

ELIANE CABARITI

**GEOMETRIA HIPERBÓLICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA EM
AMBIENTE INFORMATIZADO**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2004**

ELIANE CABARITI

**GEOMETRIA HIPERBÓLICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA EM
AMBIENTE INFORMATIZADO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Ana Paula Jahn**.

**PUC/SP
São Paulo
2004**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

A Deus, sempre presente ao meu lado.
Aos meus pais, William e Arlette, e à
minha avó Nely, com quem aprendi a
buscar o que de melhor existe nas
pessoas, no mundo e em mim mesma.

AGRADECIMENTOS

É com muito orgulho e satisfação que, ao final deste estudo, tenho uma lista extensa de pessoas e instituições que contribuíram para sua realização.

Ao CNPq e à CAPES pela bolsa de estudo, pois sem esta, com certeza, esse trabalho não seria possível.

A Profa. Dra. Ana Paula Jahn pela orientação, incentivo, dedicação e confiança. Mais do que minha orientadora, uma verdadeira amiga cujo apoio foi fundamental para a realização desse Mestrado.

A Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão pelas valiosas críticas e sugestões na banca de qualificação.

Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni que, além da inestimável contribuição quando da qualificação, foi incansável no apoio em muitos e diferentes momentos dessa pesquisa.

A todos os professores e participantes do grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática – TecMem – que me incentivaram e contribuíram desde o ante-projeto de pesquisa até a etapa final deste trabalho.

Aos meus grandes amigos e professores Cíleda Coutinho, Lulu Healy, Saddo Ag Almouloud, Maria José Ferreira da Silva (Zezé), Celia Leme, que tanto me ouviram, me apoiaram e foram solidários nos momentos difíceis. Momentos estes em que o querido amigo e professor Ruy Cesar Pietropaolo generosamente se destacou.

A todos os Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo apoio, de forma direta ou indireta.

Aos professores-formadores de Geometria Euclidiana e aos professores de Geometrias não Euclidianas que participaram desse estudo.

Aos secretários do programa Francisco e Vera, que muito me ajudaram e me ouviram nos momentos necessários.

Ao professor Carlos Alberto Vieira por suas valiosas dicas na difícil etapa final.

Aos meus amigos Solange, Regina V., Regina S., Maria Cecília, Aline, Cristina, Leila, Diva, Paulo, Luis e Roberto por todo companheirismo e ajuda, nos momentos bons e ruins deste trabalho.

A todos os meus queridos colegas de mestrado que, de alguma forma, ajudaram para a realização desse estudo.

Às minhas queridas amigas, quase irmãs, Juliana, Luciana, Viviane, Allana, Claudia, Mariana, Tatiana e Jane Carol, que tanto me ouviram e incentivaram, estando sempre dispostas a me ceder um ombro amigo para dividir os bons e maus momentos da vida.

Ao Mauricio Zaneratto Rosa, cujo incentivo, suporte técnico e apoio emocional muita significação tiveram no início e por várias etapas desta realização.

À toda minha família, que desempenhou um papel essencial na realização deste trabalho; aos meus irmãos William e Andréa e à minha sobrinha Laura, que nasceu nesta difícil etapa de minha vida, me proporcionando muita alegria.

Especialmente aos meus pais pela compreensão quanto às ausências, ao nervosismo e, principalmente, por terem acreditado no meu sonho e sempre se orgulhado de mim.

Enfim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

Muito obrigada!!!.....

Este trabalho tem como objetivo principal contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria, em particular das Geometrias não Euclidianas, procurando subsidiar a implementação de propostas que visam a introdução de um modelo hiperbólico, com o auxílio de uma ferramenta computacional, em cursos de formação de professores de Matemática. Para nos auxiliar no delineamento dessa proposta, realizamos um estudo experimental que teve como intuito investigar as possíveis relações que professores-formadores de Geometria Euclidiana, estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-géomètre.

As atividades desenvolvidas para o estudo experimental foram inspiradas nos princípios para o desenvolvimento de tarefas “*thought revealing*” descritos por Lesh et al. (2000). Nossas análises foram baseadas em dois aspectos: a dinâmica das trocas entre os domínios geométricos – geometria Euclidiana e Hiperbólica – além das interações entre os campos espaço-gráfico e teórico (Laborde, 1999) e o papel do Cabri como ferramenta de construção, exploração e verificação, especialmente relacionadas ao seu aspecto dinâmico, nos diferentes “*modos de arrastar*” (Olivero, 2002).

Por meio das interações dos professores nessas situações, confirmamos a importância do uso da barra do menu hiperbólico do Cabri, fundamental para o acesso às representações de objetos hiperbólicos favorecendo a compreensão de conceitos, propriedades e relações envolvidos nesse domínio. Os resultados desse estudo permitiram-nos reconsiderar algumas escolhas, levando-nos à reelaboração das atividades de nossa proposta inicial, em particular no que se refere à constituição e utilização das ferramentas disponibilizadas no Cabri-géomètre. Consolidamos assim, uma nova proposta pedagógica com os mesmos objetivos iniciais.

Palavras-Chave: Geometria Hiperbólica, Geometria Euclidiana, ensino e aprendizagem, Cabri-géomètre, formação de professores.

ABSTRACT

The main aim of this work is to contribute to the process of teaching and learning of geometry, in particular the non-Euclidean geometries, seeking to support the implementation of proposals associated with the introduction of a hyperbolic model, with the help of a computational tool, in mathematics teacher education courses. To this end, we conducted an experimental study to investigate the possible relations that teacher educators of Euclidean geometry establish when asked to solve situations involving notions of hyperbolic geometry, using the software Cabri-géomètre.

The activities developed for the experimental study were inspired by the principals for the development of thought-revealing tasks, described by Lesh et al. (2000). Our analyses were based on two aspects: the dynamics behind movements between the geometrical domains – Euclidean geometry and hyperbolic geometry – as well as interactions between the spatio-graphical and theoretical fields (Laborde, 1999) and the role of Cabri as a tool for construction, exploration and validation, especially with respect to its dynamic aspects and the different possible *drag modes* (Olivero, 2002).

Through our analysis of teachers' interactions with these situations, we confirmed the importance of the use of the hyperbolic menu of Cabri, fundamental for access to representations of hyperbolic objects favouring the understanding of concepts, properties and relations involved in this domain. The results of this study enabled us to reconsider some choices, leading to the re-design of the activities included in our initial proposal, in particular with reference to the makeup and use of the tools available in Cabri-géomètre. As a consequence, we were able to present a new pedagogic proposal consistent with the original aims.

Keywords: Hyperbolic geometry, Euclidean geometry, teaching and learning, Cabri-géomètre, teacher education.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	15
CAPÍTULO I - CONTEXTO DA PESQUISA.....	19
1.1 Introdução.....	19
1.2 Geometrias não Euclidianas na formação do professor de Matemática	19
1.3 Questão de pesquisa e objetivos.....	22
1.4 A integração de um ambiente de Geometria Dinâmica.....	23
CAPÍTULO II - ASPECTOS MATEMÁTICOS E DIDÁTICOS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	28
2.1 Introdução.....	28
2.2 Geometria Euclidiana, Geometrias não Euclidianas e o modelo de disco de Poincaré	28
2.2.1 Geometria de Euclides	28
2.2.2 O surgimento das novas geometrias	32
2.2.3 Postulado das paralelas para a Geometria Hiperbólica.....	33
2.2.4 Modelo do disco de Poincaré	34
2.3 Elementos para uma análise didática.....	39
2.3.1 Considerações sobre a distinção entre desenho e figura	39
2.3.2 Propriedades gráfico-espaciais e teóricas	40
2.3.3 Ambientes de Geometria Dinâmica	42
2.3.4 Os modos de “arrastar”	46
CAPÍTULO III - ASPECTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO	53
3.1 Introdução.....	53
3.2 A pesquisa qualitativa	53
3.3 Características do estudo experimental.....	54
3.4 Elaboração das atividades	55
3.5 Tipos e objetivos das atividades	58
3.5.1 Primeira sessão: Apresentação e análise prévia.....	59
3.5.1.1 Primeira parte: Apresentação das Geometrias não Euclidianas.....	59
3.5.1.2 Segunda parte: Atividades de familiarização do menu hiperbólico.....	61
3.5.2 Segunda sessão: Apresentação e análise prévia.....	62
3.5.3 Terceira sessão: Apresentação e análise prévia	67
3.6 Coleta e análise dos dados.....	73
CAPÍTULO IV - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	75

4.1 Introdução	75
4.2 Descrição dos resultados da primeira sessão	76
4.3 Resultados da segunda sessão	83
4.3.1 Atividade 1	83
4.3.2 Atividade 2: Quadrilátero de Saccheri.....	104
4.3.3 Atividade 3: Quadrilátero de Lambert	106
4.4 Resultados da terceira sessão	108
4.5 Síntese das análises do estudo experimental	121
CAPITULO V - DELINEANDO UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA	125
51 Introdução	125
5.2 Apresentação das Geometrias não Euclidianas	126
5.3 Atividades para construção do menu hiperbólico	127
5.4 Atividades de exploração no modelo de disco de Poincaré	135
5.5 Atividades de construção no modelo de disco de Poincaré	138
CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
BIBLIOGRAFIA	154
ANEXOS	I
ANEXO 1	ii
ANEXO 2	v
ANEXO 3	ix
ANEXO 4	xi
ANEXO 5	xv
ANEXO 6	xvii
ANEXO 7	xx

Índice de Figuras

Figura 1.1: Construção passo a passo da macro-construção “Parábola”	26
Figura 1.2: Ferramentas de criação e de construção do menu hiperbólico do disco de Poincaré.....	26
Figura 2.1: Ilustração do quinto postulado de Euclides	30
Figura 2.2: Quinto postulado na formulação de Playfair (1795)	31
Figura 2.3: Ilustração do Axioma hiperbólico.....	33
Figura 2.4: Horizonte e retas hiperbólicas.....	35
Figura 2.5: Medida de ângulo entre retas hiperbólicas	36
Figura 2.6: Distância-h entre dois pontos	36
Figura 2.7: Distância-h representada no eixo cartesiano	37
Figura 2.8: Retas paralelas no modelo de disco de Poincaré	37
Figura 2.9: Reta-h paralela limite	38
Figura 2.10: Ângulo de paralelismo	38
Figura 2.11: Construção de objetos perpendiculares	44
Figura 2.12: Verificação da robustez da construção.....	44
Figura 2.13: Triângulos separáveis	48
Figura 2.14: “Arrastar vagamente”	49
Figura 2.15: “Arrastar em lugar mole”	49
Figura 2.16: “Arrastar em linha”.....	50
Figura 2.17: "Lugar mole" se torna explícito	50
Figura 2.18: “Arrastar ligado”	51
Figura 2.19: “Arrastar teste”	51
Figura 2.20: “Arrastar teste”.....	52
Figura 3.1: Quadrilátero de Saccheri na Geometria Hiperbólica	65
Figura 3.2: Tentativa de construir o Quadrilátero de Lambert	66
Figura 3.3: Quadrilátero de Lambert	66
Figura 3.4: Resolução da atividade 3a	69
Figura 3.5: Lugar geométrico solicitado na atividade 3a	69
Figura 3.6: Construção passo a passo do ângulo de 60° no modelo de disco de Poincaré.....	71
Figura 3.7: Paralelogramo pela propriedade de lados opostos paralelos (construção mole)	72
Figura 3.8: Verificação da construção do paralelogramo-h.....	73
Figura 3.9: Construção robusta do paralelogramo.....	73
Figura 4.1: Propriedade do baricentro - construção feita pela dupla A	80
Figura 4.2: Triângulo-h equilátero - dupla A.....	87
Figura 4.3: Verificação do Teorema de Pitágoras - dupla A.....	87
Figura 4.4: Triângulo inscrito numa semicircunferência - dupla A.....	90
Figura 4.5: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo - dupla B.....	93
Figura 4.6: ângulos da base de um triângulo isósceles - dupla B.....	94
Figura 4.7: Ângulos internos de um triângulo equilátero- dupla B.....	95
Figura 4.8: Triângulo retângulo - dupla B	96

