



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Um estudo dos Modelos da Geometria Hiperbólica

**José Messias Magalhães**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática como requisito  
parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. Wladimir Seixas**

**2015**

516.9 Magalhães, José Messias  
M188e Um estudo dos modelos da geometria hiperbólica / José  
Messias Magalhães. - Rio Claro, 2015  
63 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Wladimir Seixas

1. Geometria não-euclidiana. 2. Fundamentos de  
geometria. 3. Modelos da geometria hiperbólica. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

José Messias Magalhães  
UM ESTUDO DOS MODELOS DA  
GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
Orientador

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin  
Departamento de Matemática - UFSCar

Prof. Dr. João Peres Vieira  
Departamento de Matemática - Unesp

**Rio Claro, Agosto de 2015**

# Agradecimentos

Primeiramente a DEUS criador do universo e responsável por tudo que somos e tudo que temos;

Aos meus pais (in memoriam) pelos cuidados e por terem me ajudado nos primeiros passos;

À minha esposa que sempre está ao meu lado, me ajudando e fazendo o seu melhor para realização dos meus sonhos;

Ao Professor Dr. Wladimir Seixas, mais do que meu professor, mais do que meu orientador, um grande amigo, que com todo seu profissionalismo, dedicação e paciência ajudou-me de uma forma decisiva na condução e execução desta dissertação;

Ao corpo docente do Programa de Pós Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Unesp, Campus de Rio Claro, em particular, ao Professor Dr. João Peres Vieira, por todo apoio durante minha trajetória nesta Universidade;

À Professora Dra. Eliris Cristina Rizziolli por suas sugestões e correções para a melhoria deste trabalho no Exame de Qualificação;

Ao membros da banca examinadora, professores Dra. Yuriko Yamamoto Baldin e Dr. João Peres Vieira pelos comentários, explicações, sugestões e correções na redação final deste trabalho;

Ao Corpo Administrativo do Departamento de Matemática, em especial a secretária Sra. Inajara por todo apoio dado durante a realização do curso de mestrado;

Aos meus filhos Júnior, Josevan e Joelson pela presença todas as vezes que precisei;

Às minhas noras Gisele e Jana por todo apoio dado;

Aos meus netinhos Marina, Jones, Josielle e Letícia que com suas inocências serviram de incentivo e apoio durante a realização deste trabalho;

Aos meus irmãos, em particular à Jacira que sempre me incentivou na busca de meus objetivos;

Aos meus colegas de turma pelas tantas vezes que estudamos juntos.

*A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.*

Bertrand Russel

*Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que uma geração estabeleceu, a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.*

Hermann Hankel

*Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que a outra; poderá ser apenas mais cômoda.*

Henri Poincaré

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo introduzir os conceitos e os principais resultados da Geometria Hiperbólica, entre eles a não existência de retângulos. Verifica-se assim que as diferenças entre as geometrias euclidiana e hiperbólica se dá pela negação do Quinto Axioma de Euclides ou, como é conhecido, o Axioma das paralelas de Euclides. Na parte final deste trabalho abordaremos três principais modelos da Geometria Hiperbólica: o Disco de Beltrami-Klein, o Disco de Poincaré e o Semiplano de Poincaré. Demonstraremos também que estes modelos são isomorfos.

**Palavras-chave:** Geometria não-euclidiana, Fundamentos de Geometria, Modelos da Geometria Hiperbólica.

# Abstract

The aim of this dissertation is to introduce the main concepts and results of hyperbolic geometry including the non-existence of rectangles. This statement is one of the many differences between Euclidean geometry and Hyperbolic geometry from the negation of the Fifth Axiom of Euclid or as it is known, the Axiom of parallel of Euclid. In the final part of this work we shall cover three main models of Hyperbolic Geometry: Beltrami-Klein, Poincaré Disk and the Poincaré Half Plane. We also demonstrate that these models are isomorphic.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry, Foundations of Geometry, Models of Hyperbolic Geometry.

# Lista de Figuras

2.1	$A$ e $D$ pontos distintos sobre uma reta $l$ com $B$ e $E$ em lados opostos de $l$ .	15
2.2	Ângulos alternos internos congruentes $\Rightarrow$ retas paralelas. . . . .	20
2.3	$D$ e $C$ estão no mesmo semiplano limitado por $t$ . . . . .	20
2.4	$D$ e $C$ estão em semiplanos opostos limitados por $t$ . . . . .	21
2.5	Ângulos correspondentes congruentes $\Rightarrow$ retas paralelas. . . . .	21
3.1	Ângulos correspondentes. . . . .	23
3.2	Ângulos do triângulo. . . . .	23
5.1	Construção de retas no Semiplano de Poincaré. . . . .	30
5.2	Retas paralelas à uma reta dada passando pelo ponto $P$ fora da reta dada.	33
5.3	Retas paralelas à uma reta dada passando pelo ponto $P$ fora da reta dada.	41
5.4	Construção de retas no Disco de Poincaré. . . . .	42
5.5	Medida de ângulo no Disco de Poincaré. . . . .	44
5.6	Triângulo no Disco de Poincaré definido pelos pontos $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	44
5.7	Pontos ideais no Disco de Poincaré. . . . .	45
5.8	Retas paralelas assintóticas. . . . .	46
5.9	Um triângulo assintótico. . . . .	46
5.10	Exemplos de retas no Disco de Beltrami-Klein. . . . .	51
5.11	Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein e Disco de Poincaré. Fonte: Venema [1, p. 297] - Adaptado pelo autor. . . . .	56
5.12	Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré. Fonte: Venema [1, p. 299] - Adaptado pelo autor . . . . .	58
5.13	Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein, Semiplano de Poincaré e Disco de Poincaré. . . . .	61

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Geometria Neutra</b>	<b>11</b>
2.1	Termos não definidos, definições e axiomas da Geometria Neutra . . . . .	11
2.2	Principais resultados da Geometria Neutra . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Geometria Euclidiana</b>	<b>22</b>
3.1	Termos não definidos, definições e axiomas da Geometria Euclidiana . . . . .	22
3.2	Principais resultados da Geometria Euclidiana . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Geometria Hiperbólica</b>	<b>26</b>
4.1	Principais resultados da geometria hiperbólica . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Modelos para a Geometria Hiperbólica</b>	<b>28</b>
5.1	Modelo cartesiano do plano euclidiano . . . . .	29
5.2	Modelo do Semiplano de Poincaré . . . . .	30
5.2.1	Retas e semiplanos . . . . .	30
5.2.2	Distância . . . . .	31
5.2.3	Medida de ângulo . . . . .	32
5.2.4	Verificação da validade dos Axiomas da Geometria Hiperbólica . . . . .	32
5.2.5	A geometria analítica no Semiplano de Poincaré . . . . .	34
5.3	O Modelo do Disco de Poincaré . . . . .	41
5.3.1	Retas e semiplanos . . . . .	41
5.3.2	Distância . . . . .	43
5.3.3	Medida de ângulo . . . . .	43
5.3.4	A geometria analítica no Disco de Poincaré . . . . .	46
5.4	O modelo do Disco de Beltrami-Klein . . . . .	50
5.4.1	Distância . . . . .	51
5.4.2	Medida de ângulo . . . . .	52
5.5	Isomorfismos entre os modelos da Geometria Hiperbólica . . . . .	52
5.5.1	A projeção estereográfica . . . . .	53
5.5.2	Isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Disco de Poincaré . . . . .	56

5.5.3	Isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>62</b>
	<b>Referências</b>	<b>63</b>

# 1 Introdução

Esta dissertação tem como objetivo introduzir os conceitos e principais resultados da Geometria Hiperbólica, bem como o estudo de seus modelos.

Para falarmos na Geometria Hiperbólica, precisamos antes falar na Geometria Euclidiana. A Geometria Euclidiana foi apresentada para toda a humanidade de uma maneira brilhante por Euclides (300 aC), em seus treze livros intitulados Os Elementos [2].

Nenhum matemático teve por objetivo descobrir a Geometria Hiperbólica. Sua descoberta foi o resultado do esforço de muitos matemáticos em tentarem demonstrar que o quinto axioma de Euclides (Axioma das paralelas euclidianas) não era axioma e sim poderia ser demonstrado a partir de outros axiomas. Esses matemáticos acreditavam que o quinto Axioma de Euclides era um teorema. Da obsessão por essa demonstração, cujo final foi frustrante, teve como compensação a descoberta de uma outra geometria, a chamada Geometria Hiperbólica. Os méritos desta descoberta devem-se principalmente aos matemáticos Nicolái Ivánovich Lobachevsky (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860).

Dividimos este trabalho em quatro partes.

Na primeira parte abordaremos a Geometria Neutra, que constitui o núcleo comum para as duas geometrias, apresentando os seus axiomas, definições, além de seus principais teoremas e corolários.

Na segunda parte trataremos da Geometria Euclidiana enunciando o axioma das paralelas. Discutiremos também os principais teoremas e os teoremas que são equivalentes ao axioma das paralelas euclidianas. Demonstraremos também o Teorema que é a fronteira que separa as Geometrias Neutra, Euclidiana e Hiperbólica.

Na terceira parte a Geometria Hiperbólica é apresentada com alguns resultados que são diretamente dependentes do Axioma das paralelas hiperbólicas. O principal deles é o da não existência de retângulos, ou ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é sempre menor do que 180.

E finalmente, na quarta parte discutiremos os três modelos da Geometria Hiperbólica, são eles, o Semiplano de Poincaré, o Disco de Poincaré e o Disco de Beltrami-Klein. Em todos os modelos estudados faremos também a geometria analítica correspondente. Por fim, construiremos os isomorfismos entre os três modelos.

## 2 Geometria Neutra

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados que caracterizam a chamada Geometria Neutra ou Absoluta. O texto de Venema [1] serviu como referência principal para as definições e enunciados aqui expostos.

Um sistema axiomático é composto por:

- Termos não definidos e relações denominados conceitos primitivos.
- Definições baseadas nos conceitos não definidos ou previamente definidos e que podem ser introduzidos assim que necessários.
- Axiomas baseados nos conceitos não definidos ou previamente definidos e que atuam como restrições.
- Lemas, proposições e teoremas que são afirmações verdadeiras deduzidas a partir dos axiomas.
- As afirmações verdadeiras deduzidas como consequências de teoremas são denominadas corolários.

Um sistema axiomático tem por propriedades desejáveis:

- Ser consistente, isto é, não deve conter contradições.
- Ser completo, ou seja, todos os teoremas devem ser derivados a partir do sistema de axiomas.
- Ser independente, isto é, nenhum axioma pode ser provado a partir de outros.

### 2.1 Termos não definidos, definições e axiomas da Geometria Neutra

Existem dois termos não definidos: ponto e reta. O desenvolvimento da teoria faz uso da linguagem e a notação da Teoria de Conjuntos e utiliza os resultados da Lógica Clássica. Também consideraremos válidos todos os resultados dos números reais  $\mathbb{R}$  como corpo ordenado e completo.

**Axioma 2.1** (da existência). *Existem pelo menos dois pontos distintos.*

Os pontos serão denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino,  $A, B, C, \dots$

**Axioma 2.2** (do conjunto). *Cada reta é um conjunto de pontos.*

As retas serão denotadas utilizando-se letras minúsculas do alfabeto latino,  $r, s, t, \dots$

**Axioma 2.3** (da incidência). *Para cada par de pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe exatamente uma reta  $r$  de tal modo que ambos os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem a  $r$ .*

Denota-se também por  $\overleftrightarrow{PQ}$  a reta que é determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$ .

**Axioma 2.4** (da distância). *Para cada par de pontos  $P$  e  $Q$ , a distância de  $P$  a  $Q$ , denotada por  $d(P, Q)$ , é um número real não negativo e determinado unicamente por  $P$  e  $Q$ .*

**Definição 2.1.** *Três pontos distintos  $P, Q$  e  $R$  são ditos colineares se existe uma reta  $r$  tal que  $P, Q$  e  $R$  pertencem a  $r$ . Caso contrário, os pontos são ditos não colineares.*

**Definição 2.2.** *Sejam  $P, Q$  e  $R$  pontos distintos. O ponto  $Q$  é dito **estar entre** os pontos  $P$  e  $R$  se:*

(i)  $P, Q$  e  $R$  são colineares.

(ii)  $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ .

Denota-se por  $P * Q * R$  se o ponto  $Q$  está entre  $P$  e  $R$ . É imediato que se  $P * Q * R$  então  $R * Q * P$ .

**Definição 2.3.** *Dados  $P$  e  $Q$  pontos distintos. O conjunto  $\overline{PQ} = \{P, Q\} \cup \{X \mid P * X * Q\}$  é denominado de segmento de reta que liga os pontos  $P$  e  $Q$ .*

No segmento de reta  $\overline{PQ}$  os pontos  $P$  e  $Q$  serão denominados **extremos** do segmento.

**Definição 2.4.** *Dois segmentos  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$  são ditos **segmentos congruentes** se  $d(P, Q) = d(R, S)$ .*

Denota-se por  $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$  a congruência entre os segmentos  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$ .

**Axioma 2.5** (da régua). *Para cada reta  $r$ , existe uma função bijetora  $f : r \rightarrow \mathbb{R}$ , com a propriedade de que para quaisquer dois pontos  $P$  e  $Q \in r$ , temos  $d(P, Q) = |f(Q) - f(P)|$ .*

Qualquer função que satisfaça o Axioma 2.5 será denominada de função coordenada para  $r$ .

**Definição 2.5.** *Se  $r$  é uma reta, os **lados** de  $r$  são dois conjuntos disjuntos não vazios de pontos, cuja união é o conjunto de todos os pontos do plano que não estão em  $r$ .*

**Definição 2.6.** Um conjunto de pontos  $S$  é dito **conjunto convexo** se para todo par de pontos  $A$  e  $B$  em  $S$ , o segmento de reta  $\overline{AB}$  está inteiramente contido em  $S$ .

**Axioma 2.6** (da separação do plano). Para toda reta  $r$ , os pontos que não estão em  $r$  definem dois conjuntos disjuntos, não vazios,  $H_r^+$  e  $H_r^-$  chamados de semiplanos limitados por  $r$  tais que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $H_r^+$  e  $H_r^-$  são convexos.
- (ii) Se  $P \in H_r^+$  e  $Q \in H_r^-$  então  $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$ .

**Definição 2.7.** Dados  $P$  e  $Q$  pontos distintos. O conjunto  $\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ} \cup \{X \mid P * Q * X\}$  é denominado de semirreta de origem  $P$  passando por  $Q$ .

**Definição 2.8.** Sejam duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  distintas de mesma origem  $O$ . Se os pontos  $A$ ,  $O$  e  $B$  são colineares tais que  $A * O * B$  diz-se que  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são semirretas opostas. Caso os três pontos não sejam colineares diz-se que as semirretas são não opostas.

**Definição 2.9.** A união de duas semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  não opostas, que têm o mesmo ponto inicial  $O$ , é chamado de **ângulo**.

O ângulo é denotado por  $\angle POQ$  ou  $\angle QOP$ . O ponto  $O$  é chamado vértice do ângulo e as semirretas são chamadas de lados do ângulo.

**Definição 2.10.** Sejam três pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$  tais que as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  são não opostas. O **interior** do ângulo  $\angle POQ$  é dado pela interseção do semiplano limitado pela reta  $\overleftrightarrow{OP}$  que contém o ponto  $Q$  com o semiplano limitado pela reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  que contém o ponto  $P$ .

**Definição 2.11.** A semirreta  $\overrightarrow{OQ}$  está entre as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OR}$  se o ponto  $Q$  está no interior do ângulo  $\angle POR$ .

**Axioma 2.7** (do transferidor). Para todo ângulo  $\angle POQ$  existe um número real denotado por  $m(\angle POQ)$  tal que:

- (i)  $0 \leq m(\angle POQ) < 180$ .
- (ii)  $m(\angle POQ) = 0$  se, e somente se,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ .
- (iii) (Construção do ângulo) Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \alpha < 180$ , e para cada um dos semiplanos  $H$  limitados pela reta  $\overleftrightarrow{OP}$  existe uma única semirreta  $\overrightarrow{OQ}$  com  $Q \in H$  tal que  $m(\angle POQ) = \alpha$ .

**Axioma 2.8** (adição de ângulos). Se a semirreta  $\overrightarrow{OQ}$  está entre as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OR}$  então

$$m(\angle POQ) + m(\angle QOR) = m(\angle POR).$$

**Definição 2.12.** *Dois ângulos  $\angle POQ$  e  $\angle RST$  são ditos **ângulos congruentes** se  $m(\angle POQ) = m(\angle RST)$ .*

Denota-se por  $\angle POQ \cong \angle RST$  a congruência entre os ângulos  $\angle POQ$  e  $\angle RST$ .

**Definição 2.13.** *Sejam três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares. O triângulo  $\Delta ABC$  é a união dos três segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , isto é*

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}.$$

No triângulo  $\Delta ABC$  os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  serão denominados **vértices**, os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  de **lados** do triângulo  $\Delta ABC$  e os ângulos  $\angle CAB$ ,  $\angle ABC$  e  $\angle BCA$  de **ângulos internos**.

**Definição 2.14.** *Dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta PQR$  são ditos **congruentes** se existe uma correspondência biunívoca entre os vértices do primeiro triângulo e os vértices do segundo triângulo tais que os lados e ângulos correspondentes são congruentes.*

Denota-se por  $\Delta ABC \cong \Delta PQR$  a congruência entre os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta PQR$ .

