INVERSÃO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

A ***inversão na circunferência*** $C(O,r)$ é a aplicação que envia cada ponto $P \neq O$ no único ponto $Q \in OP$ tal que

$$OP \times OQ = r^2$$

(também se chama a esta aplicação a *inversão de pólo O e potência r^2*)

O inverso do pólo de inversão *O* não está definido. A inversão é assim uma bijecção de "plano furado" em si próprio.

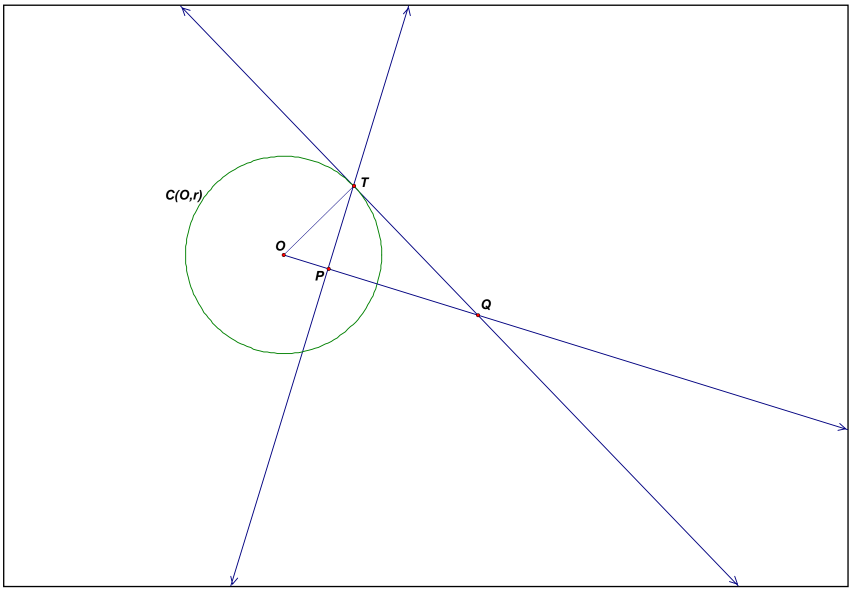
A inversão é involutiva: se *P* é o inverso de *Q*, então *Q* é o inverso de *P*; por isso podemos dizer que *P* e *Q* são os inversos um do outro.

Em seguida veremos algumas construções no Sketchpad que permitem encontrar os inversos de pontos, circunferências e rectas, bem como alguns apontamentos teóricos.

I) Inversão do ponto *P*

1. *O ponto P pertence ao interior de* $C(O,r)$

- Construir $C(O,r)$;
- Marcar ponto *P* no interior de $C(O,r)$;
- Traçar semi-recta com origem em *O* e que passa em *P*;
- Traçar a perpendicular à semi-recta *OP*, que passa por *P*;
- Determinar uma das intersecções dessa perpendicular com $C(O,r)$. Seja *T*.
- Traçar tangente a $C(O,r)$, passando por *T* (basta traçar perpendicular a *OT* que passa por *P*);
- O ponto *Q* é a intersecção da tangente com a semi-recta *OP*.



Q* é o inverso de *P

Justificação:

$Q \in OP$ por construção.

Pelo critério de semelhança AA, temos que o triangulo $[POT]$ é semelhante ao triângulo $[TOQ]$, e portanto

$$\frac{OT}{OP} = \frac{OQ}{OT}$$

ou seja,

$$OP \times OQ = OT^2$$

mas OT=r, logo

$$OP \times OQ = r^2$$

o que conclui a justificação.

Notas:

- Enquanto P se mantém no interior de $C(O,r)$, Q está sempre no exterior de $C(O,r)$.
- Quanto mais próximo está P da circunferência $C(O,r)$, mais próximo está Q da mesma.
- Quando colocamos P sobre $C(O,r)$, Q coincide com P.
- Quando aproximamos P de $C(O,r)$, Q afasta-se "para o infinito".

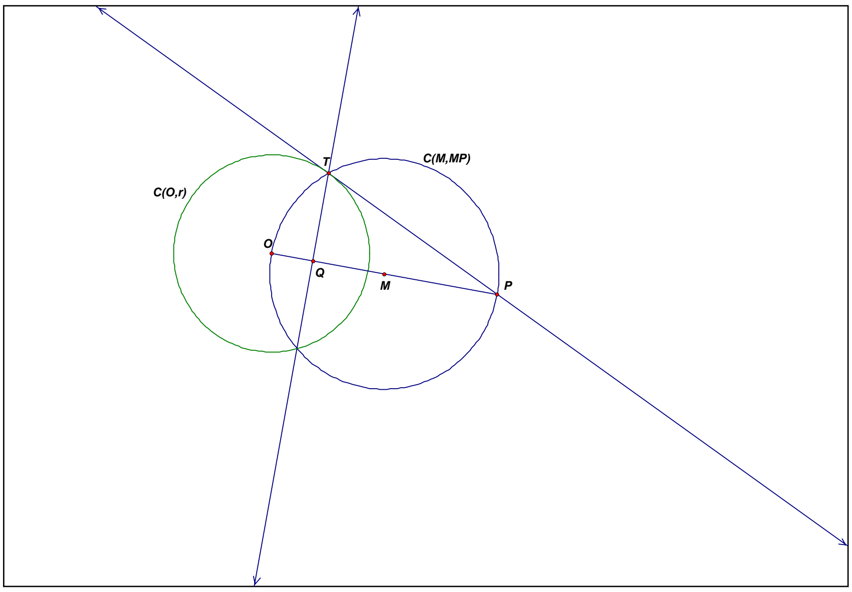
- Se arriscarmos levar P para o exterior de $C(O,r)$, vemos que Q desaparece! (a construção é apenas válida se P está no interior de $C(O,r)$).

2. *O ponto P pertence ao exterior de* $C(O,r)$

- Construir $C(O,r)$;
- Marcar ponto P no exterior de $C(O,r)$;
- Traçar tangente a $C(O,r)$ por P:

  - unir O a P por um segmento;
  - marcar ponto médio, M, de PO;
  - construir $C(M,MP)$
  - determinar uma das intersecções de $C(M,MP)$ com $C(O,r)$. Seja T.

- Traçar a tangente a $C(O,r)$ em T, que passa por P;
- Para determinar Q, basta tirar uma perpendicular a OP passando por T. Q será a intersecção da perpendicular com OP.



