comprimento do topo.
5. Dadas duas retas que não se interceptam e um número maior do que a distância entre elas, determine um ponto sobre uma delas cujo comprimento da perpendicular baixada daquele ponto à outra é igual ao número dado.
6. Construa um pseudo-quadrado, isto é, um quadrilátero com lados congruentes e ângulos congruentes.
7. Construa um triângulo equilátero, sendo dado o seu ângulo. Ajuda: o problema se reduz a construção de um triângulo retângulo em que os ângulos sejam dados.
8. Construa um triângulo sendo dados os seus três ângulos (cuja soma seja menor do que 180°). (Ajuda: Trace a altura do vértice onde se localiza o maior ângulo do triângulo; trabalhe com os dois triângulos retângulos.)

6.11 Horocírculos e curvas equidistantes

Nestas notas, não faremos um estudo sobre os círculos. O leitor é desafiado a verificar quais dos teoremas da Geometria euclidiana, sobre eles, permanecem válidos na Geometria hiperbólica. Por exemplo, o teorema do ângulo inscrito não é mais válido, um ângulo inscrito em um semicírculo não é reto, nem mesmo constante. Por outro lado, ainda é válido que a perpendicular do centro a uma corda passa pelo seu ponto médio. Do mesmo modo, ainda é válido que uma reta perpendicular a um raio em sua extremidade é tangente ao círculo.

Nesta seção, consideraremos um daqueles tópicos que tratam das diferenças mais marcantes entre a Geometria euclidiana e a hiperbólica. É o caso quando consideramos a curva limite obtida de um círculo quando fixamos um de seus pontos e fazemos o seu raio tornar-se arbitrariamente grande.

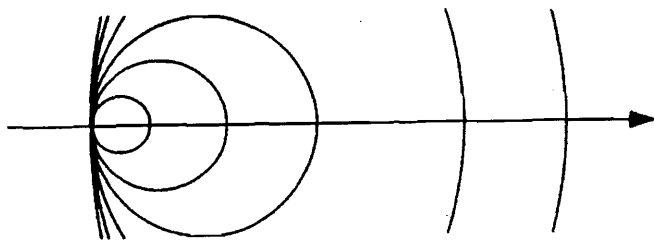


Figura 57

Na Geometria euclidiana, esta curva limite é uma reta; na Geometria Hiperbólica obtém-se uma curva com características muito especiais. De fato, modificando nossa definição de círculo, podemos incorporar esta curva e obter suas propriedades de uma maneira simples. Para isto, vamos considerar a noção de pontos correspon-

dentes⁵.

Dados duas retas m e n e dois pontos P e Q , sendo $P \in m$ e $Q \in n$, diremos que eles são *pontos correspondentes* se o segmento PQ forma com as duas retas ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q . Neste caso, diremos que o ponto P corresponde ao ponto Q , ou que o ponto Q corresponde ao ponto P .

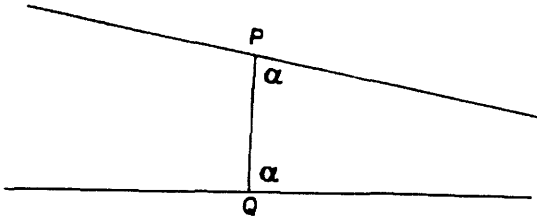


Figura 58

Teorema 33 *Dado um ponto em uma de duas retas paralelas, existe sobre a outra um e somente um ponto que lhe é correspondente.*

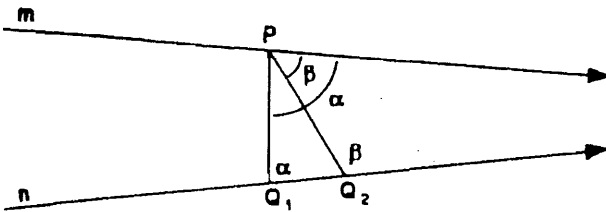


Figura 59

⁵A noção de pontos correspondentes foi primeiro considerada por Gauss.

Prova. (UNICIDADE) Sejam m e n duas retas paralelas. Seja P um ponto de m e suponha que existam sobre n dois pontos, Q_1 e Q_2 , que lhe sejam correspondentes. Sejam α e β os ângulos que PQ_1 e PQ_2 , respectivamente, formam com a reta m . Estes ângulos são os mesmos que estes segmentos formam com a reta n . Se $\beta < \alpha$, então, no triângulo PQ_1Q_2 , o ângulo α será um ângulo interno e β será um externo não adjacente. Contradição! No outro caso, apenas as posições dos dois ângulos se invertem. Isto prova a unicidade.

Antes de iniciar a prova da existência, vamos dar uma definição e provar um resultado auxiliar que poderá ser útil em outras ocasiões.

Vimos que retas paralelas são de fato assintóticas e, portanto, podemos considerar que elas formam entre si um ângulo generalizado de medida zero. Vamos definir para este ângulo a noção de bissetriz. Dadas duas retas paralelas m e n , considere uma terceira reta b , paralela a estas duas na mesma direção. Seja C um ponto qualquer de b e sejam E e D os pés das perpendiculares baixadas de C às retas m e n . Se ocorrer que $CE = CD$ e que b seja a bissetriz do ângulo $E\hat{C}D$, então, diremos que b é a *bissetriz generalizada* do ângulo generalizado formado entre m e n .

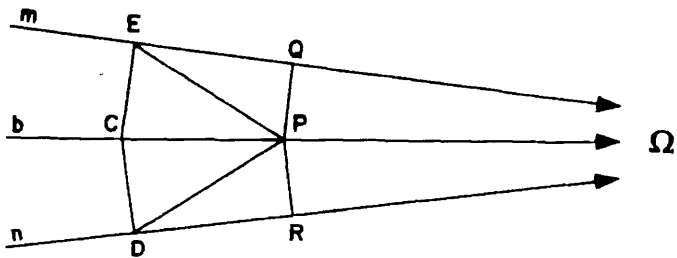


Figura 60

É fácil ver que, se esta propriedade ocorre em um ponto C , então, ocorre em qualquer outro ponto da reta b . De fato, se P

é outro ponto de b , é imediato verificar que $PEC = PDC$. Conseqüentemente, $PE = PD$ e $\hat{P}EC = \hat{P}DC$. Sejam Q e R os pés das perpendiculares baixadas de P às retas m e n , respectivamente. É conseqüência direta do que obtivemos que $PEQ = PDR$. Logo, $PQ = PR$ e $\hat{Q}PC = \hat{R}PC$.

Assim, b tem a propriedade de ser o conjunto dos pontos que são eqüidistantes das retas m e n . Vamos, agora, provar que tais bissetrizes sempre existem. Tome um ponto A sobre m e um ponto B em n . Trace as bissetrizes dos ângulos que o segmento AB forma com estas duas retas do mesmo lado da reta que passa por A e B .

Estas duas bissetrizes se interceptam em um ponto C , o qual, afirmamos, pertence à bissetriz generalizada b . Para construí-la é só baixar perpendiculares CE e CD às duas retas e traçar a reta bissetriz do ângulo $E\hat{C}D$.

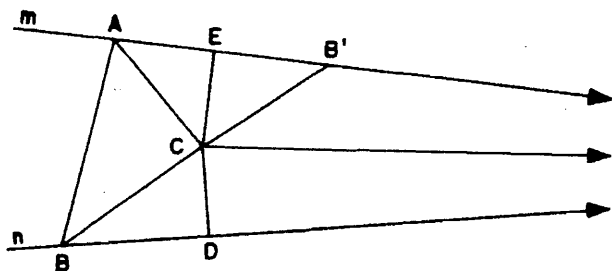


Figura 61

Provaremos nossa afirmação. Seja $B' \in m$ um ponto tal que $AB' = AB$, escolhido como na figura acima. Os triângulos BCA e $B'CA$ são congruentes. Logo, $CB = CB'$ e $C\hat{B}'A = C\hat{B}A$. Sejam D e E os pés das perpendiculares baixadas de C às retas n e m , respectivamente. Segue-se que $CDB = CEB'$. Portanto, $CE = CD$. Assim, $C \in b$.

Voltamos pois à prova do teorema.

Prova. (EXISTÊNCIA) Dadas m e n paralelas, considere a bissetriz generalizada b do ângulo que elas formam. Dado $P \in m$, seja

$K \in b$ o pé da perpendicular baixada de P àquela reta. Sejam agora M e N os pés das perpendiculares baixadas de K às retas m e n , respectivamente. Em n , na direção oposta ao paralelismo, marque um ponto Q tal que $QN = PM$ e trace QK . É imediato que os triângulos PMK e QNK são congruentes. Daí decorre que os pontos P , K e Q são colineares e que $K\hat{P}M = K\hat{Q}N$. Logo P e Q são pontos correspondentes.

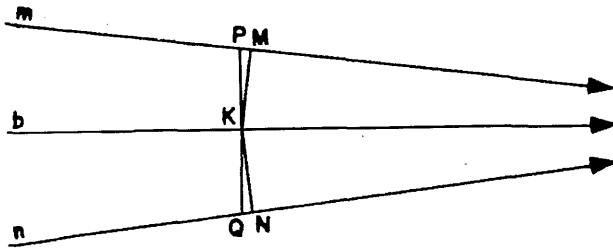


Figura 62

Teorema 34 *Se três pontos P , Q e R estão em três retas paralelas em um mesmo sentido, e se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, os três pontos não são colineares.*

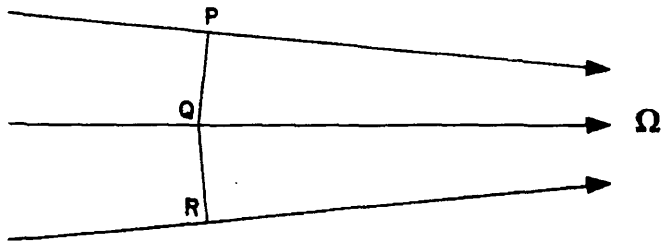


Figura 63

Prova. Observe que o ângulo formado entre PQ e qualquer uma das retas é igual ao ângulo de paralelismo correspondente à metade

do segmento PQ . Logo, é um ângulo agudo. Se os três pontos fossem colineares, teríamos a soma de dois ângulos agudos resultando em um ângulo raso. Este absurdo prova o teorema. \square

Teorema 35 *Se três pontos P , Q e R estão em três retas paralelas em um mesmo sentido, e se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, P corresponde a R .*

Prova. Como os três pontos, pelo teorema anterior, são não colineares, forma-se um triângulo PQR . Vimos em capítulo anterior que as retas perpendiculares aos lados de um triângulo e passando pelos seus pontos médios são concorrentes em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal. Duas de tais retas são exatamente as bissetrizes generalizadas dos ângulos generalizados entre $P\Omega$ e $Q\Omega$ e entre $Q\Omega$ e $R\Omega$. Logo, a terceira, que é perpendicular ao lado PR passando pelo seu ponto médio, será também paralela às duas primeiras. Então, tal reta coincide com a bissetriz generalizada de $P\Omega R$. Conseqüentemente, P e Q são correspondentes. \square

Na teoria dos pontos correspondentes em retas que se interceptam, é conveniente considerar famílias de semi-retas de mesma origem e estudar o conceito de pontos correspondentes nesta família. O leitor não terá dificuldade em obter os mesmos três teoremas para tais pontos correspondentes.

Da mesma forma, não oferece maiores dificuldades provar os mesmos teoremas para pontos correspondentes em retas que não se interceptam. Neste caso, as retas terão em comum um ponto ultra-ideal, ou seja, terão uma perpendicular comum. Neste estudo, é importante observar que, se dois pontos são correspondentes, então, são eqüidistantes da perpendicular comum.

Escolhamos uma família de semi-retas de mesma origem O . Seja P um ponto de uma destas semi-retas diferente do ponto O . Consideremos o conjunto dos pontos correspondentes a P . Este conjunto é claramente o círculo de centro O passando por P , como o leitor pode facilmente verificar.

Consideremos, agora, a família de retas que passa por um ponto ideal Ω . Seja P um ponto de uma delas. O conjunto dos pontos correspondentes a P é chamado de *horocírculo* de centro Ω passando por P . Se Q é qualquer ponto deste horocírculo, então $Q\Omega$ é chamado de *raio* do horocírculo.

Vamos observar que, pelo que provamos sobre pontos correspondentes, podemos afirmar que um horocírculo não é uma reta. E, se uma reta corta um horocírculo em dois pontos P e Q , então, como P e Q são correspondentes, PQ formará com os raios $P\Omega$ e $Q\Omega$ ângulos iguais. Por último, um horocírculo de centro Ω e passando por P é o limite da família de círculos passando por P e com centro em $P\Omega$.

Teorema 36 *Dois horocírculos quaisquer são congruentes.*

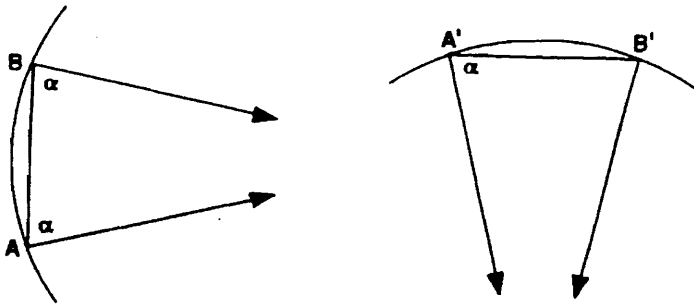


Figura 64

Prova. Sejam \mathcal{H} e \mathcal{H}' dois horocírculos com centros nos pontos ideais Ω e Ω' , respectivamente. Sejam A e B pontos de \mathcal{H} e A' um ponto de \mathcal{H}' . Seja α o ângulo $B\hat{A}\Omega$. Construa um ângulo $B'\hat{A}'\Omega' = \alpha$ com $A'B' = AB$. O triângulo generalizado $A'B'\Omega'$ será, então, congruente ao triângulo $AB\Omega$. Portanto, $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ e, conseqüentemente, B' é correspondente a A nas retas $A'\Omega'$ e $B'\Omega'$. Portanto, $B' \in \mathcal{H}'$. Isto prova a proposição. \square

Teorema 37 *Uma reta é tangente a um horocírculo se e só se é normal a um dos seus raios em sua extremidade.*

A prova deste teorema é deixada como exercício.

Considere agora o feixe de todas de retas passando por um dado ponto ultra-ideal, ou seja, o conjunto de todas as retas que possuem uma perpendicular comum m . Seja P um ponto de qualquer uma das retas deste feixe. O conjunto dos pontos correspondentes a P segundo este feixe é chamado de *curva eqüidistante* da reta m . De fato, o nome se aplica muito bem, já que os pontos desta curva são caracterizados por estarem todos à mesma distância da reta m . Assim, uma curva eqüidistante está associada a uma certa distância e terá como centro a reta m . As retas do feixe são chamadas de raios.

Teorema 38 *Duas curvas eqüidistantes com a mesma distância são congruentes.*

A prova deste teorema é deixada como exercício. É possível provar-se, de forma simples, que uma reta corta uma curva eqüidistante no máximo em dois pontos, que curvas eqüidistantes são côncavas na direção do seu centro e que retas tangentes são perpendiculares ao raios.

Tanto no caso de círculos, como no de horocírculos, ou no de curvas eqüidistantes, chamamos de *corda*, um segmento ligando dois de seus pontos. Temos, então, o seguinte teorema.

Teorema 39 *Cordas iguais subentendem arcos iguais.*

Exercícios

1. Mostre que, em um feixe de semi-retas de mesma origem, a noção de ponto correspondente é transitiva.
2. Considere uma família de semi-retas de mesma origem O . Seja P um ponto destas semi-retas diferente de O . Mostre que o conjunto dos pontos correspondentes a P é um círculo de centro O .