**Axioma 2.9** (Congruência Lado Ângulo Lado - LAL). *Se dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta PQR$  são tais que  $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ ,  $\angle ABC \cong \angle PQR$  e  $\overline{BC} \cong \overline{QR}$  então,  $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ .*

## 2.2 Principais resultados da Geometria Neutra

**Teorema 2.1.** *Se  $l$  e  $m$  são retas distintas, não paralelas, então existe um único ponto  $P$  tal que  $m \cap l = P$ .*

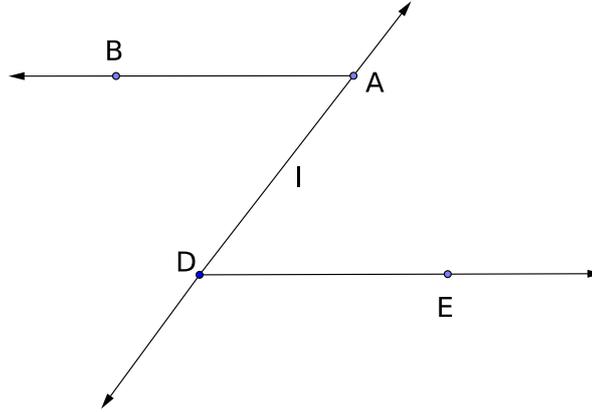
*Demonstração.* De fato, como por hipótese  $l$  e  $m$  não são paralelas então  $m \cap l \neq \emptyset$ . Suponhamos por absurdo que  $m \cap l = \{P, Q\}$  com  $P \neq Q$ . Pelo Axioma 2.3 a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  é única. Logo,  $l = m$  o que contradiz a hipótese de que  $l$  e  $m$  são distintas.  $\square$

**Lema 2.1.** *Sejam  $l$  uma reta e  $A$  um ponto qualquer sobre  $l$ . Seja  $B$  um ponto não pertencente a  $l$ . Se  $C$  é um ponto sobre a semirreta  $\overrightarrow{AB}$  e  $C \neq A$ , então  $B$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $l$ .*

*Demonstração.* Devemos provar que  $\overline{BC} \cap l = \emptyset$ . Existem dois casos a serem considerados:  $A * C * B$  ou  $A * B * C$ . Se  $A * C * B$  então  $A$  não está entre  $B$  e  $C$ , logo  $A$  não está sobre o segmento  $\overline{BC}$ . Pelo Teorema 2.1 as retas  $l$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  têm somente o ponto  $A$  em comum. Mas  $A$  não está sobre o segmento, logo  $\overline{BC} \cap l = \emptyset$ . Analogamente, se  $A * B * C$  então  $B$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $l$  (argumento anterior trocando os pontos  $B$  e  $C$  de posição).  $\square$

**Teorema 2.2.** *Sejam  $l$  uma reta e  $A$  e  $D$  pontos distintos sobre  $l$ . Se  $B$  e  $E$  são pontos que estão em lados opostos de  $l$ , então  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.1 as semiretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DE}$ , exceto seus extremos estão em semiplanos opostos definidos pela reta  $\overleftrightarrow{AD}$ . Ver figura 2.1.



**Figura 2.1:**  $A$  e  $D$  pontos distintos sobre uma reta  $l$  com  $B$  e  $E$  em lados opostos de  $l$ .

Pelo axioma 2.6 os semiplanos definidos por  $l$  são disjuntos. Portanto, o único ponto que as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DE}$  poderiam se interceptar seria em seus pontos extremos. Mas isso contraria a hipótese de que os pontos extremos são distintos.  $\square$

O teorema a seguir é um exemplo de um resultado que historicamente foi apresentado como um axioma. Este teorema é conhecido como Axioma de Pasch. Provaremos que este resultado é uma consequência do Axioma 2.6 (Separação do Plano). De fato, a prova revela que este teorema é uma reafirmação de parte do Axioma da Separação do Plano com uma terminologia diferente.

**Teorema 2.3.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $l$  uma reta tal que nenhum dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertença a  $l$ . Se  $l$  intercepta um dos lados do triângulo, então  $l$  também intercepta um dos seus outros dois lados.*

*Demonstração.* Sejam  $H_l^+$  e  $H_l^-$  os semiplanos determinados por  $l$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $l$  intercepta o lado  $AB$ . Desta forma, os pontos  $A$  e  $B$  estão em semiplanos opostos determinados por  $l$ , ou seja  $A \in H_l^+$  e  $B \in H_l^-$ . Segue que, ou  $C \in H_l^+$  ou  $C \in H_l^-$ . Se  $C \in H_l^+$  então  $\overline{CB} \cap l \neq \emptyset$ . Se  $C \in H_l^-$  então  $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$ .  $\square$

**Definição 2.15.** *Dois ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle DAC$  formam um **par linear** se as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são semirretas opostas.*

**Teorema 2.4.** *Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos não colineares tais que os pontos  $C$  e  $D$  pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Então,  $m(\angle BAD) < m(\angle BAC)$  se, e somente se, a semireta  $\overrightarrow{AD}$  está entre as semiretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .*

*Demonstração.* Sejam os pontos  $A, B, C$  e  $D$  tais que satisfazem a hipótese do enunciado.

[ $\Leftarrow$ ] Suponhamos que a semireta  $\overrightarrow{AD}$  está entre as semiretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Pelo Axioma 2.8,

$$m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = m(\angle BAC).$$

Como  $m(\angle DAC) > 0$  então  $m(\angle BAD) < m(\angle BAC)$ .

[ $\Rightarrow$ ] Pela contra-positiva, suponhamos que a semireta  $\overrightarrow{AD}$  não está entre as semiretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Se  $D \in \overrightarrow{AC}$  então  $m(\angle BAD) = m(\angle BAC)$ . Por outro lado, se  $D \notin \overrightarrow{AC}$  então  $C$  está no interior do ângulo  $\angle BAD$ . Logo,  $m(\angle BAD) > m(\angle BAC)$ . Portanto,  $m(\angle BAD) \geq m(\angle BAC)$ .

□

**Teorema 2.5** (do par linear). *Se os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle DAC$  formam um par linear, então*

$$m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = 180.$$

*Demonstração.* Por hipótese, os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle DAC$  formam um par linear. Assim, as semiretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são semiretas opostas. Por tricotomia, temos que  $m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$  ou é menor que 180 ou é igual a 180 ou é maior que 180. Por contradição, suponhamos que  $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) < 180$ . Pelo Axioma 2.7 (iii), existe um ponto  $E$  no mesmo semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AC}$  que contém o ponto  $D$ , tal que  $m(\angle BAE) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$ . Pelo Teorema 2.4 o ponto  $D$  está no interior do  $\angle BAE$ . Pelo Axioma 2.8,  $m(\angle BAD) + m(\angle DAE) = m(\angle BAE)$ . Assim,  $m(\angle DAE) = m(\angle DAC)$ . Por outro lado, o ponto  $E$  está no interior  $\angle(DAC)$ . Aplicando novamente o Axioma 2.8,  $m(\angle DAE) + m(\angle EAC) = m(\angle DAC)$ . Portanto,  $m(\angle EAC) = 0$ , o que contradiz os itens (i) e (ii) do Axioma 2.8.

Por contradição, suponhamos que  $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) > 180$ . Seja o ponto  $F$  no mesmo semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AC}$  que contém o ponto  $D$ , tal que  $m(\angle BAF) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC) - 180$ . Pelo item (i) do Axioma 2.7,  $m(\angle DAC) < 180$ . Assim,  $m(\angle BAF) < m(\angle BAD)$ . Pelo Teorema 2.4 o ponto  $F$  está no interior do  $\angle BAD$ . Logo, pelo Axioma 2.8,  $m(\angle BAF) + m(\angle FAD) = m(\angle BAD)$ . Assim,  $m(\angle FAD) = 180 - m(\angle DAC)$ . Por outro lado, o ponto  $D$  está no interior  $\angle(FAC)$ . Aplicando novamente o Axioma 2.8,  $m(\angle FAD) + m(\angle DAC) = m(\angle FAC)$ . Portanto,  $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) > 180$ , o que contradiz o item (i) do Axioma 2.8. □

**Definição 2.16.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Seus ângulos  $\angle ABC$ ,  $\angle BCA$ ,  $\angle CAB$  são chamados ângulos internos ou simplesmente ângulos do triângulo.*

**Definição 2.17.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Um ângulo que forme um par linear com um dado ângulo interno será denominado **ângulo externo** do triângulo.*

Observe que o triângulo possui três ângulos internos e seis ângulos externos.

**Definição 2.18.** *Dois ângulos quaisquer são ditos suplementares se a soma das respectivas medidas dos ângulos é igual a 180.*

O ângulo interno formado pelos lados do triângulo que deram origem ao ângulo externo é chamado de ângulo adjacente do ângulo externo. É um caso particular de par linear, logo são suplementares.

**Teorema 2.6** (ângulo externo). *A medida de um ângulo exterior de qualquer triângulo é estritamente maior que a medida de qualquer ângulo interno a ele não adjacente.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $D$  um ponto tal que  $\overrightarrow{CD}$  é oposto  $\overrightarrow{CB}$ . Seja  $E$  o ponto médio do segmento  $\overline{AC}$  e  $F \in \overrightarrow{BE}$  tal que  $\overline{BE} \cong \overline{EF}$ . Como  $\angle BEA \cong \angle FEC$  pelo Axioma 2.9 os triângulos  $\triangle BEA$  e  $\triangle FEC$  são congruentes e portanto  $\angle FCA \cong \angle BAC$ . Se  $F$  e  $B$  estão em lados opostos da reta  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $B$  e  $D$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AC}$ , então,  $F$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AC}$ . Do mesmo modo,  $A$  e  $E$  estão em um mesmo lado de  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $E$  e  $F$  estão em um mesmo lado de  $\overleftrightarrow{CD}$ . Logo,  $A$  e  $F$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{CD}$ . Assim,  $F$  está no interior do ângulo  $\angle ACD$  e  $m(\angle DCA) > m(\angle FCA)$ . Portanto,  $m(\angle DCA) > m(\angle BAC)$ . A demonstração de que  $m(\angle DCA) > m(\angle ABC)$  é análoga.  $\square$

**Lema 2.2.** *Se  $\triangle ABC$  é um triângulo qualquer, então  $m(\angle CAB) + m(\angle ABC) < 180$ .*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Seja  $D$  um ponto qualquer sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , tal que  $A * B * D$ . Então,  $m(\angle CBD) + m(\angle ABC) = 180$  (Teorema 2.5). Pelo Teorema 2.6 tem-se  $m(\angle CAB) < m(\angle CBD)$ . Segue que,  $m(\angle CBD) = m(\angle CAB) + p$ , onde  $p \in \mathbb{R}$ , e  $p > 0$ . Daí,  $m(\angle ABC) + m(\angle CAB) + p = 180$ . Assim,  $m(\angle ABC) + m(\angle CAB) = 180 - p$ . Portanto,  $m(\angle ABC) + m(\angle CAB) < 180$ .  $\square$

Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Denota-se por  $\sigma(\triangle ABC)$  a soma dos ângulos internos do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Lema 2.3.** *Se  $\triangle ABC$  é um triângulo qualquer e  $E$  é um ponto no interior do lado  $BC$ , então  $\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle EAC) = \sigma(\triangle ABC) + 180$ .*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer e  $E$  um ponto no interior do lado  $BC$ . Por definição de soma de ângulos internos, tem-se  $\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle EAC) = m(\angle EAB) + m(\angle ABE) + m(\angle BEA) + m(\angle CAE) + m(\angle ECA) + m(\angle AEC)$ . Por hipótese,  $E$  está no interior do lado  $BC$ , logo  $m(\angle EAB) + m(\angle CAE) = m(\angle BAC)$ . Tem-se também que  $m(\angle BEA) + m(\angle AEC) = 180$  (Teorema 2.5). Portanto,  $\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle EAC) = m(\angle BAC) + m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + 180 = \sigma(\triangle ABC) + 180$ .  $\square$

**Definição 2.19.** *Seja um segmento de reta  $\overline{AB}$  qualquer. Seja  $M$  um ponto que decompõe o segmento  $\overline{AB}$  em dois segmentos de reta tais que os segmentos  $AM$  e  $MB$  são congruentes. Neste caso, o ponto  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .*

**Lema 2.4.** *Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são três pontos não colineares, então existe um ponto  $D$  que não está sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , tal que  $\sigma(\triangle ABD) = \sigma(\triangle ABC)$  e a medida de um dos ângulos internos do triângulo  $\triangle ABD$  é menor ou igual a  $\frac{1}{2}m(\angle CAB)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares. Seja  $E$  o ponto médio do segmento  $\overline{BC}$ . Seja  $D$  um ponto sobre a semirreta  $\overrightarrow{AE}$  tal que  $A * E * D$  e  $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ . Como  $\angle AEC \cong \angle DEB$  (ângulos opostos pelo vértice), tem-se  $\triangle AEC \cong \triangle DEB$  (congruência LAL) e assim,  $\sigma(\triangle AEC) = \sigma(\triangle DEB)$ . Aplicando o Lema 2.3, duas vezes, tem-se que

$$\sigma(\triangle ABC) = \sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle AEC) - 180$$

e

$$\sigma(\triangle ABD) = \sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle DEB) - 180.$$

Desta maneira, segue que  $\sigma(\triangle ABD) = \sigma(\triangle ABC)$ .

Vamos agora mostrar que, ou  $m(\angle DAB) \leq \frac{1}{2}m(\angle CAB)$  ou  $m(\angle BDA) \leq \frac{1}{2}m(\angle CAB)$ . De fato, pelo Axioma 2.8 temos que

$$m(\angle BAE) + m(\angle EAC) = m(\angle BAC)$$

Assim, temos duas possibilidades algébricas:  $m(\angle BAE) \leq \frac{1}{2}m(\angle BAC)$ , o que demonstra o primeiro caso, ou  $m(\angle EAC) \leq \frac{1}{2}m(\angle BAC)$ . Neste caso, como o triângulo  $\triangle AEC \cong \triangle DEB$  temos que  $m(\angle EAC) = m(\angle EDB)$ . Logo,  $m(\angle ADB) = m(\angle EDB) = m(\angle EAC) \leq \frac{1}{2}m(\angle BAC)$ . Isto completa a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.7** (Saccheri-Legendre). *Na geometria neutra, a soma dos ângulos internos de cada triângulo é menor ou igual a 180.*

*Demonstração.* A demonstração deste resultado será feita por redução ao absurdo. Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Supondo que  $\sigma(\triangle ABC) > 180$ , segue que  $\sigma(\triangle ABC) = 180 + \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um número real positivo. Seja  $n$  um número inteiro positivo suficientemente grande tal que  $2^n \epsilon > m(\angle CAB)$ . Pelo Lema 2.4, existe um triângulo  $\triangle ABC_1$  tal que  $\sigma(\triangle ABC_1) = \sigma(\triangle ABC)$ , e um dos ângulos internos do  $\triangle ABC_1$ , tem medida menor ou igual a  $\frac{1}{2}m(\angle CAB)$ . Aplicando novamente o Lema 2.4 tem-se um  $\triangle ABC_2$ , tal que  $\sigma(\triangle ABC_2) = \sigma(\triangle ABC)$ , e um dos ângulos internos do  $\triangle ABC_2$  tem medida igual ou menor que  $\frac{1}{4}m(\angle CAB)$ . Aplicando-se o Lema 2.4 um total de  $n$  vezes, chega-se a um  $\triangle ABC_n$  tal que  $\sigma(\triangle ABC_n) = \sigma(\triangle ABC) = 180 + \epsilon$ , e um dos ângulos internos do  $\triangle ABC_n$  é menor ou igual a  $\frac{1}{2^n}m(\angle CAB) < \epsilon$ . Logo, a soma das medidas dos outros ângulos é maior do que 180, o que contradiz o Lema 2.2.  $\square$

**Definição 2.20.** O ângulo  $\angle ABC$  é dito **ângulo reto** se  $m(\angle ABC) = 90$ .

**Definição 2.21.** Duas retas  $l$  e  $m$  são ditas **perpendiculares**, se existem três pontos distintos  $A \in l \cap m$ ,  $B \in l$  e  $C \in m$  tais que  $m(\angle BAC) = 90$ .

**Teorema 2.8.** Sejam  $m$  uma reta e  $A$  um ponto não pertencente a  $m$ . Existe uma, e somente uma, reta perpendicular a  $m$  passando pelo ponto  $A$ .

*Demonstração.*

- (a) Existência: Considere sobre a reta  $m$  dois pontos distintos  $B$  e  $C$ . Trace o segmento  $\overline{AB}$ . Se  $\overline{AB}$  é perpendicular a  $m$ , termina-se a construção. Caso contrário, considere no semiplano limitado pela reta  $m$  que não contém  $A$ , um ponto  $X$  tal que a semirreta  $\overrightarrow{BX}$  é tal que o ângulo por ela definido com a semirreta  $\overrightarrow{BC}$  é congruente ao ângulo  $\angle ABC$ , ou seja,  $\angle XBC \cong \angle ABC$ . Seja  $A' \in \overrightarrow{BX}$  tal que  $\overline{BA'} \cong \overline{BA}$ . Assim, o triângulo  $\triangle ABA'$  é isósceles. Como, por construção, o ângulo  $\angle ABC \cong \angle CBA'$ , então  $\overrightarrow{BC}$  (ou sua oposta) é a bissetriz do ângulo  $\angle ABA'$ . Segue que  $\overrightarrow{BC} = m$  é perpendicular a  $\overrightarrow{AA'}$ .
- (b) Unicidade: Se existissem duas retas distintas perpendiculares a  $m$  passando pelo ponto  $A$  formar-se-ia um triângulo com dois ângulos retos, o que contradiz o Teorema 2.7.

□

**Definição 2.22.** O defeito do triângulo  $\triangle ABC$  é a diferença entre 180 e a soma dos ângulos internos deste triângulo.