Q* é o inverso de *P

Justificação: *análoga à anterior.*

Notas:

- Enquanto *P* se mantém no exterior de $C(O,r)$, *Q* está sempre no interior de $C(O,r)$.
- Quanto mais próximo está *P* da circunferência $C(O,r)$, mais próximo está *Q* da mesma.
- Quando colocamos *P* sobre $C(O,r)$, *Q* coincide com *P*.
- Quando afastamos *P* "para o infinito", *Q* aproxima-se de *O*.

3. *O ponto P coincide com o centro de* $C(O,r)$

A inversão não está definida nestes casos.

4. *O ponto P está sobre a* $C(O,r)$

Neste caso, *P* coincide com *Q*.

Determinamos em seguida as imagens de rectas e circunferências por inversão de pólo O. Veremos que por aplicação de inversões, a família de rectas e circunferências do plano é preservada, embora algumas rectas sejam enviadas em circunferências e vise-versa. Assim, e ao contrário das transformações como reflexões, rotações e translações, a inversão pode alterar radicalmente o aspecto das figuras.

II) Inversão da circunferência *C(Õ,s)*

1. *A circunferência C(Õ,s) pertence ao interior de* $C(O,r)$

1.1. *A circunferência C(Õ,s) não passa por O*

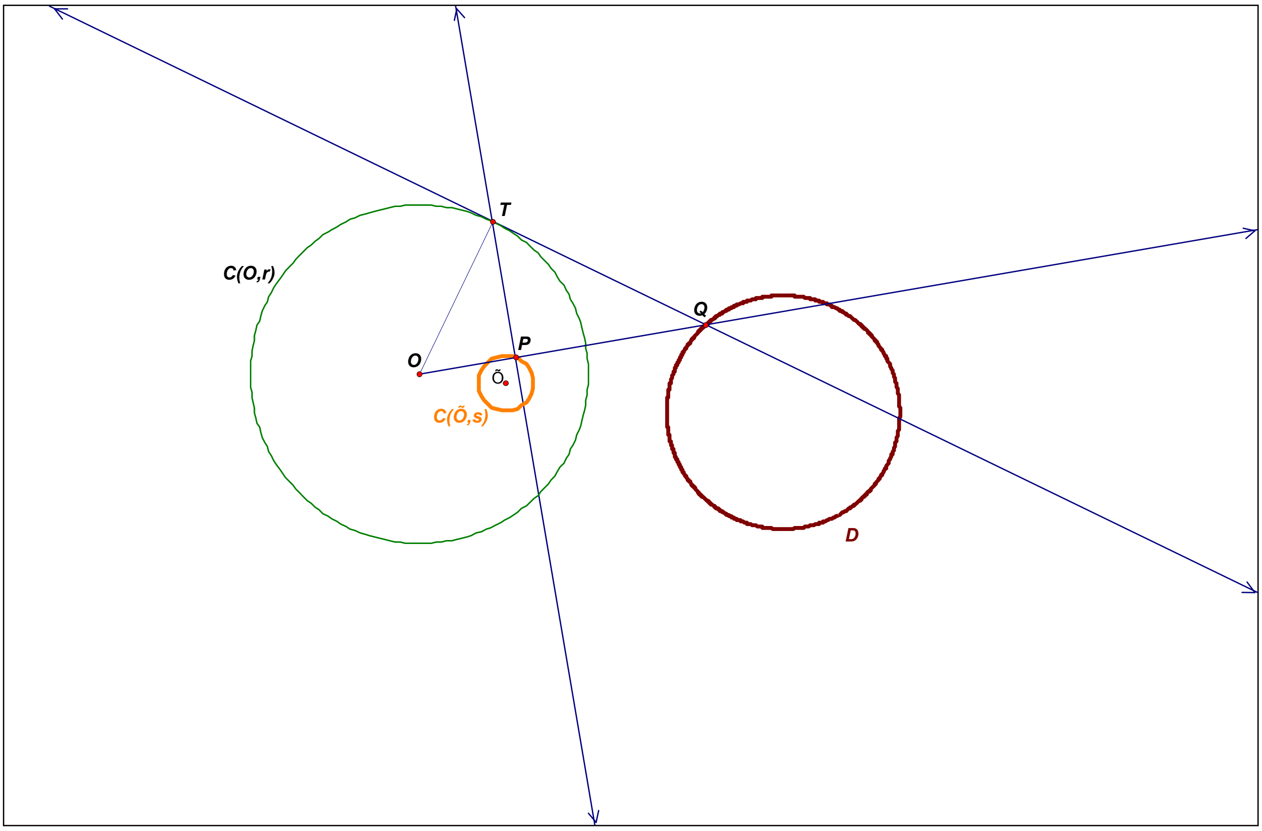
- Construir $C(O,r)$;

- Construir $C(\tilde{O},s)$ no interior de $C(O,r)$;

- Marcar um ponto *P* sobre $C(\tilde{O},s)$;

- Utilizando o processo citado em I)1., construir *Q*, inverso de *P*;

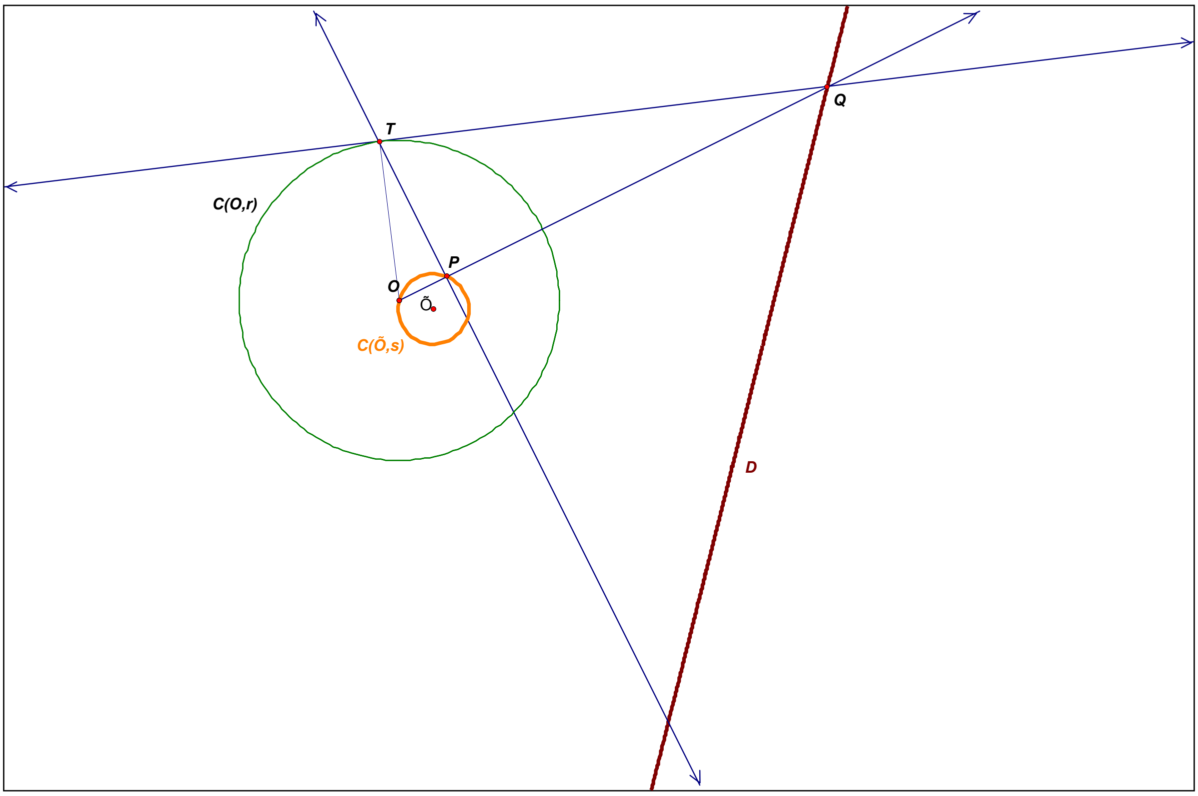
- Depois de seleccionar *P* e *Q*, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens *Q* quando arrastamos *P* ao longo de $C(\tilde{O},s)$.