3. Mostre que, em um feixe de retas perpendiculares a uma reta fixa m , a noção de ponto correspondente é transitiva.
4. Em um feixe de retas perpendiculares a uma reta fixa m , mostre que o conjunto de pontos correspondentes a um dado ponto é também caracterizado como um conjunto de pontos equidistantes da reta m .
5. Prove que uma reta é tangente a um círculo se e só se é normal a um de seus raios, em sua extremidade.
6. Prove que uma reta é tangente a um horocírculo se e só se é normal a um de seus raios, em sua extremidade.
7. Na Geometria hiperbólica, para se traçar uma reta usa-se uma régua. Para se traçar um círculo usa-se um compasso. Que instrumento deverá ser usado para traçar um arco de horocírculo?
8. Dados dois horocírclos concêntricos, os segmentos dos raios determinados pelos dois são todos congruentes.
9. Dado um ponto de um horocírculo, determine um outro ponto tal que a reta tangente ao horocírculo, naquele ponto, seja paralela ao raio que passa no primeiro ponto. Resolva o mesmo problema para um círculo.
10. Prove que, se um quadrilátero está inscrito em um horocírculo, a soma de um par de ângulos opostos é sempre igual a soma dos outros dois ângulos.
11. Uma reta n corta os dois ramos de uma curva equidistante da reta m . Mostre que o segmento de n , entre os dois ramos, é dividido ao meio pela reta m . Determine a relação que existe entre os ângulos formados entre a reta n e as tangentes à curva, nos pontos de interseção.

12. Prove que, se um raio divide ao meio um arco de horocírculo, então, também divide ao meio o arco correspondente de qualquer horocírculo concêntrico.
13. O conjunto dos pontos médios de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos constitui um raio.
14. Se $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dividem um arco AB de um horocírculo em n partes iguais, os raios passando por estes pontos cortam o arco $A'B'$ correspondente, de um horocírculo concêntrico, em pontos $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n$, dividindo também este arco em n partes iguais.

Comentário

Sejam l e m duas retas perpendiculares se interceptando em um ponto O . Escolha um ponto qualquer A em m , digamos, à direita da reta l , e construa um círculo de centro A e raio AO . Se permitirmos o deslocamento do ponto A na direção do ponto O , a mesma construção produzirá círculos cujo raio AO será cada vez menor e tenderá a zero. O círculos terão curvatura cada vez maior tendendo a infinito.

Por outro lado, se deslocarmos o ponto A na direção oposta, o círculo aumentará de tamanho, sua curvatura decrescerá, e ele se aproximará, no limite, de um horocírculo tangente a l no ponto O .

Escolha agora uma reta qualquer n perpendicular a m e passando por um ponto B de m . Considere o ramo da curva eqüidistante de n passando pelo ponto O . A distância a ela associada é OB . Se o ponto B for deslocado na direção do ponto O , a distância OB tenderá para zero, o encurvamento da curva eqüidistante diminuirá e a curva se aproximará, no limite, da reta l . Por outro lado, se o ponto B for deslocado na direção oposta, afastando-se de O , a curvatura da curva eqüidistante aumentará, e ela tenderá, no limite, a um horocírculo.

Repetindo o raciocínio para o outro dado do ponto O , obtemos descrição similar. A figura abaixo resume nossas considerações.

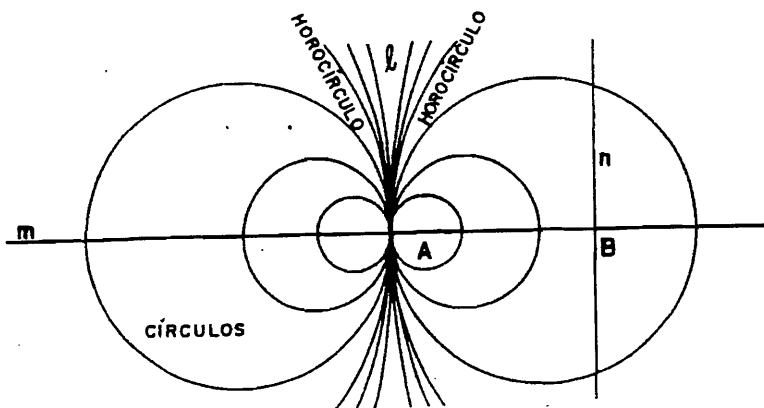


Figura 65

6.12 Área

Como no caso euclidiano, a noção de área é inicialmente estabelecida associando-se a cada triângulo um número não negativo. Esta função deve satisfazer à propriedade de assumir o mesmo valor em triângulos congruentes; ou seja, triângulos congruentes devem ter a mesma área.

Esta definição pode ser estendida para polígonos. Dado um polígono, considera-se uma subdivisão do mesmo em triângulos e define-se a sua área como a soma das áreas dos triângulos da subdivisão. Evidentemente, esta definição só é consistente se for possível demonstrar que o valor da área assim obtido é o mesmo, qualquer que seja a subdivisão do polígono em triângulos. Admitiremos aqui este resultado.

Dado um triângulo ABC , existe uma maneira simples de a ele associar um quadrilátero de Saccheri cuja área é igual à área do triângulo. Para isto, considere os pontos médios M e N dos lados AB e BC , respectivamente, e trace a reta m que passa por estes

dois pontos.

Sejam E , F e G , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas dos pontos B , A e C à reta m . É fácil ver que $BEM = AFM$ e que $AFN = CGN$. O quadrilátero $AEGC$ é, então, um quadrilátero de Saccheri com base EG , que tem a mesma área que o triângulo ABC . Ele será designado de *quadrilátero associado ao triângulo*.

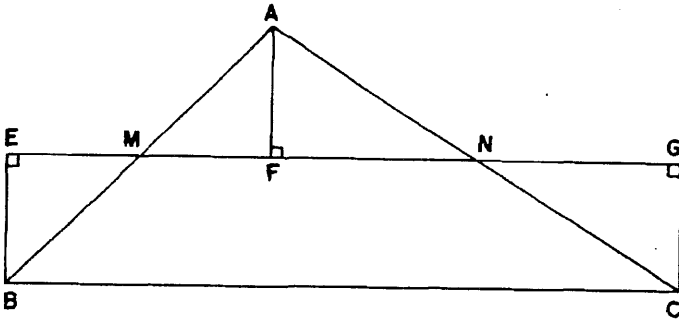


Figura 66

Desde que, na Geometria euclidiana, a soma dos ângulos de um triângulo é 180 graus, e que tal não ocorre na Geometria hiperbólica, foi natural que se designasse de *defeito* do triângulo a diferença entre 180 e a soma de seus ângulos internos.

No caso de um quadrilátero, ou de um polígono qualquer, define-se o defeito como a diferença entre o valor que a soma dos ângulos internos teria caso a Geometria fosse a Euclidiana e a efetiva soma destes ângulos.

É simples provar que um triângulo e o quadrilátero de Saccheri que lhe é associado possuem o mesmo defeito. Uma consequência deste fato é a seguinte proposição:

Proposição 40 *Dados dois triângulos, se eles têm o mesmo defeito e, se um lado de um é congruente a um lado do outro, eles possuem a mesma área.*

Prova. Sob as hipóteses da proposição, os quadriláteros de Saccheri associados aos dois triângulos terão topos congruentes e ângulos do topo de mesma medida. Portanto, serão congruentes e logo terão a mesma área. Conseqüentemente, os dois triângulos terão a mesma área. \square

Podemos melhorar substancialmente esta proposição, provando o seguinte resultado:

Teorema 41 *Dois triângulos que têm o mesmo defeito têm a mesma área.*

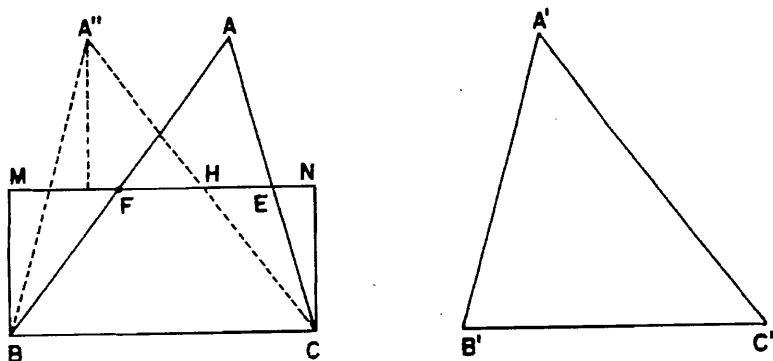


Figura 67

Prova. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos com o mesmo defeito. Se algum dos lados do primeiro for congruente a algum dos lados do segundo, vimos na proposição anterior que eles têm a mesma área. Suponhamos que tal não ocorre e que $A'C' > AC$. Construa, usando o lado BC , o quadrilátero de Saccheri associado a ABC . Seja m a reta de sua base. Escolha nesta reta um ponto H tal que HC tenha comprimento igual a metade de $A'C'$. Na semi-reta S_{CH} , marque um ponto A'' tal que $A''C = A'C'$. É elementar verificar que o triângulo $A''BC$ tem, sobre o lado BC , o mesmo quadrilátero de Saccheri que o triângulo ABC . Conseqüentemente possui o mesmo defeito. Agora, podemos usar a proposição anterior na comparação dos triângulos $A''BC$ e $A'B'C'$ para concluir que eles possuem a

mesma área. Conseqüentemente, o mesmo ocorre entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. Concluimos, assim, nossa demonstração. \square

Chamamos de transversal de um triângulo um segmento unindo um vértice a algum ponto do lado oposto. Uma transversal subdivide um triângulo em dois outros.

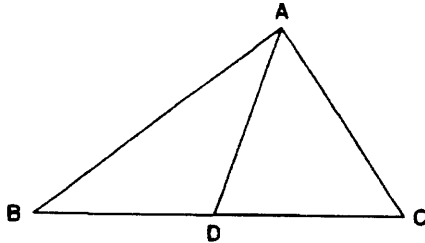


Figura 68

É simples mostrar que, se um triângulo é subdividido em dois por uma transversal, a soma dos defeitos dos dois triângulos é igual ao defeito do triângulo original. De fato, pode-se obter um resultado mais geral demonstrando que, se um triângulo for subdividido, através de transversais, em um número finito de triângulos, a soma dos defeitos dos triângulos será igual ao defeito do triângulo original. Além disto, se um triângulo for subdividido em triângulos, de qualquer forma, a partição resultante pode sempre, com a adição de alguns segmentos, ser transformada em uma partição por transversais. É simples deduzir que o defeito do triângulo é igual à soma dos defeitos de todos os triângulos da partição. Como conseqüência, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 42 *Dois triângulos que possuem a mesma área têm o mesmo defeito*

Segue-se que a função área e a função defeito são múltiplas uma da outra. A prova deste fato está acima do nível deste livro. Do

ponto de vista prático, simplesmente daremos como definição de área de um triângulo a seguinte

$$\text{Área do triângulo } ABC = c^2(180 - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}),$$

onde c é uma constante fixada *a priori*. A escolha desta constante é feita de modo que um dado triângulo com características especiais tenha área um.

É agora fácil verificar que, para um polígono qualquer, vale a fórmula

$$\text{Área do polígono} = c^2(\text{defeito do polígono}).$$

Em uma carta de 1799 para W. Bolyai, Gauss, que naquele tempo ainda estava tentando provar o quinto postulado, escreveu:

Cheguei a alguns resultados que muitos considerariam prova suficiente (do quinto postulado), mas que não provam nada do meu ponto de vista. Por exemplo, se fosse possível demonstrar que, dado um valor qualquer prefixado, pode-se construir um triângulo com área maior do que este valor, eu teria como provar rigorosamente a validade do quinto postulado.

De fato, assumindo a existência de três retas, duas a duas paralelas, formando um triângulo maximal com vértices em três pontos ideais, Gauss chegou à fórmula dada acima para a área de um triângulo. Esta notável dedução ele expôs a W. Bolyai em 1832, na carta em que acusou o recebimento do célebre *Apêndice*. Apresentamos aqui sua essência em linguagem moderna.

Para começar, Gauss reconheceu que, se existe um triângulo de área máxima, ele deve ser exatamente triângulo formado por três retas com vértices em três pontos ideais. Tais triângulos são formas limites de triângulos usuais, quando os lados tendem para infinito e os ângulos tendem para zero. Gauss também reconheceu que dois tais triângulos são sempre congruentes e designou por δ o valor comum de suas áreas.

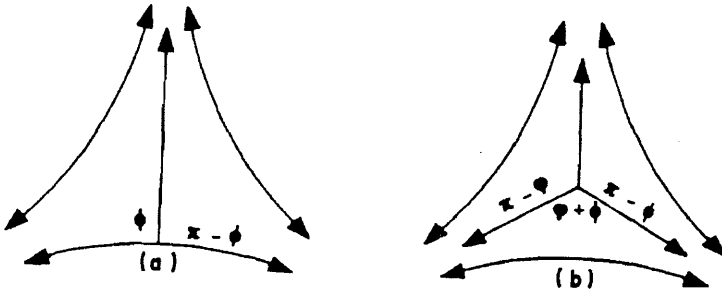


Figura 69

Como a área da região limitada por uma reta e por suas paralelas passando por um ponto é uma função do ângulo entre as (duas) paralelas, digamos $f(\pi - \phi)$, que tende para zero quando ϕ tende para π , e que tende para δ quando ϕ tende para zero, podemos escrever:

$$f(\pi) = \delta \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Por outro lado, a figura seguinte (a) revela que

$$f(\pi - \phi) + f(\phi) = \delta,$$

enquanto que a parte (b) da mesma figura nos diz que

$$f(\varphi) + f(\phi) + f(\pi - \varphi - \phi) = \delta.$$

Subtraindo-se estas duas últimas equações, obtem-se:

$$f(\varphi) + f(\pi - \varphi - \phi) = f(\pi - \phi).$$

Podemos, portanto, concluir que a função f satisfaz à equação:

$$f(\zeta + \eta) = f(\zeta) + f(\eta),$$

ou seja, f é linear. Portanto, f é da forma

$$f(\zeta) = c^2\zeta,$$

onde c^2 é uma constante positiva. Logo, $\delta = c^2\pi$.

Dado agora um triângulo qualquer ABC , cujos ângulos internos sejam λ , μ e ν , consideremos as semi-retas S_{AB} , S_{BC} e S_{CA} , que definem pontos ideais Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 . Tracemos as retas ligando os três pontos ideais, como indicado na figura seguinte.

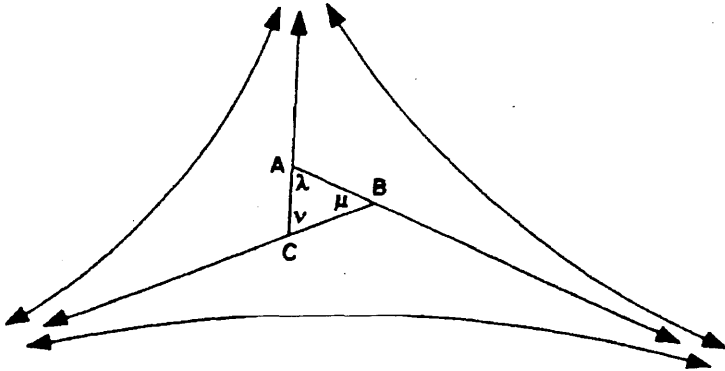


Figura 70

Representando por Δ o valor da área do triângulo ABC , temos:

$$\Delta + f(\lambda) + f(\mu) + f(\nu) = \delta = c^2\pi$$

Como $f(\lambda) + f(\mu) + f(\nu) = f(\lambda + \mu + \nu) = c^2(\lambda + \mu + \nu)$, então,

$$\Delta = c^2(\pi - \lambda + \mu + \nu).$$

Mas esta é exatamente a fórmula a que adotamos para área de um triângulo!

Exercícios

1. Prove que o local geométrico dos vértices de todos os triângulos tendo a mesma base e o mesmo defeito é uma curva equidistante.
2. Se E e F são os pontos médios dos lados AC e AB do triângulo ABC , e E' e F' são os pontos médios dos lados $A'C'$ e $A'B'$ do triângulo $A'B'C'$, prove que quando $EF = E'F'$ e as perpendiculares de A a EF e de A' a $E'F'$ são congruentes, os dois triângulos têm a mesma área.
3. Deseja-se pavimentar o plano com polígonos regulares congruentes de n lados, de modo que p deles se encontrem em torno de cada vértice. Prove que isto é possível com polígonos cuja área é

$$n\pi C^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{p} \right),$$

com n e p satisfazendo a condição

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}.$$

Mostre também que a área do menor quadrilátero regular com o qual o plano pode ser ladrilhado é

$$2\pi C^2/5$$

4. Dado um triângulo retângulo, mostre como construir um outro cuja área seja duas vezes a do triângulo original.
5. Por que o resultado do exercício anterior não pode ser utilizado para concluir a existência de um triângulo de área arbitrariamente grande?
6. Mostre que dois quadriláteros de Saccheri com o mesmo ângulo do topo têm a mesma área.