Figura 4.9: Triângulo inscrito numa semicircunferência - dupla B	97
Figura 4.10: Circunferência inscrita num triângulo qualquer- dupla B.....	97
Figura 4.11: Baricentro de um triângulo - dupla A	98
Figura 4.12: Soma das medidas dos ângulos internos –dupla C.....	100
Figura 4.13: Ângulos da base de um triângulo isósceles - dupla A.....	102
Figura 4.14: Triângulo equilátero - dupla C	102
Figura 4.15: Triângulo retângulo - dupla C	103
Figura 4.16: Quadrilátero de Saccheri - dupla A.....	105
Figura 4.17: Quadrilátero de Saccheri - dupla B.....	106
Figura 4.18: Quadrilátero de Lambert - dupla A	107
Figura 4.19: Construção do ponto inverso- dupla A.....	110
Figura 4.20: Construção do ponto inverso- dupla A.....	113
Figura 4.21: Construção do ângulo de 60° - dupla A	114
Figura 4.22: Construção não robusta do paralelogramo- dupla A.....	115
Figura 4.23: Construção robusta do paralelogramo- dupla A.....	116
Figura 4.24: Construção do ponto inverso- dupla B.....	117
Figura 4.25: Construção do ponto inverso- dupla B.....	118
Figura 4.26: Construção da reta-h definida um ponto- dupla B.....	119
Figura 4.27: Construção da reta-h definida por dois pontos- dupla B.....	120
Figura 4.28: Construção do ângulo de 60° - dupla B	120
Figura 5.1: Distância entre dois pontos no modelo de disco de Poincaré.....	130
Figura 5.2: Construção de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré.....	131
Figura 5.3: Construção de um triângulo-h no modelo de disco de Poincaré	132
Figura 5.4: Construção de um triângulo-h equilátero no modelo de disco de Poincaré	133
Figura 5.5: Construção da mediatriz de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré	134
Figura 5.6: Construção do ponto médio de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré.....	134
Figura 5.7: Ângulos da base de um triângulo-h isósceles	137
Figura 5.8: Circunferência inscrita num triângulo-h no modelo de disco de Poincaré	137
Figura 5.9: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo-h.....	137
Figura 5.10: Ponto de intersecção das medianas no modelo de disco de Poincaré.....	137
Figura 5.11: Construção do quadrilátero de Saccheri.....	138
Figura 5.12: Construção do quadrilátero de Lambert	139
Figura 5.13: Construção de um losango-h	140
Figura 5.14: Construção robusta de um paralelogramo-h.....	141
Figura 5.15: Construção do ponto inverso por um ponto fora da circunferência.....	143
Figura 5.16: Construção do ponto inverso por um ponto qualquer	144
Figura 5.17: Lugar geométrico de circunferências ortogonais	145
Figura 5.18: Construção da reta-h por dois pontos	147
Figura 5.19: Construção da parábola-h.....	148

Índice de Quadros

Quadro 2.1: Reprodução do esquema T – SG (Laborde, 1999)	42
Quadro 3.1: Objetos do plano hiperbólico.....	61
Quadro 3.2: Atividades de familiarização	61
Quadro 3.3: Atividade 1 da segunda sessão.....	62
Quadro 3.4: Atividade 2 da segunda sessão.....	64
Quadro 3.5: Atividade 3 da segunda sessão.....	65
Quadro 3.6: Atividade 1 da terceira sessão	67
Quadro 3.7: Atividade 2 da terceira sessão	67
Quadro 3.8: Atividade 3 da terceira sessão	68
Quadro 3.9: Atividade 4 da terceira sessão	70
Quadro 3.10: Atividade 5 da terceira sessão	72
Quadro 4.1: Transcrição do diálogo da dupla A referente à primeira atividade (1ª sessão).....	79
Quadro 4.2: Transcrição do diálogo da dupla B referente à primeira atividade (1ª sessão).....	81
Quadro 4.3: Transcrição do diálogo da dupla C referente à primeira atividade (1ª sessão).....	82
Quadro 4.4: Transcrição da dupla A referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão)	84
Quadro 4.5: Resposta da dupla A à proposição 1 da atividade 1	84
Quadro 4.6: Transcrição da dupla A referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)	85
Quadro 4.7: Transcrição da dupla A referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)	85
Quadro 4.8: Transcrição da dupla A referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão)	86
Quadro 4.9: Resposta da dupla A à proposição 3 da atividade 1	86
Quadro 4.10: Transcrição da dupla A referente à proposição 4 da atividade 1 (2ª sessão)	88
Quadro 4.11: Resposta da dupla A à proposição 4 da atividade 1	88
Quadro 4.12: Transcrição da dupla A referente à proposição 5 da atividade 1 (2ª sessão)	89
Quadro 4.13: Resposta da dupla A à proposição 5 da atividade 1	90
Quadro 4.14: Transcrição da dupla A referente à proposição 6 da atividade 1 (2ª sessão)	91
Quadro 4.15: Resposta da dupla A à proposição 6 da atividade 1	91
Quadro 4.16: Transcrição da dupla A referente à proposição 7 da atividade 1 (2ª sessão)	92
Quadro 4.17: Resposta da dupla A à proposição 7 da atividade 1	92
Quadro 4.18: Transcrição da dupla B referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão).....	93
Quadro 4.19: Transcrição da dupla B referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão).....	95
Quadro 4.20: Respostas da atividade 1 elaboradas pela dupla B	99
Quadro 4.21: Transcrição da dupla C referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão)	100
Quadro 4.22: Transcrição da dupla C referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)	101
Quadro 4.23: Fala do professor C1 referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão)	102
Quadro 4.24: Transcrição da dupla C referente à proposição 4 da atividade 1 (2ª sessão)	103
Quadro 4.25: Transcrição da dupla B referente à atividade 3 (2ª sessão)	108
Quadro 4.26: Atividade 1 da terceira sessão	109
Quadro 4.27: Atividade 2 da terceira sessão	109
Quadro 4.28: Transcrição da dupla A referente à atividade 2 (3ª sessão)	110

Quadro 4.29: Atividade 3(a) da terceira sessão.....	111
Quadro 4.30: Resposta da dupla A para a atividade 3 (a).....	111
Quadro 4.31: Transcrição da dupla A referente à atividade 3 (b) (3ª sessão)	111
Quadro 4.32: Transcrição da dupla A referente à atividade 3 (b) (3ª sessão)	112
Quadro 4.33: Transcrição da dupla A referente à atividade 4 (3ª sessão)	114
Quadro 4.34: Transcrição da dupla A referente à atividade 5 (3ª sessão)	115
Quadro 4.35: Transcrição da dupla A referente à atividade 5 (3ª sessão)	116
Quadro 4.36: Resposta da atividade 1 da terceira sessão feita pela dupla B	118
Quadro 4.37: Transcrição da dupla B referente à atividade 3 (b) (3ª sessão).....	119
Quadro 4.39: Transcrição da dupla B referente à atividade 4 (3ª sessão)	120
Quadro 5.1: Quadro resumo do modelo de disco de Poincaré.....	129
Quadro 5.2: Atividade 1 da proposta	129
Quadro 5.3: Atividade 2 da proposta	131
Quadro 5.4: Atividade 3 da proposta	131
Quadro 5.5: Atividade 4 da proposta	132
Quadro 5.6: Atividade 5 da proposta	133
Quadro 5.7: Atividade 6 da proposta	133
Quadro 5.8: Atividade 7 da proposta	136
Quadro 5.9: Atividade 8 da proposta	138
Quadro 5.10: Atividade 9 da proposta	139
Quadro 5.11: Atividade 10 da proposta	140
Quadro 5.12: Atividade 11 da proposta	140
Quadro 5.13: Atividade 12 da proposta	143
Quadro 5.14: Atividade 13 da proposta	144
Quadro 5.15: Atividade 14 da proposta	145
Quadro 5.16: Atividade 15 da proposta	146
Quadro 5.17: Atividade 16 da proposta	147
Quadro 5.18: Atividade 17 da proposta	147

APRESENTAÇÃO

O estudo dos conceitos geométricos constitui parte importante dos currículos de Matemática na Educação Básica porque faculta ao aluno desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Além disso, a Geometria pode favorecer a percepção do caráter de *jogo intelectual*, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Desse modo, parece-nos claro que o futuro professor de Matemática precisa adquirir competências em relação à Geometria, não apenas quanto ao domínio do conteúdo a ser ensinado, mas também quanto à criação e direção de situações de aprendizagem que visem a construção/aquisição das noções geométricas de seus futuros alunos.

Pensamos que um trabalho envolvendo Geometrias não Euclidianas poderá ser útil nos cursos formação de professores por vários aspectos. O primeiro deles parece-nos evidente: aprofundamento, e não apenas revisão, da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica. O segundo, poderá ser a compreensão da noção de modelo, identificando os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico como equivalentes do ponto de vista da consistência lógica. Além destes, o constante interesse pela História da Matemática. Esse trabalho poderá, assim, contribuir para que o futuro professor dê uma nova dimensão à sua prática pedagógica, pois ele poderá

desenvolver aspectos que visem a argumentação, a formulação de conjecturas e o raciocínio dedutivo.

Tendo em vista essas preocupações, desenhamos uma pesquisa cujo objetivo principal é contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria, em particular das Geometrias não Euclidianas, procurando subsidiar a implementação de propostas que visam a introdução de modelos não euclidianos em cursos de formação inicial ou continuada de professores de Matemática, com o auxílio de uma ferramenta computacional.

Pretendemos delinear, assim, uma proposta pedagógica voltada à exploração de relações entre a Geometria Hiperbólica e Geometria Euclidiana. Para tanto, optamos inicialmente por investigar – a partir de um estudo experimental – quais relações professores de Geometria Euclidiana, em cursos de formação de professores, estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-géomètre. A finalidade deste estudo é obter subsídios que possam nos auxiliar, num segundo momento, na consolidação da referida proposta.

A elaboração das atividades desse estudo inspirou-se nos princípios para o desenvolvimento de tarefas “*thought revealing*” elaborados por Lesh et al. (2000). Nossas análises baseiam-se em dois pontos: a dinâmica das trocas entre os domínios geométricos – Geometria Euclidiana e Hiperbólica – além de interações entre os campos espaço-gráfico e teórico (Laborde, 1999), e o papel do Cabri como ferramenta de construção, exploração e verificação, especialmente relacionadas aos “modos de arrastar” (Olivero, 2002).

Nessa perspectiva, nosso trabalho está estruturado em cinco capítulos, cujos conteúdos descrevemos brevemente a seguir.

No capítulo I, apontamos nossos questionamentos iniciais, delimitando a questão de pesquisa e justificando a pertinência da integração de um ambiente de Geometria Dinâmica em nossa proposta de ensino, no caso, o proporcionado pelo software Cabri-Géomètre.

Dedicamos o segundo capítulo a algumas considerações teóricas, tanto de aspectos matemáticos quanto didáticos. Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira fazemos um breve histórico sobre as Geometrias não Euclidianas e uma descrição dos principais objetos hiperbólicos no modelo de disco de Poincaré. Na segunda parte, abordamos o referencial teórico que embasa nosso estudo didático experimental.

O terceiro capítulo aborda a metodologia do trabalho, onde descrevemos as características de pesquisa qualitativa e do estudo experimental realizado, a metodologia utilizada para a concepção e elaboração das atividades, assim como os procedimentos metodológicos para aplicação destas. Na parte final, descrevemos tais atividades, destacando seus objetivos e soluções bem como as estratégias esperadas em suas resoluções.