***D* é o inverso de** $C(\tilde{O},s)$

1.2. *A circunferência C(Õ,s) passa por O*

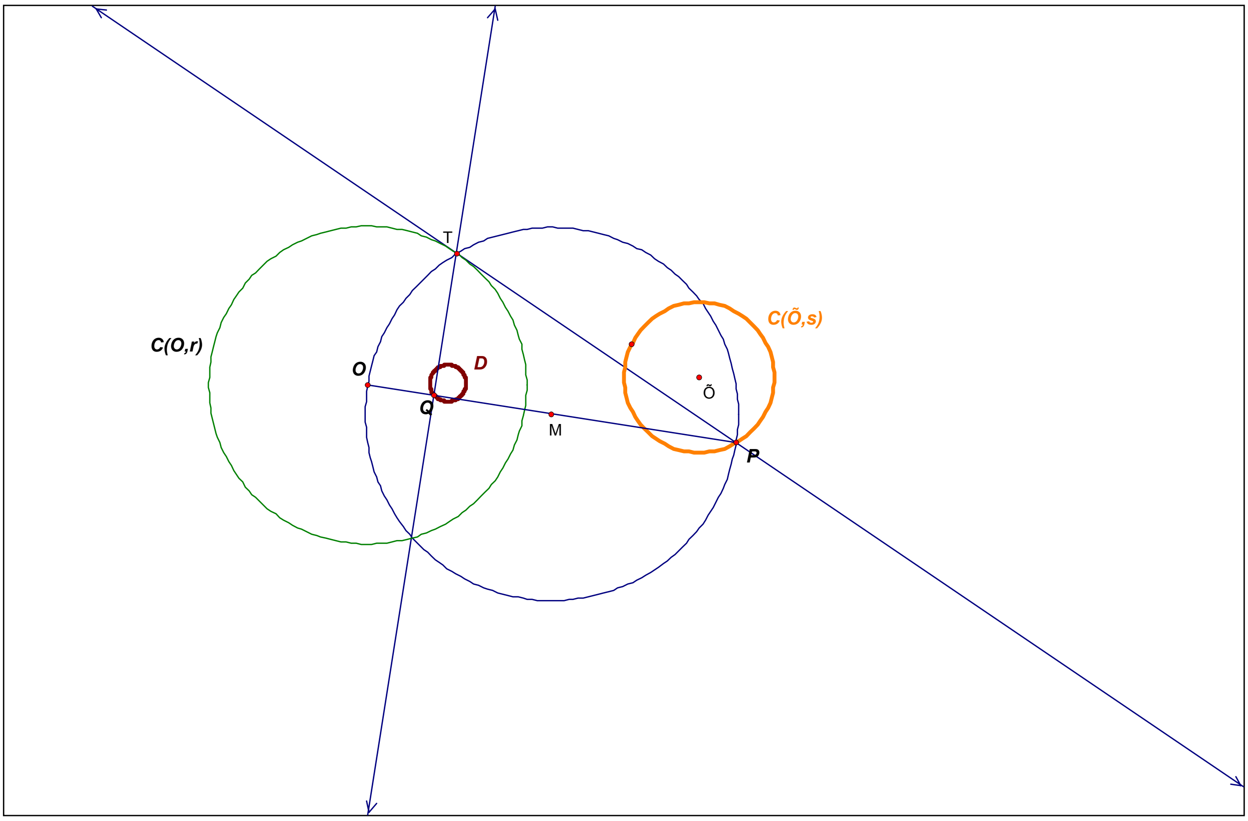
Na construção anterior arrastar $C(\tilde{O},s)$ de forma a que passe em *O*.