7. Mostre que dois quadriláteros de Lambert com o mesmo ângulo agudo têm a mesma área.

Comentário

O metro foi originalmente definido como a décima milionésima parte da distância do Pólo Norte ao Equador. De 1899 a 1960, um metro foi a distância entre dois traços gravados em uma barra, feita de uma liga de platina-irídio, preservada no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, situado próximo de Paris. O progresso tecnológico criou a necessidade de uma definição mais precisa. O metro foi, então redefinido como 1.650.763,73 comprimentos de onda de uma luz alaranjada emitida por átomos de criptônio 86, sob certas condições. A recente explosão do desenvolvimento científico forçou nova mudança. Hoje o metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo igual a $1/299.792.458$ do segundo.

Por outro lado, nenhuma instituição internacional de pesos e medidas mantém um protótipo de um ângulo reto em seus arquivos, para servir como padrão de medida de ângulos. Nem sua definição precisou nunca ser revista. Isto é absolutamente desnecessário, como todos sabemos. Na Geometria hiperbólica, o padrão de medida linear pode ser definido simplesmente pela equação: $\Theta(r) = \pi/4$, sendo $\pi/4$ apenas uma representação da metade de um ângulo reto. Conseqüentemente, o padrão de medida linear no Universo hiperbólico, dispensa qualquer protótipo físico.

A Trigonometria hiperbólica

7.1 Introdução

Voltemos agora nossa atenção ao estudo da Trigonometria do plano. No desenvolvimento desta teoria, tanto Bolyai quanto Lobachewsky fizeram uso de horo-esferas, isto é, de superfícies que são geradas pela rotação, no espaço tridimensional, de um horocírculo em torno de um de seus raios. É possível demonstrar que, em tais superfícies, tomando-se os horocírculos como retas, a Geometria gerada é a euclidiana.

No que se segue, apresentaremos a trigonometria sem apelar para a Geometria no espaço. Com isto, fugimos um pouco do caminho dos fundadores da Geometria hiperbólica, mas tornamos o estudo mais simples.

7.2 Arcos concêntricos de horocírculos

Vamos começar recordando alguns fatos mencionados, demonstrados, ou propostos como exercícios:

1. Segmentos de raios entre dois horocírculos concêntricos são congruentes.
2. Se um raio divide ao meio um arco de um horocírculo, também divide ao meio o arco correspondente de qualquer horocírculo concêntrico.
3. O conjunto dos pontos médios de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos constitui um raio.

4. Se os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dividem um arco AB de um horocírculo em n partes iguais, os raios passando por estes pontos cortam o arco $A'B'$ correspondente, de um horocírculo concêntrico, em pontos $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n$, dividindo também este arco em n partes iguais.

Teorema 43 *Sejam h e h' horocírculos concêntricos. Dados pontos A, B e C de h , representemos por A', B' e C' os pontos de h' determinados pelos raios que passam pelos três primeiros pontos; então:*

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'}$$

Prova. Existem dois casos a considerar. Primeiro, suponha que os arcos AB e AC são comensuráveis, e seja AP o arco que constitui a unidade comum de medida para o qual se tem

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AP} = m \quad e \quad \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } AP} = n,$$

sendo m e n inteiros positivos.

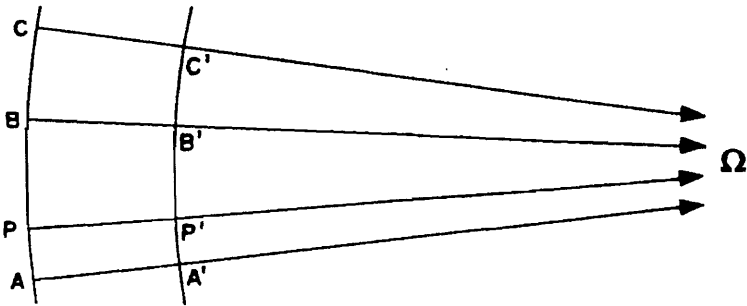


Figura 71

Trace o raio que passa pelo ponto P . Ele cortará o arco $A'C'$ em um ponto P' . Usando (4) acima, podemos concluir que

$$\frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'P'} = m \quad e \quad \frac{\text{arco } A'C'}{\text{arco } A'P'} = n,$$

e, portanto, o Teorema é válido neste caso.

Suponha agora que os arcos AB e AC são incomensuráveis. Seja AP um arco que é uma unidade para o arco AB , isto é

$$\text{arco } AB = m(\text{arco } AP),$$

onde m é um inteiro positivo. Então, existe um inteiro n tal que

$$n(\text{arco } AP) < \text{arco } AC < (n + 1)(\text{arco } AP)$$

para algum inteiro positivo n . Portanto,

$$\frac{m}{n + 1} < \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} < \frac{m}{n}.$$

Além disto, quando o arco AP tende para zero, os dois quocientes $m/(n + 1)$ e m/n tendem para um mesmo número real α .

Por outro lado, é claro que, para cada construção do tipo descrito, o raio traçado pelos pontos A , B e P determinam em qualquer horocírculo concêntrico pontos A' , B' e P' , os quais, pela parte demonstrada do teorema, satisfazem às relações seguintes:

$$\text{arco } A'B' = m(\text{arco } A'P') \quad \text{e}$$

$$n(\text{arco } A'P') < \text{arco } A'C' < (n + 1)(\text{arco } A'P').$$

Como consequência, tem-se:

$$\frac{m}{n + 1} < \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'} < \frac{m}{n}.$$

e, portanto,

$$0 < \left| \frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} - \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } A'C'} \right| < \frac{m}{n} - \frac{m}{n + 1}.$$

Segue-se daí que os limites dos dois quocientes são iguais quando o arco AP tende para zero. Isto completa a nossa demonstração.

Teorema 44 *A razão entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos depende somente da distância entre eles, medida ao longo de um raio.*

Prova. Consideraremos a família de horocírculos cujo centro é Ω . Fixe um raio a e pontos A, A_1, A_2, A_3, \dots de a tais que:

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

Vamos supor que nossa notação tenha sido fixada de modo que os pontos A_i pertençam à semi-reta $A\Omega$. Fixe agora um outro raio b e sobre ele considere os pontos B, B_1, B_2, B_3, \dots correspondentes, na mesma ordem, aos pontos escolhidos. Pelo que vimos teremos

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

Considere os arcos de horocírculos $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$

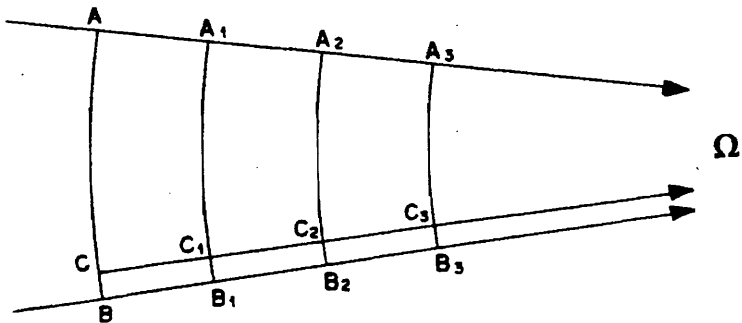


Figura 72

Todos eles são correspondentes. Como os arcos correspondentes de horocírculos concêntricos aumentam quando nos afastamos do centro comum, podemos marcar no arco AB um ponto C tal que

$$\text{arco } AC = \text{arco } A_1B_1.$$

Trace o raio que passa pelo ponto C . Ele determina pontos C_1 no arco A_1B_1 , C_2 no arco A_2B_2 , C_3 no arco A_3B_3, \dots Da congruência

das figuras ACC_1A_1 e $A_1B_1B_2A_2$ segue-se que os arcos C_1A_1 e B_2A_2 são congruentes. Portanto, para $i = 1, 2, \dots$,

$$\text{arco } A_iC_i = \text{arco } A_{i+1}B_{i+1} .$$

Consequentemente,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } AC} = \frac{\text{arco } A_1B_1}{\text{arco } A_1C_1} = \frac{\text{arco } A_2B_2}{\text{arco } A_2C_2} = \frac{\text{arco } A_3B_3}{\text{arco } A_3C_3} = \dots$$

Logo

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } A_1B_1} = \frac{\text{arco } A_1B_1}{\text{arco } A_2B_2} = \frac{\text{arco } A_2B_2}{\text{arco } A_3B_3} = \dots$$

Além disto, se a distância AA_1 aumentar (diminuir), também aumentará (diminuirá) o valor do quociente $(\text{arco } AB)/(\text{arco } A_1B_1)$. De tudo isto inferimos que este quociente depende apenas da distância entre os dois arcos. Isto conclui nossa demonstração. \square

Estamos prontos para fixar uma unidade de comprimento para nossa Geometria. Desde que o quociente $(\text{arco } AB)/(\text{arco } A_1B_1)$, acima utilizado, é maior do que 1, podendo ser alterado para maior ou menor pela simples mudança da distância entre os dois arcos, podemos assumir que este quociente é igual ao número e (base do logaritmo natural). Neste caso, definimos nossa unidade de comprimento como a distância entre os dois arcos. Esta unidade, como veremos, é a que melhor se adapta ao desenvolvimento da teoria que apresentamos a seguir.

Teorema 45 *Se s_o e s_x representam os comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos, sendo $s_x < s_o$ e sendo x a distância entre eles ao longo de um raio comum, então*

$$s_x = s_o e^{-x} .$$

Prova. Sobre uma semi-reta $P_0\Omega$ considere pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ tais que a distância entre dois subseqüentes seja uma unidade de comprimento. Considere a família de horocírculos $h_o, h_1, h_2, h_3, \dots$ centrados em Ω e passando, respectivamente, nos pontos P_0, P_1, P_2, \dots . Sejam s_o, s_1, s_2, \dots arcos correspondentes desta família.

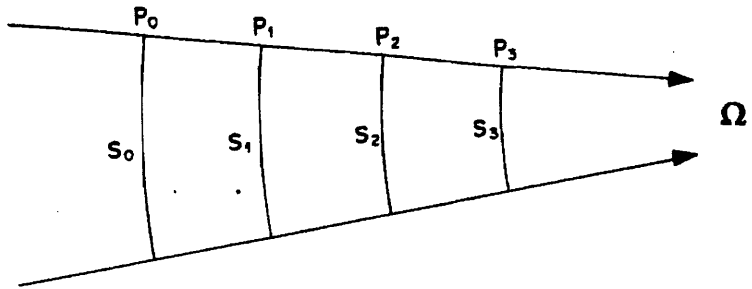


Figura 73

Utilizando a definição de unidade de comprimento e o teorema anterior, concluímos que

$$\frac{s_0}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s_n} = e.$$

Portanto,

$$s_n = s_0 e^{-n} \quad (7.1)$$

Como n é a distância do arco s_n ao arco s_0 , concluímos que o resultado é válido quando x é um inteiro.

Represente agora por h_x o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto P_x de $P_0\Omega$, o qual fica a distância x do ponto P_0 . Sobre este horocírculo represente por s_x o arco correspondente a todos os outros considerados. Vamos supor, primeiramente, que x seja um número racional da forma $1/n$. Então, pelo teorema anterior, teremos

$$a = \frac{s_0}{s_{1/n}} = \frac{s_{1/n}}{s_{2/n}} = \frac{s_{2/n}}{s_{3/n}} = \dots = \frac{s_{(n-1)/n}}{s_1} = \dots,$$

onde a é um número maior do que um. Segue-se que

$$s_1 = s_0 a^{-n}.$$

Utilizando a equação (7.1), concluímos que

$$a = e^{1/n}.$$

É, então, imediato, desta seqüência de equações, que

$$s_{m/n} = s_0 a^{-m} = s_0 e^{-m/n}.$$

Assim, o resultado vale no caso em que x é qualquer número racional. Para provar o resultado no caso em que x é irracional, é suficiente observar que a função s_x é decrescente e que, como mostramos, coincide com a função $s_0 e^{-x}$ qualquer que seja o valor racional positivo de x . Como conseqüência, se α é um número positivo irracional, teremos sempre que:

$$|s_\alpha - s_0 e^{-\alpha}| < s_0 (e^{-r} - e^{-t})$$

para quaisquer dois números racionais positivos s e t que satisfaçam a

$$r < \alpha < t.$$

A continuidade da função e^{-x} garante agora que a diferença $s_\alpha - s_0 e^{-\alpha}$ só pode ser zero. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

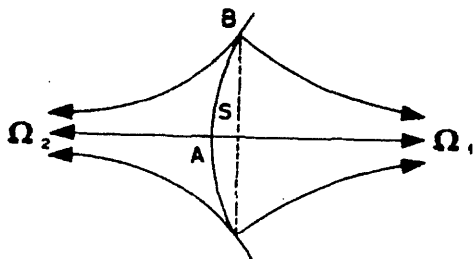


Figura 74

Fixe uma reta $\Omega_1 \Omega_2$. Considere um horocírculo com centro no ponto Ω_2 . Seja A o ponto onde ele corta a reta fixada. Considere a família de cordas deste horocírculo que são perpendiculares a reta. Desde que horocírculos são obtidos como limite da família de círculos que passa pelo ponto A e têm centro na reta fixada, é claro que o comprimento das cordas mencionadas crescem à medida

que se afastam do ponto A , tornando-se maior do que qualquer comprimento prefixado. Observe que o ângulo agudo entre uma corda e o raio que passa por sua extremidade é exatamente o ângulo de paralelismo correspondente à metade da corda.

É possível provar que este ângulo varia continuamente e, pelo que foi mencionado, varia no intervalo $(0, \pi/2]$. Segue-se que, entre as cordas mencionadas, existe uma que corresponde ao ângulo $\pi/4$. Seja B uma extremidade desta corda. Considere a semi-reta $B\Omega_2$. Esta reta será ao mesmo tempo paralela à reta $\Omega_1\Omega_2$ e tangente ao horocírculo no ponto B . Vamos designar por S o comprimento do arco AB do horocírculo. Este comprimento é uma das constantes universais da Geometria hiperbólica. A figura formada pela reta $\Omega_1\Omega_2$, pelo arco de comprimento S do horocírculo de centro Ω_2 , pelo raio e pela tangente em sua extremidade, é uma figura importante no estudo da Trigonometria hiperbólica.

Outra figura importante no mesmo contexto é a formada por um arco AB de comprimento s ($s < S$) de um horocírculo h de centro Ω , pelo raio que passa pelo ponto B e pela tangente ao horocírculo no ponto A . Sendo $s < S$, a tangente interceptará o raio em um ponto C , formando-se uma região limitada pelos segmentos CB e CA e pelo arco AB , como indicado na figura abaixo.

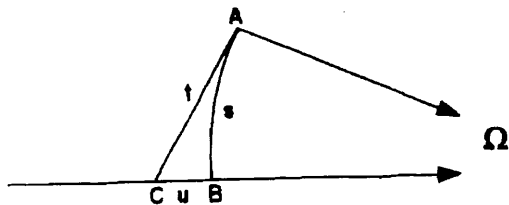


Figura 75

Designemos o comprimento do segmento AC por t e por u , o comprimento do segmento CB . Trace a corda AB . Como

$$C\hat{B}A > A\hat{B}\Omega = B\hat{A}\Omega > C\hat{A}B,$$

é, então, claro que $t > u$. Na última desigualdade, usamos que $s < S$ e, assim, $B\hat{A}\Omega > \pi/4$.