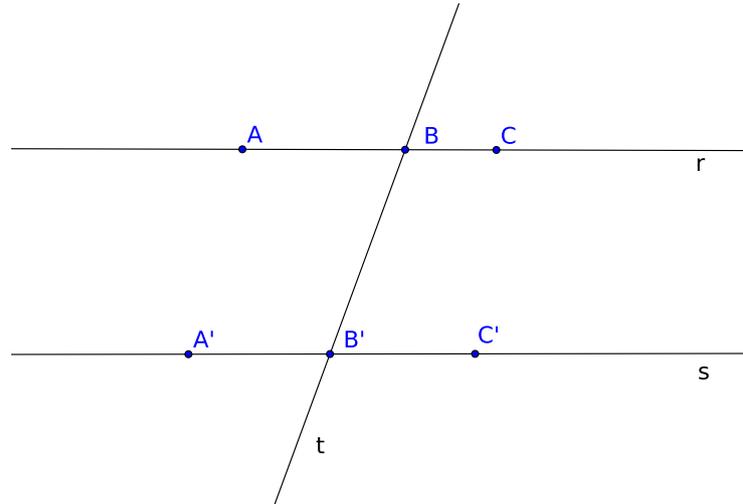
Denota-se o defeito do triângulo  $\triangle ABC$  por:

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - \sigma(\triangle ABC).$$

**Definição 2.23.** Duas retas  $m$  e  $n$  são ditas **paralelas** se não possuem nenhum ponto em comum, isto é,  $m \cap n = \emptyset$ .

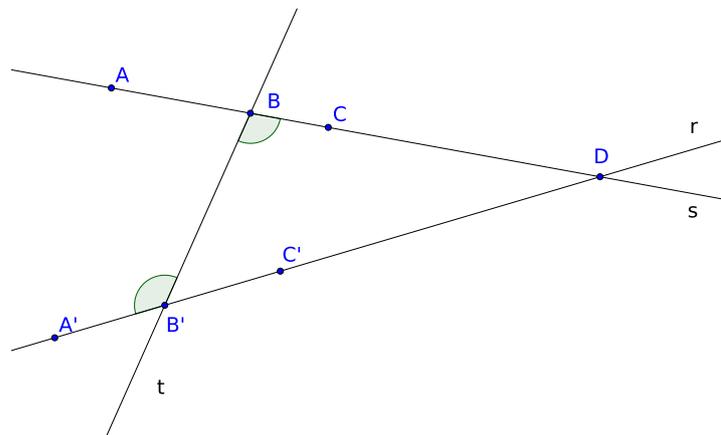
**Teorema 2.9** (Teorema dos ângulos alternos internos). Se duas retas são cortadas por uma reta transversal que faz um par de ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  duas retas que são interceptadas pela reta transversal  $t$  que faz um par de ângulos alternos internos congruentes. Sejam os pontos  $A, B, C$  e  $A', B', C'$ , conforme a figura 2.2.



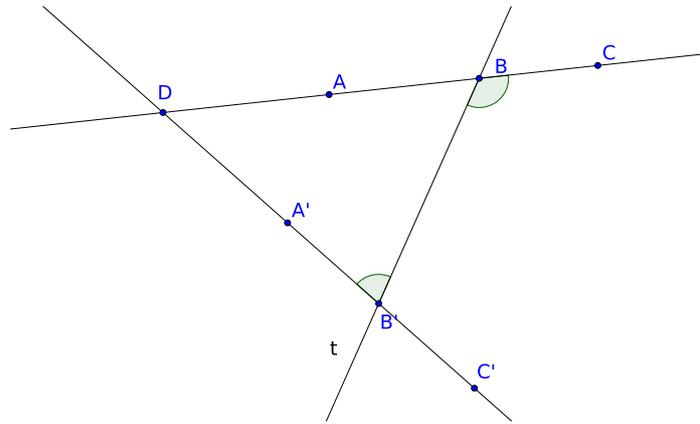
**Figura 2.2:** Ângulos alternos internos congruentes  $\Rightarrow$  retas paralelas.

Por redução ao absurdo, considere  $r$  e  $s$  não paralelas e distintas. Assim, existe um ponto  $D$  que é a interseção de  $r$  e  $s$ . Sem perda de generalidade, considere o ponto  $C$ . Se  $D$  e  $C$  estão no mesmo semiplano limitado por  $t$ , então o ângulo  $\angle A'B'B$  é congruo ao ângulo exterior do triângulo  $\triangle B'BD$  no vértice  $B'$ . Por hipótese, os ângulos  $\angle A'B'B$  e  $\angle CBB'$  são congruentes. Por outro lado, o ângulo  $\angle CBB'$  é ângulo interior não adjacente ao ângulo exterior do vértice  $B'$ . Isto contradiz o Teorema 2.6. Ver figura 2.3



**Figura 2.3:**  $D$  e  $C$  estão no mesmo semiplano limitado por  $t$ .

Analogamente, se  $D$  e  $C$  estão em semiplanos opostos limitados por  $t$  tem-se que o ângulo  $\angle A'B'B$  será ângulo interior não adjacente ao ângulo externo do triângulo  $\triangle BB'D$  no vértice  $B$  que é, por hipótese, congruo ao ângulo  $\angle B'BC$ . Novamente, este fato contradiz o Teorema 2.6. Ver figura 2.4.

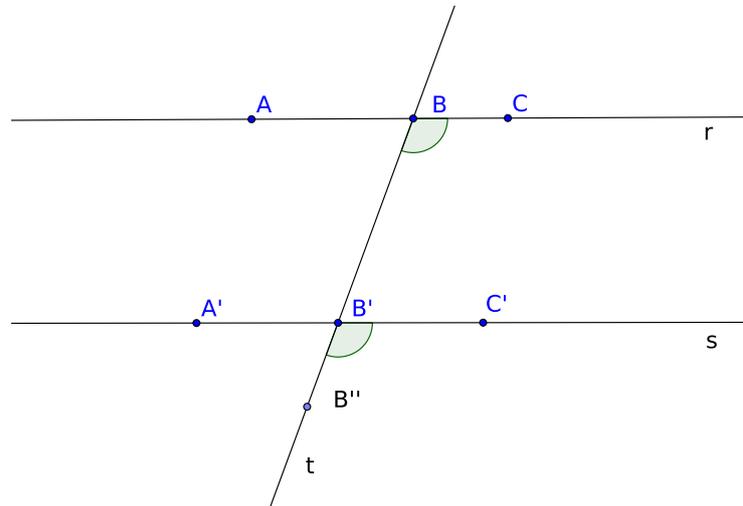


**Figura 2.4:**  $D$  e  $C$  estão em semiplanos opostos limitados por  $t$ .

□

**Corolário 2.1** (ângulos correspondentes). *Se duas retas são cortadas por uma reta transversal que faz um par de ângulos correspondentes congruentes, então elas são paralelas.*

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  duas retas cortadas por uma transversal  $t$  formando um par de ângulos correspondentes congruentes. Sejam os pontos  $A, B, C, A', B', C', B''$  conforme a figura 2.5.



**Figura 2.5:** Ângulos correspondentes congruentes  $\Rightarrow$  retas paralelas.

Por hipótese  $\angle CBB' \cong \angle C'B'B''$ . Observe que  $\angle C'B'B'' \cong \angle A'B'B$ , pois são opostos pelo vértice. Pela propriedade transitiva,  $\angle A'B'B \cong \angle CBB'$  que são ângulos alternos internos. Pelo teorema 2.9 conclui-se que  $r$  e  $s$  são paralelas. □

## 3 Geometria Euclidiana

A Geometria Euclidiana é por definição, a geometria que se obtém supondo todos os axiomas da geometria neutra e mais o axioma das paralelas euclidianas.

### 3.1 Termos não definidos, definições e axiomas da Geometria Euclidiana

Será adotado o conjunto de termos não definidos, definições e axiomas que definem a Geometria Neutra (Axiomas 2.1 – 2.9) mais o Axioma das Paralelas segundo a formulação de Playfair.

**Axioma 3.1** (Axioma das paralelas de Playfair). *Para toda reta  $r$  e todo ponto  $P$  que não pertence a  $r$ , existe exatamente uma **única** reta  $m$ , tal que  $P$  pertence a  $m$  e  $m$  é paralela a  $r$ .*

O motivo desta escolha é termos uma maior clareza das diferenças entre as geometrias euclidiana e hiperbólica.

### 3.2 Principais resultados da Geometria Euclidiana

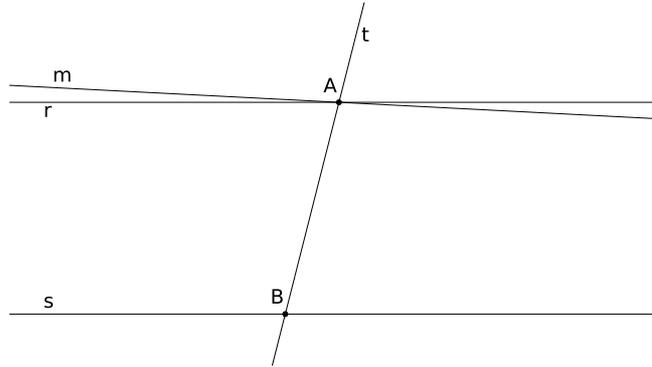
Todos os teoremas e corolários demonstrados na Geometria Neutra são claramente válidos na Geometria Euclidiana.

**Teorema 3.1.** *Se a reta  $m$  é paralela as retas  $r$  e  $s$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas ou coincidentes.*

*Demonstração.* Suponha que  $r$  e  $s$  não coincidem e são paralelas a reta  $m$ . Se  $r$  e  $s$  não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de interseção, digamos  $P$ . Assim,  $r$  e  $s$  seriam distintas paralelas à reta  $m$  passando por  $P$ , o que contradiz o Axioma 3.1.  $\square$

**Corolário 3.1** (ângulos correspondentes). *Se duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, então, os quatro pares de ângulos correspondentes são congruentes.*

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas e  $t$  uma reta que intercepta as retas  $r$  e  $s$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Seja a reta  $m$ , passando pelo ponto  $A$  e formando com a transversal, quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados pela reta  $s$  com a mesma transversal  $t$ . Pelo corolário 2.1,  $s$  e  $m$  são paralelas. Pelo Teorema 3.1,  $r$  e  $m$  são coincidentes. Portanto,  $r$  forma ângulos com a reta  $t$  congruentes aos correspondentes formados entre as retas  $s$  e  $t$ .

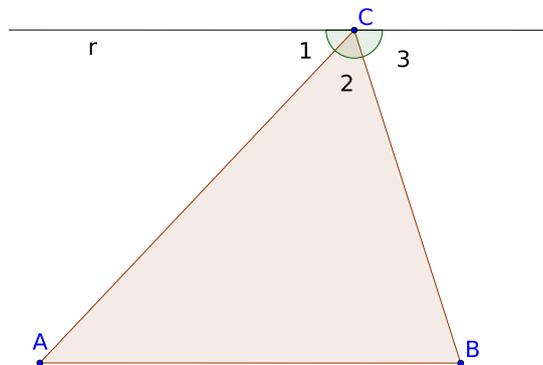


**Figura 3.1:** Ângulos correspondentes.

□

**Teorema 3.2.** *Todo triângulo tem soma dos ângulos internos igual a 180.*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Pelo vértice  $C$ , trace uma reta  $r$  paralela ao lado  $\overline{AB}$ . Numere os ângulos formados com o vértice  $C$ , como indicado na figura 3.2.



**Figura 3.2:** Ângulos do triângulo.

É imediato que  $m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) = 180$ . Como  $\overline{AC}$  é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta do corolário 3.1 que  $\angle 1 \cong \angle BAC$ . Como  $\overline{BC}$  é também transversal às duas paralelas, então  $\angle 3 \cong \angle ABC$ . Portanto,  $m(\angle CAB) + m(\angle ACB) + m(\angle CBA) = m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) = 180$ .  $\square$

Denomina-se quadrilátero todo polígono de 4 vértices. O quadrilátero  $\square PQRS$  é dito convexo se o conjunto de pontos interiores do quadrilátero é um conjunto convexo.

**Definição 3.1.** Para todo quadrilátero convexo  $\square PQRS$ , o **defeito** de  $\square PQRS$  é a diferença entre 360 e a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

Denota-se o defeito do quadrilátero  $\square PQRS$  por:

$$\delta(\square PQRS) = 360 - \sigma(\square PQRS).$$

**Definição 3.2.** Todo quadrilátero cujos ângulos internos são ângulos retos será denominado de **retângulo**.

**Corolário 3.2.** A soma dos ângulos internos de um retângulo é 360.

*Demonstração.* A consequência direta da definição de retângulo já garante que a soma dos ângulos internos é 360, pois, este quadrilátero tem quatro ângulos internos, cada um igual a 90. Portanto, a soma dos ângulos interno é 360.  $\square$

Podemos mostrar que o Teorema 3.2 e os demais corolários são equivalentes ao Axioma das paralelas. Assim, cada uma das afirmações abaixo pode ser escolhida como Axioma e as demais, incluindo o Axioma 3.1, passam a ser teoremas. São elas:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180.
- Se três ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo será reto também.
- Existem retângulos.

Para mostramos as equivalências necessitamos do seguinte resultado:

**Lema 3.1.** Sejam  $\overline{PQ}$  um segmento de reta e  $Q'$  um ponto tal que o ângulo  $\angle PQQ'$  é um ângulo reto. Então, para todo  $\epsilon > 0$  existe um ponto  $T \in \overrightarrow{QQ'}$  tal que  $m(\angle PTQ) < \epsilon$ .

*Demonstração.* Seja  $P'$  um ponto do plano tal que  $P'$  pertence ao mesmo semiplano determinado pela reta  $\overrightarrow{PQ}$  e o ponto  $Q$ . Consideremos a sequência de pontos  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{QQ'}$  tais que

(a)  $\overline{QT_1} \cong \overline{PQ}$ .

(b)  $\overline{PT_i} \cong \overline{T_i T_{i+1}}$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Desta maneira,  $\angle QT_iP \cong \angle T_{i-1}PT_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  pois todos os triângulos são isósceles. Pelo Axioma 2.8 temos que

$$m(\angle QPT_1) + \sum_{i=1}^{n-1} m(\angle T_{i-1}PT_i) = m(\angle QPT_n) < m(\angle QPP') = 90. \quad (3.1)$$

Dado  $\epsilon > 0$ , vamos mostrar que existe  $T_i \in \overrightarrow{QQ'}$  tal que  $m(\angle T_{i-1}PT_i) < \epsilon$  para algum  $i \in \mathbb{N}$ . De fato, suponhamos por absurdo que  $m(\angle T_{i-1}PT_i) \geq \epsilon$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Pela propriedade arquimediana dos números reais, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n\epsilon > 90$ . Logo,

$$m(\angle QPT_1) + \sum_{i=1}^{n-1} m(\angle T_{i-1}PT_i) \geq n\epsilon > 90.$$

o que contradiz (3.1). Portanto, basta consideramos  $T = T_i$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** *O axioma das paralelas euclidianas equivale à afirmação de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180.*

*Demonstração.* O Axioma 3.1 garante a validade do Teorema 3.2. Reciprocamente, vamos supor que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180. Consideremos a contrapositiva. Vamos mostrar que se existe uma reta  $l$  e um ponto  $P$  não pertencente à  $l$  onde passam múltiplas retas paralelas à  $l$  então existe um triângulo na qual a soma dos ângulos é diferente de 180. Seja  $Q$  o pé da perpendicular à reta  $l$  pelo ponto  $P$ . Seja  $m$  a reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  passando pelo ponto  $P$ . Então  $m$  e  $l$  são paralelas. Como existem múltiplas retas paralelas à  $l$  pelo ponto  $P$  consideremos a reta  $m' \neq m$  tal que  $P \in m'$  e  $m'$  paralela à  $l$ . Seja  $S \in m'$  tal que  $S$  pertença ao mesmo semiplano definido por  $m$  e  $Q$ . Seja  $R \in m$  tal que  $R$  pertença ao mesmo semiplano definido por  $\overleftrightarrow{PQ}$  e  $S$ . Seja  $T \in l$  tal que  $T$  pertença ao mesmo semiplano definido por  $\overleftrightarrow{PQ}$  e  $S$ . Além disso,  $m(\angle QTP) < m(\angle SPR)$ . Como  $T$  está no interior do ângulo  $\angle QPS$  então  $m(\angle QTP) < m(\angle QPS)$ . Mais ainda,  $m(\angle SPR) + m(\angle SPQ) = m(\angle RPQ)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta QTP) &= m(\angle PQT) + m(\angle QTP) + m(\angle TPQ) \\ &< m(\angle PQT) + m(\angle SPR) + m(\angle QPS) \\ &= m(\angle PQT) + m(\angle RPQ) = 180. \end{aligned}$$

Portanto,  $\sigma(\Delta QTP) < 180$ .  $\square$

## 4 Geometria Hiperbólica

Como vimos no capítulo anterior a geometria euclidiana é baseada nos axiomas da geometria neutra (Axiomas 2.1 – 2.9) e o axioma das paralelas de Playfair (Axioma 3.1). As geometrias ditas não-euclidianas se baseiam nos axiomas da geometria neutra e na negação do Axioma de Playfair. Existem duas possíveis negações do Axioma de Playfair determinando assim duas diferentes geometrias não-euclidianas: a geometria hiperbólica e a geometria elíptica (observamos que para a geometria elíptica, uma modificação do Axioma da separação do plano também deve ser feita). As possíveis negações fornecem os seguintes axiomas:

**Axioma 4.1** (Paralelas Hiperbólicas). *Para cada reta  $r$  (hiperbólica) e cada ponto  $P$  que não pertença a  $r$ , existe pelo menos duas retas distintas  $m$  e  $n$  que contêm  $P$  e são paralelas a  $r$ .*

e

**Axioma 4.2** (Axioma elíptico). *Duas retas sempre se cruzam.*

Não iremos abordar neste trabalho a geometria elíptica.