***D* é o inverso de** $C(\tilde{O}, s)$

2. *A circunferência C(Õ,s) pertence ao exterior de* $C(O,r)$

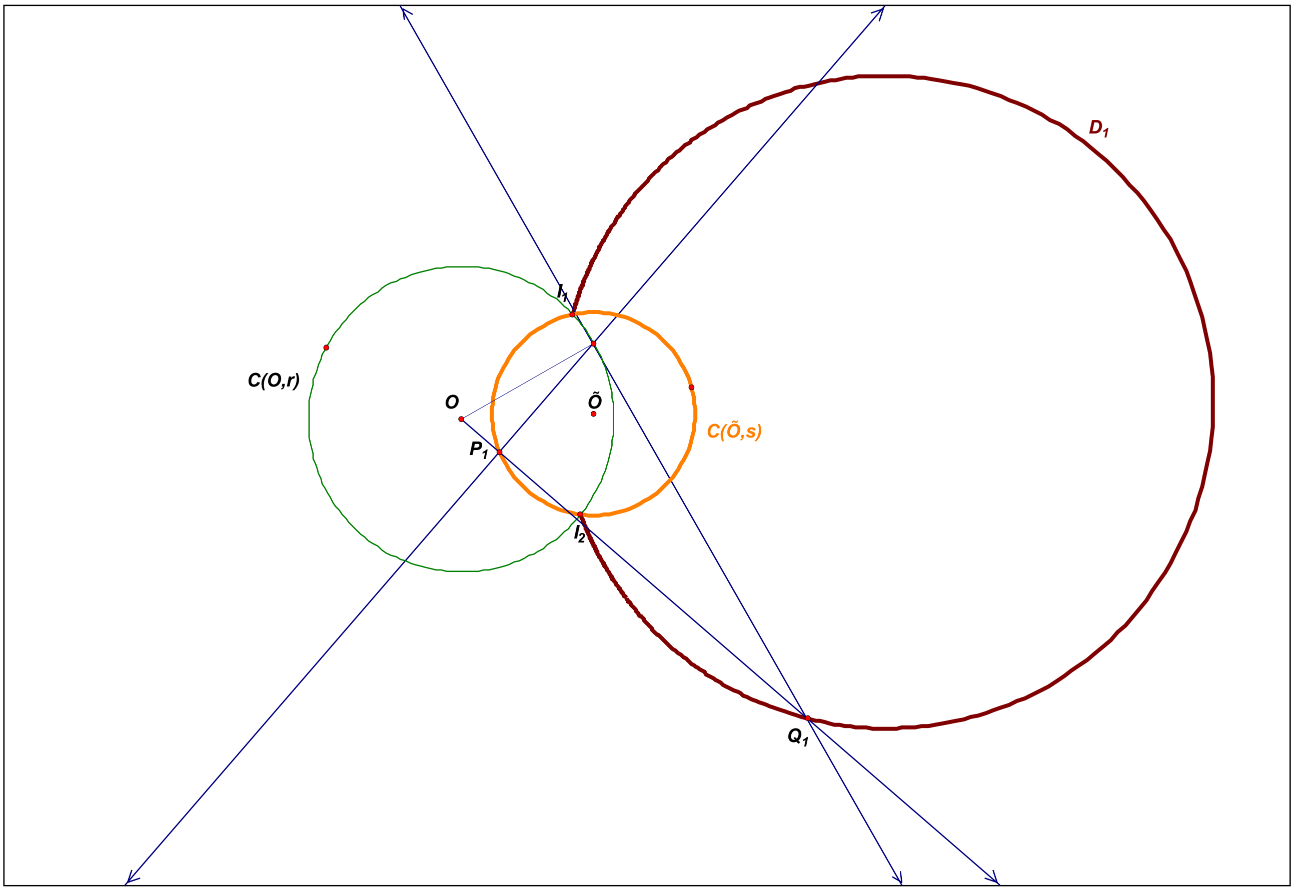
- Construir $C(O,r)$;
- Construir $C(\tilde{O}, s)$ no exterior de $C(O,r)$;
- Marcar um ponto *P* sobre $C(\tilde{O}, s)$;
- Utilizando o processo citado em I)2., construir *Q*, inverso de *P*;
- Depois de seleccionar *P* e *Q*, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct,* para visualizar as imagens *Q* quando arrastamos *P* ao longo de $C(\tilde{O}, s)$.



***D* é o inverso de** $C(\tilde{O}, s)$

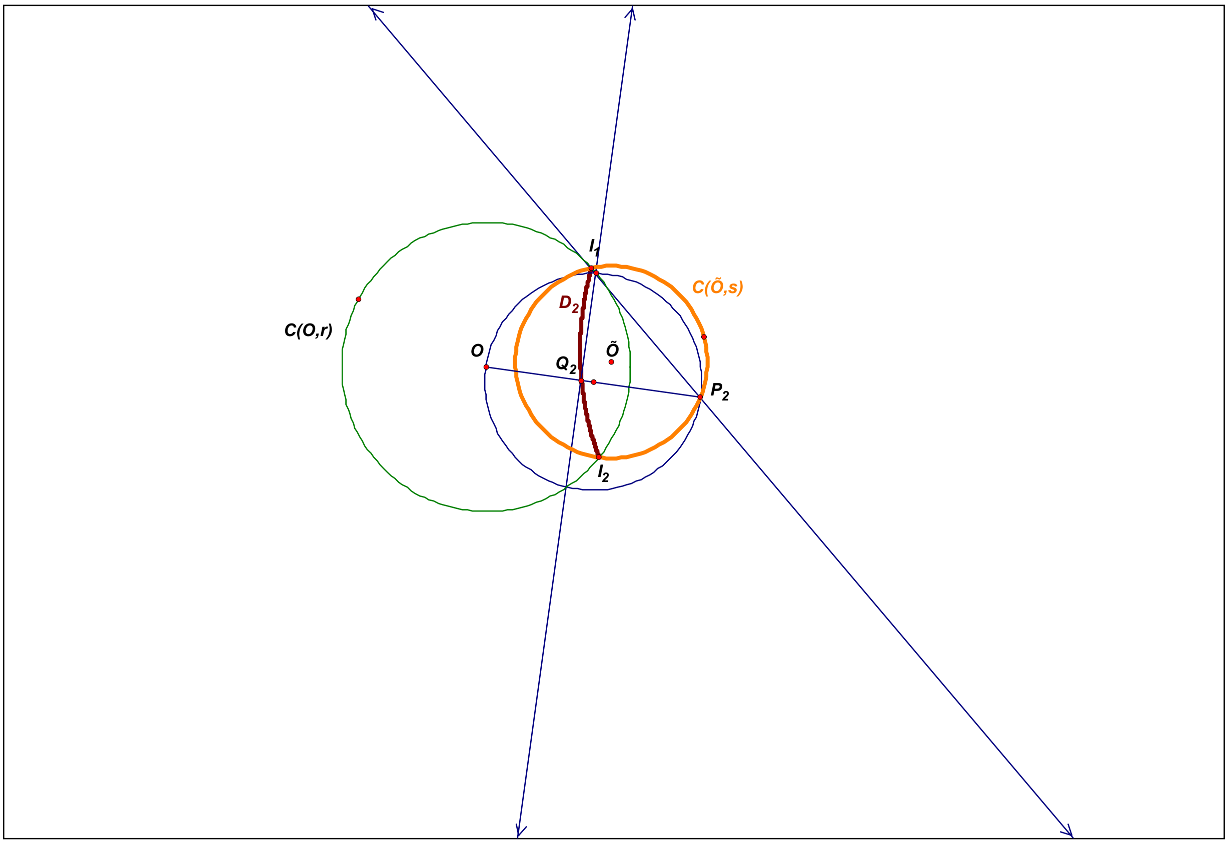
3. *A circunferência C(Õ,s) intersecta* $C(O,r)$

- Construir $C(O,r)$;
- Construir $C(\tilde{O},s)$ que intersecte $C(O,r)$ em I_1 e em I_2;
- Marcar um ponto P_1 sobre o arco I_1I_2 que está no interior de $C(O,r)$;
- Utilizando o processo citado em I)1., construir Q_1, inverso de P_1;
- Depois de seleccionar P_1 e Q_1, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens Q_1 quando arrastamos P_1 ao longo do arco I_1 e em I_2 que está no interior de $C(O,r)$;