Teorema 46 Na figura acima valem as seguintes relações:

$$S - s = S e^{-(t+u)}$$

$$S + s = S e^{t-u}.$$

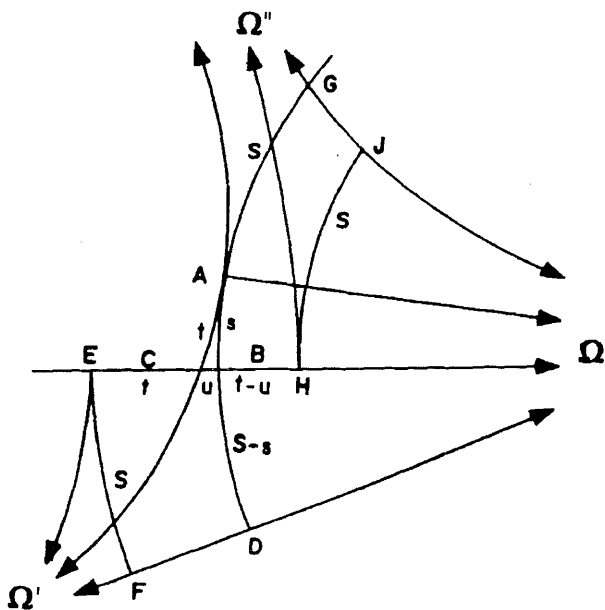


Figura 76

Prova. Na figura importante acima descrita, considere um ponto D do horocírculo h tal que B pertença ao arco AD , cujo comprimento seja S . Seja $\Omega\Omega'$ o raio que passa pelo ponto D . Então, pela definição de S , a reta $A\Omega'$ é a reta tangente ao horocírculo passando pelo ponto A , logo, é reta que contém o segmento AC .

Considere, além disto, um ponto E sobre a reta que passa por C e D , escolhido de tal sorte que C pertença ao segmento EB e que o segmento EC tenha comprimento t . Traça $E\Omega'$. Comparação dos triângulos generalizados $CA\Omega$ e $CE\Omega'$ revela que eles são congruentes e, portanto, $E\Omega'$ é perpendicular a EC . Conseqüentemente, o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto E tem $E\Omega'$ como reta tangente. Logo, o seu arco EF entre as retas $E\Omega$ e $\Omega\Omega'$ mede S . Segue-se do teorema anterior que os arcos correspondentes EF e BD têm seus comprimentos relacionados como se segue:

$$S - s = Se^{-(t+u)}.$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Para demonstrar a segunda parte, inicie por considerar um ponto G sobre o horocírculo h , de sorte que A pertença ao arco BG e o arco AG tenha comprimento S . O raio $G\Omega$, se continuado, torna-se a reta $\Omega\Omega''$, e a reta $A\Omega''$ é tangente ao horocírculo h no ponto A . Na semi-reta $C\Omega$, marque um ponto H tal que o comprimento de CH seja t . Comparação dos triângulos generalizados $HC\Omega''$ e $AC\Omega$ revela que eles são congruentes. Logo, $H\Omega''$ é perpendicular a CH . Conseqüentemente, o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto H tem a reta $H\Omega''$ como reta tangente e seu arco, entre o ponto H e o ponto J situado no raio $\Omega\Omega''$, terá comprimento S . Comparação entre os arcos concêntricos BG (de comprimento $S + s$) e HJ (de comprimento S) que distam $t - u$ um do outro, fornece:

$$S + s = Se^{t-u}.$$

Isto completa a prova do teorema. \square

Corolário 47 *Na figura importante descrita anteriormente, valem as seguintes relações:*

$$e^u = \cosh t \quad e \quad s = S \tanh t .$$

Prova. A prova vem das simples soma e subtração das expressões obtidas no teorema.

7.3 Sistema de coordenadas

Neste ponto, é conveniente a introdução de coordenadas para representar os pontos do plano na Geometria hiperbólica. Como no caso euclidiano, tome duas retas perpendiculares. Seja O o seu ponto de interseção. Usando a unidade de medida que fixamos na seção anterior, numeramos os pontos das duas retas da maneira usual, em que o ponto O é numerado pelo zero em cada uma das retas. Chamamos uma das retas de eixo dos x e a outra de eixo dos y .

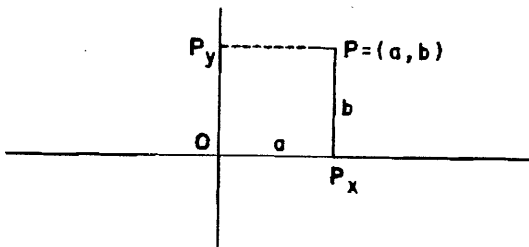


Figura 77

Dado um ponto P do plano, represente por P_x sua projeção no eixo dos x . Associamos, então, ao ponto P o par ordenado (a, b) da seguinte maneira:

1. a é o número associado ao ponto P_x no eixo dos x ;

2. b é o comprimento do segmento PP_x como sinal positivo, caso P esteja acima do eixo dos x , ou com sinal negativo, no outro caso.

Chamamos a de *abscissa* do ponto P e b de *ordenada* do ponto P . É importante observar, que, diferentemente do que ocorre na Geometria euclidiana, o número associado à projeção ortogonal de P no eixo dos y não coincide com a ordenada de P . De fato, se P_y representa tal projeção, o quadrilátero PP_xOP_y é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no ponto P . Portanto tem-se sempre que $PP_x > P_yO$ e $PP_y > P_xO$.

Proposição 48 *Seja Ω o ponto ideal no final da parte positiva do eixo dos x . A equação do horocírculo centrado em Ω e passando pela origem do sistema de coordenadas é*

$$e^x = \cosh y .$$

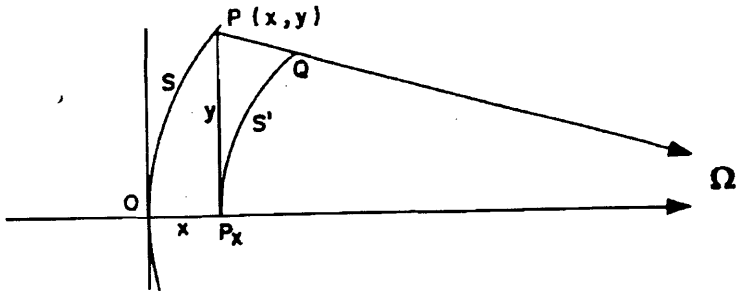


Figura 78

Prova. Seja $P = (x, y)$ um ponto do horocírculo e P_x sua projeção no eixo dos x . Represente por s o comprimento do seu arco OP . Considere agora o horocírculo, centrado em Ω , que passa pelo ponto P_x , e seja Q o ponto onde ele intercepta o raio $P_x\Omega$. Represente por s' o comprimento do arco P_xQ deste horocírculo. A equação é agora uma consequência direta do corolário (47) aplicado à figura PQP_x . \square

Outra figura importante na Trigonometria hiperbólica é a exibida acima, formada por um arco de horocírculo de comprimento s , a perpendicular baixada da extremidade do arco ao raio que passa pela outra extremidade, de comprimento y , e o segmento de raio, de comprimento x , da extremidade do arco ao pé da perpendicular. Para esta figura, dispomos das seguintes relações:

$$s' = se^{-x}$$

$$s' = S \tanh y ,$$

que foram deduzidas na seção anterior. Daí obtemos o seguinte

$$s = S \sinh y$$

É oportuno observar que a reta ΩP interceptará o eixo dos y se $s < S$; será paralela ao eixo dos y quando $s = S$; e será uma reta que não intercepta o eixo dos y se $s > S$. A prova desta observação é deixada ao encargo do leitor. Vamos utilizá-la para obter a equação da reta que é, simultaneamente, paralela aos dois eixos.

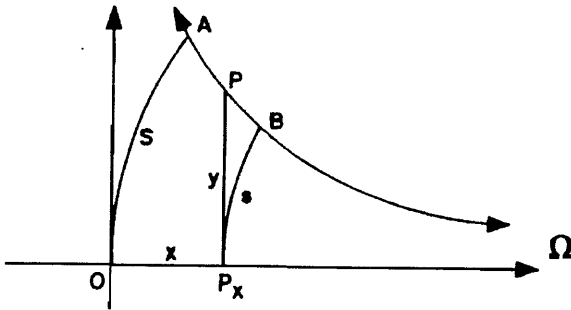


Figura 79

Proposição 49 *A equação da reta simultaneamente paralela aos eixos coordenados nas direções positivas é*

$$e^{-x} = \tanh y .$$

Prova. Seja $\Omega\Omega'$ a reta que é simultaneamente paralela ao eixo dos x e ao eixo dos y , ambos na direção positiva, como representado na figura acima. O horocírculo de centro Ω e passando pela origem intercepta esta reta num ponto A e, como vimos, o comprimento do arco OA será S . Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta e P_x a sua projeção no eixo dos x . Considere o horocírculo centrado em Ω e passando pelo ponto P_x . Seja B o seu ponto de interseção com a reta. Represente por s o comprimento do arco BP_x . Do que vimos é imediato que

$$s = S \tanh y$$

$$s = S e^{-x}.$$

Logo, eliminado s nas duas equações, obtemos:

$$e^{-x} = \tanh y,$$

que é a equação desejada.

Dois números z e z' são ditos *complementares* quando os ângulos de paralelismos a eles associados são complementares, ou seja, somam um ângulo reto.

Proposição 50 Se z e z' são complementares,

$$e^{-z} = \tanh(z'/2). \quad (7.2)$$

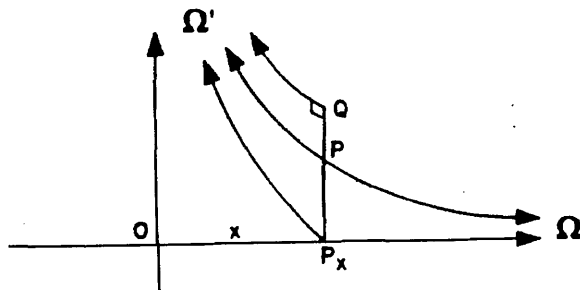


Figura 80

Prova. Fixe um sistema de coordenadas. Seja $\Omega\Omega'$ a reta que é tangente aos dois eixos na direção positiva. No eixo dos x marque um ponto P_x , cuja ordenada é z . Por este ponto, trace a reta perpendicular ao eixo dos x . Esta cortará a reta $\Omega\Omega'$ em um ponto P . De fato, se tal não ocorresse, ela teria de cortar o eixo dos y ou ser paralela a ele. Nos dois casos, formaríamos um triângulo (regular ou generalizado) cuja soma dos ângulos internos seria maior ou igual a dois ângulos retos, o que é impossível. Prolongue o segmento P_xP até um ponto Q tal que $PQ = PP_x$. Trace $Q\Omega'$ e $P_x\Omega'$.

Comparação dos triângulos generalizados $P_xP\Omega$ e $QP\Omega'$ revela que os mesmos são congruentes e, conseqüentemente, o ângulo em Q é reto. É claro que o ângulo $O\widehat{P_x}\Omega'$ é o ângulo de paralelismo correspondente a z . Também é claro que o ângulo $Q\widehat{P_x}\Omega'$ é o ângulo de paralelismo do segmento QP_x . Como os dois ângulos são complementares, então, concluímos que o comprimento de QP_x é z' . Portanto, as coordenadas do ponto P são $(z, z'/2)$. Como P esta sobre a reta $\Omega\Omega'$, concluímos que $e^{-z} = \tanh(z'/2)$.

Esta relação entre z e z' pode ser reescrita de muitas outras maneiras. Por exemplo,

$$e^z = \coth(z'/2).$$

Subtraindo-se esta expressão da anteriormente obtida encontramos:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\coth(z'/2) - \tanh(z'/2)}{2} = \frac{1}{\sinh z'}.$$

Corolário 51 *Se z e z' são complementares, valem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} \sinh z &= \operatorname{csch} z' \\ \cosh z &= \coth z' \\ \tanh z &= \operatorname{sech} z'. \end{aligned}$$

Exercícios

1. Seja c uma constante. O que representa geometricamente a equação $y = c$? E a equação $x = c$?
2. Seja Ω o ponto ideal do eixo dos x , na direção positiva. Mostre que a equação do horocírculo com centro em Ω que corta o eixo dos x no ponto $(a, 0)$ é: $e^{x-a} = \cosh y$.
3. Seja Ω como no exercício anterior. Determine a equação da reta que corta o eixo dos y no ponto $(0, R)$ e o eixo dos x no ponto ideal Ω . Fazendo R tender para infinito, deduza a equação da reta que é simultaneamente paralela ao eixo dos x e ao eixo dos y .
4. Seja s o comprimento de um arco de horocírculo subtendido por uma corda de comprimento a . Mostre que

$$s = 2S \sinh(a/2).$$

5. Demonstre o Corolário (51).

7.4 Resolução de triângulos retângulos

Nesta seção obteremos a versão hiperbólica do Teorema de Pitágoras bem como das principais fórmulas da Trigonometria para triângulos retângulos.

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C . Designaremos por a , b e c , respectivamente, os comprimentos dos lados BC , AC e AB . Representaremos por λ e μ as medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{B} respectivamente. Seja ℓ o comprimento cujo ângulo de paralelismo é λ .

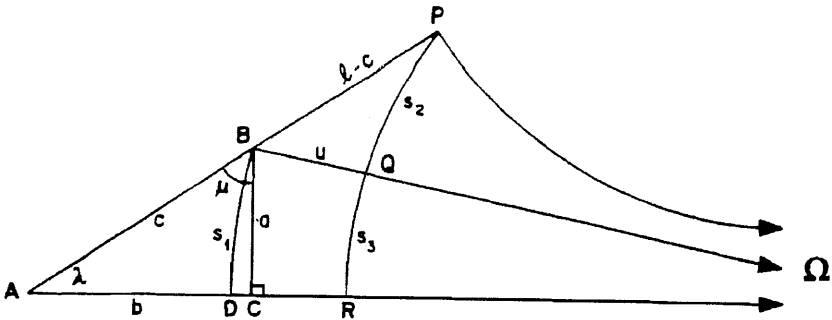


Figura 81

Marque na semi-reta S_{AB} um ponto P tal que o comprimento de AP seja l . Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{AC} . Trace $P\Omega$. Esta semi-reta é claramente perpendicular ao segmento AP . Trace também $B\Omega$ e considere os horocírculos centrados em Ω , h_1 passando por B e h_2 passando por P . Sejam D e R os pontos onde h_1 e h_2 , respectivamente, cortam $A\Omega$, e seja Q o ponto onde h_2 corta $B\Omega$. Designe por s_1 , s_2 e s_3 os comprimentos dos arcos BD , PQ e QR , respectivamente, e por u o comprimento do segmento BQ . As seguintes relações são conseqüências imediatas do que deduzimos na seção anterior.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= S \operatorname{senh} a \\
 s_1 &= s_3 e^u \\
 e^u &= \operatorname{cosh}(\ell - c) \\
 s_2 + s_3 &= S \operatorname{tanh} \ell \\
 s_2 &= S \operatorname{tanh}(\ell - c) .
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{senh} a &= \frac{s_1}{S} = \frac{s_3 e^u}{S} = e^u \left[\frac{s_2 + s_3}{S} - \frac{s_2}{S} \right] \\
 &= \operatorname{cosh}(\ell - c) [\operatorname{tanh} \ell - \operatorname{tanh}(\ell - c)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sinh \ell \cosh(\ell - c) - \sinh(\ell - c) \cosh \ell}{\cosh \ell} \\
 &= \frac{\sinh c}{\cosh \ell}.
 \end{aligned}$$

Assim, provamos o seguinte resultado

Proposição 52 *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , tem-se:*

$$\sinh c = \sinh a \cosh \ell \quad e \quad \sinh c = \sinh b \cosh m. \quad (7.3)$$

A primeira equação desta proposição foi demonstrada e a segunda é apenas uma versão da primeira em que trocamos o papel dos dois catetos. Usando-se o Corolário (51), podemos reescrever estas equações de outra maneira, explicitando o valor do cosh. Podemos, além disto, considerar os quatro triângulos associados ao triângulo dado, como foi mostrado no final da seção 6.10 do capítulo anterior. Para cada um deles obtemos mais duas fórmulas, várias das quais se repetem. Resumimos no Corolário seguinte todas as fórmulas distintas obtidas.

Corolário 53 *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , tem-se:*

$$\begin{aligned}
 \cosh \ell &= \sinh c \sinh a', & \cosh m &= \sinh c \sinh b', \\
 \cosh c &= \sinh \ell \sinh m, & \cosh a' &= \sinh \ell \sinh b', \\
 \cosh b' &= \sinh m \sinh a'.
 \end{aligned}$$

Como aplicação destas fórmulas, deduzimos o seguinte teorema que é a versão hiperbólica do Teorema de Pitágoras Euclidiano.

Teorema 54 (Pitágoras). *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ e μ , tem-se:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Prova. $\cosh c = \sinh \ell \sinh m = \coth a' \coth b' = \cosh a \cosh b$. A segunda destas igualdades foi obtida utilizando fórmulas do Corolário (53), e a última igualdade é consequência direta do Corolário (51).