O matemático Eugenio Beltrami (1835-1900) demonstrou a consistência lógica das duas geometrias não-euclidianas, hiperbólicas e elípticas.

### 4.1 Principais resultados da geometria hiperbólica

**Teorema 4.1.** *Na geometria hiperbólica não existem retângulos.*

*Demonstração.* Seja  $\square ABCD$  um quadrilátero convexo hiperbólico. Sem perda de generalidade, considere a diagonal  $AC$ . O quadrilátero fica assim decomposto em dois triângulos,  $\triangle ADC$  e  $\triangle ABC$ . O Axioma das Paralelas Hiperbólicas nega o Axioma 3.1. Conseqüentemente temos a negação do teorema 3.3, ou seja, a soma dos ângulos de qualquer triângulo será diferente de 180. Assim, pela Definição 2.22 e pelo Teorema 2.7 o defeito do triângulo na geometria hiperbólica é estritamente positivo. Então,

$$\delta(\triangle ADC) = 180 - \sigma(\triangle ADC) > 0$$

e

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - \sigma(\triangle ABC) > 0$$

O defeito do quadrilátero é a somatória dos defeitos dos triângulos obtidos na decomposição do quadrilátero, então:

$$\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ADC) + \delta(\triangle ABC) = 180 - \sigma(\triangle ADC) + 180 - \sigma(\triangle ABC) > 0.$$

Logo, a somatória dos ângulos internos de quadrilátero hiperbólico é menor do que 360. Portanto, na geometria hiperbólica, não existe nenhum quadrilátero com quatro ângulos internos congruentes medindo 90 graus cada um.  $\square$

# 5 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Iremos neste capítulo abordar três modelos da Geometria Hiperbólica. Ao final, mostraremos que estes três modelos são isomorfos.

Como dissemos no capítulo 2, um sistema axiomático deve ser consistente, independente e completo. Para demonstrarmos estas propriedades utilizaremos modelos. Um modelo para um sistema axiomático é obtido associando interpretações aos termos indefinidos, convertendo os axiomas em afirmações verdadeiras. Assim, qualquer exemplo que satisfaça o conjunto de axiomas será denominado de modelo para o sistema axiomático.

A verificação que um sistema axiomático é independente é feita utilizando modelos. A independência de um axioma é provada através da construção de modelos de geometrias que satisfaçam todos os axiomas, exceto o axioma em consideração.

Demonstrar de maneira direta que o sistema axiomático é completo é tarefa difícil. No entanto, se um sistema é completo, não podem existir dois modelos diferentes, ou seja, todos os modelos do sistema devem ser isomorfos dois a dois [3, p. 8].

Para demonstrarmos que um sistema axiomático é consistente também não é imediato, uma vez que devemos considerar todos os teoremas possíveis dentro da teoria.

Os modelos para a geometria hiperbólica que iremos estudar serão construídos considerando objetos do plano euclidiano. Desta maneira, a consistência dos modelos da geometria hiperbólica transferem a questão para dentro da geometria euclidiana. Se a geometria euclidiana é consistente, então geometria hiperbólica é consistente, razão pela qual só podemos reivindicar a prova da consistência neste sentido relativo. Logo, a construção de um modelo da geometria hiperbólica é baseado no pressuposto de que existe um modelo para a geometria euclidiana. Neste caso, a construção de um modelo para a geometria euclidiana é baseado em suposições sobre os números reais [1, p. 288]. Em resumo, valem os teoremas.

**Teorema 5.1.** *O sistema axiomático da geometria euclidiana não contém contradições, sempre que a aritmética dos números reais seja consistente.*

**Teorema 5.2.** *Se a geometria euclidiana é consistente, assim também é a geometria*

hiperbólica.

## 5.1 Modelo cartesiano do plano euclidiano

O modelo cartesiano da geometria euclidiana é dado por:

**Ponto** será um par ordenado  $(x, y)$  de números reais denominados de coordenadas.

**Plano** será denotado por  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Reta** será o conjunto  $r$  de todos pontos  $(x, y)$  cujas coordenadas satisfazem a equação  $ax + by + c = 0$  para  $a, b, c \in \mathbb{R}$  com  $a^2 + b^2 \neq 0$ , isto é,

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \text{ para } a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}.$$

**Semiplanos determinados pela reta  $r$ .** Seja  $r : ax + by + c = 0$  uma reta do plano.

Os semiplanos determinados por  $r$  são os conjuntos

$$H_r^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c > 0\}.$$

e

$$H_r^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}.$$

**Estar entre.** Sejam os pontos  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  colineares, ou seja, existem  $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$  tais que  $A, B$  e  $C$  satisfazem a equação linear  $ax + by + c = 0$ . Se  $b \neq 0$  então o ponto  $B$  está entre os pontos  $A$  e  $C$  se, e somente se, ou  $x_A < x_B < x_C$  ou  $x_A > x_B > x_C$ . Se  $b = 0$  então o ponto  $B$  está entre os pontos  $A$  e  $C$  se, e somente se, ou  $y_A < y_B < y_C$  ou  $y_A > y_B > y_C$ .

**Distância** entre dois pontos quaisquer  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  será dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

**Medida de ângulo.** Dado o ângulo  $\angle ABC$ . Sejam as retas  $\overleftrightarrow{AB} : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  passando pelos pontos  $A$  e  $B$  e  $\overleftrightarrow{BC} : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  passando pelos pontos  $B$  e  $C$ . Se as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  são ambas não verticais ( $b_1$  e  $b_2$  não nulos) então podemos reescrevê-las na forma  $y = m_1x + n_1$  e  $y = m_2x + n_2$  respectivamente. Assim, a medida do ângulo  $\angle ABC$  é dada por:

$$m(\angle ABC) = \begin{cases} 90 & \text{se } m_1m_2 = -1; \\ \left| \arctg\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right) \right| & \text{se } m_1m_2 \neq -1 \end{cases}$$

Se  $b_1 = b_2 = 0$  então as retas são verticais (paralelas) e  $m(\angle ABC) = 0$ . Se  $b_1 = 0$  e  $b_2 \neq 0$  ( $b_2 = 0$  e  $b_1 \neq 0$ ) então  $m(\angle ABC) = 90 - |\arctg(m_2)|$  ( $m(\angle ABC) = 90 - |\arctg(m_1)|$ ).

## 5.2 Modelo do Semiplano de Poincaré

Consideremos o plano euclidiano  $\mathbb{E}$ . Fixada uma reta no plano, consideremos apenas um dos semiplanos por ela definido. Seja  $S_P$  este semiplano que será o modelo do Semiplano de Poincaré.

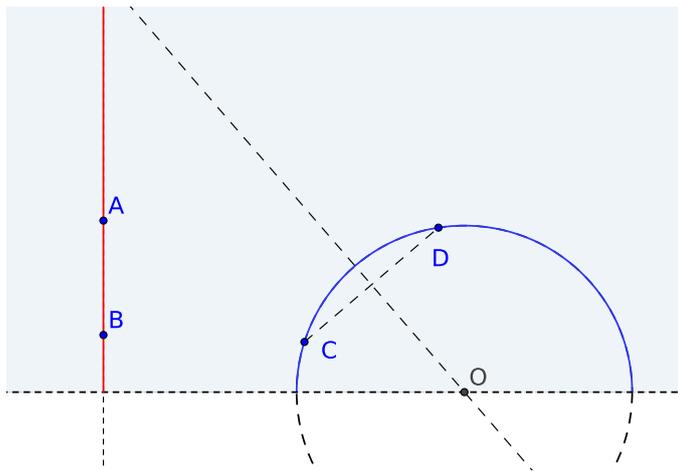
### 5.2.1 Retas e semiplanos

No Semiplano de Poincaré  $S_P$  definimos dois tipos de retas.

**Definição 5.1** (Reta hiperbólica). *Dados dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $S_P$ . Se a reta euclidiana  $\overleftrightarrow{AB}$  determinada por  $A$  e  $B$  for perpendicular (no sentido euclidiano) à reta que definiu  $S_P$  então a reta hiperbólica (de primeiro tipo) que passa por  $A$  e  $B$  será interseção de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $S_P$ ; caso contrário, a reta hiperbólica (de segundo tipo) será a semicircunferência que passa por  $A$  e  $B$  e tem centro na reta que definiu  $S_P$ .*

A construção geométrica das retas para os pontos  $A, B \in S_P$  é feita da seguinte maneira:

- Traçamos a reta  $r$  perpendicular à reta que define  $S_P$  pelo ponto  $A$ . Se  $B \in r$  então a reta  $\overleftrightarrow{AB} = r \cap S_P$ . Caso contrário,
- Traçamos a reta  $r$  mediatriz ao segmento  $AB$ . Seja o ponto  $C$  a interseção da reta  $r$  e a reta que define  $S_P$ . Traçamos a circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{CA}$ . A reta  $\overleftrightarrow{AB}$  será a interseção da circunferência anteriormente traçada e o plano  $S_P$ .



**Figura 5.1:** Construção de retas no Semiplano de Poincaré.

O ponto ou os pontos de interseção de uma h-reta de primeiro ou segundo tipo, respectivamente, e a fronteira do Semiplano de Poincaré serão denominados **pontos ideais** da respectiva h-reta.

Os **semiplanos** definidos por uma dada reta hiperbólica  $m$  em  $S_P$  serão:

- (a)  $m$  é uma reta hiperbólica do primeiro tipo. A reta hiperbólica  $m$  foi determinada a partir de uma reta euclidiana que, por sua vez, determina dois semiplanos euclidianos  $H^+$  e  $H^-$ . Os semiplanos definidos por  $m$  serão  $H_m^+ = H^+ \cap S_P$  e  $H_m^- = H^- \cap S_P$ .
- (b)  $m$  é uma reta hiperbólica do segundo tipo. A reta hiperbólica  $m$  será uma semicircunferência no plano euclidiano. A circunferência que deu origem à reta hiperbólica  $m$  determina duas regiões no plano euclidiano, a saber, a região interna à circunferência e a região externa à circunferência ambas excluindo a fronteira. Os semiplanos determinados por  $m$  serão as interseções do interior e exterior da circunferência euclidiana com o Semiplano de Poincaré.

### 5.2.2 Distância

Passamos agora a definir a distância entre dois pontos quaisquer no modelo do Semiplano de Poincaré.

**Definição 5.2.** *Sejam  $A$  e  $B \in S_P$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é definida por:*

(i) *Se  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta de primeiro tipo então:*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right|.$$

*sendo  $M$  o ponto ideal da  $h$ -reta de primeiro tipo e  $AM$  e  $BM$  são as medidas euclidianas (comprimentos) dos segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{BM}$  respectivamente.*

(ii) *Se  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta de segundo tipo então:*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right|,$$

*sendo  $M$  e  $N$  os pontos ideais da  $h$ -reta de segundo tipo e  $AM$ ,  $AN$ ,  $BM$  e  $BN$  as medidas euclidianas (comprimentos) dos segmentos  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{BN}$  respectivamente.*

**Teorema 5.3.** *Sejam  $A$  e  $B \in S_P$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  satisfaz as seguintes propriedades:*

(i)  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .

(ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .

*Demonstração.* O item (i) segue da definição. O item (ii) segue do fato de que

$$\begin{aligned} d(B, A) &= \left| \ln \frac{(BM)(AN)}{(BN)(AM)} \right| = \left| \ln \frac{1}{\frac{(BN)(AM)}{(BM)(AN)}} \right| = \left| \ln \left( \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right)^{-1} \right| \\ &= \left| (-1) \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = d(A, B). \end{aligned}$$

□

### 5.2.3 Medida de ângulo

Como visto no caso euclidiano, a figura ângulo é formada por duas semirretas de mesma extremidade  $A$ . No caso do Semiplano de Poincaré, cada semirreta ou é parte de uma semicircunferência (com apenas um ponto ideal) ou uma semirreta vertical ambas no sentido euclidiano. Define-se a medida do ângulo entre duas semirretas hiperbólicas dadas como sendo a medida (no sentido euclidiano) do ângulo formado pelas semirretas euclidianas de ponto inicial em  $A$ , tangentes às semirretas hiperbólicas.

Geometricamente a medida de ângulo hiperbólico, será feita de acordo com o seguinte procedimento:

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 1:** é imediato que o ângulo neste caso é zero.

**Ângulo entre semirretas do tipo 1 e do tipo 2:**

- (a) Na semirreta do tipo 2 construímos a semirreta euclidiana perpendicular à reta que contém o diâmetro da semicircunferência pelo vértice  $A$ . Isto garante a tangência da semirreta euclidiana de ponto inicial em  $A$  às semirreta hiperbólica do tipo 2.
- (b) A medida do ângulo euclidiano entre a semirreta do tipo 1 e a semirreta euclidiana construída no item anterior será a medida do ângulo hiperbólico.

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 2:**

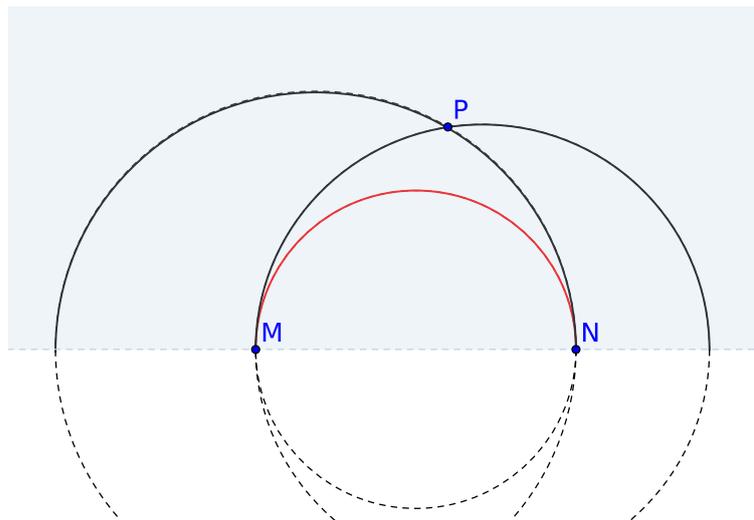
- (a) Para cada semirreta do tipo 2 construímos a semirreta euclidiana perpendicular à reta que contém o diâmetro da semicircunferência pelo vértice  $A$ .
- (b) A medida do ângulo euclidiano entre as semirretas euclidianas construídas no item anterior será a medida do ângulo hiperbólico.

### 5.2.4 Verificação da validade dos Axiomas da Geometria Hiperbólica

Verificamos para o Semiplano de Poincaré que são válidos os seguintes axiomas da Geometria Hiperbólica:

- (1) **Axiomas da existência e do conjunto:** A coleção de todos os pontos formam um conjunto não vazio. Existe mais de um ponto nesse conjunto. Isto decorre imediatamente da definição do conjunto  $S_P$ .
- (2) **Axioma da incidência:** Sejam dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer no conjunto  $S_P$ . É imediato, pela definição de h-retas do tipo 1 e 2, a existência e unicidade da reta que passa por esses pontos.
- (3) **Axiomas da distância e da régua:** A definição 5.2 satisfaz os axiomas da distância e define a função coordenada de um ponto na reta.
- (4) **Axioma da separação do plano:** É imediato que a h-reta do tipo 1 divide o Semiplano de Poincaré em dois semiplanos. Por outro lado, como já é conhecido da geometria euclidiana, a circunferência euclidiana divide o plano euclidiano em duas partes, pontos internos e pontos externos à circunferência. Seja uma circunferência  $\beta$  euclidiana, com centro na reta que define o Semiplano de Poincaré. Logo, a interseção do interior da circunferência  $\beta$  com o Semiplano de Poincaré define um semiplano  $H^-$ . A interseção do exterior da circunferência  $\beta$  com o Semiplano de Poincaré define o outro semiplano  $H^+$ .
- (5) **Axioma do transferidor:** A validade deste axioma decorre das definições descritas na seção 5.2.

A validade do Axioma das Paralelas Hiperbólicas para o Modelo do Semiplano de Poincaré pode ser verificada através da figura 5.2.



**Figura 5.2:** Retas paralelas à uma reta dada passando pelo ponto  $P$  fora da reta dada.

A construção deste exemplo será feita na próxima seção.

### 5.2.5 A geometria analítica no Semiplano de Poincaré

Nesta seção iremos discutir o Modelo do Semiplano de Poincaré agora sob o ponto de vista da Geometria Analítica. Pontos e retas serão descritas algebricamente.

Como vimos anteriormente, o Semiplano de Poincaré é definido sobre o plano euclidiano  $\mathbb{E}$  fixando uma reta  $r$  e considerando apenas um dos semiplanos por ela definido. Escolhemos na reta  $r$  um ponto  $O$  qualquer. Fixamos sobre o ponto  $O$  e a reta  $r$  um sistema de coordenadas cartesianas coincidindo a origem e o eixo das abscissas com o ponto  $O$  e a reta  $r$  respectivamente. Desta maneira, o modelo do Semiplano de Poincaré pode ser visto como o conjunto de todos pontos  $P(x, y)$  do plano euclidiano tais que a ordenada é estritamente positiva, ou seja,

$$S_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Veremos agora as definições analíticas das h-retas. As retas hiperbólicas no Semiplano de Poincaré são classificadas em dois tipos (ver definição 5.1). Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B) \in S_P$ .

1. Se  $x_A = x_B$  então  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in S_P \text{ tal que } x = x_A\}$  (retas do primeiro tipo).
2. Se  $x_A \neq x_B$  então  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in S_P \text{ tal que } (x - a)^2 + y^2 = r^2 \text{ para } a, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$  (retas do segundo tipo).

**Exemplo 5.1.** Determine analiticamente a h-reta que passa pelos pontos  $A = (2, 1)$  e  $B = (2, 5)$ . Como  $x_A = x_B = 2$  então  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in S_P \text{ tal que } x = 2\}$

**Exemplo 5.2.** Determine analiticamente a equação da h-reta que passa pelos pontos  $A = (2, 3)$  e  $B = (9, 4)$ . Neste caso,  $x_A \neq x_B$ . Então  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in S_P \text{ tal que } (x - a)^2 + y^2 = r^2 \text{ para } a, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ . Devemos determinar os valores reais  $a$  e  $r$ .