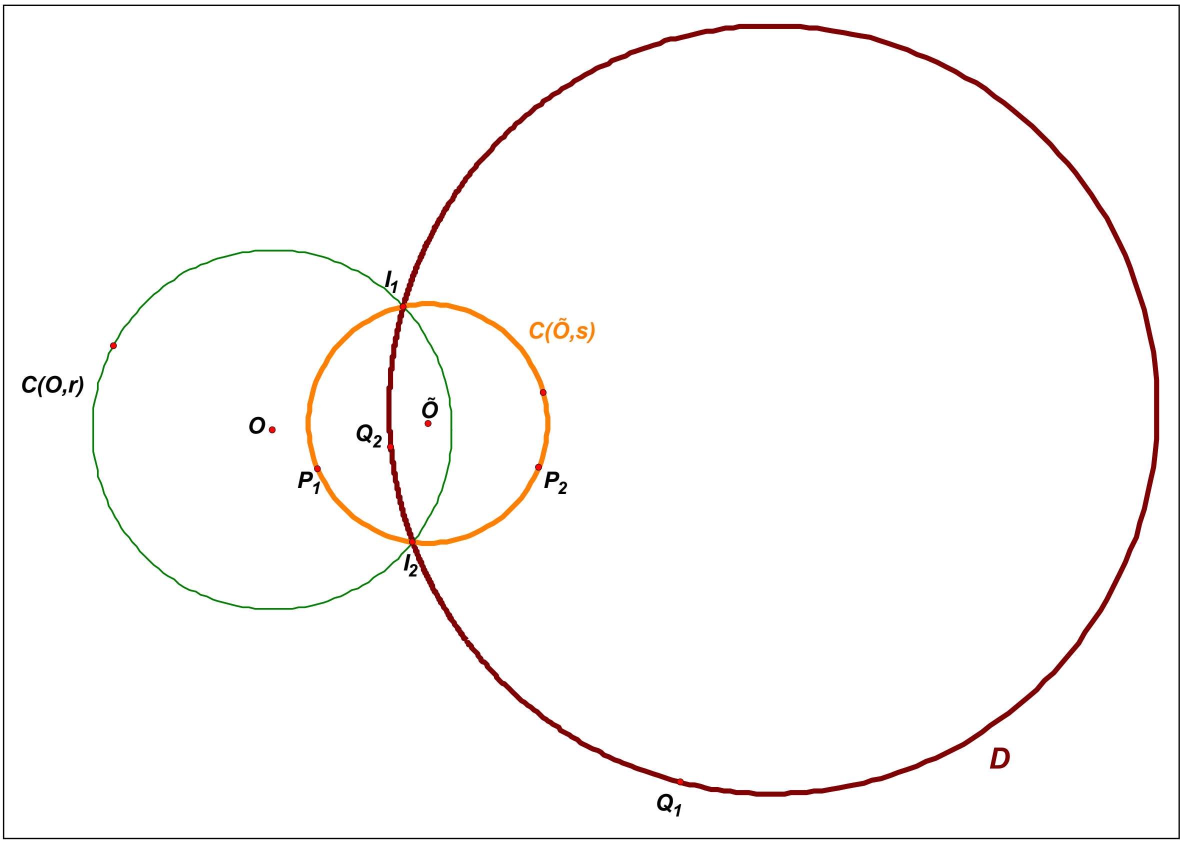


D_1 é o inverso do arco de circunferência $I_1P_1I_2$ de $C(\tilde{O}, s)$

- Marcar um ponto P_2 sobre o arco I_1 e em I_2 que está no exterior de $C(O, r)$;
- Utilizando o processo citado em I)2., construir Q_2, inverso de P_2;
- Depois de seleccionar P_2 e Q_2, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens Q_2 quando arrastamos P_2 ao longo do arco I_1 e em I_2 que está no exterior de $C(O, r)$;



***D_2* é o inverso do arco de circunferência *$I_1P_2I_2$* de** $C(\tilde{O}, s)$



***D* é o inverso de** $C(\tilde{O}, s)$

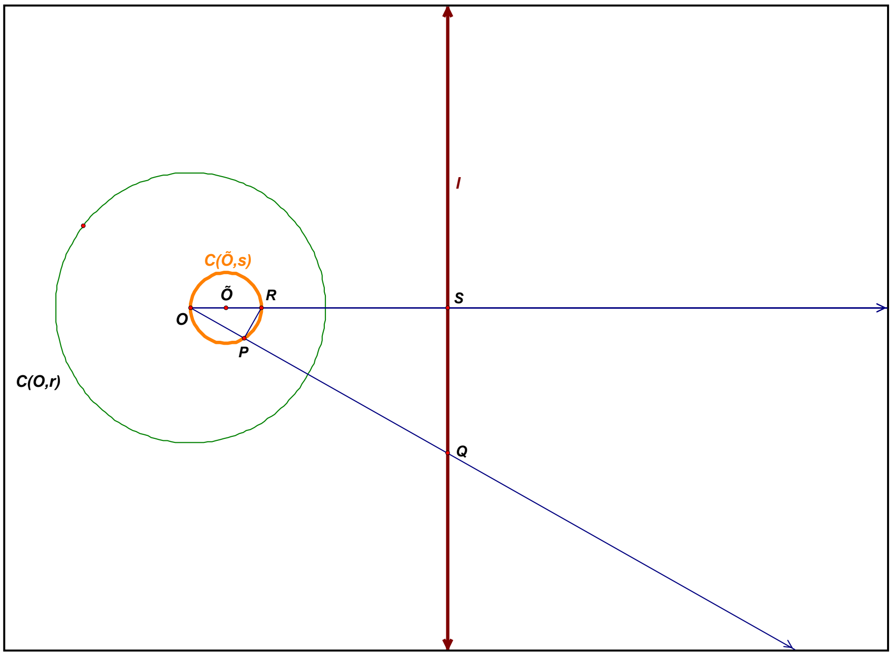
(sem construções auxiliares)

A1

Seja $C(O,r)$ a circunferência de inversão.

Se $C(\tilde{O},s)$ for uma circunferência que passe por *O*, a inversa de $C(\tilde{O},s)\setminus\{O\}$ é uma recta ortogonal a *OÕ* e que não passa por *O*.

Demonstração:



Seja $[OR]$ o diâmetro de $C(\tilde{O},s)$ colinear com O e Õ. Seja S o inverso de R.