É claro que este teorema pode ser aplicado em cada um dos triângulos retângulos relacionados com o triângulo a, b, c, λ e μ , produzindo as seguintes quatro fórmulas:

$$\cosh \ell = \cosh m' \cosh b, \quad (7.4)$$

$$\cosh a' = \cosh c' \cosh m', \quad (7.5)$$

$$\cosh b' = \cosh \ell' \cosh c', \quad (7.6)$$

$$\cosh m = \cosh a \cosh \ell'. \quad (7.7)$$

É importante lembrar que, com o auxílio do Corolário (51), estas fórmulas podem ser transformadas em muitas outras de interesse na solução de problemas da Trigonometria hiperbólica.

Exercícios

1. Considere um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ e μ . Prove que:

(a) $\cosh m = \coth a' \coth \ell$

(b) $\cosh a' = \coth c \coth m$

(c) $\cosh b' = \coth c \coth \ell$

(d) $\cosh a = \tanh \ell \cosh m$

(e) $\cosh b = \tanh m \cosh \ell$

(f) $\tanh a = \tanh c \tanh m$

(g) $\tanh b = \tanh c \tanh \ell$

2. Mostre que a equação da reta que é perpendicular ao eixo dos y e o corta no ponto $(0, b)$ é:

$$\tanh y = \tanh b \cosh x.$$

3. Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C . Seja CD sua altura relativamente à hipotenusa. Represente por h o comprimento desta altura, por p o comprimento de AD e por q o de BD . Mostre que

$$\tanh^2 a = \tanh c \tanh q \quad \text{e que} \quad \tanh^2 h = \tanh p \tanh q .$$

7.5 Resolução de triângulos quaisquer

Seja ABC um triângulo com ângulos λ , μ e ν nos vértices A , B e C , respectivamente. Vamos representar por a , b e c os comprimentos dos lados que se opõem a estes ângulos, e por ℓ , m e n os segmentos para os quais eles são ângulos de paralelismo.

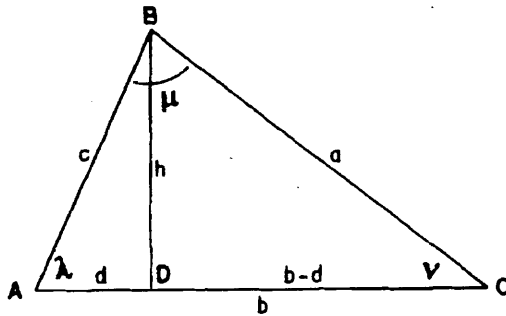


Figura 82

Teorema 55 (Lei dos senos). *Em um triângulo com lados a , b e c e ângulos opostos a estes lados λ , μ e ν tem-se*

$$\frac{\sinh a}{\operatorname{sech} \ell} = \frac{\sinh b}{\operatorname{sech} m} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sech} n} .$$

Prova. Trace a altura BD do vértice B e represente por h o seu comprimento. Formamos assim dois triângulos retângulos BDA e BDC , ambos com ângulo reto no vértice D . Aplicando a equação (7.3) a estes dois triângulos obtém-se

$$\sinh a = \sinh h \cosh n ,$$

$$\sinh c = \sinh h \cosh \ell .$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\sinh a}{\sinh c} = \frac{\cosh n}{\cosh \ell} = \frac{\operatorname{sech} \ell}{\operatorname{sech} n} .$$

Construindo outra altura e efetivando o mesmo argumento, podemos concluir que

$$\frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\operatorname{sech} m}{\operatorname{sech} n} .$$

Destas duas últimas equações segue-se o resultado.

Teorema 56 (Lei dos co-senos). *Em um triângulo com lados a , b e c e ângulos opostos a estes lados λ , μ e ν tem-se*

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \tanh \ell .$$

Prova. No triângulo ABC considerado anteriormente, trace a altura BD . Suponha, inicialmente, que o ponto D pertença ao segmento AC . Seja d o comprimento do lado AD e, conseqüentemente, $b - d$ o comprimento do lado DC . Pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos BDC e BDA , tem-se:

$$\begin{aligned} \cosh a &= \cosh h \cosh(b - d) , e \\ \cosh c &= \cosh h \cosh d . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cosh a &= \cosh c \cosh(b - d) / \cosh d \\ &= \cosh c (\cosh b \cosh d - \sinh b \sinh d) / \cosh d \\ &= \cosh b \cosh c - \sinh b \cosh c \tanh d \end{aligned}$$

Aplicando o resultado do exercício (1g) da seção anterior ao triângulo BDA , obtem-se:

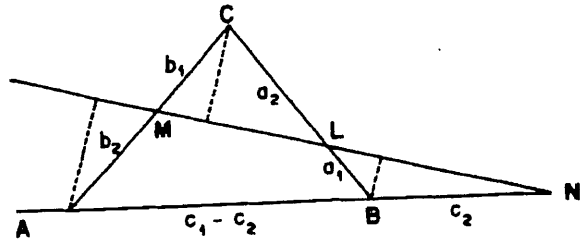
$$\tanh d = \tanh c \tanh \ell .$$

Estas duas últimas equações produzem a fórmula desejada.

Exercícios

1. Se uma transversal corta os lados do triângulo ABC , dividindo o lado de comprimento a em segmentos de comprimentos a_1 e a_2 , o lado de comprimento b em segmentos de comprimentos b_1 e b_2 , e o lado de comprimento c em segmentos de comprimentos c_1 e c_2 , como indicado na figura abaixo. Prove que

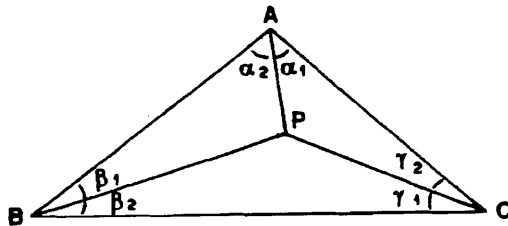
$$\sinh a_1 \sinh b_1 \sinh c_1 = \sinh a_2 \sinh b_2 \sinh c_2.$$



2. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC . Os segmentos ligando este ponto aos vértices do triângulo subdividem os seus ângulos em pares de ângulos α_1 e α_2 , β_1 e β_2 , γ_1 e γ_2 , como indicado na figura abaixo. Prove que

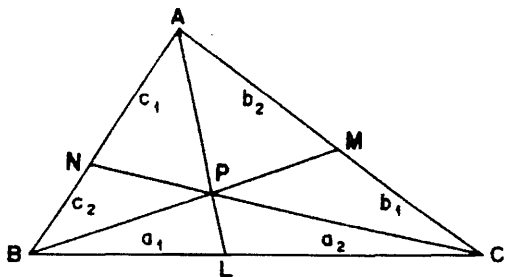
$$\cosh a_1 \cosh b_1 \cosh c_1 = \cosh a_2 \cosh b_2 \cosh c_2,$$

onde a_1 é o comprimento cujo ângulo de paralelismo é α_1 etc.



3. Seja P um ponto interior a um triângulo ABC . As retas ligando cada vértice ao ponto P dividem os lados em pares de segmentos de comprimentos a_1 e a_2 , b_1 e b_2 , c_1 e c_2 como indicado na figura abaixo. Prove que

$$\sinh a_1 \sinh b_1 \sinh c_1 = \sinh a_2 \sinh b_2 \sinh c_2 .$$



7.6 A função ângulo de paralelismo revisitada

Estudamos a função ângulo de paralelismo Θ , definida originalmente para todos os números reais maiores ou iguais a zero. Provamos que ela toma valores no intervalo $(0, \pi/2]$, que é decrescente e sobrejetiva, sendo, portanto, contínua. Estendamos o domínio desta função para todos os números reais, colocando $\Theta(-a) = \pi - \Theta(a)$ para todo $a > 0$. Com esta definição Θ continuou sendo uma função contínua e decrescente, mas sua imagem é agora o intervalo $(0, \pi)$. Vamos obter a expressão explícita desta função.

Teorema 57 Se $\Theta(a) = \alpha$ então $\tanh a = \cos \alpha$.

Prova. Vamos começar examinando a função contínua f , definida no intervalo $(0, \pi)$, pela equação

$$\tanh a = \cos f(\alpha) ,$$

onde assumimos que $\Theta(a) = \alpha$. Quando $\alpha = 0$, sabemos que $a = \infty$ e que $\tanh a = 1$. Assim sendo, $\cos f(\alpha) = 1$ e logo, $f(\alpha) = 0$. Portanto:

$$f(0) = 0 .$$

Quando $\alpha = \pi/2$, sabemos que $a = 0$ e que $\tanh a = 0$. Como consequência, $\cos f(\alpha) = 0$ e logo, $f(\alpha) = \pi/2$, ou seja

$$f(\pi/2) = \pi/2 .$$

Quando $\alpha = \pi$, sabemos que $a = -\infty$ e que $\tanh a = -1$. Assim, $\cos f(\alpha) = -1$ e logo, $f(\alpha) = \pi$. Portanto:

$$f(\pi) = \pi .$$

Considere agora quaisquer dois ângulos adjacentes λ_1 e λ_2 de vértice A . Inicialmente, vamos supor que os dois são agudos e que sua soma também é um ângulo agudo. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 os dois números positivos tais que $\Theta(\ell_1) = \lambda_1$ e $\Theta(\ell_2) = \lambda_2$. No lado comum aos dois ângulos, marque um ponto D tal que o comprimento de AD seja menor do que os dois números ℓ_1 e ℓ_2 . Pelo ponto D , trace uma reta perpendicular ao segmento AD . Ela cortará os outros lados dos dois ângulos em pontos B e C , como indicado na figura seguinte.

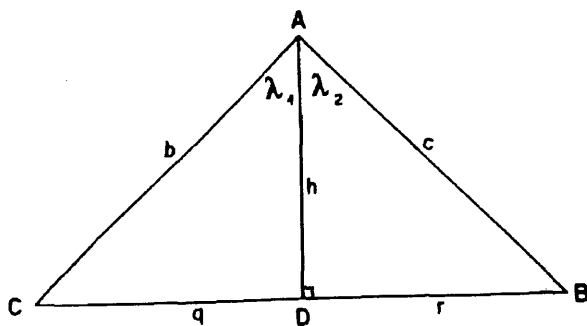


Figura 83

Designe os segmentos AC , AB , CD , DB e AD por b , c , q , r e h , respectivamente. Em seguida, aplique a Lei dos co-senos ao triângulo ABC , obtendo a relação:

$$\cosh(q + r) = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \tanh \ell \quad (7.8)$$

, onde $\Theta(\ell) = \lambda_1 + \lambda_2$. Portanto:

$$\cos f(\lambda_1 + \lambda_2) = \tanh \ell . \quad (7.9)$$

Segue-se, então, de (7.8) que:

$$\begin{aligned} \cos f(\lambda_1 + \lambda_2) &= \\ \frac{\cosh h \cosh c - \cosh(q+r)}{\sinh b \sinh c} &= \quad (7.10) \\ \coth b \coth c - \frac{\cosh q \cosh r}{\sinh b \sinh c} - \frac{\sinh q \sinh r}{\sinh b \sinh c} \end{aligned}$$

Simplificaremos os três últimos termos desta igualdade.

(*Primeiro Termo*). Observe que, usando o resultado do exercício (7.4.1g) nos triângulos ADC e ADB , valem, respectivamente, as igualdades seguintes:

$$\tanh h = \tanh b \tanh \ell_1 , \quad (7.11)$$

$$\tanh h = \tanh c \tanh \ell_2 . \quad (7.12)$$

Multiplicando membro a membro estas duas equações, podemos concluir que:

$$\coth b \coth c = \coth^2 h \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2) . \quad (7.13)$$

(*Segundo Termo*). Na seguinte cadeia de igualdades, usamos apenas o Teorema de Pitágoras, aplicado no caso do triângulo ADC , e a equação (7.11):

$$\begin{aligned} \frac{\cosh q}{\sinh b} &= \frac{\cosh q \cosh h}{\sinh b \cosh h} = \frac{\cosh b}{\sinh b \cosh h} \\ &= \frac{\tanh h}{\sinh h \tanh b} = \frac{\tanh h \ell_1}{\sinh h} . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Similarmente, considerando-se o outro triângulo, pode-se obter:

$$\frac{\cosh r}{\sinh c} = \frac{\tanh \ell_2}{\sinh h} . \quad (7.15)$$

Multiplicando as equações (7.14) e (7.15), obtemos:

$$\frac{\cosh q \cosh r}{\sinh b \sinh c} = \operatorname{csch}^2 h \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2). \quad (7.16)$$

(Terceiro Termo). É fácil deduzir da definição de f que ela satisfaz à equação:

$$\operatorname{sech} a = \operatorname{sen} f(\alpha).$$

Portanto, usando a equação (7.3) no triângulo ADC , tem-se

$$\frac{\sinh q}{\sinh b} = \frac{\sinh q}{\sinh q \cosh \ell_1} = \operatorname{sech} \ell_1 = \operatorname{sen} f(\lambda_1). \quad (7.17)$$

De forma similar, prova-se que

$$\frac{\sinh r}{\sinh c} = \operatorname{sen} f(\lambda_2). \quad (7.18)$$

Utilizando-se as identidades obtidas com os três termos na equação (7.11), obtem-se:

$$\begin{aligned} \cos f(\lambda_1 + \lambda_2) &= \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2) - \operatorname{sen} f(\lambda_1) \operatorname{sen} f(\lambda_2) \\ &= \cos[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)]. \end{aligned}$$

Ou seja, a função f satisfaz a propriedade aditiva:

$$f(\lambda_1 + \lambda_2) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2). \quad (7.19)$$

O leitor é agora desafiado a provar que, como $f : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ é contínua, satisfaz a (7.19) e às condições: $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = \pi/2$ e $f(\pi) = \pi$, então, f é dada simplesmente por $f(x) = x$. Aqui um caminho mais simples é supor que f é uma função diferenciável. Neste caso, como

$$\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \frac{f(\beta + h) - f(\beta)}{h},$$

tem-se que $f'(\alpha)$ é constante. Portanto, $f(\alpha) = k\alpha + l$. Como $f(0) = 0$ e $f(\pi/2) = \pi/2$, então, f é a função identidade.

A restrição feita sobre o ângulos λ_1 e λ_2 no início da prova limita a validade da equação (7.19) a ângulos agudos com soma no intervalo $[0, \pi/2]$. Conseqüentemente, a conclusão do teorema só é válida para α no mesmo intervalo. Por outro lado, como $\Theta(-a) = \pi - \Theta(a)$ para valores positivos de a , é fácil ver que o resultado vale em geral. Usamos para isto a seguinte seqüência de igualdades:

$$\begin{aligned} \cos f(\Theta(-a)) &= \tanh(-a) = -\tanh a \\ &= -\cos f(\Theta(a)) = -\cos \Theta(a) \\ &= \cos(\pi - \Theta(a)) = \cos(\Theta(-a)). \end{aligned}$$

A conclusão é que $f(\Theta(-a)) = \Theta(-a)$ para qualquer valor positivo de a . Assim, o resultado desejado é verdadeiro também no intervalo $(\pi/2, \pi]$. Isto completa a prova do Teorema.

Como no caso de algumas fórmulas que deduzimos, a expressão da função ângulo de paralelismo admite uma série de formulações equivalentes. Elas vão listadas a seguir:

$$\coth a = \sec \alpha, \quad (7.20)$$

$$\operatorname{sech} a = \operatorname{sen} \alpha, \quad (7.21)$$

$$\cosh a = \operatorname{csc} \alpha, \quad (7.22)$$

$$\operatorname{senh} a = \cot \alpha, \quad (7.23)$$

$$\operatorname{csch} a = \tan \alpha. \quad (7.24)$$

Esta relação pode, ainda, ser colocada noutra forma, utilizando o fato de que

$$e^u = \operatorname{senh} u + \operatorname{cosh} u.$$

Corolário 58 (Bolyai e Lobachewsky) *Se $\Theta(a) = \alpha$, então,*

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-a}.$$

Prova. Utilizando as equações (7.22) e (7.23), deduzimos:

$$\begin{aligned} c^a &= \sinh a + \cosh a \\ &= \cot \alpha + \csc \alpha \\ &= \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \cot(\alpha/2) \end{aligned}$$

Isto prova o corolário.