- (i) Substituímos os valores das coordenadas do ponto  $A = (2, 3)$  na equação da h-reta:

$$(2 - a)^2 + 3^2 = r^2.$$

- (ii) Analogamente para o ponto  $B = (9, 4)$ :

$$(9 - a)^2 + 4^2 = r^2.$$

- (iii) As condições acima definem um sistema de duas equações com duas incógnitas. Resolvendo o sistema:

$$(2 - a)^2 + 9 - (9 - a)^2 - 16 = 0.$$

Assim,

$$4 - 4a + a^2 - 81 + 18a - a^2 - 7 = 0.$$

Logo,

$$14a = 84 \Leftrightarrow a = 6.$$

Substituindo o valor encontrado em uma das equações determinamos o valor de  $r = 5$ .

A h-reta é dada por  $(x - 6)^2 + y^2 = 25$  e  $y > 0$ .

Podemos encontrar a equação da h-reta de segundo tipo de outra maneira.

**Exemplo 5.3.** Determine a h-reta que passa pelos pontos  $A = (2, 3)$  e  $B = (9, 4)$ .

1. Determinamos primeiramente a declividade  $m$  da reta euclidiana que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$m = \frac{4 - 3}{9 - 2} = \frac{1}{7}.$$

2. As coordenadas do ponto médio  $M$  do segmento de reta euclidiano  $\overline{AB}$  serão dadas por

$$M = \left( \frac{2 + 9}{2}, \frac{3 + 4}{2} \right) = \left( \frac{11}{2}, \frac{7}{2} \right).$$

3. A equação da reta mediatriz do segmento de reta euclidiano  $\overline{AB}$  é dada por

$$y - \frac{7}{2} = -7\left(x - \frac{11}{2}\right).$$

4. A interseção da reta mediatriz com o eixo  $Ox$  será dada pela condição  $y = 0$ , ou seja,

$$0 - \frac{7}{2} = -7\left(x - \frac{11}{2}\right) \Leftrightarrow 7x = 42 \Leftrightarrow x = 6.$$

Logo, o centro da semicircunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  tem coordenadas  $(6, 0)$ .

5. O raio da semicircunferência será dado por

$$d(C, A) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A equação da h-reta será  $(x - 6)^2 + y^2 = 25$  e  $y > 0$ .

A medida de distância hiperbólica entre pontos no Modelo Semiplano de Poincaré é dada pela definição 5.2.

**Exemplo 5.4.** Calcular a distância hiperbólica entre os pontos  $A = (2, 8)$  e  $B = (2, 5)$ . A h-reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  é do primeiro tipo. Logo,

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right| = \left| \ln \frac{8}{5} \right| \cong 0,47.$$

**Exemplo 5.5.** Calcular a distância hiperbólica entre os pontos  $A = (2, 3)$  e  $B = (9, 4)$ . Neste caso, a h-reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  é do segundo tipo. Vimos no exemplo 5.2 que a h-reta que passa pelos pontos dados é  $(x - 6)^2 + y^2 = 25$  e  $y > 0$ . Determinamos inicialmente os pontos ideais. Para isso, basta impor  $y = 0$  na equação da h-reta, ou seja,

$$(x - 6)^2 = 25 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 11.$$

Logo, os pontos ideais serão  $M = (11, 0)$  e  $N = (1, 0)$ . Em seguida, calculamos as distâncias euclidianas para os segmentos euclidianos.

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(2 - 11)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{90}. \\ BN &= \sqrt{(9 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{80}. \\ AN &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10}. \\ BM &= \sqrt{(9 - 11)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{20}. \end{aligned}$$

Calculamos a distância hiperbólica entre os pontos  $A$  e  $B$ :

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = \left| \ln \frac{\sqrt{90} \times \sqrt{80}}{\sqrt{10} \times \sqrt{20}} \right| \cong 1,79$$

Para o Modelo do Semiplano de Poincaré podemos definir a função coordenada como se segue. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos quaisquer no Semiplano de Poincaré. Seja  $O$  um ponto qualquer sobre a h-reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$ . Temos dois casos a considerar:

1. Se a h-reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é do primeiro tipo então

$$\begin{aligned} f : \overleftrightarrow{AB} &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto f(P) = \ln \frac{PM}{OM} \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo  $M$  o ponto ideal da h-reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

2. Se a h-reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é do segundo tipo então

$$\begin{aligned} f : \overleftrightarrow{AB} &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto f(P) = \ln \frac{(OM)(PN)}{(ON)(PM)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

sendo  $M$  e  $N$  os pontos ideais da h-reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $OM$ ,  $PN$ ,  $ON$  e  $PM$  as distâncias euclidianas entre os respectivos pontos que definem os segmentos.

Observamos que a escolha do ponto  $O$  sobre a h-reta é uma escolha para a origem do sistema de coordenadas da reta. O sentido positivo da h-reta de segundo tipo depende da denominação dos pontos ideais  $M$  e  $N$ . Este fato decorre da equação (5.2). Isto não ocorre nas h-retas do tipo 1.

Verificamos que a função  $f$  definida pelas equações (5.1) e (5.2) satisfaz

- (i)  $f$  associa a todo ponto de uma reta hiperbólica um único número real;
- (ii)  $f$  é função bijetora;
- (iii) Quaisquer dois pontos distintos sobre a reta hiperbólica podem ser identificados pelas coordenadas 0 (escolha do ponto O) e um número real positivo (sentido da h-reta);
- (iv) Sejam os pontos  $A$  e  $B$  sobre a reta hiperbólica com coordenadas  $f(A) = a$  e  $f(B) = b$  respectivamente. Logo, aplicando o Axioma 2.5,
  - (a) Para uma h-reta do primeiro tipo:

$$d(A, B) = |f(A) - f(B)| = \left| \ln \frac{AM}{OM} - \ln \frac{BM}{OM} \right| = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right|.$$

- (b) Para uma h-reta do segundo tipo:

$$d(A, B) = |f(A) - f(B)| = \left| \ln \frac{(OM)(AN)}{(ON)(AM)} - \ln \frac{(OM)(BN)}{(ON)(BM)} \right| = \left| \ln \frac{(AN)(BM)}{(AM)(BN)} \right|.$$

Verifica-se assim que  $d(A, B) = |a - b|$ .

Uma das propriedades que a distância deve satisfazer é a propriedade de que se um ponto  $C$  está entre os pontos  $A$  e  $B$ , sobre o segmento  $\overline{AB}$ , então  $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ . De fato,

- (a) Para uma h-reta do primeiro tipo. Inicialmente verificamos que  $AM > CM$  e  $CM > BM$ . Assim,

$$\frac{AM}{CM} > 1 \text{ e } \frac{CM}{BM} > 1.$$

Logo,

$$d(A, C) + d(C, B) = \ln \frac{AM}{CM} + \ln \frac{CM}{BM} = \ln \frac{AM}{BM} = d(A, B).$$

- (b) Para uma h-reta do segundo tipo. Verificamos que  $AM > CM$ ,  $CN > AN$ ,  $BN > CN$  e  $CM > BM$ . Assim,

$$\frac{AM}{CM} > 1, \frac{CN}{AN} > 1, \frac{BN}{CN} > 1 \text{ e } \frac{CM}{BM} > 1.$$

Logo,

$$d(A, C) + d(C, B) = \ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} + \ln \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} = \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} = d(A, B).$$

Do ponto de vista analítico, a medida de ângulo será definida por

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 1:** é zero.

**Ângulo entre semirretas do tipo 1 e do tipo 2:** Seja  $A = (x_A, y_A)$  o vértice comum das semirretas  $x = x_A$  (tipo 1) e  $(x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2$  e  $y > 0$  (tipo 2). Na semirreta do tipo 2 é possível determinar a declividade da reta tangente à semicircunferência num ponto qualquer a partir da derivada implícita, isto é,

$$2(x - a) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y}.$$

Logo, a declividade da reta tangente à semicircunferência no vértice  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a - x_A}{y_A}.$$

A medida do ângulo euclidiano  $\theta$  entre a semirreta do tipo 1 e a semirreta euclidiana construída no item anterior será dada pela equação:

$$\theta = 90 - \operatorname{arctg} \left( \frac{a - x_A}{y_A} \right).$$

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 2:** Seja  $A = (x_A, y_A)$  o vértice comum das semirretas  $(x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2$  e  $(x - b)^2 + y^2 = (x_A - b)^2 + y_A^2$  e  $y > 0$ . Analogamente ao item anterior, para cada semirreta do tipo 2 determinamos a declividade da reta tangente à respectiva semicircunferência no vértice  $A$  determinando as tangentes dos respectivos ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$ , ou seja,

$$\operatorname{tg} \theta_a = \frac{a - x_A}{y_A} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_b = \frac{b - x_A}{y_A}.$$

Se  $\operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b = -1$  isto implica que as semirretas euclidianas são perpendiculares entre si. Neste caso, o ângulo entre as semirretas hiperbólicas será 90. Caso  $\operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b \neq -1$ , o ângulo entre as semirretas hiperbólicas será dado pela diferença entre os ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$ . Desta forma, lembrando que,

$$\operatorname{tg}(\theta_a - \theta_b) = \frac{\operatorname{tg} \theta_a - \operatorname{tg} \theta_b}{1 + \operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b}. \quad (5.3)$$

teremos que

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{a - b}{y_A + \frac{(a - x_A)(b - x_A)}{y_A}} \right).$$

**Exemplo 5.6.** Determinar o ângulo entre as retas hiperbólicas  $x^2 + y^2 = 9$  e  $x^2 + y^2 - 10x = -9$  e  $y > 0$ .

(a) Determinamos o ponto de interseção  $A$  das retas hiperbólicas, para isso temos que resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas, isto é:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 10x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5} \quad \text{e} \quad y = \frac{12}{5} > 0$$

O vértice é  $A = \left( \frac{9}{5}, \frac{12}{5} \right)$ .

- (b) Observamos que  $x^2 + y^2 - 10x = -9 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 16$ . A declividade da reta tangente à semicircunferência  $x^2 + y^2 = 9$  no ponto  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta_a = \frac{0 - \frac{9}{5}}{\frac{12}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

Analogamente, a declividade da reta tangente à semicircunferência  $(x-5)^2 + y^2 = 16$  no ponto  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta_b = \frac{5 - \frac{9}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Logo,  $\operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b = -1$ . As retas hiperbólicas são perpendiculares.

**Exemplo 5.7.** Determinar o ângulo entre as retas hiperbólicas  $x^2 + y^2 = 16$  e  $(x - 8)^2 + y^2 = 32$  e  $y > 0$ .

- (a) Determinamos o ponto de interseção  $A$  das retas hiperbólicas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = \sqrt{7} > 0$$

O vértice é  $A = (3, \sqrt{7})$ .

- (b) A declividade da reta tangente à semicircunferência  $x^2 + y^2 = 16$  no ponto  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta_a = \frac{0 - 3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Analogamente, a declividade da reta tangente à semicircunferência  $(x-8)^2 + y^2 = 32$  no ponto  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta_b = \frac{8 - 3}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}.$$

Logo,  $\operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b \neq -1$ . O ângulo entre as retas hiperbólicas no ponto  $A$  será

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{0 - 8}{\sqrt{7} + \frac{(0-3)(8-3)}{\sqrt{7}}} \right) = \operatorname{arctg} \sqrt{7} \cong 69,3.$$

No próximo exemplo verificaremos a validade do Axioma das Paralelas Hiperbólicas para o Modelo do Semiplano de Poincaré sob o ponto de vista analítico.

**Exemplo 5.8.** Sejam a reta hiperbólica  $x^2 + y^2 = 25$  e  $y > 0$  e o ponto  $P = (1, 7)$ . Encontre duas h-retas que passem por  $P$  e são paralelas a h-reta dada.

- (a) Determinamos os pontos ideais da h-reta  $x^2 + y^2 = 25$ . Para isso, impomos  $y = 0$  na equação da h-reta. Assim,  $x = 5$  ou  $x = -5$ . Temos os pontos ideais:  $M = (-5, 0)$  e  $N = (5, 0)$ .

- (b) Determinamos a h-reta que passa pelo ponto  $P$  e tem o ponto  $M$  como um dos seus pontos ideais. Neste caso, a abscissa do ponto  $P$  é diferente da abscissa do ponto ideal  $M$ . Logo, a h-reta será do segundo tipo, ou seja,  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ . Substituindo as coordenadas dos pontos  $P$  e  $M$  obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (1 - c)^2 + 49 = r^2 \\ (-5 - c)^2 + 0 = r^2 \end{cases}$$

Igualando as duas equações obtemos:

$$1 - 2c + c^2 + 49 = 25 + 10c + c^2 \Leftrightarrow c = \frac{25}{12}.$$

Substituindo o valor  $c$  em uma das equações temos que:

$$r^2 = 1 - 2 \cdot \frac{25}{12} + \left(\frac{25}{12}\right)^2 + 49 \Leftrightarrow r = \frac{85}{12},$$

uma vez que  $r > 0$ . A equação da h-reta então é dada por:

$$\left(x - \frac{25}{12}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{85}{12}\right)^2.$$

- (c) Analogamente, determinamos a h-reta que passa pelo ponto  $P$  e tem o ponto  $N$  como um dos seus pontos ideais. A abscissa do ponto  $P$  é diferente da abscissa do ponto ideal  $N$ . A h-reta do segundo tipo será obtida substituindo as coordenadas dos pontos  $P$  e  $N$  na equação  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ , ou seja,

$$\begin{cases} (1 - c)^2 + 49 = r^2 \\ (5 - c)^2 + 0 = r^2 \end{cases}$$

Igualando as duas equações obtemos:

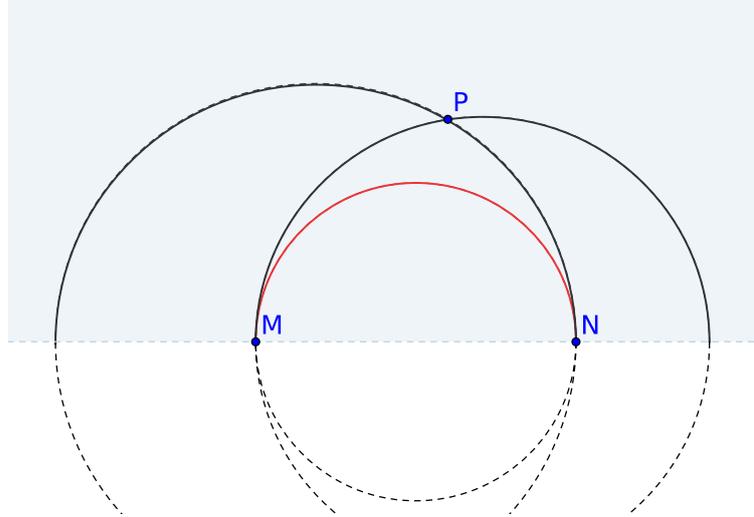
$$1 - 2c + c^2 + 49 = 25 - 10c + c^2 \Leftrightarrow c = -\frac{25}{8}.$$

Substituindo o valor  $c$  em uma das equações temos que:

$$r^2 = 1 + 2 \cdot \frac{25}{8} + \left(\frac{25}{8}\right)^2 + 49 \Leftrightarrow r = \frac{65}{8},$$

uma vez que  $r > 0$ . A equação da h-reta é dada por:

$$\left(x + \frac{25}{8}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2.$$



**Figura 5.3:** Retas paralelas à uma reta dada passando pelo ponto  $P$  fora da reta dada.

Comprovamos assim que dada uma reta e um ponto não pertencente à ela, é possível determinar duas retas paralelas à reta dada passando pelo ponto dado.

## 5.3 O Modelo do Disco de Poincaré

Consideremos o plano euclidiano  $\mathbb{E}$ . Fixado um ponto  $O$  e um valor real  $r$  positivo definimos o Disco de Poincaré como o conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano euclidiano que são interiores (sem a fronteira) à circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , ou seja,

$$D_P = \{X \in E \mid d(X, O) < r\}.$$

sendo  $d$  a distância euclidiana.

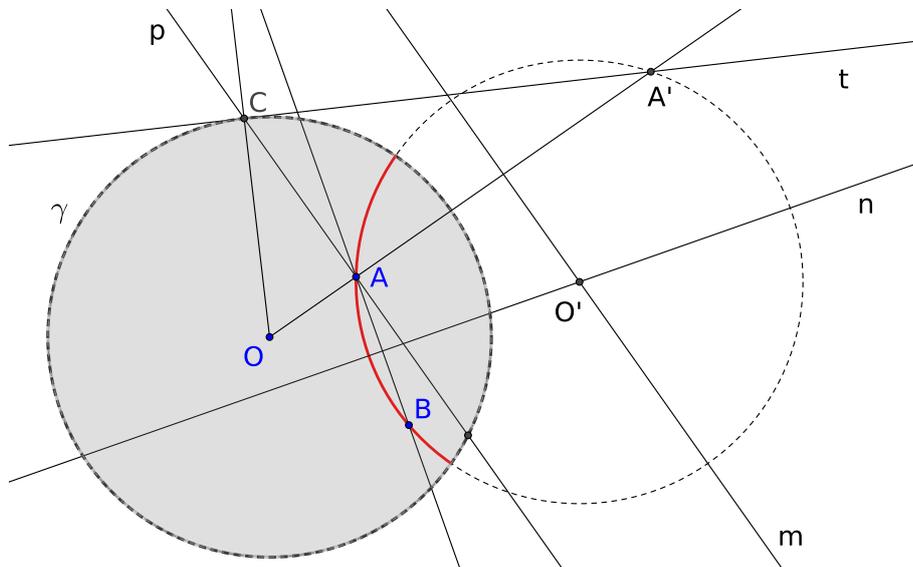
### 5.3.1 Retas e semiplanos

No Disco de Poincaré definimos dois tipos de retas.