Afirmamos que a inversa de $C(\tilde{O},s)\setminus\{O\}$ é a recta l, a perpendicular OÕ por S. Cada recta por O (excepto a paralela à recta l, que é também a tangente a $C(\tilde{O},s)$ em O) intersecta a recta l num ponto Q, e intercepta $C(\tilde{O},s)$ num ponto $P \neq O$; e basta mostrar que Q e P são inversos um do outro. De facto, pelo critério de semelhança AA, temos que o triangulo $[SOQ]$ é semelhante ao triângulo $[POR]$, e portanto

$$\frac{OR}{OQ}=\frac{OP}{OS}$$

ou seja (e uma vez que Q e P estão na mesma semi-recta de origem O, e R é o inverso de S),

$$OQ\times OP = OS\times OR = r^2$$

o que conclui a demonstração.

A2

Seja $C(O,r)$ a circunferência de inversão.

Se $C(\tilde{O},s)$ for uma circunferência que não passa por *O*, a inversa de $C(\tilde{O},s)$ é ainda uma circunferência que não passa por *O*; mais precisamente, é a imagem de $C(\tilde{O},s)$ pela homotetia de centro *O* e razão $\dfrac{r^2}{Pot(O;C(\tilde{O},s))}$.

Demonstração:

Sejam P e R os dois pontos em que uma recta l por O intersecta $C(\tilde{O},s)$ (P=R se l for tangente a $C(\tilde{O},s)$). Sejam Q e S os seus inversos, respectivamente. Então

$$OP \times OQ = OR \times OS = r^2$$
$$OP \times OR = Pot(O;C(\tilde{O},s))$$

e portanto

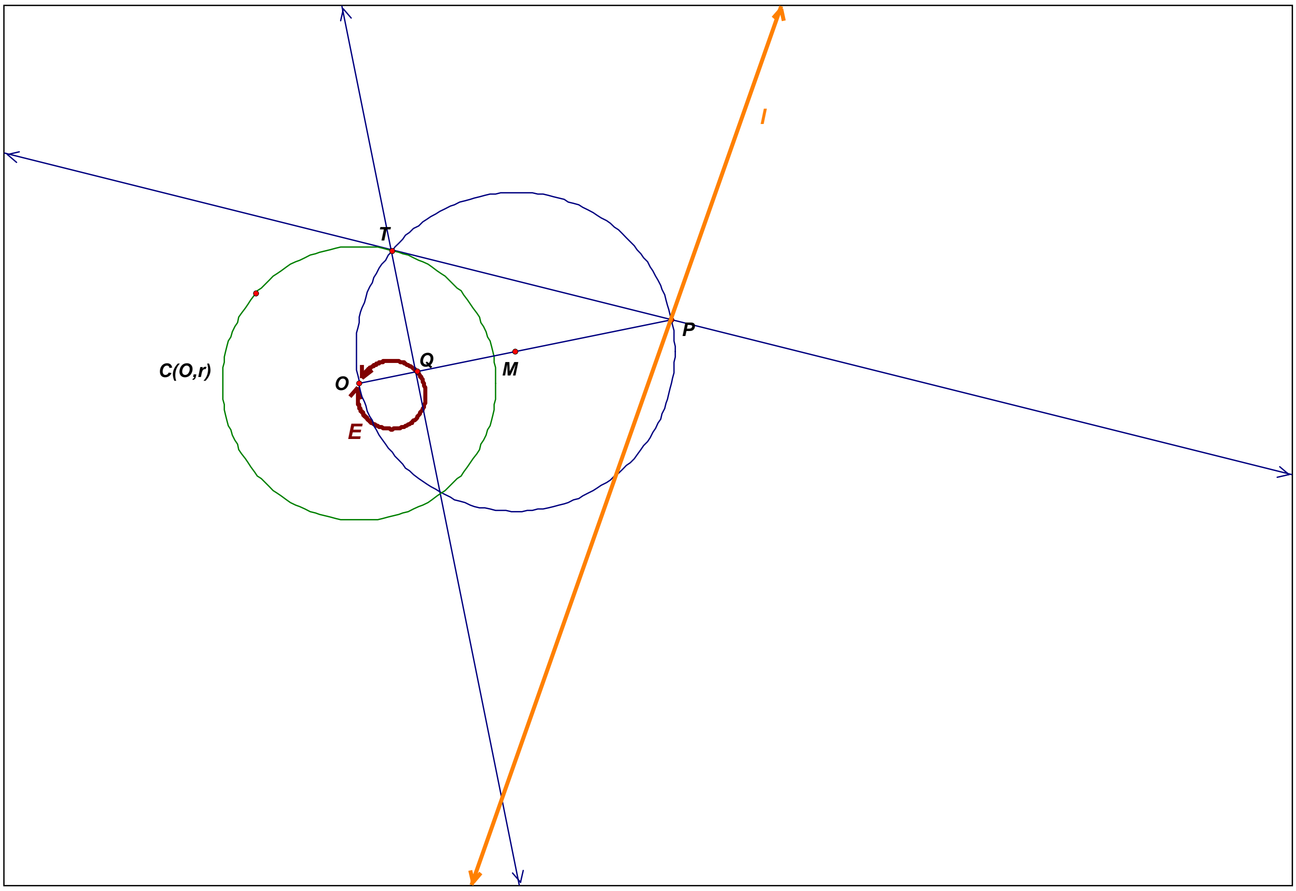
$$\frac{OQ}{OR} = \frac{r^2}{Pot(O;C(\tilde{O},s))} = \frac{OS}{OP}$$

o que mostra que Q (respectivamente S) é a imagem de R (respectivamente P) pela dita homotetia, e demonstra que a imagem de $C(\tilde{O},s)$ é uma circunferência. Isto conclui a prova.

II) Inversão da recta l

1. *A recta l não intersecta* $C(O,r)$

- Construir $C(O,r)$;
- Construir recta *l* que não intersecte $C(O,r)$
- Marcar um ponto *P* sobre a recta *l*;
- Utilizando o processo citado em I)2., construir *Q*, inverso de *P*;
- Depois de seleccionar *P* e *Q*, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens *Q* quando arrastamos *P* ao longo da recta *l*.