No quarto capítulo, apresentamos a descrição dos dados, a análise das soluções e comportamentos apresentados pelos sujeitos do nosso estudo experimental. Esta análise, como indicado anteriormente, considera principalmente as relações entre os domínios geométricos em jogo (euclidiano e hiperbólico) e as interações perceptivas/conceituais descritas por Laborde (1999). Além disso, dedicamos especial atenção ao papel do Cabri-géomètre, especialmente no que tange ao seu aspecto dinâmico e aos diferentes "modos de arrastar" (Olivero, 2002).

A descrição e análise dos resultados permitem redimensionar certas escolhas e reformular as atividades com vistas à concepção de uma proposta focada na modelização de situações didáticas, visando a introdução de um estudo de Geometria Hiperbólica com o auxílio do software Cabri-géomètre. Apresentamos o delineamento dessa proposta no Capítulo V.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais sobre o estudo realizado, assim como algumas reflexões para aprofundamento ou continuidade desse tipo de pesquisa.

Convém ressaltar ainda que este trabalho insere-se na linha de pesquisa "Tecnologias da Educação e Educação Matemática", do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

CAPÍTULO I

CONTEXTO DA PESQUISA

1.1 Introdução

Conforme descrito na apresentação, este trabalho insere-se no campo do ensino e aprendizagem de Geometria, em particular das *Geometrias não Euclidianas* em nível superior. O interesse por estas *Geometrias* surgiu quando da nossa graduação, no curso de Licenciatura em Matemática que incluía, em sua grade curricular, uma disciplina que abordava esse assunto e, mais especificamente, o estudo da Geometria Hiperbólica plana. A partir de alguns questionamentos iniciais sobre a importância dessa disciplina e suas contribuições nesse tipo de formação, interessamo-nos por desenvolver um estudo nesse contexto, visando contribuições para o esclarecimento de tais questões.

1.2 Geometrias não Euclidianas na formação do professor de Matemática

Considerando nossa experiência, mas não nos restringindo a ela, optamos por verificar se as Geometrias não Euclidianas estavam presentes na formação inicial do professor de Matemática. Devido a natureza de nossos objetivos, essa verificação prescinde de sistematização e aprofundamento, mas se interessa por um levantamento das grades curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática de diversas Universidades públicas e privadas do estado de São Paulo.

Esse levantamento foi feito via Internet, ou seja, consultando as grades curriculares apresentadas nos portais das Universidades. Foram consultadas cerca de 25 universidades ou faculdades, mas, por critérios metodológicos, consideramos 11 delas por nos darem acesso às ementas dos cursos ou disciplinas de Geometria, o que nos permitiu identificar assuntos ou conteúdos programáticos relativos as GNE¹.

Com as informações desse levantamento, percebemos que poucos cursos incluem essa disciplina (ou tópicos a ela relacionados) em suas grades curriculares – 4 de 11 consultadas, sendo que em 2 delas, essa disciplina figura como optativa. Para os cursos que propõem apresentar esse assunto, formulamos algumas questões:

- ♣ Do ponto de vista do professor, com quais objetivos as *Geometrias não Euclidianas* estão sendo incluídas nos cursos de Licenciatura em Matemática?
- ♣ E do ponto de vista do licenciando, qual a importância dessa disciplina na sua formação ou futura prática docente?
- ♣ Nesse trabalho com *Geometrias não Euclidianas* utilizam-se novas tecnologias? Quais? Que papel elas cumprem?

A fim de obter elementos que indicassem respostas para estas questões, optamos por escolher uma das 4 universidades consultadas², que contém a disciplina Geometrias não Euclidianas na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Trata-se de uma Universidade particular do Estado de São Paulo, na qual as geometrias não euclidianas fazem parte da disciplina Geometria 4³, ministrada no último ano do curso de Licenciatura.

A disciplina *Geometria 4* apresenta uma carga horária de 90 horas (3 horas semanais). O primeiro semestre é dedicado ao ensino de Geometria das

¹ Utilizaremos a sigla GNE para nos referir as Geometrias não Euclidianas.

² Inicialmente pensamos em recolher informações das 4 universidades indicadas. No entanto, condições limitadas e dificuldades de acesso a coordenadores e professores desses cursos, obrigaram-nos a considerar apenas uma instituição.

³ A descrição detalhada dessa disciplina (objetivos, ementa e conteúdo programático) encontra-se no anexo 1.

Transformações, o segundo semestre, ao ensino das Geometrias não Euclidianas, em particular à Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré e no modelo do semi-plano de Poincaré. Nesta disciplina é utilizado o auxílio do software Cabri-géomètre.

Elaboramos, então, um questionário para professores (vide anexo 2) que ministram (ou ministraram) a disciplina *Geometria 4*. Esses questionários foram distribuídos para professores dessa universidade, num total de 3 professores (P1, P2, P3).

Foi perguntado aos professores quais os objetivos relacionados a essa disciplina e qual sua importância na formação do licenciando. Para esses, os principais objetivos são possibilitar o trabalho com “*a história das Geometrias não Euclidianas*”, “*a demonstração*” e “*a visualização dos modelos num ambiente informático*” (P3). Além disso, os professores indicam a “*continuidade ao desenvolvimento do raciocínio abstrato*” (P1), e possibilidade de uma “*releitura da Geometria Euclidiana*” (P1).

A importância na formação do licenciando é, segundo esses professores, mostrar que “*a geometria de Euclides não é única e absoluta*” e “*o ser humano é livre pra criar sistemas lógicos*” (P3); “*proporcionar um pensamento não euclidiano*” (P2) e “*discutir a importância do estabelecimento de pressupostos iniciais na construção de uma determinada teoria*” (P1)⁴.

É importante ressaltar que nesta Universidade, em particular nas disciplinas de Geometria, desde o primeiro ano é utilizado o software Cabri-géomètre como ferramenta de construção e exploração. As construções geométricas permeiam todas as disciplinas de Geometria de forma integrada, não há proposadamente separação entre Geometria e Desenho Geométrico.

De fato, segundo as respostas desses professores, todos utilizam efetivamente o software de geometria dinâmica Cabri-géomètre no ensino de GNE. Os três professores atribuem um papel essencial a esse ambiente, por

auxiliar na visualização dos modelos planos associados a essas geometrias. Além disso, consideram que este recurso fornece ferramentas para exploração e experimentação, propiciando condições favoráveis para atividades do tipo levantamento de hipóteses sobre configurações, formulação de conjecturas, validações experimentais, entre outras. Dois professores (P1 e P2), em seus depoimentos, chegam a condicionar a viabilidade da proposta do curso a esse ambiente computacional. Um dos principais fatores apontados por eles refere-se a facilidade de introdução e percepção de propriedades de objetos geométricos (observação de invariantes) devido a componente dinâmica desse tipo de ambiente.

Em síntese, ainda que de forma restrita e breve, juntamente com os professores entrevistados, constatamos com esse levantamento que embora as Geometrias não Euclidianas não sejam amplamente incorporadas na formação inicial de professores de Matemática, sua importância e pertinência nessa formação é relevante - o que adotaremos como hipótese de trabalho do presente estudo.

Diante de tal hipótese, a direção de pesquisa adotada é a da investigação de condições didáticas para subsidiar o trabalho de professores-formadores⁵ na implementação de propostas que visam a introdução de modelos não euclidianos. Nesse contexto, passamos a formular nossa questão de pesquisa e, assim, especificar nossos objetivos.

1.3 Questão de pesquisa e objetivos

Considerando o levantamento realizado e nossa hipótese de trabalho sobre a importância do ensino e aprendizagem de Geometrias não Euclidianas na formação do professor de Matemática, formulamos um problema de pesquisa representado por meio da seguinte questão:

⁴ Uma tabela, sintetizando as respostas dos professores, pode ser consultada no anexo 3.

⁵ Entendemos por professor-formador, aquele professor que trabalha em cursos de formação de professores, seja inicial ou continuada.

- Como potencializar uma proposta de ensino em ambiente de geometria dinâmica visando desenvolver, em uma formação inicial ou continuada de professores de Matemática, noções de Geometria Hiperbólica que contribua na compreensão e ampliação de conceitos da Geometria Euclidiana?

Assim, nosso trabalho pretende discutir o ensino das Geometrias não Euclidianas, mais precisamente a pertinência da introdução da Geometria Hiperbólica, com o auxílio de uma ferramenta computacional, na formação de professores de Matemática. Nosso intento pretende, ainda, identificar características de situações didáticas que explorem relações entre um modelo não euclidiano e o euclidiano, a fim de aprofundar este último.

O objetivo principal de nosso estudo reside no desenvolvimento de uma proposta pedagógica voltada à concepção de situações didáticas para uma formação inicial ou continuada de professores, visando explorar relações entre a Geometria Hiperbólica e Geometria Euclidiana.

Para tanto, optamos inicialmente por investigar – a partir de um estudo experimental (cf. detalhado no Capítulo III) – quais relações professores-formadores⁶ de Geometria Euclidiana estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-géomètre. O resultado deste estudo nos auxiliará, num segundo momento, na consolidação da referida proposta.

1.4 A integração de um ambiente de Geometria Dinâmica

Pesquisas apontam que os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. É a possibilidade de “*mudar os limites entre o concreto e o formal*” (Papert, 1988).

O Cabri (**C**ahier de **B**Rouillon **I**nformatique) é um programa de geometria dinâmica da autoria de Jean-Marie Laborde, Franck Bellemain e Yves Baulac,

desenvolvido no extinto Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do IMAG (Instituto de Informática e de Matemática Aplicada), na Universidade de Joseph Fourier em Grenoble. Sua primeira versão data de 1988.

Segundo Barbosa & Lourenço (1998), ambientes de geometria dinâmica, tais como o Cabri-Géomètre, são particularmente interessantes e eficazes na descoberta (ou “redescoberta”) de conceitos ou propriedades (teoremas) relativos à Geometria Euclidiana Plana.

O Cabri-Géomètre, por exemplo, fornece às figuras geométricas as dimensões do movimento e da animação interativa, ou seja, ele permite criar representações dinâmicas de um objeto geométrico e agir sobre essas representações pelo "agarrar-arrastar".

A partir de uma única construção pode-se efetuar um número arbitrário de testes dando a oportunidade de elaboração de conjecturas e da visualização de propriedades geométricas já conhecidas, por meio da observação da invariância pelo deslocamento.

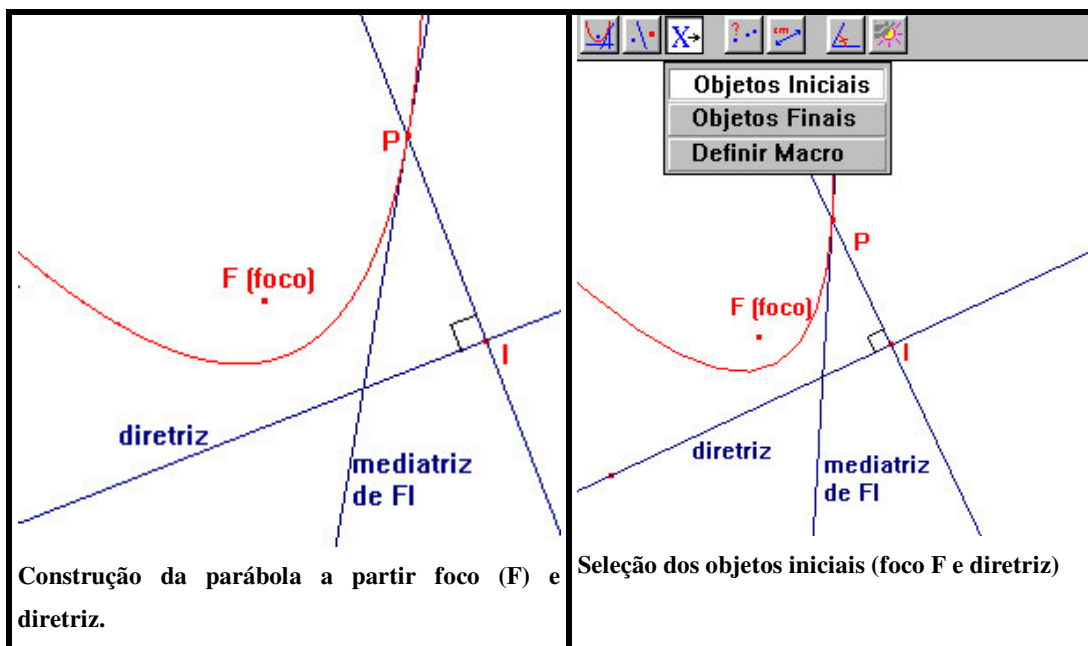
O Cabri é um instrumento excepcional que torna possível simular, praticar ou vivenciar verdades matemáticas de difícil visualização por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, mas fundamentais à compreensão plena do que está sendo exposto.