**Definição 5.3** (Reta hiperbólica). *Dados dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $D_P$ . Se  $A$ ,  $B$  e  $O$  forem colineares (no sentido euclidiano), a reta hiperbólica (de primeiro tipo) que passa por  $A$  e  $B$  será o diâmetro (aberto) da circunferência; caso contrário, a reta hiperbólica (de segundo tipo) será a interseção do disco  $D_P$  com a circunferência que passa por  $A$  e  $B$  e intercepta a fronteira do Disco de Poincaré ortogonalmente.*

A construção geométrica das retas para os pontos  $A, B \in D_P$  é feita da seguinte maneira. Seja  $\gamma$  a fronteira do disco  $D_P$ . Se  $A, B$  e  $O$  forem colineares, a reta hiperbólica será a interseção da reta (euclidiana) que passa por eles e o disco  $D_P$ ; caso contrário,

- (a) Considere a reta que passa por  $A$  e  $B$ .
- (b) Considere a semirreta  $\overrightarrow{OA}$ .
- (c) Trace a reta perpendicular  $p$  à  $\overrightarrow{OA}$  pelo ponto  $A$ .
- (d) Seja  $C$  um dos pontos da interseção  $p \cap \gamma$ .
- (e) Considere a semirreta  $\overrightarrow{OC}$ .
- (f) Trace a reta perpendicular  $t$  à  $\overrightarrow{OC}$  pelo ponto  $C$ .
- (g) Seja  $A' = \overrightarrow{OA} \cap t$ .
- (h) Trace a reta mediatriz  $m$  do segmento  $\overline{AA'}$ .
- (i) Trace a reta mediatriz  $n$  do segmento  $\overline{AB}$ .
- (j) Seja  $O' = m \cap n$ .
- (k) Trace a circunferência  $\beta$  de centro  $O'$  e raio  $\overline{O'A}$ .



**Figura 5.4:** Construção de retas no Disco de Poincaré.

Os pontos de interseção de uma h-reta e a fronteira do Disco de Poincaré serão denominados **pontos ideiais** da h-reta.

Definimos **semiplanos** da seguinte maneira:

- (a) Seja  $m$  uma reta hiperbólica, do primeiro tipo. A reta  $m$  determina uma reta  $l$  no modelo euclidiano que passa através do centro do disco. Os semiplanos no Disco de Poincaré determinados por  $m$ , são definidos pela interseção dos semiplanos euclidianos definidos por  $l$  com o interior do disco.
- (b) Seja  $m$  uma reta hiperbólica, do segundo tipo, ou seja, a reta determinada pelo arco de circunferência dado pela interseção da circunferência euclidiana com o interior do disco de Poincaré. Os semiplanos determinados por  $m$  são as interseções do interior e exterior da circunferência euclidiana com o interior do disco.

### 5.3.2 Distância

Passamos agora a definir a distância entre dois pontos quaisquer no modelo do Disco de Poincaré.

**Definição 5.4.** *Sejam  $A$  e  $B \in D_P$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é definida por:*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)} \right|,$$

sendo  $P$  e  $Q$  os pontos ideais da  $h$ -reta que passa por  $A$  e  $B$ .  $AP$ ,  $AQ$ ,  $BP$  e  $BQ$  são as medidas euclidianas (comprimentos) dos respectivos segmentos de reta euclidianos.

**Teorema 5.4.** *Sejam  $A$  e  $B \in D_P$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .
- (ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao Teorema 5.3. □

### 5.3.3 Medida de ângulo

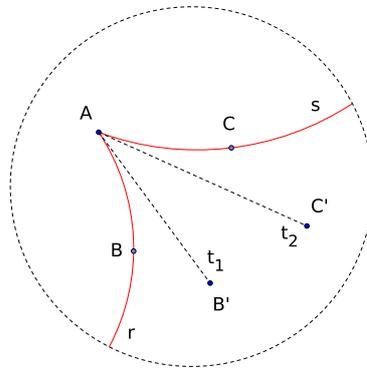
A medida de ângulo será feita de maneira intuitiva. Como visto anteriormente, a figura ângulo é formada por duas semirretas de mesma extremidade  $A$ . No caso hiperbólico, cada semirreta é parte de uma circunferência ou parte de um diâmetro do disco de Poincaré. Define-se a medida do ângulo entre as semirretas hiperbólicas dadas como sendo a medida (no sentido euclidiano) do ângulo formado pelas semirretas euclidianas de ponto inicial em  $A$ , tangentes às semirretas de Poincaré.

A medida de ângulo hiperbólico, será feita de acordo com o seguinte procedimento abaixo :

- (a) Sejam  $r$  e  $s$  semirretas hiperbólicas de mesmo extremo  $A$ .
- (b) Considere o ângulo  $\angle BAC$  determinado pelas semirretas  $r$  e  $s$ .

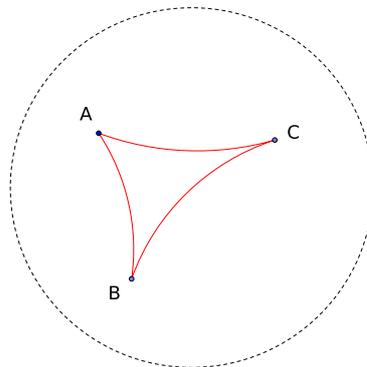
- (c) Sejam  $t_1$  e  $t_2$  semirretas euclidianas tangentes as retas hiperbólicas  $r$  e  $s$  no ponto  $A$ . As retas  $t_1$  e  $t_2$  são de fácil construção, uma vez que conhece-se as circunferências (euclidianas) que determinaram  $r$  e  $s$ . Traça-se a reta perpendicular ao raio da circunferência pelo ponto  $A$ , determinando-se assim a reta suporte para a semirreta tangente à circunferência.
- (d) Defina medida do ângulo hiperbólico  $m_{D_P}(\angle BAC) = m(\angle B'AC')$ , onde a medida de  $\angle B'AC'$  é feita no modelo euclidiano utilizando-se o transferidor. Os pontos  $B'$  e  $C'$  são pontos quaisquer distintos de  $A$  em  $t_1$  e  $t_2$ .

Ver figura 5.5.



**Figura 5.5:** Medida de ângulo no Disco de Poincaré.

A figura 5.6 exibe um triângulo de Poincaré definido pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares.



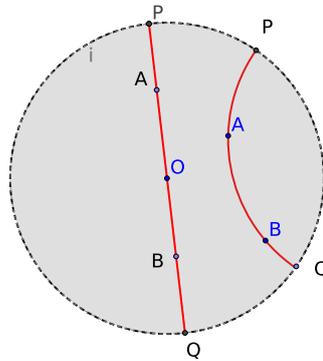
**Figura 5.6:** Triângulo no Disco de Poincaré definido pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

O modelo do Disco de Poincaré é chamado **conforme** pois preserva as medidas de ângulo (o instrumento que mede ângulos no plano euclidiano é o mesmo que mede

ângulos no Disco de Poincaré). Claramente observa-se na figura que os ângulos internos do triângulo de Poincaré são menores que os seus correspondentes euclidianos.

O modelo conforme distorce seriamente os objetos reta e distância entre dois pontos. Obviamente, a distância entre dois pontos no modelo hiperbólico não pode “emprestar” a distância euclidiana da mesma forma que foi feito na definição de medida de ângulo. Para definir o conceito de distância entre dois pontos no Disco de Poincaré será necessário inicialmente definir os chamados **pontos ideais** de uma reta hiperbólica.

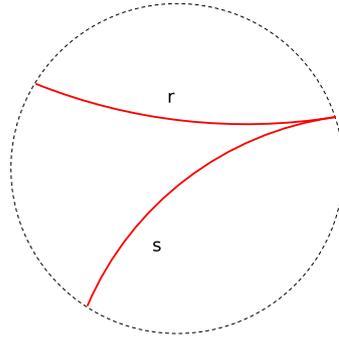
Considere  $A$  e  $B$  dois pontos distintos quaisquer no  $D_P$ . Se  $A$  e  $B$  estão sobre um diâmetro da circunferência, então definimos  $P$  e  $Q$  como os pontos extremos desse diâmetro (pertencentes à circunferência mas não pertencentes à  $D_P$ ). Se  $A$  e  $B$  não estão sobre um diâmetro, então existe uma única circunferência que os contém e é perpendicular à fronteira do Disco de Poincaré. Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção da circunferência e a fronteira do Disco de Poincaré. Ver figura 5.7.



**Figura 5.7:** Pontos ideais no Disco de Poincaré.

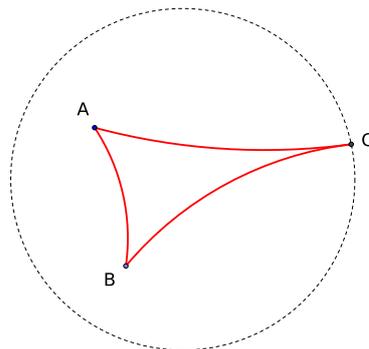
Ressaltamos que, em ambos os casos,  $P$  e  $Q$  são pontos sobre a fronteira e não pertencem ao Disco de Poincaré. Assim, dada uma reta  $r$  no Disco de Poincaré, os pontos  $P$  e  $Q$  por ela determinados na fronteira do disco são chamados de **pontos ideais** para o modelo e devem ser entendidos como sendo “pontos infinitamente distantes” de qualquer ponto pertencente ao modelo. Estes pontos ideais, apesar de não fazerem parte do modelo, são utilizados para o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer pertencentes ao Disco de Poincaré.

**Observação 5.1.** Os pontos ideais ajudam a visualizar um outro fenômeno hiperbólico. Por exemplo, retas hiperbólicas paralelas que se “encontram” em um ponto ideal. Estas retas paralelas são denominadas de retas paralelas assintóticas. Ver figura 5.8.



**Figura 5.8:** Retas paralelas assintóticas.

Outro exemplo seria o caso em que um ponto ideal atua como o terceiro vértice de um triângulo, neste caso, denominado triângulo hiperbólico assintótico uma vez que um dos vértices não pertence ao triângulo. Ver figura 5.9.



**Figura 5.9:** Um triângulo assintótico.

### 5.3.4 A geometria analítica no Disco de Poincaré

Analiticamente, o modelo do Disco de Poincaré é definido como o conjunto de todos pontos  $P(x, y)$  do plano euclidiano tais que

$$D_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

As retas hiperbólicas no Disco de Poincaré são classificadas em dois tipos (ver definição 5.3). As retas serão diâmetros ou circunferências perpendiculares à fronteira do Disco de Poincaré. Os diâmetros devem ter equação analítica da forma  $x = 0$  ou  $y = mx$  para algum  $m \in \mathbb{R}$ . As circunferências serão da forma  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Por outro lado, se o centro da circunferência é dado por  $C = (a, b)$  e  $M$  é um dos

pontos ideais da h-reta, a condição de ortogonalidade fornece que o triângulo  $\triangle OMC$  é retângulo em  $M$ . Logo,  $r^2 + 1 = a^2 + b^2$ . Portanto, a h-reta é dada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1. \quad (5.4)$$

Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos pertencentes à  $D_P$ . Temos dois casos a considerar:

1.  $x_A y_B - x_B y_A = 0$ . Se  $x_A - x_B = 0$  então  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in D_P \text{ tal que } x = 0\}$ . Se  $x_A - x_B \neq 0$  então

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in D_P \text{ tal que } y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x\}.$$

Estas são as retas do primeiro tipo.

2.  $x_A y_B - x_B y_A \neq 0$  (retas do segundo tipo). Substituindo as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  na equação (5.4) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_A a + y_A b &= \frac{1}{2}(1 + x_A^2 + y_A^2) \\ x_B a + y_B b &= \frac{1}{2}(1 + x_B^2 + y_B^2) \end{aligned}$$

A solução será

$$a = \frac{(1 + x_A^2 + y_A^2)y_B - (1 + x_B^2 + y_B^2)y_A}{2(x_A y_B - x_B y_A)} \quad (5.5)$$

e

$$b = \frac{(1 + x_B^2 + y_B^2)x_A - (1 + x_A^2 + y_A^2)x_B}{2(x_A y_B - x_B y_A)} \quad (5.6)$$

com  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - 1}$ .

**Exemplo 5.9.** Determine analiticamente a h-reta que passa pelos pontos  $A = (1/4, 1/2)$  e  $B = (-1/4, -1/2)$ . Como  $x_A y_B - x_B y_A = 0$  e  $x_A - x_B \neq 0$  então

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 2.$$

Assim,  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in D_P \text{ tal que } y = 2x\}$

**Exemplo 5.10.** Determine analiticamente a equação da h-reta que passa pelos pontos  $A = (1/4, 1/2)$  e  $B = (1/2, 0)$ . Neste caso,  $x_A y_B - x_B y_A \neq 0$ . A reta é do segundo tipo. Determinando os valores de  $a$  e  $b$  segundo as equações (5.5) e (5.6) respectivamente, temos  $a = 5/4$  e  $b = 11/16$ . O raio será  $r = \sqrt{265}/16$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{AB} = \{(x, y) \in D_P \text{ tal que } (x - 5/4)^2 + (y - 11/16)^2 = 265/256\}$ .

A medida de distância hiperbólica entre pontos no Modelo Semiplano de Poincaré será dada pela definição a seguir:

**Definição 5.5.** *Sejam os pontos  $A$  e  $B \in D_P$ . Definimos:*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right|.$$

sendo  $M$  e  $N$  os pontos ideais da h-reta e  $AM$ ,  $AN$ ,  $BM$  e  $BN$  as medidas euclidianas (comprimentos) dos segmentos  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{BN}$  respectivamente.

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos quaisquer do Modelo do Disco de Poincaré. Seja  $O$  um ponto qualquer sobre a h-reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$ . Então,

$$\begin{aligned} f : \overleftrightarrow{AB} &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto f(P) = \ln \frac{(OM)(PN)}{(ON)(PM)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

sendo  $M$  e  $N$  os pontos ideais da h-reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $OM$ ,  $PN$ ,  $ON$  e  $PM$  as distâncias euclidianas entre os respectivos pontos que definem os segmentos.

Observamos que a escolha do ponto  $O$  sobre a h-reta é uma escolha para a origem do sistema de coordenada da reta. O sentido positivo da h-reta de segundo tipo depende da escolha do ponto ideal  $M$ .

Verificamos que a função  $f$  definida pela função coordenada (5.7) satisfaz

- (i)  $f$  associa a todo ponto de uma reta hiperbólica um único número real;
- (ii)  $f$  é função bijetora;
- (iii) Quaisquer dois pontos distintos sobre a reta hiperbólica podem ser identificados pelas coordenadas 0 (escolha do ponto  $O$ ) e um número real positivo (sentido da h-reta);
- (iv) Para uma h-reta temos que:

$$d(A, B) = |f(A) - f(B)| = \left| \ln \frac{(OM)(AN)}{(ON)(AM)} - \ln \frac{(OM)(BN)}{(ON)(BM)} \right| = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right|.$$

Verifica-se assim que  $d(A, B) = |a - b|$  sendo  $a$  e  $b$  as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

- (v) A distância satisfaz a propriedade de que se um ponto  $C$  está entre os pontos  $A$  e  $B$ , sobre o segmento  $\overline{AB}$ , então  $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ . De fato, verificamos que  $AM > CM$ ,  $CN > AN$ ,  $BN > CN$  e  $CM > BM$ . Assim,

$$\frac{AM}{CM} > 1, \frac{CN}{AN} > 1, \frac{BN}{CN} > 1 \text{ e } \frac{CM}{BM} > 1.$$

Logo,

$$d(A, C) + d(C, B) = \ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} + \ln \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} = \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} = d(A, B).$$

Do ponto de vista analítico, a medida de ângulo será definida por

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 1:** será o ângulo euclidiano formado entre os diâmetros.

**Ângulo entre uma semirreta do tipo 1 e uma semirreta do tipo 2:** Seja  $A = (x_A, y_A)$  o vértice comum das semirretas  $x = 0$  ou  $y = \operatorname{tg} \theta_1 x$  (tipo 1) e  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$  (tipo 2). Na semirreta do tipo 2 é possível determinar a declividade da reta tangente à semicircunferência num ponto qualquer determinando a derivada implícita, isto é,

$$2(x - a) + 2(y - b) \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}.$$

Inicialmente consideremos o ângulo entre as retas  $x = 0$  e  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$ . O vértice  $A$  será dado por  $A = (0, b + \sqrt{b^2 - 1})$  se  $b > 1$  ou  $A = (0, b - \sqrt{b^2 - 1})$  se  $b < 1$ . A declividade da reta tangente à semicircunferência no ponto  $A$  será

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{b^2 - 1}} & \text{se } b > 1 \\ -\frac{a}{\sqrt{b^2 - 1}} & \text{se } b < -1 \end{cases}$$

Assim, a medida do ângulo euclidiano  $\theta$  entre as semirretas do tipo 1 e do tipo 2 será dada pela equação:

$$\theta = 90 - \operatorname{arctg} \left| \frac{a}{\sqrt{b^2 - 1}} \right|.$$

Consideremos agora o ângulo entre as retas  $y = \operatorname{tg} \theta_1 x$  e  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$ . Seja  $A = (x_A, y_A)$  o vértice comum. Logo, usando a relação trigonométrica (5.3), a declividade da reta tangente à semicircunferência no vértice  $A$  será

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{-\frac{x_A - a}{y_A - b} - \operatorname{tg} \theta_1}{1 - \frac{x_A - a}{y_A - b} \operatorname{tg} \theta_1}.$$

A medida do ângulo euclidiano  $\theta$  entre as semirretas do tipo 1 e do tipo 2 será dada pela equação:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{x_A - a}{y_A - b} + \operatorname{tg} \theta_1}{\frac{x_A - a}{y_A - b} \operatorname{tg} \theta_1 - 1} \right).$$

**Ângulo entre duas semirretas do tipo 2:** Seja  $A = (x_A, y_A)$  o vértice comum das semirretas  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$  e  $(x - c)^2 + (y - d)^2 = c^2 + d^2 - 1$ . Analogamente ao item anterior, para cada semirreta do tipo 2 determinamos a declividade da reta tangente à respectiva semicircunferência no vértice  $A$  determinando as tangentes dos respectivos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , ou seja,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{x_A - a}{y_A - b} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{x_A - c}{y_A - d}.$$

A medida do ângulo euclidiano  $\theta$  entre as semirretas euclidianas será dada pela diferença entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Aplicando a relação (5.3) temos que

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{(x_A - c)(y_A - b) - (x_A - a)(y_A - d)}{(y_A - b)(y_A - d) + (x_A - a)(x_A - c)} \right).$$

**Exemplo 5.11.** Determinar o ângulo entre as retas hiperbólicas  $-x/2 + y/4 = 0$  e  $(x - 5/4)^2 + (y - 11/16)^2 = 265/256$ .