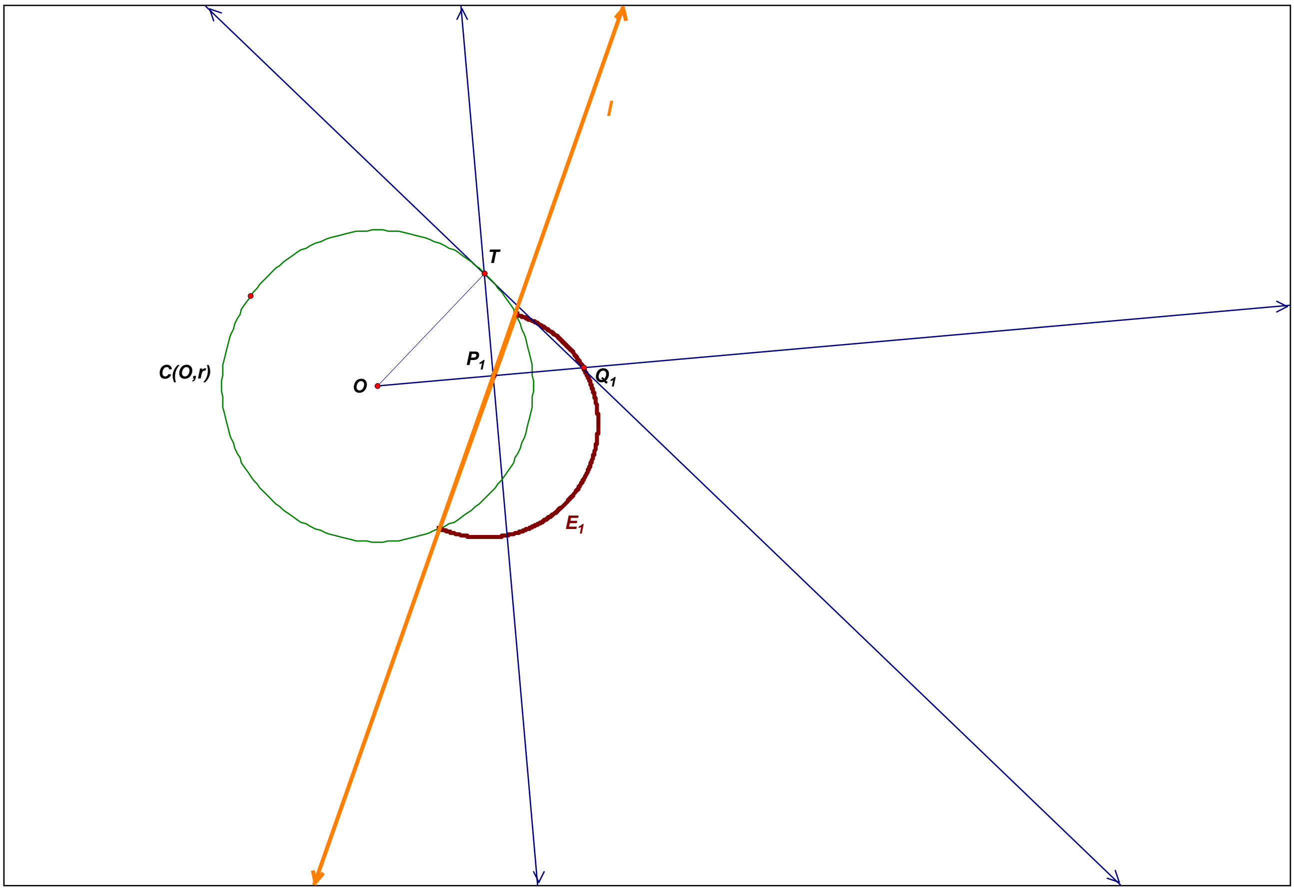


E é o inverso da recta l

2. *A recta l intersecta* $C(O,r)$

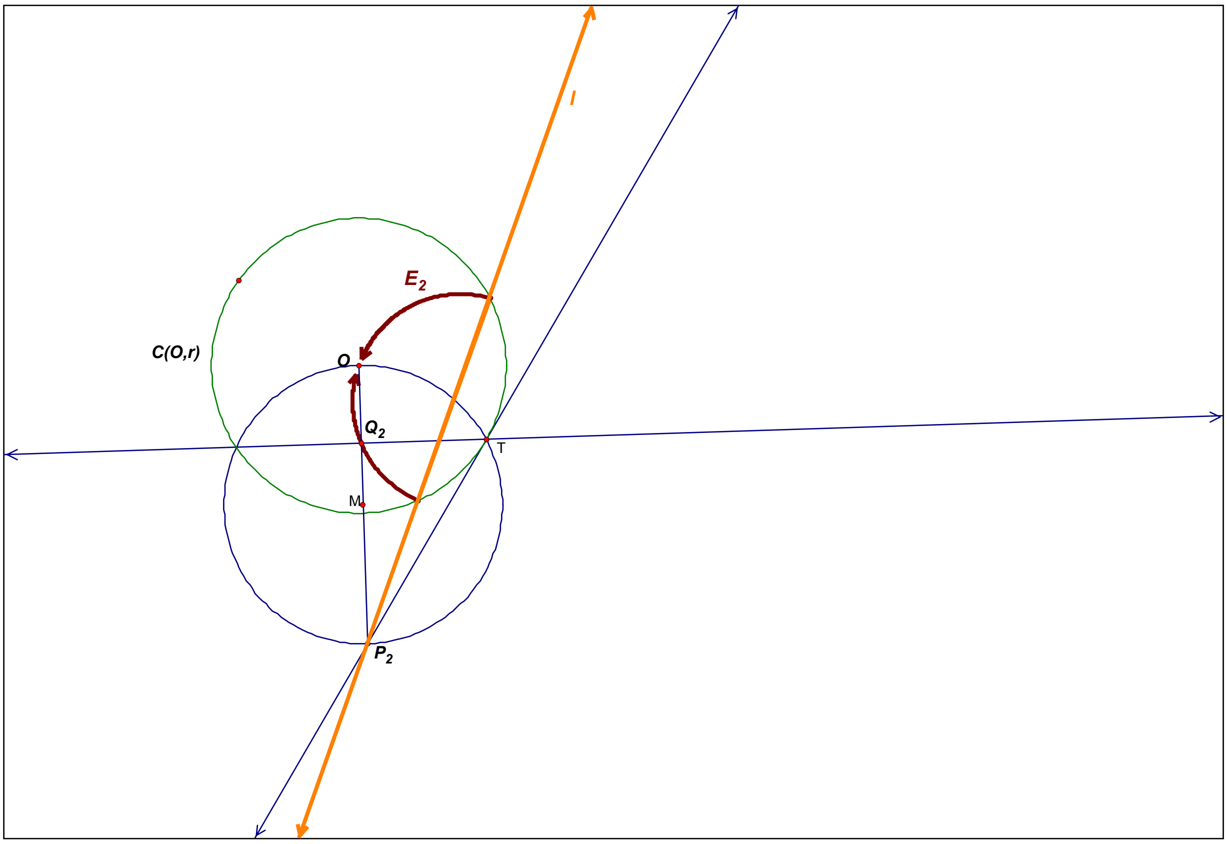
2.1. *A recta l não passa em O*

- Construir $C(O,r)$;
- Construir recta l que intersecte $C(O,r)$ e não passe em O;
- Marcar um ponto P_1 que pertença à recta l e ao interior da $C(O,r)$;
- Utilizando o processo citado em I)1., construir Q_1, inverso de P_1;
- Depois de seleccionar P_1 e Q_1, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens Q_1 quando arrastamos P_1 ao longo da recta l.