No nosso estudo, entendemos que esses recursos são fundamentais para dar um caráter mais "concreto" ou palpável aos objetos geométricos hiperbólicos, por meio de representações e construções, o que favorece a compreensão de conceitos e relações. De fato, o Cabri-géomètre permite trabalhar com a Geometria Hiperbólica, em particular o modelo de disco de Poincaré, por meio da possibilidade de definir ferramentas hiperbólicas (macro-construções) que substituem o menu euclidiano original.

⁶ Entendemos por professor-formador, aquele professor que trabalha em cursos de formação de professores, seja inicial ou continuada.

Macro-construções são construções que se tornam novas ferramentas, enriquecendo o ambiente de trabalho do Cabri e possibilitando novas situações para o ensino da Geometria. Pode-se, por exemplo, construir uma parábola a partir de um ponto (foco) e da diretriz e, por meio dessa construção, definir uma macro-construção, salvando-a como “Parábola (foco, diretriz)”. A definição desta macro representa uma nova ferramenta na barra iconizada do menu, que fornece a construção de uma parábola, quando aplicada à uma reta e um ponto fora dela. Cabe salientar que tal definição necessita da explicitação dos objetos iniciais (dados da construção) e dos objetos finais (construídos). Voltando ao nosso exemplo, os objetos iniciais são um ponto (foco) e uma reta (diretriz), e o objeto final, a parábola.

A seguir mostraremos a definição da macro-construção “parábola”, com algumas telas do software Cabri-géomètre.



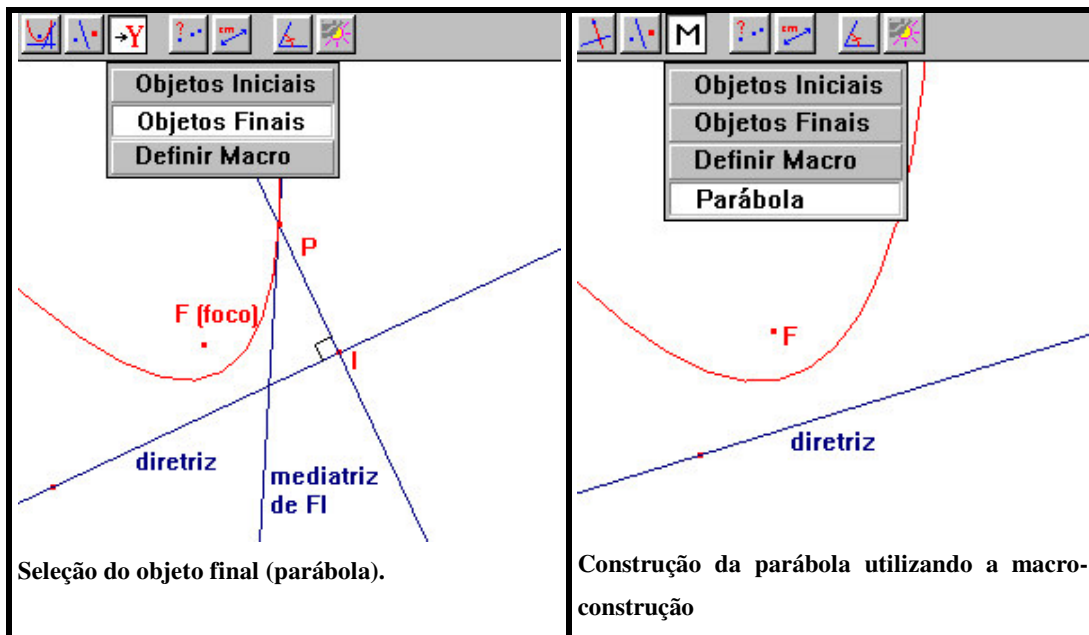


Figura 1.1: Construção passo a passo da macro-construção ‘Parábola’

No modelo de disco de Poincaré, modelo hiperbólico utilizado em nosso estudo, seus objetos (reta, segmento, circunferência,...) podem ser construídos por meio de ferramentas euclidianas, e tais construções possibilitam definir macro-construções. Assim, por meio de macros que utilizam o menu euclidiano do Cabri, pode-se construir um menu hiperbólico. As figuras abaixo mostram as ferramentas de criação e de construção do menu hiperbólico desenvolvido por Jean-Marie LABORDE⁷.

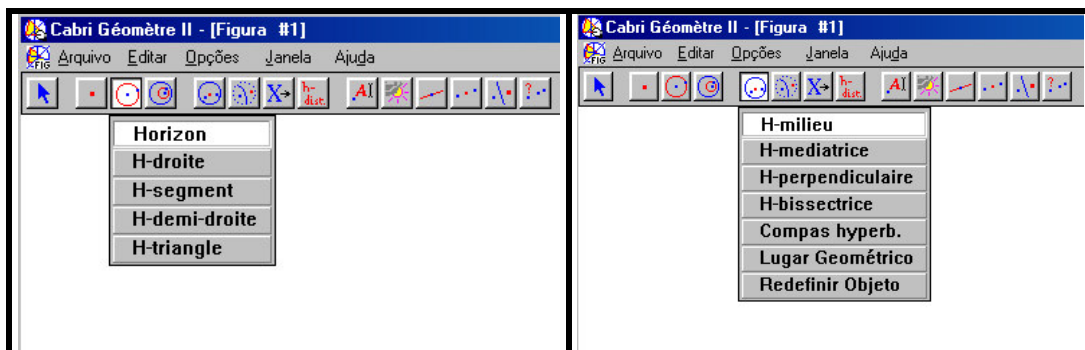


Figura 1.2: Ferramentas de criação e de construção do menu hiperbólico do disco de Poincaré.

Acreditamos que a melhor maneira de potencializar a nossa proposta de ensino, sobre noções de Geometria Hiperbólica, é utilizar o auxílio dessa

⁷ As ferramentas do menu hiperbólico estão disponíveis no site: <http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/>

ferramenta computacional pois, por meio dela, podemos obter um aspecto mais “concreto” dos objetos hiperbólicos.

Assim, definidos o contexto e o objetivo do estudo apresentamos, no próximo capítulo, algumas considerações teóricas sobre os objetos matemáticos em jogo (geometrias não euclidianas e o modelo de disco de Poincaré), e alguns aspectos didáticos – em particular relacionados à utilização de um ambiente de geometria dinâmica – que subsidiarão o desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO II

**ASPECTOS MATEMÁTICOS E DIDÁTICOS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES
TEÓRICAS**

2.1 Introdução

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira fazemos um breve histórico sobre a Geometria de Euclides e o desenvolvimento de novas Geometrias, destacando a descrição de um modelo hiperbólico: o do disco de Poincaré. Acreditamos que esse histórico é pertinente para melhor situar a importância da Geometria Hiperbólica, foco principal de nosso trabalho. Na segunda parte, abordamos o referencial teórico que embasa nosso estudo didático.

2.2 Geometria Euclidiana, Geometrias não Euclidianas e o modelo de disco de Poincaré

2.2.1 Geometria de Euclides

Durante quase dois mil anos, a Geometria de Euclides (± 300 a.C.) foi considerada como a única geometria possível. Ao longo deste tempo, sua obra *Os Elementos* tornou-se referência, sendo pouco questionada. Com essa obra, o matemático grego Euclides deu forma sistemática ao saber geométrico. De fato, essa Geometria inicialmente baseia-se na intuição e na experiência (aspecto empírico), ou como afirma Coutinho (2001), não contraria nossos

sentidos, sendo seus axiomas, em geral, noções facilmente aceitas pela nossa intuição.

No primeiro livro dos *Elementos*, ele enuncia vinte e três definições, cinco postulados (denominados “demandas” ou “pedidos”) e algumas noções comuns ou axiomas⁸. Em seguida, deduz 48 proposições, ou teoremas, que constituem o saber geométrico, como por exemplo a proposição 1: “(*É possível*) *construir um triângulo eqüilátero a partir de uma dada linha reta finita*”⁹ (Vitrac, 1990, p.194)

Esse é, portanto o modo como Euclides ordena o conhecimento geométrico no chamado sistema euclidiano. Euclides buscou o ideal de uma organização axiomática, que em última instância se reduz ao estabelecimento de um pequeno número de proposições notoriamente verdadeiras daquele domínio do conhecimento, e a posterior dedução de todas as outras proposições verdadeiras desse domínio, a partir daquelas.

Os cinco postulados de Euclides foram assim formulados:

1. *É pedido que se trace uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.*
2. *E de prolongar continuamente em linha reta uma linha reta limitada.*
3. *E de descrever uma circunferência a partir de todo o centro de todo o intervalo.*
4. *E que todos os ângulos retos sejam iguais entre si.*
5. *E que, se uma reta secante a duas retas forma ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, se encontrarão do lado onde os ângulos são menores que dois internos*¹⁰ (Vitrac, 1990, pp. 167-175).

E mais tarde, reformulados por Hilbert (1862-1943), se encontram da seguinte maneira:

1. *Para todo ponto P e todo ponto Q diferente de P, existe uma única reta l que passa por P e Q.*

⁸ As noções comuns são proposições lógicas não geométricas que Euclides considerou serem de senso comum, ao contrário dos postulados que são específicos à Geometria.

⁹ Traduzido por nós do original em francês

¹⁰ Traduzido por nós do original em francês

2. Para todo segmento AB e para todo segmento CD , existe um único ponto E tal que B fique entre A e E e o segmento CD é congruente ao segmento BE .
3. Para todo ponto O e todo ponto A não igual a O , existe um círculo com centro O e raio OA .
4. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado desta secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas, se prolongadas suficientemente, encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado¹¹ (Greenberg, 1990, pp. 14-18).

O que mais chama a atenção é o quinto postulado, principalmente por sua formulação, uma vez que um postulado deveria ser enunciado de forma breve e simples, o que não é o caso. A sua veracidade jamais foi questionada, pelo menos até meados do século XIX. Provavelmente, isto pode ser explicado pelo fato de que duas retas acabariam por se encontrar, num ponto teórico, não havendo necessidade de ser construído, uma vez que sua existência estaria garantida racionalmente. O que preocupava Euclides, não era, portanto, sua veracidade, mas sua praticidade.

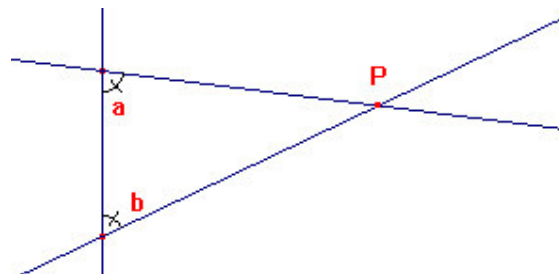


Figura 2.1: Ilustração do quinto postulado de Euclides

Em linguagem moderna, o quinto postulado, agora chamado de axioma ou postulado das paralelas, é apresentado na seguinte formulação, apresentada por John PLAYFAIR em 1795:

Por um ponto P exterior a uma reta m , considerados em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta m (cf. figura 2.2).

¹¹ Traduzido por nós do original em inglês.