(a) Determinamos o ponto de interseção  $A$  das retas hiperbólicas, para isso temos que resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas, isto é:

$$\begin{cases} -x/2 + y/4 = 0 \\ (x - 5/4)^2 + (y - 11/16)^2 = 265/256 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

O vértice é  $A = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ .

(b) O ângulo  $\theta$  entre as retas hiperbólicas no ponto  $A$  será

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{1/4 - 5/4}{1/2 - 11/16} + 2}{2 \frac{1/4 - 5/4}{1/2 - 11/16} - 1} \right) = \operatorname{arctg}(22/29) \cong 37,18.$$

**Exemplo 5.12.** Determinar o ângulo entre as retas hiperbólicas  $(x - 5/4)^2 + (y - 11/16)^2 = 265/256$  e  $(x - 5/4)^2 + (y - 1/4)^2 = 5/8$ .

(a) Determinamos o ponto de interseção  $A$  entre as retas hiperbólicas, isto é:

$$\begin{cases} (x - 5/4)^2 + (y - 11/16)^2 = 265/256 \\ (x - 5/4)^2 + (y - 1/4)^2 = 5/8 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ e } x = \frac{1}{2}$$

O vértice é  $A = (\frac{1}{2}, 0)$ .

(b) O ângulo  $\theta$  entre as retas hiperbólicas no ponto  $A$  será

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arctg} \left( \frac{(1/2 - 5/4)(0 - 11/16) - (1/2 - 5/4)(0 - 1/4)}{(0 - 11/16)(0 - 1/4) + (1/2 - 5/4)(1/2 - 5/4)} \right) \\ &= \operatorname{arctg}(21/47) \cong 24,08. \end{aligned}$$

## 5.4 O modelo do Disco de Beltrami-Klein

Consideremos o plano euclidiano  $E$ . Fixado um ponto  $O$  e um valor real  $r$  positivo definimos o Disco de Beltrami-Klein como o conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano euclidiano que são interiores (sem a fronteira) à circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , ou seja,

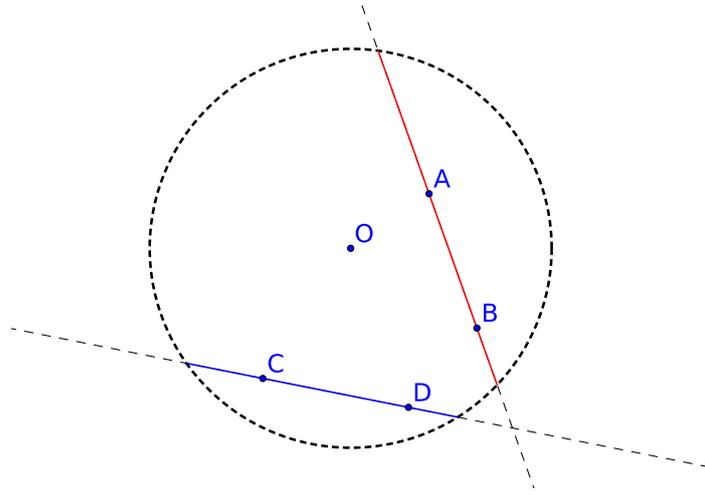
$$B_K = \{X \in E \mid d(X, O) < r\}.$$

sendo  $d$  a distância euclidiana.

No Disco de Beltrami-Klein definimos reta como

**Definição 5.6** (Reta hiperbólica). *Dados dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $B_K$ . A reta hiperbólica que passa por  $A$  e  $B$  será a interseção da reta euclidiana que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  com o Disco de Beltrami-Klein, ou seja, a reta hiperbólica será uma corda aberta (sem os pontos da fronteira) do disco.*

A construção geométrica das retas para os pontos  $A, B \in D_K$  é imediata.



**Figura 5.10:** Exemplos de retas no Disco de Beltrami-Klein.

Analogamente ao Modelo do Disco de Poincaré, os pontos de interseção de uma h-reta e a fronteira do Disco de Beltrami-Klein serão denominados **pontos ideais** da h-reta.

Definimos **semiplanos** da seguinte maneira. Seja a reta hiperbólica  $l$ . Pela definição, a reta hiperbólica  $l$  é uma corda (aberta) do Disco de Beltrami-Klein. Por outro lado,  $l$  foi determinada a partir de uma reta euclidiana  $r$  que divide o plano euclidiano em dois semiplanos euclidianos  $H_r^+$  e  $H_r^-$ . Definimos então os semiplanos determinados pela reta  $l$  como a interseção dos semiplanos  $H_r^+$  e  $H_r^-$  com o Disco de Beltrami-Klein, ou seja,

$$H_l^+ = H_r^+ \cap D_K \quad \text{e} \quad H_l^- = H_r^- \cap D_K.$$

### 5.4.1 Distância

As definições de medidas de distância e ângulo não podem ser interpretadas diretamente no Disco de Beltrami-Klein. As interpretações serão feitas no Modelo do Disco de Poincaré. Para isso, utilizaremos um aplicação bijetora entre os modelos dos Discos de Poincaré e Beltrami-Klein que mapeia pontos em pontos e retas em retas, respectivamente. Esta aplicação será denominada de isomorfismo entre os modelos e será vista em detalhes na seção 5.5. As definições de medidas de distância e ângulos

serão feitas a partir do Modelo do Disco de Poincaré. Verificaremos também que o modelo do Disco de Beltrami-Klein não é conforme, ou seja, não preserva a medida de ângulo.

Definimos a distância entre dois pontos quaisquer no modelo do Disco de Beltrami-Klein, por:

**Definição 5.7.** *Sejam  $A$  e  $B \in D_K$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é definida por:*

$$d(A, B) = \frac{1}{2} |\ln[AB, PQ]|,$$

onde  $[AB, PQ]$  é a razão cruzada determinada por

$$[AB, PQ] = \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)}$$

onde  $AP$ ,  $BQ$ ,  $AQ$  e  $BP$  são as medidas, no sentido euclidiano, dos respectivos segmentos de reta euclidianos.

**Teorema 5.5.** *Sejam  $A$  e  $B \in D_K$ .  $d(A, B) = \frac{1}{2} |\ln[AB, PQ]|$  satisfaz as seguintes propriedades:*

(i)  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .

(ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao Teorema 5.3. □

### 5.4.2 Medida de ângulo

No modelo do Disco de Beltrami-Klein será feita a partir da medida de ângulo no modelo do Disco de Poincaré, considerando o isomorfismo entre os dois discos. Ou seja, dadas duas semirretas de vértice comum no Disco de Beltrami-Klein, associamos através do isomorfismo, duas semirretas de vértice comum no Disco de Poincaré onde a medida do ângulo será feita. Esta medida será a medida do ângulo no modelo do Disco de Beltrami-Klein. Isso será visto em detalhes na seção 5.5.

A vantagem do modelo do Disco de Beltrami-Klein é que é muito simples descrever pontos e retas. A desvantagem é o fato que ele não é conforme. Nem a medida de distância, nem a medida de ângulo estão diretamente representados no modelo.

## 5.5 Isomorfismos entre os modelos da Geometria Hiperbólica

Nesta seção iremos exibir os isomorfismos entre os modelos do Disco de Beltrami-Klein, Semiplano e Disco de Poincaré.

**Definição 5.8.** *Dois modelos  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  de um sistema axiomático são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca  $\varphi$  entre  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  que associa o conjunto de pontos e retas de  $\mathcal{M}_1$  para o conjunto de pontos e retas de  $\mathcal{M}_2$  preservando todas as relações. Em particular, se os termos não definidos do sistema axiomático consistem dos termos "ponto", "reta" e "pertencer à" então  $\varphi$  deve satisfazer as seguintes condições:*

- (i) *Para cada ponto  $P$  e reta  $r$  em  $\mathcal{M}_1$ ,  $\varphi(r)$  e  $\varphi(l)$  são ponto e reta em  $\mathcal{M}_2$ .*
- (ii) *Se  $P$  pertence à  $r$ , então  $\varphi(P)$  pertence à  $\varphi(l)$ .*

Neste sentido, vamos considerar os modelos definidos por

**Modelo do Disco de Beltrami-Klein** :  $B_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ .

**Modelo do Semiplano de Poincaré** :  $S_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ .

**Modelo do Disco de Poincaré** :  $D_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ .

Sejam  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  dois modelos para a Geometria Hiperbólica. Diremos que a aplicação bijetora  $T : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  é um isomorfismo entre os modelos  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  se  $T$  é tal que leva ponto em ponto e reta em reta dos modelos  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  respectivamente. Neste caso, diremos que os modelos  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  são isomorfos.

### 5.5.1 A projeção estereográfica

Consideremos um plano e uma esfera tangente a este plano. No ponto de tangência da esfera e o plano tomamos a reta perpendicular ao plano. Esta reta passa pelo centro da esfera e intercepta a esfera no ponto, que denominaremos de polo, diametralmente oposto ao ponto de tangência. Definimos a aplicação que associa todo ponto da esfera, exceto o polo, um ponto do plano. Este ponto no plano é dado pela interseção da reta que passa pelo ponto da esfera e o polo com o plano. Chamamos esta aplicação de projeção estereográfica.

Vamos agora descrever analiticamente a projeção estereográfica. Seja  $S^2$  a esfera de centro  $(0, 0, 1)$  e raio  $r = 1$ , ou seja,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1^2\}.$$

Esta esfera é tangente ao plano  $z = 0$  no ponto  $(0, 0, 0)$ . A reta que passa por  $N = (0, 0, 2) \in S^2$  e o ponto  $P = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$  é dada por:

$$r : (X, Y, Z) = t[(x, y, 0) - (0, 0, 2)] + (0, 0, 2) = (tx, ty, 2(1 - t)) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Para que o ponto  $Q = (X, Y, Z)$  pertencente a reta  $r$  pertença também a esfera  $S^2 - N$  deve satisfazer a equação  $X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1$ , ou seja,

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (2(1 - t) - 1)^2 = 1.$$

Simplificando a expressão anterior obtemos

$$t^2(x^2 + y^2 + 4) - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4}.$$

Verificamos que  $t = 0$  implica no ponto  $N$  que estamos removendo. Assim, as coordenadas do ponto  $Q$  na esfera  $S^2$  serão:

$$Q = \left( \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

Reciprocamente, dado um ponto  $Q = (X, Y, Z)$  na esfera  $S^2 - N$  é possível determinar as coordenadas do ponto  $P$  no plano  $z = 0$ . Para isso, consideramos a reta  $r$  que passa por  $N$  e  $Q$ , ou seja,

$$r : (x, y, z) = t[(X, Y, Z) - (0, 0, 2)] + (0, 0, 2) = (tX, tY, t(Z - 2) + 2) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

O ponto  $P$  será a interseção de  $r$  com o plano  $z = 0$ . Assim, temos que impor

$$t(Z - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{2 - Z}.$$

Logo,

$$P = \left( \frac{2X}{2 - Z}, \frac{2Y}{2 - Z}, 0 \right).$$

Definimos a projeção estereográfica como a aplicação

$$\begin{aligned} T_N : S^2 - N &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto T(X, Y, Z) = \left( \frac{2X}{2 - Z}, \frac{2Y}{2 - Z} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

É imediato que  $T$  é bijetora e que sua inversa será dada por

$$\begin{aligned} T_N^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 - N \\ (x, y) &\mapsto T^{-1}(x, y) = \left( \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

**Teorema 5.6.** *A projeção estereográfica  $T : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz a propriedade de que  $T$  leva circunferências sobre a esfera menos  $N$  em circunferências ou retas no plano euclidiano.*

*Demonstração.* Consideremos a projeção estereográfica da esfera  $S^2$  de centro  $(0, 0, 1)$  e raio  $r = 1$  pelo ponto  $N = (0, 0, 2) \in S^2$  sobre o plano  $z = 0$ . Qualquer circunferência sobre esta esfera será a interseção de  $S^2 - \{N\}$  com um plano

$$\alpha X + \beta Y + \gamma(Z - 1) + \delta = 0.$$

sendo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  as componentes do vetor normal ao plano. Observamos que  $\alpha$  e  $\beta$  não simultaneamente nulos pois, se  $\alpha = \beta = 0$  teríamos um plano paralelo ao plano  $z = 0$ . Dividindo a equação geral do plano por  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$  obtemos:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} X + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} Y + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} (Z - 1) + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = 0.$$

Lembrando que neste caso, dado dois planos paralelos quaisquer, a diferença entre os termos independentes (quando o módulo do vetor normal é unitário) fornece a distância entre os planos dados. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , ou seja, o vetor normal do plano é unitário. Desta maneira,  $\delta$  será um valor real que satisfaz  $-1 < \delta < 1$ . Observamos que (i) fixado um plano que passa pelo ponto  $(0,0,1)$  ( $\delta = 0$ ), os valores de  $\delta$  para qualquer outro plano paralelo ao plano fixado deverá ter os valores no intervalo aberto  $]-1,1[$  para que ocorra interseções do plano com a esfera; (ii)  $\delta = \pm 1$  ocorre na tangencia dos planos, não determinando circunferências na esfera. (iii) pela simetria da esfera podemos restringir nosso estudo para valores de  $0 \leq \delta < 1$ . Logo, as circunferências em  $S^2 - \{N\}$  serão dadas pelo lugar geométrico dos pontos  $Q = (X, Y, Z)$  de  $S^2 - \{N\}$  tais que satisfaçam as equações

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1 \\ \alpha X + \beta Y + \gamma(Z - 1) + \delta = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

com  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  e  $0 \leq \delta < 1$ .

Um ponto  $Q$  pertencente a uma circunferência na esfera  $S^2 - \{N\}$  é levado pela projeção estereográfica  $T$  no ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Vamos mostrar que este ponto pertence a uma circunferência ou reta do plano. De fato, como  $T(Q) = P$  podemos aplicar  $T^{-1}$ . Pela equação (5.9) temos que:

$$Q = \left( \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

Como  $Q$  deve satisfazer as equações (5.10) obtemos

$$\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}\alpha + \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}\beta + \left( \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} - 1 \right) \gamma + \delta = 0.$$

Manipulando algebricamente teremos

$$4x \alpha + 4y \beta + 2(x^2 + y^2) \gamma + (x^2 + y^2 + 4)(\delta - \gamma) = 0.$$

Agrupando os termos de mesmo grau em  $x$  e  $y$  obtemos

$$(\delta + \gamma)x^2 + (\delta + \gamma)y^2 + 4\alpha x + 4\beta y + 4(\delta - \gamma) = 0. \quad (5.11)$$

Temos então duas possibilidades:

(a)  $\delta + \gamma = 0$ . A equação (5.11) será dada por

$$4\alpha x + 4\beta y + 4(\delta - \gamma) = 0.$$

que é a equação de uma reta em  $\mathbb{R}^2$ .

(b)  $\delta + \gamma \neq 0$ . Reescrevemos a equação (5.11)

$$x^2 + y^2 + 4\frac{\alpha}{\delta + \gamma}x + 4\frac{\beta}{\delta + \gamma}y + 4\frac{\delta - \gamma}{\delta + \gamma} = 0.$$

Completando quadrados obtemos

$$\left(x + 2\frac{\alpha}{\delta + \gamma}\right)^2 + \left(y + 2\frac{\beta}{\delta + \gamma}\right)^2 = 4\frac{\alpha^2}{(\delta + \gamma)^2} + 4\frac{\beta^2}{(\delta + \gamma)^2} - 4\frac{\delta - \gamma}{\delta + \gamma}.$$

Assim,

$$\left(x + 2\frac{\alpha}{\delta + \gamma}\right)^2 + \left(y + 2\frac{\beta}{\delta + \gamma}\right)^2 = 4\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}{(\delta + \gamma)^2} = 4\frac{(1 - \delta^2)}{(\delta + \gamma)^2}. \quad (5.12)$$

É imediato que  $1 - \delta^2 > 0$ . Logo, a equação (5.12) representa uma circunferência de centro  $\left(\frac{-2\alpha}{\delta + \gamma}, \frac{-2\beta}{\delta + \gamma}\right)$  e raio  $2\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{|\delta + \gamma|}$ .