Comentário

Para dedução das fórmulas da Trigonometria hiperbólica adotamos como unidade de medida a distância radial entre dois arcos correspondentes de dois horocírculos concêntricos, quando a razão entre os comprimentos dos dois arcos era o número e . Se o número e for trocado por um outro número positivo $a > 1$, ainda poderemos deduzir o Teorema de Pitágoras, a Lei dos senos e a Lei dos co-senos, mas elas terão uma aparência diferente da que obtivemos. Para passar de um sistema para o outro, consideramos uma constante k tal que

$$a = e^{1/k}.$$

A expressão encontrada no Teorema (45) torna-se-ia

$$s_x = s_0 e^{-x/k}.$$

Os resultados que decorreram do Teorema mencionado serão todos alterados pela introdução da constante k . Uma releitura daquelas deduções mostra, entretanto, que as alterações são mínimas e que as fórmulas encontradas mantêm essencialmente a sua estrutura. Por exemplo, a conclusão do Corolário (58) torna-se

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-a/k}. \quad (7.25)$$

Por algumas razões práticas de utilização futura, reproduziremos todas as fórmulas importantes que deduzimos, na versão que inclui o parâmetro k .

1. Fórmulas válidas em triângulos retângulos a , b , c , λ e μ .

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{\operatorname{senh} a/k}{\operatorname{senh} c/k} \quad (7.26)$$

$$\operatorname{sen} \mu = \frac{\operatorname{senh} b/k}{\operatorname{senh} c/k} \quad (7.27)$$

$$\cot \lambda \cot \mu = \cosh c/k \quad (7.28)$$

$$\tan \lambda = \frac{\tanh a/k}{\operatorname{senh} b/k} \quad (7.29)$$

$$\tan \mu = \frac{\tanh b/k}{\operatorname{senh} a/k} \quad (7.30)$$

$$\cosh c/k = \cosh a/k \cosh b/k \quad (7.31)$$

$$\cosh a/k = \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \mu} \quad (7.32)$$

$$\cosh b/k = \frac{\cos \mu}{\operatorname{sen} \lambda} \quad (7.33)$$

$$\cos \mu = \frac{\tanh a/k}{\tanh c/k} \quad (7.34)$$

$$\cos \lambda = \frac{\tanh b/k}{\tanh c/k} \quad (7.35)$$

2. Fórmulas válidas em triângulos quaisquer a , b , c , λ ,

(Lei dos senos)

$$\operatorname{senh} \frac{a}{k} : \operatorname{senh} \frac{b}{k} : \operatorname{senh} \frac{c}{k} = \operatorname{sen} \lambda : \operatorname{sen} \mu : \operatorname{sen} \nu \quad (7.36)$$

(Lei dos co-senos)

$$\cosh \frac{a}{k} = \cosh \frac{b}{k} \cosh \frac{c}{k} - \operatorname{senh} \frac{b}{k} \operatorname{senh} \frac{c}{k} \cos \lambda \quad (7.37)$$

O fato importante a mencionar, relacionado com estas fórmulas é que, quando o parâmetro k cresce, a Geometria hiperbólica se aproxima de ser a Geometria euclidiana. De fato, usando-se a expressão que fornece o ângulo de paralelismo, obtém-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tan \frac{\alpha}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-a/k} = 1.$$

Portanto, o ângulo de paralelismo correspondente para qualquer comprimento tende a ser um ângulo reto quando k tende para infinito. Similarmente, no limite, a fórmula (7.26) fornece:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{senh} a/k}{\operatorname{senh} c/k} = \frac{a}{c}$$

o que nos diz que, no limite, ela se torna a definição usual do $\operatorname{sen} \lambda$ da Geometria euclidiana. Tomemos agora a fórmula (7.31). Substituindo cada cosh pela sua expressão em série de potências e desprezando os termos com potências de k de ordem menor do que -2 , obtém-se

$$1 + \frac{c^2}{2k^2} = \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right),$$

ou, finalmente,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Portanto, quando k tende para infinito, aquela fórmula, se torna exatamente o teorema de Pitágoras da Geometria euclidiana. As leis dos senos e dos co-senos tomam, no limite, as suas formulações familiares:

$$\operatorname{sen} \lambda : \operatorname{sen} \mu : \operatorname{sen} \nu = a : b : c,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \lambda.$$

Ao invés de fazer k tender para infinito, outro ponto de vista sobre o assunto é o de fazer os comprimentos a , b e c tenderem para zero. Como, do ponto de vista do processo de limite, tanto faz tomar este novo ponto de vista como o anterior, devemos esperar que,

para figuras suficientemente pequenas, as fórmulas da Geometria euclidiana sejam aproximadamente válidas, mesmo na Geometria hiperbólica.

Esta observação mostra que, decidir se a Geometria do universo é ou não euclidiana, não admite uma resposta simples. Por um lado, no mundo físico, as medidas de segmentos e ângulos sempre estão sujeitas a erros, o que torna difícil decidir se as possíveis discrepâncias na medida das soma dos ângulos internos de um triângulo deva justificar a rejeição ou não da Geometria euclidiana como modelo para a Física. Mesmo se os vértices de um triângulo são estrelas muito distantes, não há ainda como decidir se o possível defeito não nulo encontrado nas medições deve-se ou não apenas a erros de medida, pois, apesar de ter lados de comprimentos gigantesco, o triângulo pode ser ainda muito pequeno em comparação com o parâmetro k .

Exercícios

1. Se s é a metade do perímetro de um triângulo ABC , prove que

$$\cos \frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{\sinh \frac{s}{k} \sinh \frac{s-a}{k}}{\sinh \frac{b}{k} \sinh \frac{c}{k}}}$$

$$\sin \frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{\sinh \frac{s-b}{k} \sinh \frac{s-c}{k}}{\sinh \frac{b}{k} \sinh \frac{c}{k}}}$$

2. Prove que o raio r do círculo inscrito em um triângulo é dado por

$$\tanh \frac{r}{k} = \sqrt{\frac{\sinh \frac{s-a}{k} \sinh \frac{s-b}{k} \sinh \frac{s-c}{k}}{\sinh \frac{s}{k}}}$$

3. Obtenha as fórmulas limites, quando k vai para infinito, para cada uma das fórmulas apresentadas nesta subseção.

4. Seja AB uma corda de um horocírculo que subentende um arco de comprimento s . Suponha que a reta tangente ao horocírculo, no ponto A , faz um ângulo θ com o segmento AB . Prove, então, que

$$s = 2S \tan \theta .$$

5. Sejam A e B as extremidades de um arco de horocírculo de comprimento s . Suponha que a reta tangente ao horocírculo no ponto A intercepta o raio que passa pelo ponto B , formando um ângulo η . Mostre, então, que

$$s = S \cos \eta .$$

6. Determine o raio do círculo inscrito em um triângulo maximal.
7. Dadas duas retas que se interceptam, elas determinam uma partição do plano em quatro regiões. Considere a figura formada, tomando em cada uma destas regiões uma reta que seja simultaneamente paralela às duas retas originais. Esta figura é chamada de *quadrilátero maximal*. Em um quadrilátero maximal, sejam a e b as distâncias entre seus lados opostos. Mostre que

$$\sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2} = 1 .$$

8. Três horocírculos são, cada um deles, tangentes às três retas que constituem os lados de um triângulo. Prove que o triângulo é equilátero. Determine o comprimento de seus lados e a medida de seus ângulos. Determine também os raios dos círculos inscrito e circunscrito.

Consistência da Geometria hiperbólica

8.1 Introdução

Mesmo após todo o estudo feito, pode ainda restar a suspeita de que, com algum esforço a mais, poderemos chegar a uma contradição. Como estar certo de que tudo o que deduzimos não é apenas uma miragem, algo que parece real mas que não existe? A maneira mais simples de nos livrarmos de uma vez por todas desta dúvida é exibindo um modelo da Geometria hiperbólica, construído usando a Geometria euclidiana. Com isto, uma contradição na Geometria hiperbólica será também uma contradição na Geometria euclidiana. Desta forma, pelo menos estaremos certos de que a nova Geometria é tão sólida quanto a antiga.

8.2 Um modelo para a Geometria hiperbólica

Vamos considerar, no plano euclidiano um círculo ξ . A região Δ limitada por este círculo será o modelo do nosso “plano” hiperbólico. Os “pontos” serão os pontos de Δ . Para definir as “retas” deste “plano”, consideraremos a família \mathcal{F} constituída pelos círculos que cortam ξ perpendicularmente¹ e pelas retas que passam pelo centro de Δ . Uma “reta” de nosso plano hiperbólico é simplesmente a parte de um elemento de \mathcal{F} que fica dentro de Δ .

¹Dois círculos são perpendiculares quando se interceptam e, nos pontos de interseção, suas tangentes formam ângulos retos.

Teorema 59 *Os "pontos" e as "retas" satisfazem aos axiomas da Geometria hiperbólica.*

A prova deste Teorema será apresentada no final deste capítulo. Até lá, revisaremos alguns tópicos que serão essenciais para seu entendimento.

8.3 Círculos ortogonais

Considere um círculo ξ e um ponto P fora dele. Sejam m e n duas retas passando por P . Suponha que m corta o círculo ξ em dois pontos Q e R , e que a reta n o corta nos pontos S e T . Considere a posição dos pontos como indicados na figura seguinte. Traçando-se o segmento auxiliar RS , é imediato concluir que os ângulos $\hat{S}TR$ e $\hat{S}QR$ são suplementares e que, conseqüentemente, $\hat{S}TR = \hat{S}QP$. Segue-se que os triângulos PRT e PSQ são semelhantes e que $PS \cdot PT = PQ \cdot PR$.

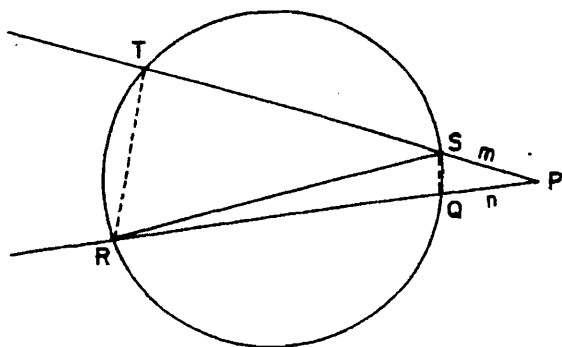


Figura 84

Podemos resumir de forma mais elegante este resultado, afirmando que,

Proposição 60 *Se uma reta passa por um ponto P e corta um círculo em pontos A e B , então, o produto $PA \cdot PB$ é constante.*

O caso em que o ponto P está fora do círculo, já foi demonstrado. Os outros são deixados ao leitor, a título de exercício.

O valor da constante, acrescido de um sinal, é chamado de *potência* do ponto relativamente ao círculo. O sinal será positivo se o ponto estiver fora do círculo e negativo se estiver dentro do círculo. Se O for o centro do círculo e r for o comprimento do seu raio, o valor da potência de um ponto P será:

$$\text{potência} = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2.$$

Proposição 61 *Dados dois círculos distintos, o conjunto dos pontos que têm a mesma potência relativamente aos dois círculos é uma reta perpendicular à reta ligando os seus centros.*

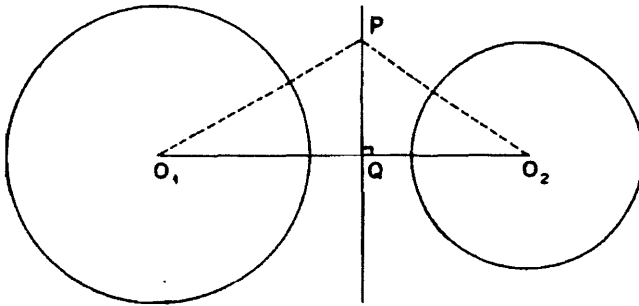


Figura 85

Prova. Sejam O_1 e O_2 os centros dos círculos e r_1 e r_2 , respectivamente, os seus raios. Represente por ℓ o conjunto dos pontos que têm a mesma potência relativamente aos dois círculos. Seja P um ponto qualquer de ℓ . Trace a reta que passa pelo ponto P e que é perpendicular à reta determinada pelos pontos O_1 e O_2 . Seja Q o ponto de interseção das duas retas. Então, usando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(PO_1)^2 - (QO_1)^2 = (PO_2)^2 - (QO_2)^2.$$

Esta igualdade pode ser escrita como:

$$(QO_1)^2 - (QO_2)^2 = ((PO_1)^2 - r_1^2) - ((PO_2)^2 - r_2^2) + r_1^2 - r_2^2.$$

Usando a hipótese sobre P , concluímos que:

$$(QO_1 + QO_2)(QO_1 - QO_2) = r_1^2 - r_2^2.$$

Como $QO_1 + QO_2 = O_1O_2$ e $r_1^2 - r_2^2$ são constantes, então $QO_1 - QO_2$ é constante e, conseqüentemente, o ponto Q não depende da escolha particular do ponto P tomada em ℓ . Logo, todos os pontos de ℓ estão na reta m que passa pelo ponto Q e é perpendicular a O_1O_2 . Por outro lado, é simples mostrar que se P for um ponto de m , é também um ponto de ℓ . Daí o resultado. \square

O conjunto ℓ é chamado de *eixo radical* dos dois círculos.

Corolário 62 *Se dois círculos se interceptam em dois pontos, o seu eixo radical é a reta ligando os dois pontos; se eles são tangentes, seu eixo radical é a reta tangente comum.*

Quando dois círculos se interceptam de tal maneira que as retas tangentes dos dois, em um dos pontos de interseção são perpendiculares, dizemos que os dois círculos são *ortogonais*. É uma simples conseqüência da simetria dos dois círculos, com relação à reta que passa pelos seus centros, que as retas tangentes, no outro ponto de interseção, também são perpendiculares. Segue-se que, se um círculo é ortogonal a um outro, seu centro fica fora do outro círculo.

Proposição 63 *Um círculo é ortogonal a outro se, e só se, o quadrado do seu raio é a potência do seu centro relativamente ao outro círculo.*

Prova. Sejam O_1 e O_2 os centros dos dois círculos e r_1 e r_2 , respectivamente, os seus raios. A potência do ponto O_1 relativamente ao outro círculo é, como já sabemos, $(O_1O_2)^2 - r_2^2$. Se os dois círculos são ortogonais, $(O_1O_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$. Segue-se, portanto, que a potência é igual a r_1^2 , demonstrando, assim, a primeira parte da proposição.

Inversamente, se a potência de O_1 relativamente ao outro círculo for igual a r_1^2 , teremos

$$(O_1O_2)^2 - r_2^2 = r_1^2.$$

É agora simples verificar que esta condição é equivalente ao perpendicularismo das retas tangentes aos dois círculos em um dos pontos de interseção. \square

Corolário 64 *Dado um círculo ξ de centro O_1 e raio r_1 , existe um único círculo ortogonal a ξ com centro em qualquer ponto prefixado do plano, fora deste círculo.*

Prova. Dado um ponto O_2 fora do círculo ξ , tome raio r_2 satisfazendo à equação: $(O_1O_2)^2 - r_2^2 = r_1^2$. Pela proposição anterior, o círculo de centro O_2 e raio r_2 é ortogonal ao círculo ξ . A unicidade decorre do fato de que existe um único valor de $r_2 > 0$ satisfazendo a equação acima. \square

Corolário 65 *Dados dois pontos A e B dentro de um círculo ξ que não estejam sobre um mesmo diâmetro, então existe um único círculo ortogonal a ξ passando por estes dois pontos.*

Prova. Seja m a mediatriz do segmento AB . Considere o problema de determinar um ponto sobre esta reta que seja centro de um círculo ortogonal a ξ e que passe por A e B . Isto equivale a resolver em O_2 e r_2 as equações seguintes:

$$(O_1O_2)^2 - r_2^2 = r_1^2,$$

$$O_1A = O_1B = r_2.$$

Estas equações têm uma única solução, desde que A e B não estejam sobre um diâmetro de ξ . \square

Corolário 66 *Se os círculos ξ_1 e ξ_2 são ortogonais, as retas que passam pelo centro do primeiro, quando interceptam o segundo, o fazem em um ponto ou em dois pontos. No primeiro caso, a reta é tangente ao segundo círculo em um dos pontos de interseção dos dois círculos. No segundo, ela corta sempre o círculo ξ_2 em um ponto que fica dentro e em outro que fica fora do círculo ξ_1 .*

Prova. Isto é uma simples consequência do fato de que, pela proposição (63) teremos $O_1A \cdot O_1B = r_1^2$, onde A e B são os pontos de interseção da reta com o círculo ξ_2 . Portanto, se $O_1A < r_1$, deveremos ter $O_1B > r_1$. \square

8.4 Transformações lineares complexas

Dado um círculo ξ , represente por Δ o disco por ele limitado. Escolha coordenadas complexas $z = x + iy$ no plano euclidiano com origem no centro de Δ e nas quais ξ seja um círculo unitário. Como é usual, vamos acrescentar ao plano um ponto no infinito, representado por ∞ , tornando, o plano assim estendido, topologica e analiticamente equivalente à esfera.