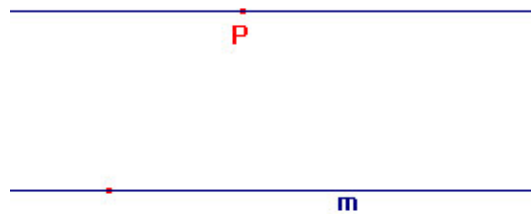


Figura 2.2: Quinto postulado na formulação de Playfair (1795)

O axioma das paralelas não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, sendo essencialmente auto-evidentes e em geral não remetendo o pensamento à idéia de infinito. Assim, havia um problema no sistema de Euclides: suas "evidências" não eram tão evidentes. Para muitos, o quinto postulado, tratava-se, muito provavelmente, não de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria Geometria, utilizando-se apenas dos quatro primeiros postulados e o conjunto de definições fixado. Nesta tarefa, a de provar o quinto postulado de Euclides, envolveram-se inúmeros matemáticos durante mais de dois mil anos.

Existem tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples, que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitaram de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio circular que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar.

A suposta verdade sobre a existência de uma única paralela estava tão inserida no pensamento científico que era fácil usá-la sem se dar conta. São tantos os resultados obtidos como consequência direta da unicidade das paralelas, que até então eram inquestionáveis, como a simples existência de retângulos ou o fato de a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser dois retos. Tais fatos eram usados, sem que se percebesse a

dependência que tinham em relação ao quinto postulado, nas pretensas provas que acabavam sempre se tornando círculos viciosos de redundância lógica.

Em síntese, na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, sempre se esbarrava em outras afirmações que também eram logicamente equivalentes ao quinto postulado. Esse processo culminou com a "descoberta" de Geometrias não Euclidianas.

2.2.2 O surgimento das novas geometrias

A não existência de prova do quinto postulado levou, assim, à consideração de que este axioma não é uma consequência lógica dos quatro anteriores. Substituindo-o, criam-se novas geometrias, tão boas e consistentes como a de Euclides. Os matemáticos Janos BOLYAI (1802-1860), Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1792-1856), Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) e Georg Friederich Bernhard RIEMANN (1826-1866) lançaram as bases dessas geometrias que são logicamente aceitas assim como a euclidiana.

Vários matemáticos passaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da Geometria de Euclides, e a obra mais conhecida é o "Fundamentos da Geometria" (1889) de Hilbert. O sistema axiomático de Hilbert fixou os fundamentos da Geometria Plana e seus axiomas estão divididos em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo. Neste sistema o terceiro postulado de Euclides, tornou-se uma definição e o quarto postulado um teorema.

A Geometria Neutra ou Geometria Absoluta é uma geometria que omite o postulado das paralelas, isto é, admite todos os axiomas de Hilbert, exceto o de paralelismo. Com os axiomas da Geometria Neutra e negando a unicidade das paralelas do quinto postulado, surgem novas geometrias.

Há duas maneiras de negar a unicidade das paralelas no quinto postulado de Euclides: uma é supor que por qualquer ponto fora de uma reta dada, é possível traçar pelo menos duas paralelas a esta reta; a outra é supor

que nenhuma paralela é possível, isto é, que o espaço não admite paralelas. No primeiro caso, obteremos a chamada Geometria Hiperbólica, no segundo, o espaço sem paralelas é chamado de Geometria Esférica, ou ainda, elíptica ou riemanniana.

2.2.3 Postulado das paralelas para a Geometria Hiperbólica

A Geometria Hiperbólica é, por definição, a geometria que se obtém assumindo todos os axiomas da Geometria Neutra e substituindo o postulado das paralelas por uma negação da unicidade, que chamaremos de “axioma hiperbólico”.

“Na Geometria Hiperbólica existe uma reta l e um ponto P , não pertencente à l , tal que pelo menos duas retas paralelas distintas à l passam por P ¹²” (Greenberg, 1998, p. 187).

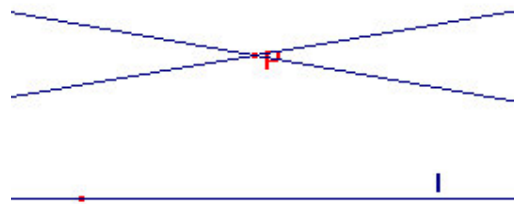


Figura 2.3: Ilustração do Axioma hiperbólico

Segundo Greenberg (1998), a primeira consequência importante do axioma hiperbólico é o lema da não existência de retângulos na Geometria Hiperbólica e com este lema, o autor demonstra o Teorema Universal Hiperbólico:

“Na Geometria Hiperbólica, para toda reta l e todo ponto P não pertencente à l , passam por P pelo menos duas retas distintas à l ” (ibid., p.188)

¹² Traduzido por nós do original em Inglês.

A melhor maneira de visualizar o que realmente se passa quando trocamos o quinto postulado de Euclides pelas versões não euclidianas é por meio da construção de modelos.

Um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos propriedades verdadeiras.

A necessidade de visualizar um espaço onde seria possível outras geometrias, que negassem o quinto postulado, deu origem à criação dos modelos para as geometrias não euclidianas.

Foram desenvolvidos pelo menos três modelos consistentes¹³ para a Geometria Hiperbólica. O primeiro modelo para a geometria de Lobachevsky foi desenvolvido por Eugenio BELTRAMI (1835-1900), a pseudoesfera. Um outro modelo foi criado pelo matemático Felix KLEIN (1849-1925) e mais dois modelos pelo matemático Henry POINCARÉ (1854-1912).

Dentre estes modelos, em nosso trabalho, vamos utilizar o de disco de Poincaré, do qual passamos a descrever algumas características, segundo Greenberg (1998).

2.2.4 Modelo do disco de Poincaré

Pontos, retas e plano

O matemático Henry POINCARÉ (1854-912) criou o seu modelo baseado na Geometria Euclidiana, representando os pontos do plano hiperbólico no interior de uma circunferência euclidiana. O ponto é usado no sentido habitual.

Se O é o centro de uma circunferência euclidiana γ e o segmento OR é um raio, o interior dessa circunferência, por definição, consiste de todos os

pontos X tais que $OX < OR$. O plano hiperbólico é o conjunto dos pontos interiores a essa circunferência γ , chamada de horizonte.

As retas nesse modelo são representadas por cordas abertas que passam pelo centro O de γ e por arcos abertos de circunferências ortogonais¹⁴ a γ . No decorrer do trabalho, chamaremos de reta-h todas as retas hiperbólicas.

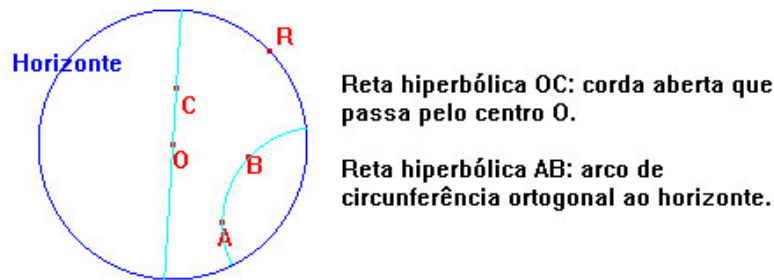


Figura 2.4: Horizonte e retas hiperbólicas

Os pontos de intersecção das retas hiperbólicas com o horizonte são pontos que não pertencem ao plano hiperbólico, denominados de *pontos ideais* ou *finais* da reta hiperbólica.

Ângulos

Se duas retas-h interceptam-se num ponto A , a medida do ângulo formado entre elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semi-retas euclidianas tangentes aos arcos (retas-h) em A .

Portanto, no modelo de disco de Poincaré, os ângulos entre as tangentes, são medidos como no modelo euclidiano, utilizando-se as retas (euclidianas) tangentes aos arcos (retas-h).

¹³ Um modelo é dito consistente quando a interpretação dada aos conceitos primitivos não leva a uma contradição.

¹⁴ Duas circunferências secantes são ditas ortogonais se, em cada ponto de intersecção, os raios são perpendiculares.

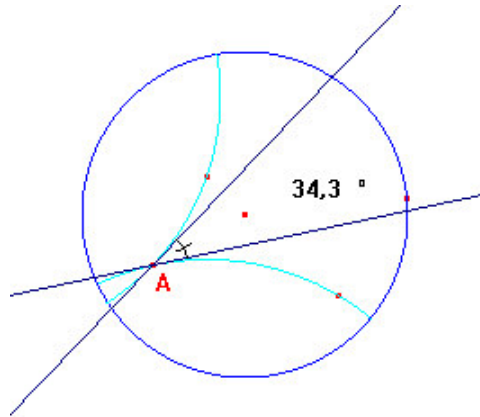


Figura 2.5: Medida de ângulo entre retas hiperbólicas

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B, neste modelo, é dada por

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AU / AV)}{(BU / BV)} \right|, \text{ onde U e V são os pontos ideais da reta hiperbólica AB.}$$

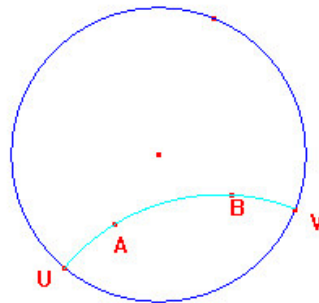


Figura 2.6: Distância-h entre dois pontos

Essa métrica foi desenvolvida por Poincaré para garantir a congruência de segmentos nesse modelo, e também colocar um infinito (plano hiperbólico) em espaço finito (circunferência euclidiana).

Para provar que a distância de AB tende ao infinito à medida que B se aproxima do horizonte, determinamos o horizonte como uma circunferência de raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano (cf. figura 2.7).

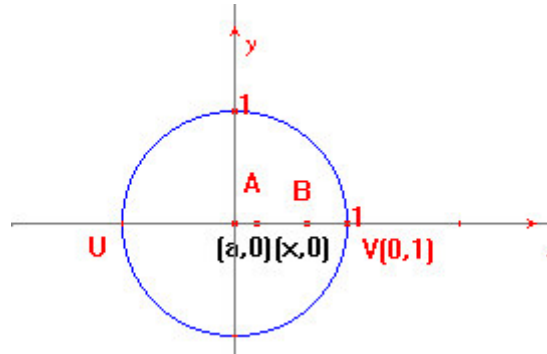


Figura 2.7: Distância-h representada no eixo cartesiano

A distância entre os pontos A e B pode ser escrita como $d(A, B) = \left| \ln \frac{(1+a)/(1-a)}{(1+x)/(1-x)} \right|$. Assim, podemos verificar que o $\lim_{x \rightarrow 1^-} d(A, B) = +\infty$ ou seja, o limite de $d(A, B)$ quando x tende a 1, pela esquerda, é mais infinito.

Retas Paralelas

No modelo de disco de Poincaré, duas retas são paralelas se e somente se elas não tiverem ponto em comum (cf. figura 2.8).

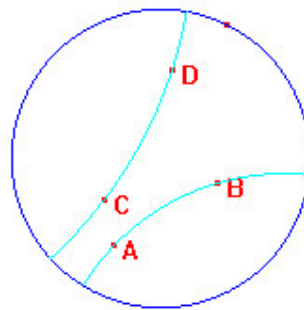


Figura 2.8: Retas paralelas no modelo de disco de Poincaré

Paralelas limite

Dadas duas retas-h AB e CD, a reta AB é chamada de reta-h paralela limite da reta-h CD, se ela tiver um ponto ideal em comum com a reta-h CD. (cf. figura 2.9)

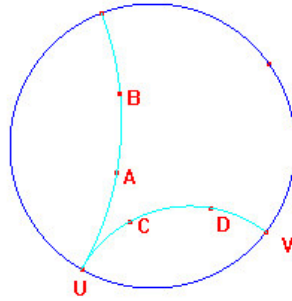


Figura 2.9: Reta-h paralela limite

Dada uma reta hiperbólica AB e um ponto P fora dela, existem duas retas paralelas limites (r_1 e r_2), que separam as demais retas hiperbólicas passando por P em duas classes: as retas secantes (que interceptam AB) e as retas não secantes (que não interceptam AB). Sendo S o ponto de intersecção da reta perpendicular à reta AB passando pelo ponto P e a reta AB, o ângulo agudo formado pela reta r_1 (ou r_2) e pela reta PS recebe o nome de *ângulo de paralelismo* (cf. figura 2.10).