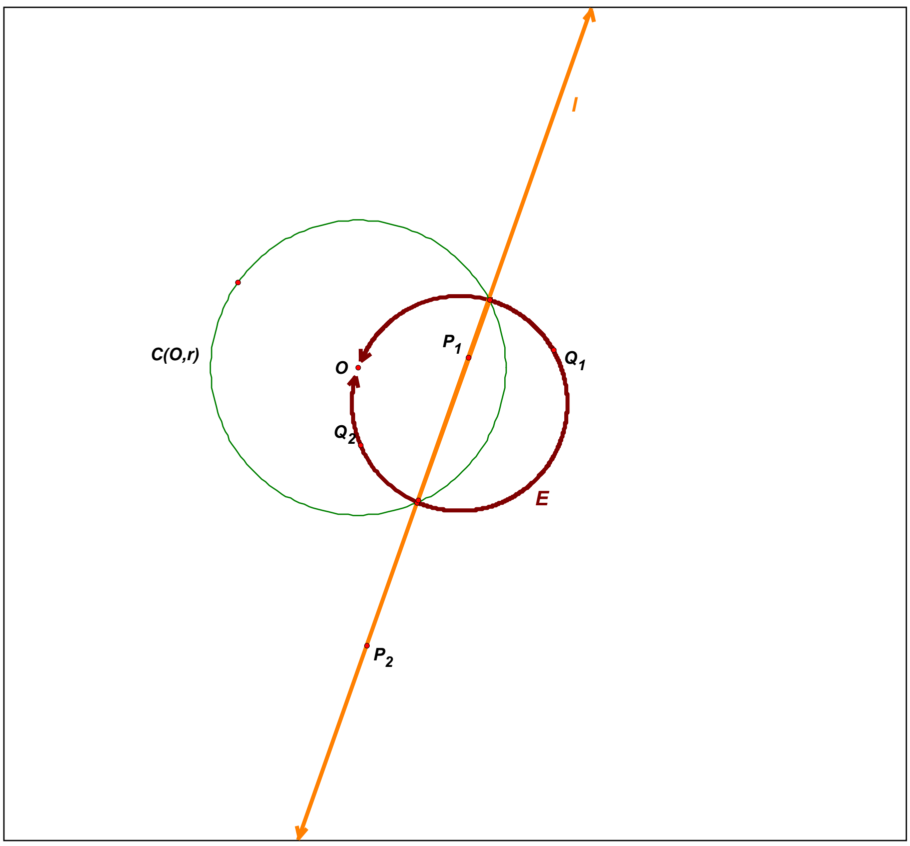


E_1 é o inverso da parte da recta l que pertence ao interior de $C(O,r)$

- Marcar um ponto P_2 que pertença à recta l e ao exterior da $C(O,r)$;
- Utilizando o processo citado em I)2., construir Q_2, inverso de P_2;
- Depois de seleccionar P_2 e Q_2, utilizar o comando *Locus*, do menu *Construct*, para visualizar as imagens Q_2 quando arrastamos P_2 ao longo da recta l.



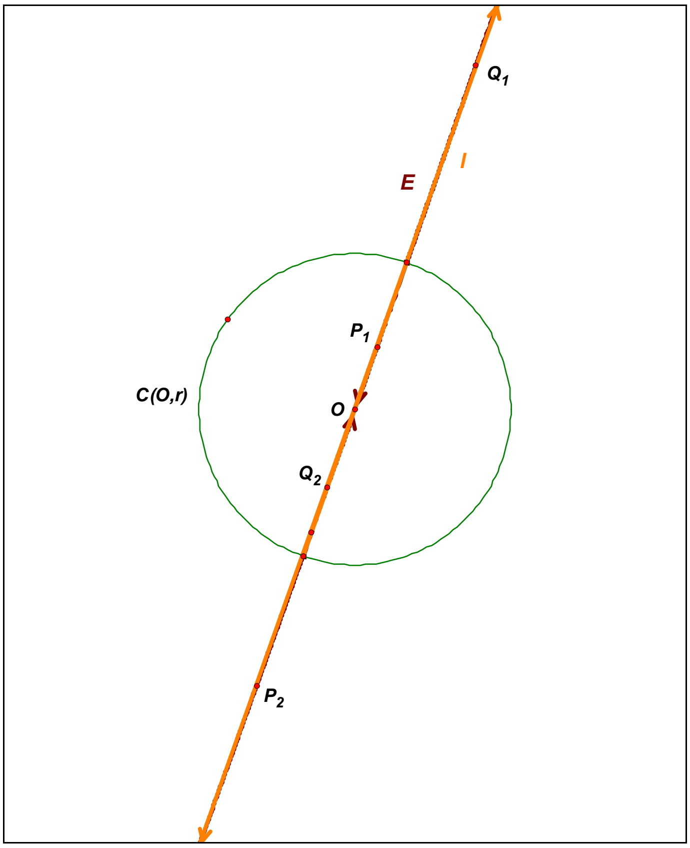
***E_2* é o inverso da parte da recta *l* que pertence ao exterior de** $C(O,r)$



E* é o inverso da recta *l

2.2. *A recta l passa em O*

Na construção anterior arrastar a recta *l* de forma a que passe em *O*.



E* é o inverso da recta *l

Apontamentos teóricos

A3

Seja $C(O,r)$ a circunferência de inversão.
Se *l* for uma recta que passe por *O*, então a inversa de $l \setminus \{O\}$ é ela própria.

A4

Seja $C(O,r)$ **a circunferência de inversão.**

Se inversa de uma recta *l* que não passa por *O* é $C(\tilde{O},s)\setminus\{O\}$**, em que** $C(\tilde{O},s)$ **é uma certa circunferência que passa por *O* e com centro na recta perpendicular a *l* que passa por *O*.**

Demonstração: *Esta afirmação é apenas uma reformulação de* **A1**.

Observe-se que **A1** *e* **A4** *implicam, em particular, que:*

A5

Seja $C(O,r)$ **a circunferência de inversão.**

As inversas de restas paralelas que não passam por *O* são circunferências tangentes em *O*, e vise-versa.