Consideraremos, então, as transformações lineares complexas, ou seja, as funções definidas por:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

com a, b, c e d números complexos satisfazendo a $ad - bc \neq 0$. Elas tomam o valor ∞ no ponto $-d/c$. Exemplos simples de tais transformações são

1. *homotetias*: $w = az$ (onde $a \neq 0$). Escrevendo-se $a = r_\alpha e^{i\alpha}$ e $z = re^{i\theta}$, estas transformações são da forma $w = rr_\alpha e^{i(\alpha+\theta)}$, ou seja, são rotações seguidas de dilatações.
2. *translações*: $w = z + b$.
3. *inversão*: $w = 1/z$. Escrevendo-se $z = re^{i\theta}$, esta transformação torna-se $w = (1/r)e^{-i\theta}$, ou seja, uma reflexão seguida de uma inversão relativamente ao círculo unitário.

Lema 67 *As transformações lineares complexas são composições de homotetias, translações e inversões. Elas levam retas e círculos em retas ou círculos.*

Prova. A prova da primeira parte deste lema vem da simples identidade algébrica

$$\frac{az + b}{cz + d} = -\frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}.$$

Para provar a segunda, é suficiente observar que homotetias, translações e inversões levam círculos e retas em círculos ou retas. \square

O fato de que uma transformação linear complexa tem quatro parâmetros nos diz que uma delas fica caracterizada quando damos quatro pontos e prescrevemos as suas imagens. Ou seja, podemos sempre encontrar uma transformação linear que leva quatro pontos dados em quatro pontos prescritos. Como três pontos determinam um círculo, podemos sempre prescrever que um dado círculo será levado em um outro e ainda ficar com um grau de liberdade para escolher o endereço de um ponto. Por isso, podemos escolher transformações lineares complexas que levem o disco unitário Δ em si mesmo, ao determinar que três pontos quaisquer de ξ sejam levados em três outros pontos de ξ e que algum ponto de Δ seja levado em outro ponto de Δ . Com isto, vemos que existe uma enorme família de tais transformações levando Δ em Δ . Vamos representar por \mathcal{T} este conjunto

A composta de duas tais funções complexas é ainda uma aplicação linear complexa. De fato, dadas

$$f(z) = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) \quad \text{e} \quad g(z) = (a_2z + b_2)/(c_2z + d_2),$$

é simples verificar que

$$f \circ g(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Ou seja, se associarmos à aplicação $w = (az + b)/(cz + d)$ a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então, a composta de transformações lineares complexas corresponde exatamente ao produto das matrizes a elas associadas. Daí a denominação. Observe-se que, de acordo com nossa definição de aplicação linear complexa, o determinante da matriz associada é diferente de zero. Logo, a matriz possui uma inversa, o que nos diz que a cada aplicação linear complexa f esta associada uma outra, f^{-1} , cuja composta com a f é a identidade. Conseqüentemente, toda aplicação linear é inversível, ou seja, é biunívoca e sobre.

Como a composição de aplicações do disco no disco ainda é uma aplicação do disco no disco, podemos concluir que a composição é uma operação em \mathcal{T} que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
2. a identidade $\lambda(z) = z$ funciona como a unidade desta operação, ou seja: $f \circ \lambda = \lambda \circ f = f$.
3. para cada elemento $f \in \mathcal{T}$ tem-se o elemento inverso f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \lambda$.

Um conjunto com uma operação que satisfaz a tais propriedades é denominado de *grupo*. Seu estudo é um dos capítulos mais importantes da Álgebra.

Define-se como *razão cruzada* de quatro pontos z_0, z_1, z_2 e z_3 ao número

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_0}.$$

O seguinte lema tem demonstração elementar.

Lema 68 *Razões cruzadas são invariantes por transformações lineares complexas.*

Diz-se que uma transformação f do plano no plano é *conforme* se sua diferencial preserva ângulos entre vetores. Isto significa que, se α e β são duas curvas que se interceptam em um dado ponto P formando um ângulo θ , as curvas $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ se interceptam no

ponto $f(P)$ formando o mesmo ângulo. Desde que, pela regra da cadeia, $f(\alpha)' = df(\alpha')$, uma condição suficiente (de fato necessária e suficiente) para a conformidade é que, em cada ponto do plano se tenha:

$$df(v) \cdot df(w) = \lambda(v \cdot w),$$

onde λ é um número real positivo e “ \cdot ” representa o produto escalar usual de vetores no plano euclidiano:

$$v \cdot w = v\bar{w},$$

onde $\bar{w} = w_1 - iw_2$ é o número complexo conjugado a $w = w_1 + iw_2$. Com esta condição, temos imediatamente que

$$\frac{df(v) \cdot df(w)}{|df(v)| |df(w)|} = \frac{v \cdot w}{|v| |w|}.$$

Segue-se, trivialmente, que f preserva ângulo entre curvas.

Lema 69 *As transformações lineares complexas são conformes.*

Prova. A maneira mais simples de tratar o cálculo de funções de variável complexa é fazendo a identificação de vetores do plano com números complexos. Com isto, o cálculo de diferenciais destas funções torna-se operacionalmente igual ao cálculo de diferenciais de funções de uma variável real. Assim, podemos escrever, para as funções lineares complexas $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, que

$$df_z(v) = \frac{(ad - bc)v}{(cz + d)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} df_z(v) \cdot df_z(w) &= \frac{(ad - bc)v}{(cz + d)^2} \frac{\overline{(ad - bc)w}}{\overline{(cz + d)^2}} \\ &= \frac{|ad - bc|^2}{|cz + d|^4} v\bar{w} \\ &= \lambda(v \cdot w), \end{aligned}$$

onde $\lambda = |ad - bc|^2 / |cz + d|^4$. Isto completa a demonstração. \square

Exercícios

1. Considere a identificação do plano complexo, ao qual se adicionou um ponto no infinito, com a esfera unitária. Obtenha a expressão correspondente de uma transformação linear complexa como uma transformação da esfera na esfera.
2. Prove que uma transformação linear complexa, que não seja a identidade, deixa, no máximo, dois pontos fixos.
3. Se o ponto ∞ for um ponto fixo de uma transformação linear complexa f , então ela é da forma $f(z) = az + b$. Se for o único ponto fixo então f é uma translação.
4. Prove que razões cruzadas são invariantes por transformações lineares complexas.
5. Determine uma transformação linear complexa que transforme o interior do círculo unitário no semiplano $x > 0$. Determine sua transformação inversa.
6. Mostre que dois círculos disjuntos podem sempre ser transformados, por uma transformação linear complexa, em dois círculos concêntricos.

8.5 A prova do teorema principal

Prova. (*Axiomas de conexão*) Dados dois pontos de Δ , se eles estão sobre uma reta que passa no centro de ξ , o segmento de reta euclidiana unindo os dois é também o segmento de reta hiperbólica. Caso contrário, o Corolário (65) garante a existência de um único círculo ortogonal a ξ e passando pelos dois pontos. Assim, por dois “pontos” passa sempre uma única “reta”.

(*Axiomas de ordem*) É fácil ver que os axiomas de ordem valem nesta Geometria. De fato, como nossas “retas” são segmentos de reta ou arcos de círculo, dados três pontos em uma delas, é sempre possível dizer qual deles está entre os outros dois. Também é claro que nossas “retas” dividem o “plano” sempre em duas regiões.

(*Axiomas sobre ângulos*) Definimos o “ângulo” entre duas “retas” como o ângulo (euclidiano) entre suas tangentes no ponto de interseção. Portanto, a medição de ângulos é feita exatamente como na Geometria euclidiana e, portanto, obedece aos axiomas relativos a tais medições. Conseqüentemente, duas “retas” que se interceptam formam quatro ângulos, e os ângulos opostos pelo vértice são iguais. Faz sentido falar de “retas” perpendiculares. É um exercício provar que (na Geometria euclidiana) um, e somente um, círculo pode ser traçado passando por um ponto e perpendicular a dois círculos que se interceptam. Resolvido este exercício, obtemos uma prova euclidiana de que, por um “ponto”, podemos traçar uma, e somente uma, perpendicular a uma “reta” dada.

(*Axiomas sobre a medição de segmentos*) Vamos agora introduzir, na Geometria hiperbólica, a noção de comprimento de um “segmento”. Dado o “segmento” AB , sejam S e T os pontos do círculo ξ que são extremidades da “reta” que contém AB , nomeados como na figura acima. Definimos o comprimento do segmento AB como

$$l(AB) = \ln \left(\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \right) ,$$

onde AT , AS , BT , BS representam os comprimentos dos segmentos de reta euclidianos.

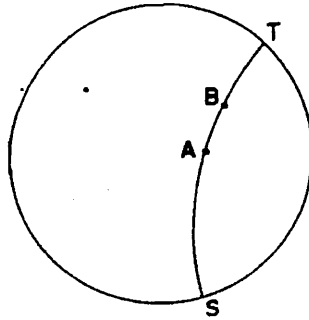


Figura 86

Proposição 70 *A função $l(AB)$ satisfaz às seguintes propriedades. Quaisquer que sejam os pontos A , B e C de Δ tem-se:*

- a) $l(AB) = l(BA)$,
- b) $l(AB) \geq 0$, e $l(AB) = 0$ se e só se $A = B$,
- c) $l(AB) \leq l(AC) + l(CB)$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, C for um ponto do segmento de reta hiperbólico ligando A a B ,
- d) o comprimento de uma semi-reta hiperbólica é sempre ∞ .

Prova. Vamos fazer primeiramente as provas dos itens (a), (b), e (d).

$$(a) \quad l(AB) = \ln \left(\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \right) = \ln \left(\frac{BS \cdot AT}{BT \cdot AS} \right) = l(BA).$$

(b) É imediato que $AT \geq BT$, $AS \leq BS$, portanto

$$\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \geq 1.$$

Conseqüentemente, $l(AB) \geq 0$. Além disto, é claro das desigualdades que a igualdade só pode ocorrer quando $A = B$.

(d) Determinar o comprimento de uma semi-reta hiperbólica é equivalente a considerar o limite de $l(AB)$, quando o ponto A tende para S , ou quando o ponto B tende para T . Nos dois casos, um dos termos no denominador da expressão definidora de $l(AB)$ vai para zero (enquanto os outros permanecem limitados), o que acarreta que o valor do logarítmo converge para infinito.

Vamos agora demonstrar o item (c). Para isto, utilizaremos nosso conhecimento sobre as transformações lineares complexas. Vamos utilizar aqui, inclusive, a notação introduzida na seção anterior. O seguinte resultado é uma conseqüência do Lema (68):

Corolário 71 *A função l é invariante por transformações lineares complexas.*

Com isto, queremos dizer que, dados pontos A e B de Δ e um elemento f de \mathcal{T} , tem-se sempre que

$$l(f(A)f(B)) = l(AB).$$

A prova deste fato é uma aplicação do Lema (68), após a simples observação de que

$$l(AB) = \ln(|(S, A, B, T)|).$$

Vamos utilizar este resultado para provar (c). Dados três pontos A , B e C de Δ , podemos sempre escolher um elemento f de \mathcal{T} que leva o ponto C no centro de Δ . Tal aplicação levará retas e círculos em retas ou círculos, e, por ser conforme, manterá invariantes as medidas dos ângulos. Então, qualquer círculo ou reta que passe por C e que seja perpendicular ao círculo ξ , será transformado em um círculo ou uma reta que passará pelo ponto O (centro de Δ) e que será ainda perpendicular ao círculo ξ . Conseqüentemente, esta imagem só poderá ser um diâmetro.

Assim, o triângulo hiperbólico ABC será transformado em um triângulo hiperbólico $A'B'O$ no qual os lados $A'O$ e $B'O$ são segmentos de diâmetros do círculo ξ . Como as medidas dos lados serão mantidas pela transformação, é suficiente provar a desigualdade triangular para o triângulo $A'B'O$. Designaremos as extremidades das retas que contêm os lados deste triângulo como na figura seguinte. Temos

$$\begin{aligned} l(OA') + l(OB') &= \ln \left(\frac{A'P OQ}{A'Q OP} \right) + \ln \left(\frac{B'R OS}{B'S OR} \right) \\ &= \ln \left(\frac{A'P B'R}{A'Q B'S} \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos que $OQ = OP = OS = OR$.

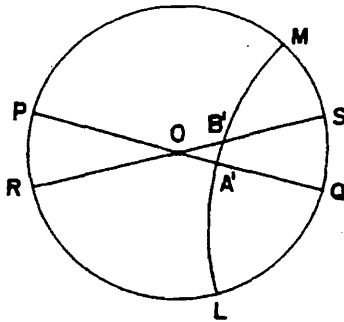


Figura 87

Por outro lado, os seguintes fatos são simples de verificação.

- Como $A'Q$ realiza a distância euclidiana do ponto A' ao círculo ξ , então, $A'Q \leq A'L$. Pela mesma razão, tem-se $B'S \leq B'M$.
- $A'P \geq A'M$ e que $B'R \geq B'L$.

Para mostrar que $A'P \geq A'M$, observe que PQM é um triângulo retângulo inscrito em uma semi-circunferência de centro O . Como o ponto A' pertence ao segmento OQ , o segmento MA' está contido no triângulo OMQ e, conseqüentemente,

$$P\widehat{M}A' \geq P\widehat{M}O = \widehat{P}.$$

Portanto, no triângulo PMA' tem-se $A'P \geq A'M$.

O argumento no outro caso é análogo.

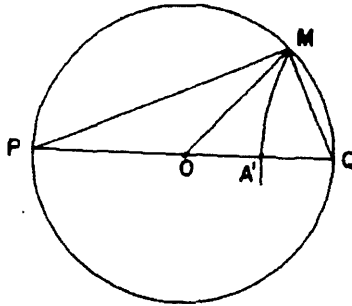


Figura 88

Segue-se, portanto, que

$$l(OA') + l(OB') \geq \ln \left(\frac{A'M}{A'L} \frac{B'L}{B'M} \right) = l(A'B').$$

Isto completa a demonstração da desigualdade triangular, restando investigar apenas o que ocorre no caso da igualdade. Retornando à nossa prova, vemos que só teremos igualdade quando $A'Q = A'L$, $B'S = B'M$, $A'P = A'M$ e $B'R = B'L$. Segue-se que, teremos igualdade se, e só se, $L = Q = R$ e $S = M = P$, ou seja, se os três pontos A' , B' e O forem colineares, localizando-se o ponto O entre os pontos A' e B' . Evidentemente, isto só ocorre quando A , B e C forem colineares localizando-se o ponto C entre A e B . Isto completa a demonstração de (c) e também a demonstração da Proposição (70), estabelecendo assim os axiomas sobre medição de segmentos. \square

(*Axioma das paralelas*) Dada uma “reta” m e um “ponto” A existem sempre, pelo menos, duas “retas” que passam pelo “ponto” A e que não interceptam m . De fato, se a “reta” m for um arco de círculo euclideo ξ_1 , ortogonal ao círculo ξ , e o “ponto” for o centro O de ξ , então, existem dois diâmetros de ξ que são tangentes a ξ_1 nos pontos onde ξ e ξ_1 se interceptam. Estes dois diâmetros são distintos, formando dois ângulos opostos pelo vértice, e constituem as duas “retas” que passam por O e não interceptam m .