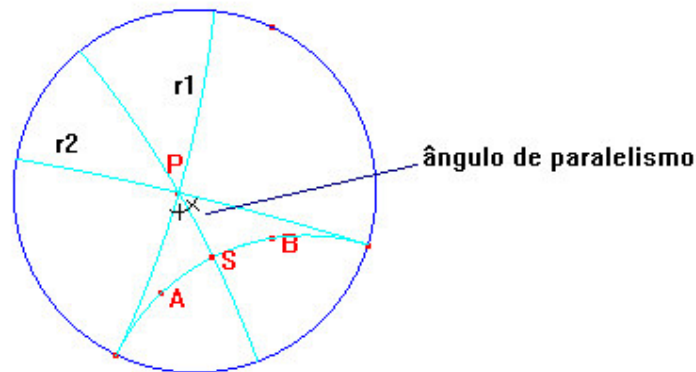


Figura 2.10: Ângulo de paralelismo

As retas paralelas limites e o ângulo de paralelismo são conceitos muito importantes na Geometria Hiperbólica, pois são a base da trigonometria nessa Geometria. Devido à sua importância, entendemos que esta parte da Geometria Hiperbólica merece um estudo mais detalhado, podendo ser objeto de outra proposta de ensino a ser desenvolvida em outra oportunidade.

2.3 Elementos para uma análise didática

2.3.1 Considerações sobre a distinção entre desenho e figura

Algumas pesquisas em Educação Matemática (Balacheff, 1988; Healy e Hoyles, 1988; Olivero, 1999) discutem dificuldades na aprendizagem da Geometria entre os alunos do Ensino Fundamental, em particular no que se refere a processos de prova que envolvem raciocínios dedutivos, métodos e generalizações. Além disso, esses estudos também apontam pouca compreensão dos alunos em relação a objetos geométricos, pois muitas vezes eles confundem propriedades do desenho (representação) com propriedades do objeto (ideal).

Parte desta problemática tem origem nos programas de ensino de nossas escolas, que dão ênfase a tratamentos estereotipados dos objetos geométricos, apresentação imediata de demonstrações como seqüência de argumentos ordenados e prontos, entre outras práticas que, isoladas, promovem o estabelecimento de equívocos.

Em diversas situações, num desenho geométrico mais complexo, determinadas propriedades ficam difíceis de serem visualizadas. Tal dificuldade pode decorrer do fato de uma propriedade geométrica estar, em geral, associada a uma configuração, ou seja, a objetos geométricos em relação que envolvem tanto componentes conceituais quanto figurais, em termos de sua representação.

De fato, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha um papel fundamental na formação da imagem mental. Para o aluno, nem sempre fica claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto. Se por um lado o desenho auxilia na construção do conhecimento e do entendimento do objeto geométrico, por outro, pode ser um obstáculo, uma vez consideradas características particulares da representação que não pertencem ao conjunto das condições geométricas que definem o objeto.

É interessante observar que, dependendo do estágio de desenvolvimento lógico matemático, os alunos trabalham meticulosamente buscando a “perfeição” do desenho, como se este fosse o próprio objeto geométrico, deixando em segundo plano as propriedades abstratas que dão existência a esse objeto. Isto é mais um indicativo de que os alunos podem confundir características físicas do desenho (espessura do traçado, tamanho do ponto) com suas propriedades geométricas.

Na perspectiva da Didática da Matemática Francesa, alguns autores (Parzysz, 88; Laborde, 93) estabeleceram uma distinção entre desenho e figura geométrica. Essa distinção pareceu, a esses autores, importante para compreender as relações existentes entre conceitos e construções geométricas, auxiliando na descrição (ou identificação) das relações entre os aspectos perceptivos ou visuais e os conceituais – referentes às propriedades geométricas dos objetos. Segundo Laborde (1993), o desenho é uma entidade material sobre um suporte físico (a folha de papel, a tela do computador, etc.), e a figura geométrica é caracterizada por um referencial teórico, no qual a representação material é interpretada em termos de elementos e relações geométricas. A figura é o objeto teórico, diferente da respectiva representação material, o desenho ou diagrama.

Em Geometria, o caráter dual das formas tem repercussões significativas no ensino e aprendizagem. Concordamos com Laborde & Laborde (1992), para quem os desenhos, enquanto representações de figuras, provocam percepções visuais e sugerem conceitos teóricos. Assim, as representações de objetos geométricos referem-se tanto a objetos teóricos, quanto a propriedades gráfico-espaciais que, por sua vez, podem estimular atividades empíricas/perceptuais no sujeito que está trabalhando com elas. A seguir, detalhamos essas relações.

2.3.2 Propriedades gráfico-espaciais e teóricas

Segundo Laborde (1999), os diagramas (desenhos) têm um papel importante no ensino de Geometria, eles pertencem a um tipo específico de representação e são constituídos por elementos espaciais e perceptivos que, para a construção de significados, interligam-se aos aspectos teóricos da Geometria.

O espaço físico e a Geometria, como modelo teórico, caracterizam dois domínios distintos. O espaço é considerado como parte da realidade e a Geometria, como um conjunto de teorias que modelam esse espaço.

No entanto, os diagramas apresentam um papel ambíguo na Geometria: por um lado, eles se referem a objetos teóricos, e por outro, oferecem propriedades gráfico-espaciais que podem desenvolver outras atividades perceptuais no indivíduo. Ao invés de ajudarem os estudantes, os diagramas podem se tornar obstáculos ao pensamento geométrico, na medida em que não conduzem necessariamente a um raciocínio em termos teóricos. Isto retoma a questão sobre a diferença do que Laborde (1999) denomina propriedades gráfico-espaciais e propriedades teóricas na Geometria.

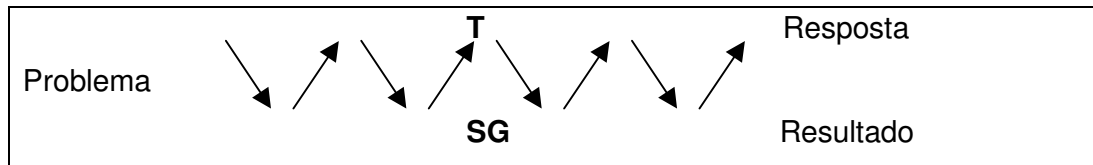
Para fazer a distinção entre domínio dos objetos geométricos e suas relações e o domínio de entidades gráfico-espaciais, Laborde (ibid.) utiliza a notação T, para se referir ao domínio teórico e SG para o domínio espaço-gráfico. T denota o nível de referentes teóricos da Geometria, em relação aos objetos teóricos, relações e operações nestes objetos, bem como julgamentos sobre eles. SG denota o nível de entidades gráficas, no qual é possível executar ações físicas, e também expressar idéias, interpretações, opiniões.

Assim, por meio desta distinção, Laborde (ibid.) classifica alguns problemas que podem ocorrer no ensino de Geometria, a saber:

- *problemas internos a um domínio*: problemas T internos à teoria, ou problemas SG relacionados ao domínio espaço-gráfico;
- *problemas envolvendo os dois domínios*: questões de trânsito de um domínio a outro. A definição de um objeto geométrico é dada em termos

de T e devem produzir uma representação SG do objeto, ou uma entidade SG é dada e pode ser interpretada em termos de T.

A autora considera que a solução de um problema geométrico requer o uso dos dois domínios – o T e o SG – pois é constituído pelo movimento contínuo entre eles. O esquema abaixo ilustra esse processo.



Quadro 2.1: Reprodução do esquema T – SG (Laborde, 1999)

Neste modelo, enquanto resolvem um problema, os estudantes trabalham em três diferentes níveis: no nível gráfico-espacial, quando eles observam as propriedades invariantes gráfico-espaciais (a forma de alguns objetos, alguma invariância no tamanho de alguns objetos, etc.); no nível teórico, quando usam definições e teoremas; na relação entre os níveis teórico e espaço-gráfico, quando ocorre uma interpretação imediata de um fenômeno espacial em termos geométricos, ou quando é encontrada uma razão geométrica para algo observado em relação ao comportamento do diagrama.

Essa autora, em diversos trabalhos, afirma que o conhecimento geométrico é modificado quando mediado pelo computador e a natureza das representações em ambientes computacionais difere daquelas do ambiente clássico do papel&lápis. A seguir, tratamos dessas questões para o caso dos ambientes de geometria dinâmica – DGS (*Dynamic Geometry Systems*).

2.3.3 Ambientes de Geometria Dinâmica

Os softwares de geometria dinâmica não oferecem apenas a possibilidade de efetuar qualquer construção geométrica de modo mais rápido e preciso do que no ambiente papel&lápis, mas também a possibilidade de movimentar e modificar os desenhos, permitindo uma visualização de

propriedades e relações geométricas. Um representante destes softwares, relativamente difundido no Brasil, é o software Cabri-Géomètre.

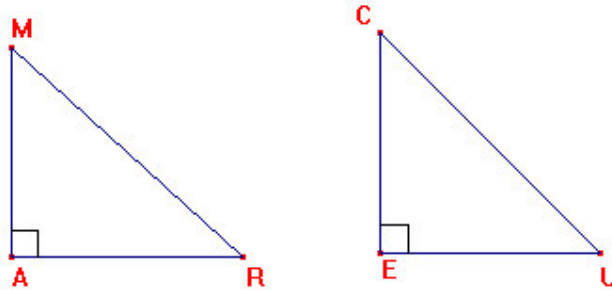
O Cabri-géomètre, segundo Laborde (1993), apresenta duas características importantes:

- ♣ a coexistência de *primitivas de desenho puro* (objetos criados a partir de pontos livres que correspondem, grosso modo, às ferramentas do menu de criação, por exemplo, “ponto”, “reta”, “segmento”, “circunferência”, etc...) e de *primitivas geométricas* (aquelas que permitem traçar um objeto exprimindo propriedades ou relações geométricas, como “reta perpendicular”, “mediatriz”, “ponto médio”, etc...);
- ♣ a manipulação direta do desenho, ou seja, a possibilidade de manipular, com o auxílio do mouse, os objetos representados na tela. Essa manipulação é caracterizada essencialmente pela possibilidade de movimentação ou deslocamento de elementos constitutivos dessas representações (o arrastar).

Se uma representação é feita usando as primitivas de desenho puro, isto é, de modo aproximativo, ela perde suas propriedades espaciais aparentes em seu estado original quando deslocamos um de seus elementos de base. Tais construções são, por esta razão, consideradas como *construções moles*. Se a representação for produzida por meio do uso de primitivas geométricas, que permitem expressar relações e propriedades matemáticas, pode ser considerada como uma *construção robusta*.

Para melhor ilustrar a diferença entre construções moles e robustas, apresentamos na figura 2.11 dois triângulos retângulos MAR e CÉU construídos no Cabri. O primeiro, triângulo MAR, foi construído por meio de uma primitiva de desenho puro, a ferramenta “Triângulo” e, em seguida, “arrumado” por meio do deslocamento de seus vértices, de forma a se obter um ângulo de 90° . Para o segundo triângulo CÉU, foi utilizada a primitiva

geométrica “reta perpendicular” a um segmento inicial que representa um de seus lados, a fim de garantir a propriedade do triângulo retângulo. Utilizando a ferramenta de verificação “Perpendicular?”, pode-se observar se os catetos dos dois triângulos são perpendiculares entre si, e em ambos os casos, a resposta fornecida por Cabri é positiva.