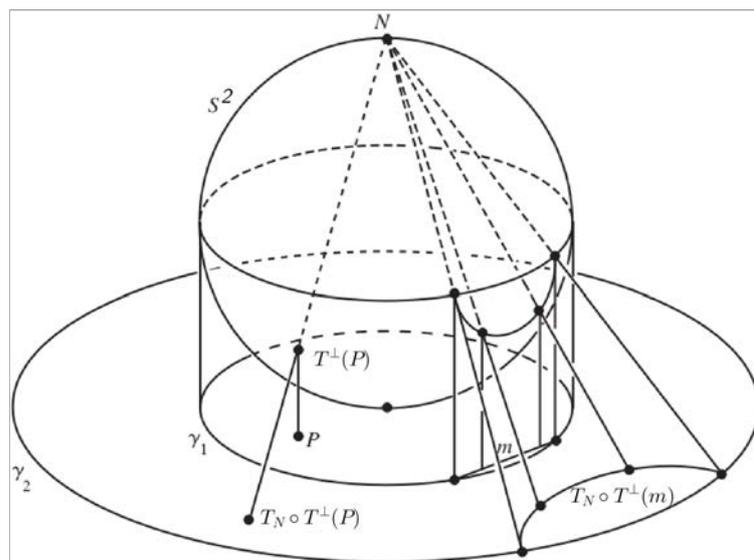
□

### 5.5.2 Isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Disco de Poincaré

Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ . Consideremos a projeção ortogonal de um ponto de um disco  $D$  de centro  $(0,0)$  e raio 1 sobre o hemisfério inferior da esfera  $S^2$ , ou seja

$$\begin{aligned} T^\perp : D &\longrightarrow S^2 \\ (x, y) &\longmapsto T^\perp(x, y) = (x, y, 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Agora vamos definir um isomorfismo entre os modelos do Disco de Beltrami-Klein  $B_K$  e o Disco de Poincaré  $D_P$ . Neste sentido, dado um ponto  $P = (x, y) \in B_K$  inicialmente consideraremos a projeção ortogonal deste ponto no hemisfério inferior de  $S^2 - \{N\}$  dado pela equação (5.13). Em seguida, consideramos a projeção estereográfica do ponto  $T^\perp(x, y)$  no plano  $z = 0$ . Ver Figura 5.11.



**Figura 5.11:** Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein e Disco de Poincaré. Fonte: Venema [1, p. 297] - Adaptado pelo autor.

Assim, aplicando a equação (5.8) obtemos:

$$T_N \circ T^\perp(x, y) = \left( \frac{2x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{2y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right).$$

Observamos que os pontos ideais do Disco de Beltrami-Klein (circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 1) serão levados pela aplicação  $T_N \circ T^\perp$  em pontos da circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 2. De fato,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{2y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)^2 = \\ & \frac{4x^2}{(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2})^2} + \frac{4y^2}{(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2})^2} = \frac{4(x^2 + y^2)}{(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2})^2} = 4. \end{aligned}$$

pois  $x^2 + y^2 = 1$ . Para identificarmos este círculo de centro  $(0,0)$  e raio 2 com o Modelo do Disco de Poincaré fará necessário uma homotetia de razão  $(1/2)$ . Logo, consideraremos a aplicação entre os modelos do Disco de Beltrami-Klein e Poincaré dada por

$$\begin{aligned} T_{BK-DP} : BK & \longrightarrow DP \\ (x, y) & \longmapsto T_{BK-DP}(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$T_{BK-DP}(x, y) = \left( \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right). \quad (5.14)$$

Resta mostrarmos que a aplicação  $T_{BK-DP}$  é um isomorfismo entre os modelos de Disco de Beltrami-Klein e o Disco de Poincaré. Neste sentido, observamos as seguintes propriedades:

- (1) A aplicação  $T_{BK-DP}$  leva pontos de  $BK$  em pontos de  $DP$ .
- (2) A aplicação  $T_{BK-DP}$  é a composição da projeção ortogonal de um ponto no hemisfério inferior de  $S^2 - \{N\}$  com a projeção estereográfica. Como vimos na seção 5.5.1 temos:
  - (a) O plano de corte (ortogonal) para a esfera neste caso é dado por  $\alpha x + \beta y + \delta = 0$  ( $\gamma = 0$ ). Além disso,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .
  - (b) Para o caso  $\delta = 0$  teremos planos ortogonais que passam pelo polo  $N = (0, 0, 2)$ , ou seja, são diâmetros no disco de Beltrami-Klein. Como vimos na seção 5.5.1, a imagem da aplicação fornece retas que são as h-retas do tipo 1 (diâmetros) do disco de Poincaré.
  - (c) Para o caso  $\delta \neq 0$  temos cortes com plano ortogonais definidos pelas cordas (não diâmetros) do Modelo de Beltrami-Klein. Neste caso, a imagem da projeção

estereográfica e a homotetia de razão  $1/2$  fornece circunferências dadas pela equação (5.12), isto é,

$$\left(x + \frac{\alpha}{\delta}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{\delta}\right)^2 = \frac{(1 - \delta^2)}{\delta^2}.$$

Por outro lado, verificamos que

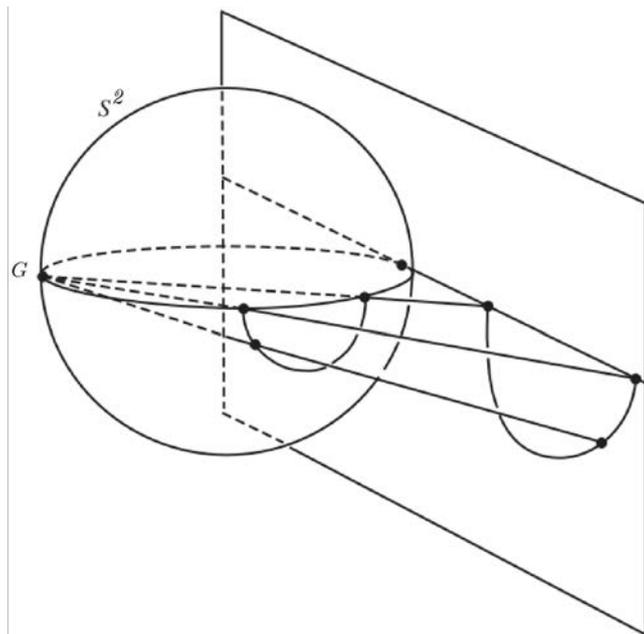
$$\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 - 1 = \frac{(1 - \delta^2)}{\delta^2} = r^2.$$

satisfazendo assim a condição de ortogonalidade (5.4) das h-retas do tipo 2 (circunferências) com a fronteira do Disco de Poincaré. Logo, as cordas (não diâmetros) do modelo de Beltrami-Klein são levadas pela aplicação  $T_{BK-DP}$  nas h-retas de tipo 2 do modelo do Disco de Poincaré.

Portanto,  $T_{BK-DP}$  é um isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Disco de Poincaré.

### 5.5.3 Isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré

Passamos para o isomorfismo entre os modelos do Disco de Beltrami-Klein  $B_K$  e o Semiplano de Poincaré  $S_P$ . A definição da aplicação será análoga ao isomorfismo entre os Discos de Beltrami-Klein  $B_K$  e de Poincaré  $D_P$ , trocando apenas a projeção estereográfica, que neste caso, será feita pelo ponto  $G = (1, 0, 1)$  sobre o plano  $x = -1$ . Ver Figura 5.12. O plano  $x = -1$  será identificado com o modelo do Semiplano de Poincaré  $SP$ .



**Figura 5.12:** Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré. Fonte: Venema [1, p. 299] - Adaptado pelo autor

A projeção estereográfica para o ponto  $G = (1, 0, 0)$  sobre o plano  $x = -1$  será obtida repetindo os cálculos anteriormente realizados. Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ . Seja o plano  $x = -1$ . A esfera  $S^2$  é tangente ao plano  $x = -1$  no ponto  $(-1, 0, 1)$ . A reta que passa por  $G = (1, 0, 1) \in S^2$  e o ponto  $P = (-1, y, z)$  é dada por:

$$r : (X, Y, Z) = t[(-1, y, z) - (1, 0, 1)] + (1, 0, 1) = (-2t + 1, ty, t(z - 1) + 1) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Para que o ponto  $Q = (X, Y, Z)$  pertencente a reta  $r$  pertença também a esfera  $S^2 - \{G\}$  deve satisfazer a equação  $X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1$ , ou seja,

$$(-2t + 1)^2 + (ty)^2 + (t(z - 1) + 1 - 1)^2 = 1.$$

Simplificando a expressão anterior obtemos

$$t^2(y^2 + (z - 1)^2 + 4) - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{4}{y^2 + (z - 1)^2 + 4}.$$

Verificamos que  $t = 0$  implica no ponto  $G$  que estamos removendo. Assim, as coordenadas do ponto  $Q$  na esfera  $S^2 - \{G\}$  serão dadas por:

$$Q = \left( \frac{y^2 + (z - 1)^2 - 4}{y^2 + (z - 1)^2 + 4}, \frac{4y}{y^2 + (z - 1)^2 + 4}, \frac{y^2 + (z - 1)(z + 3) + 4}{y^2 + (z - 1)^2 + 4} \right).$$

Reciprocamente, dado um ponto  $Q = (X, Y, Z)$  na esfera  $S^2 - \{G\}$  é possível determinar as coordenadas do ponto  $P$  no plano  $x = -1$ . Para isso, consideramos a reta  $r$  que passa por  $G$  e  $Q$ , ou seja,

$$r : (x, y, z) = t[(X, Y, Z) - (1, 0, 1)] + (1, 0, 1) = (t(X - 1) + 1, tY, t(Z - 1) + 1) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

O ponto  $P$  será a interseção de  $r$  com o plano  $x = -1$ . Impomos,

$$t(X - 1) + 1 = -1 \Leftrightarrow t = \frac{-2}{X - 1}.$$

Logo,

$$P = \left( -1, \frac{2Y}{1 - X}, \frac{2Z - X - 1}{1 - X} \right).$$

Definimos a projeção estereográfica como a aplicação

$$\begin{aligned} T_G : S^2 - \{G\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y, Z) &\mapsto T(X, Y, Z) = \left( \frac{2Y}{1 - X}, \frac{2Z - X - 1}{1 - X} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Novamente, dado um ponto  $P = (x, y) \in B_K$ , consideraremos a projeção ortogonal deste ponto em  $S^2 - \{G\}$  dada pela equação (5.13). Em seguida, consideramos a projeção estereográfica do ponto  $T^\perp(x, y)$  no plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$ , agora sob o ponto  $G$ . Logo,

$$T_G \circ T^\perp(x, y) = \left( \frac{2y}{1 - x}, \frac{(1 - x) - 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - x} \right).$$

Observamos que os pontos ideais do Disco de Beltrami-Klein (circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 1) serão levados pela aplicação  $T_G \circ T^\perp$  em pontos ideais do Semiplano de Poincaré. De fato,

$$z = \frac{(1-x) - 2\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x} = 1,$$

pois  $x^2 + y^2 = 1$ . Verificamos também que os pontos levados por  $T_G \circ T^\perp$  terão componente  $z < 1$  pois

$$z = \frac{(1-x) - 2\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x} = 1 - \frac{2\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x} < 1.$$

Logo, o Semiplano de Poincaré  $S_P$  será identificado pelo conjunto  $\{(y, 1-z) \in \mathbb{R}^2 \mid z < 1\}$ . Para identificarmos este semiplano com o Modelo do Semiplano de Poincaré  $S_P$  inicialmente definido será necessário uma translação de -1 unidade na ordenada seguida de uma reflexão em torno do eixo das ordenadas. Ressaltamos que isso será feito apenas por questões estéticas uma vez que o isomorfismo com Semiplano de Poincaré já foi obtido. Definimos assim, a aplicação entre os modelos do Disco de Beltrami-Klein e Semiplano de Poincaré dada por

$$T_{BK-SP} : B_K \longrightarrow S_P$$

sendo

$$T_{BK-SP}(x, y) = \left( \frac{y}{1-x}, \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x} \right). \quad (5.16)$$

Para mostramos que a aplicação  $T_{BK-SP}$  é um isomorfismo entre os modelos de Disco de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré, observamos as seguintes propriedades:

- (1) A aplicação  $T_{BK-SP}$  leva pontos de  $B_K$  em pontos de  $S_P$ .
- (2) A aplicação  $T_{BK-SP}$  é a composição da projeção ortogonal de um ponto no hemisfério inferior de  $S^2$  com a projeção estereográfica pelo ponto  $G = (1, 0, 1)$ . Como vimos na seção 5.5.1 temos:
  - (a) O plano de corte (ortogonal) para a esfera é dado por  $\alpha x + \beta y + \delta = 0$  ( $\gamma = 0$ ) com  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .
  - (b) Um ponto de  $S^2 - \{G\}$  que pertence ao plano de corte, já considerando  $\gamma = 0$ , deverá satisfazer a equação

$$\frac{y^2 + (z-1)^2 - 4}{y^2 + (z-1)^2 + 4} \alpha + \frac{4y}{y^2 + (z-1)^2 + 4} \beta + \delta = 0.$$

Manipulando algebricamente, reescrevemos

$$(\alpha + \delta)y^2 + (\alpha + \delta)(z-1)^2 + 4\beta y + 4(\delta - \alpha) = 0. \quad (5.17)$$

- (c) Para o caso  $\alpha + \delta = 0$ , a equação (5.17) descreve uma reta de equação  $\beta y + 2\delta = 0$ , ou seja, h-retas do tipo 1 (retas verticais) em  $S_P$  ( $x = -1$ ).
- (d) Para o caso  $\alpha + \delta \neq 0$ , completando quadrados, a equação (5.17) se reduz em

$$\left(y + 2\frac{\beta}{\alpha + \delta}\right)^2 + (z - 1)^2 = 4\frac{(1 - \delta^2)}{(\alpha + \delta)^2},$$

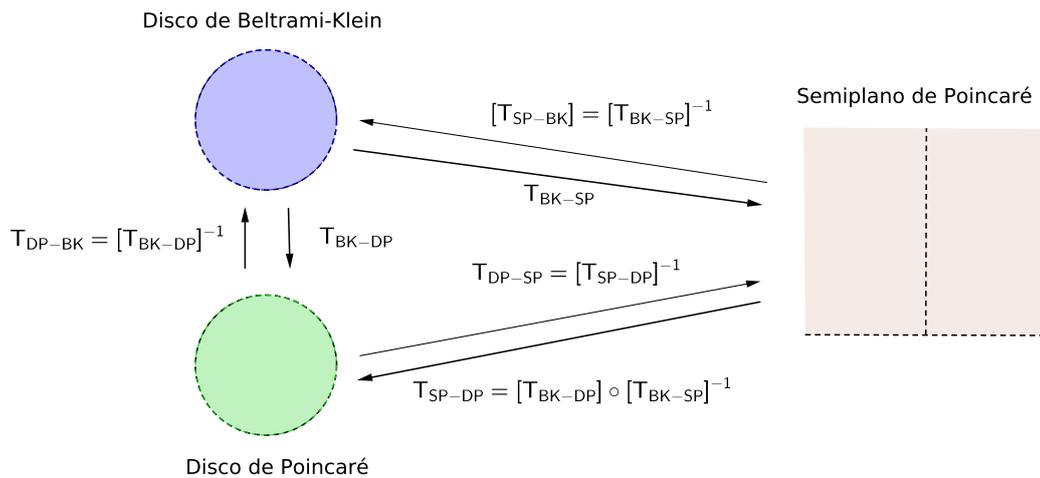
descrevendo assim a circunferência com centro  $\left(-\frac{2\beta}{\alpha + \delta}, 1\right)$  e raio  $2\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{|\alpha + \delta|}$  localizados na reta

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases},$$

isto é, h-retas do tipo 2.

Portanto,  $T_{BK-SP}$  é um isomorfismo entre os modelos de Beltrami-Klein e o Semiplano de Poincaré.

A Figura 5.13 resume as transformações descritas anteriormente.



**Figura 5.13:** Isomorfismo entre os Modelos do Disco de Beltrami-Klein, Semiplano de Poincaré e Disco de Poincaré.

## 6 Considerações finais

Ao término desta dissertação queremos registrar que de forma alguma esgotamos o assunto de Geometria Hiperbólica.

Esperamos ter cumprido o objetivo de apresentar um texto introdutório ao tema, apresentando detalhes sobre os modelos do Disco de Beltrami-Klein, Disco de Poincaré e Semiplano de Poincaré. Ao longo do texto pudemos ver a aplicação dos conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana e da Geometria Analítica de Descartes para o desenvolvimento de uma outra formulação da Geometria.

Para aprofundamento no assunto, como por exemplo: estudo de áreas dos polígonos hiperbólicos, circunferências no plano hiperbólico, trigonometria hiperbólica, funções hiperbólicas, a não existência de semelhança de triângulos hiperbólicos, pois triângulos semelhantes implica em eles serem congruentes, recomendamos os textos que constam das referências bibliográficas deste trabalho.

O desenvolvimento teórico das geometrias não euclidianas é justamente um dos muitos exemplos da história da matemática em que idéias que foram exploradas puramente de forma abstrata se tornaram importantes ferramentas para as aplicações práticas. Como exemplo, podemos citar o fato de que Albert Einstein se beneficiou com os conhecimentos já estabelecido das Geometrias Hiperbólica e Riemanniana para desenvolver sua Teoria da Relatividade Geral.

# Referências

- [1] VENEMA, G. A. *The foundations of geometry*. 2. ed. Boston: Pearson Prentice Hall, 2012.
- [2] EUCLIDES. *Os elementos (Tradução de Irineu Bicudo)*. São Paulo: UNESP, 2009.
- [3] CEDERBERG, J. *A Course in Modern Geometries*. [S.l.]: Springer, 2001. (Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology).
- [4] BARBOSA, J. L. *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [5] BARBOSA, J. L. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [6] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Plana*. São Paulo: Editora Atual, 2011. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 9).
- [7] GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-euclidean geometries: development and history*. New York: W.H. Freeman and Co., 1993.
- [8] SMOGORZHEVSKI, A. S. *Acerca de la Geometria de Lobachevski*. Moscú: Editora Mir, 1978. (Leciones Populares de Matemáticas).