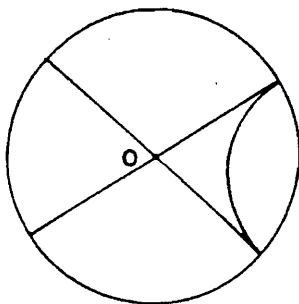


Figura 89

Se o ponto A não for o centro do círculo ξ , aplicamos uma transformação linear complexa que transforme o ponto A no centro O do círculo ξ . Esta transformação levará a “reta” m em outra “reta” m' , para a qual podemos aplicar o argumento acima. Aplicando agora a inversa da transformação linear complexa, voltamos à situação original. As “retas” que passam pela origem O são levadas em “retas” que passam pelo ponto A ; as “retas” que não interceptavam a “reta” m' são levadas em “retas” que não interceptam a “reta” m . Isto prova a nossa afirmação.

Concluimos assim a prova do Teorema (59). \square

Exercícios

Diretamente no modelo:

1. Prove que as retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto, formam ângulos iguais e agudos com a perpendicular baixada deste ponto à reta dada.
2. Prove que não existem triângulos semelhantes não congruentes.
3. Mostre que o ângulo de paralelismo é uma função decrescente. Determine seu domínio e imagem.
4. Mostre que a soma dos ângulos de um triângulo é menor do que 180 graus.
5. Mostre que o ângulo não reto de um quadrilátero de Lambert é agudo.
6. Determine a função ângulo de paralelismo.

Comentário

Com base nos primeiros quatro postulados de Euclides, aprendemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser sempre menor ou igual a dois ângulos retos. O caso da igualdade corresponde à Geometria euclidiana, e o outro, à Geometria hiperbólica. Entretanto, se alterarmos apenas um dos quatro primeiros postulados, torna-se possível a existência de Geometria em que a soma dos ângulos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.

A alteração é simples. Basta supor que por dois pontos passa sempre uma reta, não necessariamente única. Com isto, o Teorema do ângulo externo deixa de ser válido, já que a unicidade da reta passando por dois pontos é essencial na sua demonstração.

Para construir a nova Geometria tome, como quinto postulado, a afirmação seguinte: *duas retas sempre se interceptam*. Ou seja, nesta Geometria não existirão retas paralelas. O leitor é, então, desafiado a demonstrar o seguinte:

1. Dada uma reta m , duas retas que lhe sejam perpendiculares se interceptam formando dois triângulos isósceles.

(Não é possível decidir se estes dois triângulos têm ou não um vértice comum. Os dois casos correspondem a geometrias distintas. Suponha, como mais um axioma, que não têm vértices comuns).

2. Dada uma reta m , prove que todas as retas que lhe são perpendiculares passam por dois pontos distinguidos do plano. Denomine-os pólos associados a reta m .
3. Sejam O e O' os pólos associados à reta m . Mostre que todas as retas que passam pelo ponto O também passam por O' e interceptam a reta m perpendicularmente, determinando segmentos de igual comprimento entre O e m . Designe por r a medida comum de tais segmentos. Mostre que r independe da reta m , sendo, portanto, uma constante universal na Geometria.
4. Dadas retas m e n que se interceptam em um ponto O , marque sobre elas pontos que ficam à distância r do ponto O . Mostre que estes pontos estão sobre uma mesma reta ℓ , que é perpendicular a m e n . Conclua, então, que retas são curvas fechadas de comprimento $4r$.
5. Seja ABC um triângulo em que \hat{A} é um ângulo reto. Mostre que qualquer um dos outros dois ângulos é maior, menor ou igual a um ângulo reto se e só se o seu lado oposto é maior, menor ou igual a r .

6. Mostre que, em um quadrilátero de Saccheri, os ângulos do topo são obtusos. Conclua que a soma dos ângulos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.

Os exercícios anteriores se constituem em teoremas de uma Geometria mais conhecida como Geometria elíptica. O modelo mais simples desta Geometria pode ser construído tomando-se, como plano, a superfície de uma esfera e, como retas, os seus círculos máximos. Esta é uma Geometria muito útil, utilizada pelos navegadores do passado e do presente e na navegação aérea. As fórmulas de sua trigonometria eram conhecidas e utilizadas antes mesmo da descoberta da Geometria hiperbólica. Infelizmente, ela não era considerada como uma Geometria em si, mas apenas como um capítulo da Geometria euclidiana no espaço. Foi preciso o gênio de Riemann para que esta situação fosse revista.

George Friedrich Bernard Riemann nasceu em 1826 e viveu apenas quarenta anos. Em sua curta vida, publicou um número relativamente pequeno de trabalhos. Mas, cada um deles foi e é importante, e vários deles abriram campos de pesquisa inteiramente novos. Estudou em Göttingen, tendo sido o melhor aluno que Gauss teve em toda sua vida. Foi, depois, para Berlim, estudar com Dirichlet, Jacobi, Steiner e outros, retornando a Göttingen em 1850, para estudar Física e cursar doutorado. Sua tese, *As hipóteses sobre as quais se baseiam a Geometria*, defendida em 1854, é considerada o marco de criação do que hoje denominamos Geometria riemanniana. Nela, ele incorporou, em um único contexto, as geometrias hiperbólica, euclidiana (parabólica) e elíptica, e a Geometria diferencial, cujas bases haviam sido lançadas por Gauss, no seu famoso *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Mas Riemann foi muito mais longe, tendo eliminado as restrições de dimensão e as de caráter topológico, introduzindo a noção de métrica, para, a partir dela, deduzir todas as propriedades geométricas do espaço, e definindo o conceito de curvatura. Nos dias atuais, a contribuição de Gauss e de Riemann é parte das disciplinas: Geometria diferencial, Variedades e Geometria riemanniana, lecionados nos cursos de

Matemática.

Para concluir, devemos tocar em uma questão que, sem dúvida, já ocorreu ao leitor: qual destas geometrias melhor se aplica ao espaço físico? Estamos acostumados a utilizar a Geometria euclidiana; engenheiros e arquitetos certamente considerarão que a Geometria euclidiana e nenhuma outra é a mais adequada. Mas, devemos observar que, para figuras pequenas, a diferença entre os resultados obtidos pelas três geometrias são indistinguíveis dos erros causados pelos instrumentos de medida. Provamos isto comparando a Geometria hiperbólica com a euclidiana, mas o mesmo ocorre se compararmos a Geometria elíptica com a euclidiana. (Por isto mesmo, os antigos consideravam que a terra era plana!)

Que formulação do quinto postulado é válida no Universo é uma questão fora dos limites da Matemática. Só a experimentação e a mensuração podem respondê-la. Gauss fez alguns experimentos com triângulos muito grandes, na tentativa de determinar se a soma dos seus ângulos era menor, igual ou maior do que 180° . Seus resultados não foram conclusivos.

De fato, a Geometria de Euclides é a mais conveniente, pela sua simplicidade, para utilização pelo homem comum, pelos engenheiros, pelos agrimensores etc. Entretanto, as Geometrias hiperbólica e elíptica serveriam para o mesmo propósito. Nossas casas, pontes, rodovias, túneis, se manteriam se fossem construídos com base nestas geometrias. Entretanto, a navegação aérea e marítima continuará funcionando com base na Geometria elíptica, que é a mais adequada neste caso. Os físicos e os astrônomos, que lidam com distâncias cósmicas, ainda estão tentando responder a questão de qual geometria é a mais adequada ao entendimento do Universo. Até obterem uma resposta definitiva, continuarão utilizando a Geometria euclidiana, como base para seus cálculos.

Bibliografia

- [B] BARBARIN, P., *La Géométrie non euclidienne*, terceira edição, Collection Scientia, nº 15, Gauthier-Villars
- [Ba] BARBOSA, J.L.M., *Geometria euclidiana plana*, Coleção fundamentos da matemática elementar, Soc. Bras. de Mat., 1985.
- [Bo] BONOLA, R., *Non euclidean Geometry - A critical and historical study of its development*, Dover Publications, N.Y., 1955.
- [Bl] BOLYAI, J., *The science of absolute space*, trabalho original de Bolyai traduzido por George Bruce Halsted, incluído no livro de Bonola acima citado.
- [Bj] BOLYAI, J., *Appendix - The theory of space*, edited by F. Kárteszi, North-holland, N.Y., 1987.
- [C] COXETER, H.S.M., *Non euclidean geometry*, 8ª edição, University of Toronto Press, Toronto, 1965.
- [E] EUCLIDES, *Elements*, trabalho original de Euclides, incluído no livro de Heath, abaixo citado.
- [G] GANS, D., *An introduction to non-euclidean geometry*, Academic Press, N.Y., 1973.
- [Gr] GREENBERG, M. J., *Euclidean and non-euclidean geometries - development and history*, W. H. Freeman and Co., S. Francisco, 1973.

- [HT] HEATH, T.L., *The thirteen books of Euclid's elements*, tradução do texto de Heiberg, com introdução e comentários por Heath, vol. 1, Dover Publications, N.Y., 1956.
- [Hi] HILBERT, D., *The foundations of Geometry*, traduzido por E.J. Townsend, The Open Court Publishing Co, Chicago 1902, ou *Grundlagen der Geometrie*, quinta edição, Leipzig e Berlin, 1922.
- [L] LOBACHEVSKY, N.I., *The theory of parallels*, trabalho original de Lobachevsky traduzido por George Bruce Halsted, incluído no livro de Bonola acima citado.
- [M] MARTIN, G. E., *The foundations of Geometry and the non-euclidean plane*, Springer-Verlag, N.Y., 1975.
- [R] ROSENFELD, B. A., *A history of non-euclidean geometry*, Springer-Verlag, N.Y., 1980.
- [V] VERRIEST, G., *Introduction a la Géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire*, Gauthier-Villars, 1951.
- [W] WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1945.

Índice

A

- abscissa, 126
- ângulo de paralelismo, 66, 74, 138
 - distância associada, 66
- ângulo,
 - externo, 11
 - de um quadrilátero de Lambert, 69
 - de um quadrilátero de Saccheri, 67
- Apêndice, 44
- arcos correspondentes 105, 115
 - razão entre, 118
- área, 107
 - de um polígono, 111
 - de um triângulo, 30, 111
- Axioma de Pasch
 - triângulos generalizados, 61

B

- Barreils, 48
- Bernoulli, 29
- Bolyai, 111, 142
- Bolyai, J., 45, 50, 115
 - carta a W. Bolyai, 46
- Bolyai, W., 44, 50
- Boreli, 25

C

- círculos, 96, 102
 - eixo radical, 152
 - ortogonais, 150, 152
- Cataldi, 25
- Clavio, 25
- Comandino, 25
- comprimentos
 - na Geometria hiperbólica, 159
 - complementares, 129
- congruência de
 - curvas eqüidistantes, 104
 - horocírculos, 102
 - quadriláteros de Lambert, 76

- quadriláteros de Saccheri, 76
- triângulos generalizados, 63, 64
- coordenadas complexas, 154
- curva eqüidistante, 103
 - corda, 104
 - ramos, 105

D

- Dedekind
 - axioma de, 3
- defeito
 - de um quadrilátero, 108
 - de um triângulo, 76, 108

E

- eixo radical, 152
- Elementos de Euclides, 1, 4-5, 7, 20, 23-24, 26
- equação da reta
 - paralela a dois eixos, 128
- Euclides, 1, 4, 19-20, 27-28, 33

G

- Gauss, 41, 45, 49, 111
 - Carta a W. Bolyai, 47
- Geometria Euclidiana, 10, 33
 - fundamentos da, 1
- Geometria hiperbólica, 51
 - ângulo de paralelismo, 142
 - constante universal, uma das, 122
 - descoberta, 41
 - figura importante da, 122
 - Lei dos co-senos, 136
 - postulados, 51
 - quinto postulado, 51
 - sistema de coordenadas, 126
 - Teorema de Pitágoras, 133
 - um modelo da, 149
 - unidade de comprimento, 119
- Geometria não euclidiana
 - vide Geometria hiperbólica,

H

- Hilbert, 4
- Hindenburg, 29
- homotetias, 154
- horocírculos, 102
 - concêntricos, 105, 115
 - corda, 104
 - equação do, 127
 - quadrilátero inscrito, 105
 - raio, 102, 105
 - reta tangente, 103-104
- horoesferas, 115

I

- inversão, 155

K

- Kant, 44
- Klügel, 29

L

- Labert, 29, 33, 42, 69
 - observações de, 30
 - quadrilátero de, 29, 69
 - Theorie der Parallellinien, 29
- Legendre, 26, 33
- Lei dos co-senos, 136, 143
- Lei dos senos, 135, 143
- Lobachewsky, 26, 48, 115, 142

M

- Mediatriz, 79
- modelo da Geometria hiperbólica
 - axioma das paralelas, 163
 - axiomas de conexão, 158
 - axiomas de ordem, 158
 - axiomas sobre ângulos, 158
 - medição de segmentos, 159

N

- Nasiredin, 23, 27, 33
- noções comuns, 2

O

- ordenada, 126

P

- paralela
 - à direita, 55
 - à esquerda, 55
 - construção de uma, 87
 - na Geometria Euclídiana, 5
 - na Geometria hiperbólica, 54
 - propriedades, 55
 - paralelismo
 - na Geometria Euclídiana, 6
 - ângulo de, 66
 - na Geometria hiperbólica, 52
 - Pasch
 - axioma de, 3
 - Playfair
 - axioma de, 9
 - pontos
 - correspondentes, 97, 102
 - ideais, 59, 79
 - ordinários, 59
 - potência de, 151
 - ultra-ideais, 79
 - Postulados de Euclides, 2
 - Proclus, 19-20, 22, 33
 - Comentários de, 25
 - Ptolomeu, 20, 22
- Q**
- quadrilátero de Lambert, 69, 87
 - ângulo de um, 69
 - associado a um triângulo retângulo, 94
 - relações entre as partes, 91
 - quadrilátero de Saccheri, 24, 67
 - ângulos do topo, 67
 - associado a um triângulo, 107
 - base de um, 67
 - congruência, 76
 - lados de um, 67
 - perpendicular a base ao topo, 68
 - topo de um, 67
 - quinto postulado
 - da Geometria euclídiana, 2, 5, 7, 9, 16, 20, 22, 23-24, 26, 27, 29, 33, 42
 - da Geometria hiperbólica, 51
 - tentativas de prova, história, 19

R

- razão cruzada, 157
- retângulo, 24
- retas
 - concorrentes, 83
- eqüidistantes, 15, 22
 - paralelas, 84, 98
 - perpendicular comum, 77
 - que não se interceptam, 77, 86
 - variação de distância entre, 82
- Riemann, 26, 30

S

- Saccheri, 26, 29, 33, 42
 - Logica Demonstrativa, 27
 - quadrilátero de, 27, 67
 - resultados de, 27
- Schumacher
 - carta de Gauss, 44
- soma dos ângulos
 - de um triângulo Euclidiano, 11
 - de um quadrilátero, 73
 - de um quadrilátero euclidiano, 14
 - de um triângulo, 72
 - de um triângulo euclidiano, 14
- substitutos do quinto postulado, 9

T

- Taurinus
 - carta de Gauss, 42
- Tentamen, 45
- Teorema de Pitágoras, 143
 - na Geometria hiperbólica, 133
- Teorema do ângulo externo, 3, 5
 - em triângulo generalizado, 62
- transformação conforme, 157
- transformações lineares complexas, 154
 - composição, 155
 - diferencial, 158
 - do disco no disco, 156
 - homotetias, 154
 - inversão, 155
 - matriz associada, 156
 - translações, 154
- triângulos generalizados, 59
 - ângulos externos, 61
 - ângulos internos, 61
 - axioma de Pasch, 60

- congruência, 63, 73
- pontos exteriores, 60
- pontos interiores, 60
- propriedades de um, 60
- teorema do ângulo externo, 62
- vértices de um, 60

- triângulo retângulo
 - associado a, 95
 - defeito de um, 76
 - maximal, 111
 - mediatrizes dos lados de, 79
 - relações entre as partes, 90
 - resolução de, 131, 134
 - semelhantes, 25
 - soma dos ângulos, 24, 33, 36-38, 42, 72
- triângulos semelhantes, 13
- trigonometria hiperbólica, 127, 131, 143
 - fórmulas gerais, 143
 - Lei dos Senos, 135

U

- unidade de comprimento
 - na Geometria hiperbólica, 119

V

- Vitale, 25

W

- Wallis, 25, 27, 33