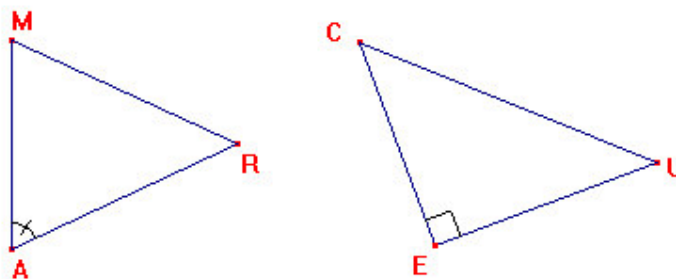


Objetos perpendiculares

Objetos perpendiculares

Figura 2.11: Construção de objetos perpendiculares

Os objetos têm a mesma aparência, mas movimentando um dos vértices livres de cada triângulo, verificamos que o primeiro não mantém a relação de perpendicularidade entre os catetos (*construção mole*), enquanto que o segundo, construído com a primitiva geométrica “Reta perpendicular” conserva esta propriedade, sendo assim, uma *construção robusta*.



Objetos não perpendiculares

Objetos perpendiculares

Figura 2.12: Verificação da robustez da construção

A dualidade do emprego das primitivas de desenho puro e das primitivas geométricas desenvolve o conceito de figura ao facultar a identificação e a elaboração de *construções robustas*. Já no ambiente papel&lápis, como não é

possível manipular a representação deslocando seus elementos, a verificação é feita exclusivamente pela “leitura” perceptiva do aluno, que pode ou não justificar as etapas usadas durante o traçado. O arrastar das representações feitas na tela do Cabri, tanto moles quanto robustas, podem explicitar as relações e os conceitos que estão em jogo; a manipulação direta resulta no acesso a uma classe de desenhos, o que pode colocar em evidência as propriedades invariantes de tais representações. Este procedimento favorece, então, um trabalho com a figura e não só com o desenho.

Assim, em ambientes informatizados como o do Cabri, conceitos geométricos podem ser geralmente construídos com equilíbrio conceitual e figural porque há um desenvolvimento da possibilidade de percepção das diferentes representações de uma mesma situação, ou de controle das configurações geométricas, o que leva à observação e identificação das propriedades envolvidas e à descoberta de outras mais.

Um dos principais aspectos didáticos que destacamos na utilização dos softwares de geometria dinâmica refere-se à construção de desenhos de objetos, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos por meio de construções. Aliar a parte “concreta” dos conceitos envolvidos, à sua construção (ou ainda a partir de desenhos prontos feitos pelo professor), e descobrir invariantes a partir da experimentação e manipulação de tais representações podem, em um segundo momento, favorecer o trabalho com provas ou justificativas matemáticas dos resultados obtidos experimentalmente.

O uso do “*desenho em movimento*” pelos alunos possibilita a manipulação do concreto. Essa manipulação, ao evoluir para uma manipulação abstrata, leva os sujeitos a níveis mentais superiores de dedução e rigor e, desta forma, à compreensão da natureza do raciocínio matemático.

Com a manipulação direta de objetos geométricos, o Cabri permite que a geometria se transforme no estudo das propriedades invariantes desses objetos enquanto seus componentes são manipulados na tela: a identificação de uma propriedade geométrica torna-se a descrição de um fenômeno

geométrico acessível à observação nesse novo campo de experimentação (Laborde, 1993).

Assim, o significado de desenho muda, nesses ambientes de geometria dinâmica, uma vez que não nos referimos mais a um único objeto, mas sim a uma classe de objetos que compartilham as mesmas propriedades e características. Gravina&Santarosa (1999, p. 78), em seu artigo intitulado “Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados”, cita Hebenstreint (1987): *"o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais"*.

Segundo Gravina&Santarosa (1999), podemos dizer que as novas tecnologias oferecem *"instâncias físicas"* em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática do tipo permitido pelo "lápiz&papel" ou "giz e quadro-negro". O dinamismo é obtido por meio de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador.

Esse dinamismo e as diferentes maneiras de manipular diretamente as representações na tela do computador foram o foco principal de uma pesquisa que analisa os diferentes modos de “arrastar” sob um ponto de vista cognitivo – é o que passamos a detalhar a seguir.

2.3.4 Os modos de “arrastar”

Uma pesquisa feita por Olivero em 1999, analisou o “arrastar” sob um ponto de vista cognitivo, enfatizando como o *modo de arrastar (way dragging)* pode afetar o processo de raciocínio dos estudantes e não apenas o que a manipulação permite ao estudante fazer. A autora propõe uma classificação de diferentes modalidades de arrastar que os estudantes podem usar na

resolução de um problema no Cabri. Ela considera que o “arrastar” muda de acordo com os diferentes propósitos dos estudantes e as diferentes conclusões a que eles desejam chegar, como por exemplo, explorar uma situação, fazer conjecturas, validá-las, testá-las ou construir justificativas.

Em seu trabalho, Olivero (2002) identifica sete modalidades de manipulação, a saber:

O arrastar vagamente (*wandering dragging*), onde ocorre o arrastar de pontos livres na tela. Esse arrastar é aleatório, sem um plano, com a intenção de descobrir configurações interessantes ou regularidades.

- O arrastar sobre (manipulação limite) (*bound dragging*), movimentação de pontos *semi-manipuláveis* (no caso do Cabri, o “Ponto sobre objeto”), ou pontos que pertencem a algum objeto, e que podem ser movidos somente sobre esse objeto ao qual pertencem.
- O arrastar orientado (*guided dragging*), manipulação de pontos básicos do diagrama com a intenção de dar uma forma particular.
- O arrastar em lugar mole (*lieu muet dragging*), movimentação de um ponto livre, para o qual a figura mantém uma propriedade “descoberta” ou desejada, o que significa que o arrastar é orientado por uma trajetória escondida (um lugar mole), ainda que sem estar ciente disso.
- O arrastar em linha (*line dragging*) consiste em criar novos pontos na trajetória ou posições que mantêm a regularidade da figura.
- O arrastar ligado (*linked dragging*) consiste em “ligar” um ponto a um objeto e condicionar sua movimentação a esse objeto (sobre ele). Pode-se considerar esse arrastar como uma redefinição de um ponto livre como um ponto sobre um objeto.
- O arrastar teste (*dragging test*), movimentação de pontos com a intenção de verificar se as propriedades iniciais são mantidas. Em caso afirmativo, a construção é robusta, senão, trata-se de uma construção que não está de acordo com as propriedades geométricas desejadas.

Para melhor discutirmos como os modos de arrastar podem ser explorados em um problema, vamos usar um exemplo clássico que foi discutido por Hölzl (1995,1996) e por Olivero (2002). Trata-se do seguinte problema: dado um triângulo ABC, e considerando um ponto P em AB e os dois triângulos APC e PCB, fazer hipóteses sobre as propriedades do triângulo ABC que são necessárias para que os triângulos APC e PCB sejam isósceles. Nesse caso, o triângulo ABC é dito “separável”.

Podemos encontrar duas configurações diferentes, conforme ilustração abaixo.

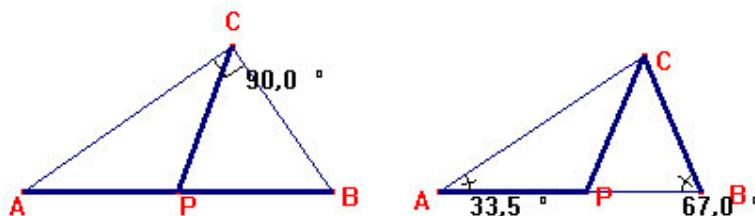


Figura 2.13: Triângulos separáveis

Os autores investigaram somente as configurações do primeiro caso. Para verificar as características do triângulo ABC, nessa configuração, deve-se analisar passo a passo as possíveis construções que podem ser feitas pelo aluno, assim como os diferentes modos de arrastar.

No Cabri, é desenhado um triângulo ABC e P como o ponto médio de AB. O aluno começa a movimentar o ponto C, que é um ponto “arrastável”, por toda a tela, com a intenção de verificar quando esses triângulos existem. Nesse momento, o aluno está *arrastando vagamente*. Com esse modo de arrastar, o aluno pode encontrar vários triângulos que satisfazem a propriedade, tendo assim, a certeza que o problema tem solução.

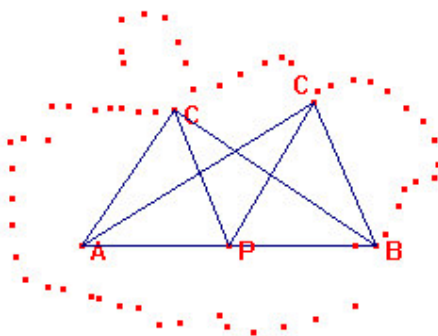


Figura 2.14: “Arrastar vagamente”

Em seguida, o aluno pode passar à movimentação de C visando observar quando o triângulo ABC é “separável”, isto é, quando PC é igual a AP. Observando sua configuração, ele pode começar a pensar sobre as características do triângulo. Com a intenção de saber mais, ele começa a arrastar o ponto C, de modo que continue com a propriedade $AP=PC$. O aluno não está mais arrastando sem propósito, ele está movimentando em uma certa direção para que o triângulo ABC se dividida em dois triângulos isósceles. Para isso, ele está usando o *arrastar em lugar mole*. O “caminho” percorrido por C não pode ser visto, a não ser que seu rastro seja acionado, por isso é chamado de ‘mole’. No entanto, o aluno pode visualizá-lo e perceber que sua forma parece com algum objeto conhecido, no caso, similar a um arco de circunferência.

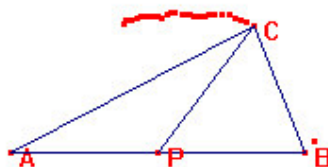


Figura 2.15: “Arrastar em lugar mole”

Para melhor entender a situação, o aluno pode explorar o *arrastar em linha*, marcando pontos correspondentes nas posições ocupadas por C quando ABC tem a propriedade desejada.

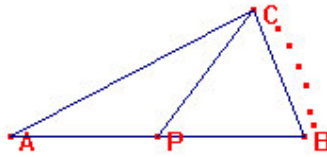


Figura 2.16: “Arrastar em linha”

Com isso, o aluno pode perceber que esses pontos parecem pertencer a uma circunferência, mais precisamente na circunferência de centro em P e raio AP ($=PB$). O *lugar mole* agora se torna explícito. Pela construção da circunferência com centro P e raio AP, o aluno verifica que os pontos marcados anteriormente ficam sobre essa circunferência. Com isso, o aluno pode conjecturar que os triângulos “separáveis” são aqueles cujo vértice C pertence à circunferência de centro P e raio AP. É equivalente dizer que o triângulo ABC está inscrito numa semicircunferência de diâmetro AB, o que significa que ABC é retângulo em C. Portanto, segundo Olivero (1999), a conjectura pode ser melhor formulada pelo aluno de uma forma lógica: se ABC é um triângulo retângulo em C, então ele é “separável”.

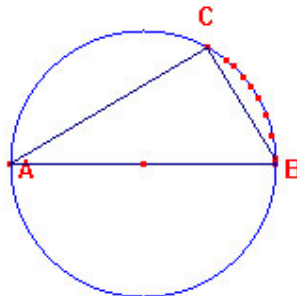


Figura 2.17: "Lugar mole" se torna explícito

O aluno pode validar essa afirmação com o auxílio do Cabri, ligando o vértice C à circunferência descoberta pelo *arrastar em linha* e movimentando-o sobre a circunferência, usando o *arrastar ligado*. Com isso o aluno pode observar todos os triângulos que satisfazem a propriedade de ser ‘separável’.

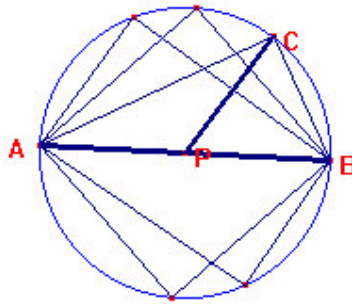


Figura 2.18: “Arrastar ligado”

Como último passo, o aluno pode construir um triângulo retângulo ABC, o ponto médio P do segmento AB, o segmento PC e usar o modo *arrastar teste*, movendo o triângulo através de todos os pontos e observar que ele mantém a propriedade requerida.

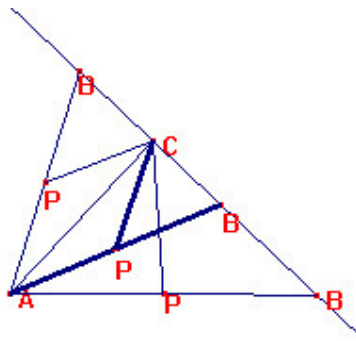


Figura 2.19: “Arrastar teste”

Segundo Olivero (1999), o fato de observar a pertinência do ponto C à circunferência de diâmetro AB, significa imediatamente considerá-lo como um triângulo retângulo e, por conseqüência, usar o modo de *arrastar teste* a partir da construção de um triângulo retângulo. No entanto, com os outros modos de arrastar, não é essa a propriedade efetivamente colocada em evidência; trata-se de um passo dedutivo importante. Assim, podemos considerar que a conjectura pode ser formulada pelos alunos da seguinte forma: um triângulo ABC é separável se estiver inscrito numa semicircunferência. Tal conjectura levaria a uma validação por meio de um *arrastar teste* distinto do analisado acima, ou seja, baseada na construção de um ponto C em uma circunferência de diâmetro AB. (cf. figura abaixo)

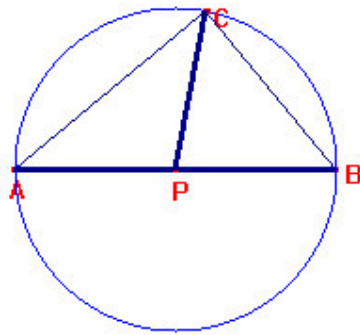


Figura 2.20: “Arrastar teste”

Como ilustrado com esse exemplo, os diferentes modos de arrastar podem ser usados com o intuito de atingir diferentes objetivos (Olivero, 2002). Inspirados nesse trabalho, pretendemos identificar os modos de arrastar utilizados na resolução das atividades pelos professores, no intuito de compreender seus raciocínios e estratégias, podendo analisar as relações estabelecidas entre as Geometrias Euclidiana e Hiperbólica, bem como a evolução destas com os recursos dinâmicos do Cabri. Daremos especial atenção ao modo de *arrastar teste*, no sentido de levar a construções robustas, o que permite justificar e validar resoluções.

CAPÍTULO III

ASPECTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a metodologia de nossa pesquisa, descrevendo o estudo experimental e os sujeitos participantes desse estudo, a metodologia que usamos para a concepção e elaboração das atividades, assim como os procedimentos metodológicos para sua aplicação. Por fim, descreveremos tais atividades destacando seus objetivos, suas características, soluções ou estratégias esperadas em suas resoluções.

3.2 A pesquisa qualitativa

Segundo Ludke & André (1986), é cada vez mais evidente o interesse que os pesquisadores da área de Educação vêm demonstrando pelo uso de metodologias qualitativas. Perez (1991) realça que esse tipo de pesquisa permite descobrir, documentar, chamando a atenção para certos padrões e ações sociais, dando a possibilidade de analisar como determinados indivíduos pensam e desenvolvem suas atividades sob determinados limites, pressupostos e condições materiais.

Na perspectiva de Bodgan & Biklen (1982), existem formas múltiplas de interpretar as experiências que estão ao nosso alcance por meio da nossa interação com os outros. Os investigadores precisam compreender o pensamento subjetivo dos participantes da pesquisa. Estes autores apresentam cinco características que despertam o interesse na pesquisa qualitativa:

- apresenta o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como principal instrumento;
- os dados coletados são predominantemente descritivos;
- a preocupação com o processo é muito mais importante do que com o produto;
- os significados construídos pelas pessoas são focos de atenção especial do pesquisador;
- a análise de dados tende a seguir um processo indutivo.

O nosso trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma proposta pedagógica voltada à concepção de situações didáticas para uma formação inicial ou continuada de professores, e visa explorar relações entre a Geometria Hiperbólica e Geometria Euclidiana. Para tal desenvolvimento, optamos inicialmente por investigar, por meio de um estudo experimental, quais relações *professores-formadores* de Geometria Euclidiana estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-géomètre.

Com esse estudo experimental, envolvendo sujeitos que apresentam características particulares (retomaremos essa questão mais adiante), pretendemos identificar elementos e condições que possam subsidiar a elaboração da referida proposta, levando-nos a refinar escolhas e hipóteses iniciais.

3.3 Características do estudo experimental

O estudo experimental foi desenvolvido com professores ligados à mesma Universidade particular situada no município de São Paulo/SP, citada no primeiro capítulo, que integra na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, a disciplina Geometria 4, cujo conteúdo engloba o ensino de Geometrias não Euclidianas.

Trabalhamos com um grupo de seis professores-formadores experientes no ensino de Geometria Euclidiana, assim como no uso do ambiente informático Cabri-géomètre. Estes professores haviam tido contato com outras geometrias de forma assistemática e sem um estudo aprofundado da Geometria Hiperbólica.

Dentre esses seis professores, quatro trabalham no curso de Licenciatura em Matemática; um deles acabara de concluir seu Mestrado em Educação Matemática, trabalho em que investigou questões relativas ao ensino de Geometria com o auxílio do Cabri e, por último, um professor que está cursando o Mestrado Acadêmico cujo projeto de dissertação também envolve ensino de Geometria Euclidiana. Todos estes professores têm uma larga experiência em formação continuada de professores de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo, e participam ativamente de projetos de capacitação.

Optamos por trabalhar com esses professores pois um vasto conhecimento da Geometria Euclidiana, e do manuseio do software Cabri-géomètre são fundamentais para enriquecer a nossa proposta inicial. Assim, não nos preocupamos com sessões de familiarização do software, já que o objetivo principal de nosso trabalho é potencializar uma proposta de ensino em ambiente de geometria dinâmica, visando desenvolver noções de Geometria Hiperbólica que contribua na compreensão e ampliação de conceitos da Geometria Euclidiana.

Para poder alcançar nosso objetivo, desenvolvemos uma proposta inicial para poder ser reavaliada e potencializada com os resultados do nosso estudo experimental. A elaboração das atividades para esta proposta está detalhada a seguir.

3.4 Elaboração das atividades

Para o nosso estudo, desenvolvemos atividades ou tarefas inspiradas no que Lesh et al. (2000) denominam de “*model eliciting*” ou “*thought revealing*”. Trata-se de um tipo de método clínico, cujo desenvolvimento de atividades

baseia-se em determinados princípios ou critérios. O mais importante deles refere-se ao fato de que quando os estudantes trabalham em tais tarefas, devem ser levados a revelar explicitamente, para o investigador, o desenvolvimento de suas construções, ou seja, seus modelos conceituais. Sendo esse critério satisfeito, as atividades caracterizam-se como úteis na promoção de informações que ajudam professores a planejar instruções efetivas, e também pesquisadores a verificarem a natureza da construção do desenvolvimento matemático de estudantes.

Ainda segundo Lesh et al. (2000), os seis princípios que devem nortear a concepção ou elaboração das atividades, podem ser assim descritos:

- *princípio de construção modelo*

As atividades devem envolver descrições simbólicas ou situações significativas, envolvendo matematização. Um modelo é um sistema que consiste de elementos, relações entre elementos, operações que descrevem como os elementos interagem, padrões ou regras que se aplicam às relações e às operações. Não são todos os sistemas que funcionam como modelos. De fato, para ser um modelo, um sistema deve ser usado para descrever outro sistema, ou para pensar nele, ou descrevê-lo.

Os modelos são necessários para fazer previsões baseadas em padrões subjacentes ou regularidades quando são solicitadas construções ou explicações, quando é necessário justificar ou explicar decisões, quando é necessário analisar ou avaliar conclusões alternativas, explicações ou interpretações geradas por outros.

- *princípio da realidade*

Esse princípio pode ser chamado também de princípio de significados porque, para produzir certos tipos de resultados, é importante para os sujeitos que as situações sejam baseadas em extensões do próprio conhecimento pessoal e de suas experiências. Acreditamos que esse princípio é importante para nossas atividades na medida em que contemplamos conceitos da Geometria Euclidiana que fazem parte dos conhecimentos dos nossos sujeitos, bem como suas experiências na prática docente dessa geometria.

Pretendemos estender esses conhecimentos para o entendimento da Geometria Hiperbólica.

- *princípio de auto avaliação*

Se os estudantes não puderem descobrir deficiências no seu modo primitivo de pensar, então não é provável que eles façam esforços para se desenvolverem além de suas interpretações. Portanto, as atividades devem ser elaboradas de tal modo que os estudantes possam avaliar seu progresso e a utilidade dos resultados que eles produzem. Esse princípio se relaciona com a validação das ações dos sujeitos. Em nossas atividades, os sujeitos podem validar experimentalmente, com o auxílio do software Cabri, e validar teoricamente, ao estabelecer relações com as validações conhecidas da Geometria Euclidiana.

- *princípio da construção de documentação*

Uma razão da importância desse princípio refere-se ao fato de investigadores e professores estarem interessados em atividades que fazem mais do que estimular e facilitar o desenvolvimento de construções matemáticas. Os alunos precisam ser capazes de documentar as construções de seu desenvolvimento.

Quando as atividades satisfazem esse princípio, as soluções dos estudantes devem revelar, o mais explícito possível, como eles estavam pensando, suas descrições e explicações. Esse princípio será contemplado pois a utilização do software Cabri-géomètre em nossas atividades possibilita a revisão passo a passo de cada construção feita por nossos sujeitos, além das fichas das atividades, que fornecem o registro escrito das suas ações.

- *princípio de construção compartilhada e reutilizada*

Os problemas que implicam esse princípio confrontam os estudantes com a necessidade de ir além de desenvolver ferramentas pessoais para desenvolverem caminhos gerais de pensamento, pois envolvem descrições, explicações e procedimentos que podem ser usados em outras situações, além da imediata. Tais problemas tendem a enfatizar muito mais o uso da Matemática em situações de generalização, do que em problemas locais. Esse

é o princípio menos utilizado em nossas atividades, embora as atividades de exploração e de construção necessitem de procedimentos utilizados nas atividades de familiarização.

- *princípio do protótipo efetivo*

Esse princípio enfatiza que a solução precisa ser a mais simples possível, enquanto ainda se está criando a necessidade de uma construção significativa. Segundo esse princípio, as atividades devem ser significativas, mas não muito complexas. Nossas atividades vão contemplar esse princípio pois as soluções são simples e utilizam propriedades da Geometria Euclidiana familiares aos nossos sujeitos.

No contexto do nosso estudo, entendemos que o desenvolvimento das atividades baseado em tais critérios é adaptado a nossos propósitos e permite coletar dados adequados à questão desta pesquisa, que pretende identificar e analisar quais relações são estabelecidas por professores de Geometria Euclidiana, quando confrontados com conceitos da Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-Géomètre.

3.5 Tipos e objetivos das atividades

A partir dos princípios descritos acima, concebemos três tipos de atividades: de familiarização, de exploração e de construção. Como as atividades serão desenvolvidas com o auxílio do software Cabri-géomètre II, a primeira fase será a de familiarização com as ferramentas do software (em particular com o menu hiperbólico); a segunda fase será composta por atividades de exploração com algumas construções, que serão desenvolvidas visando explorar a Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré e levar os sujeitos ao levantamento de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas; e a última fase envolverá atividades de construção com algumas explorações que visam verificar quais relações e propriedades dos objetos hiperbólicos em jogo são consideradas pelos sujeitos.

As três sessões do nosso experimento foram divididas do seguinte modo:

- A primeira sessão compreende duas partes: apresentação das Geometrias não Euclidianas e atividades de familiarização do menu hiperbólico do Cabri-géomètre.
- A segunda sessão, na qual serão apresentadas atividades de exploração com algumas construções no modelo de disco de Poincaré. Esta sessão é composta por três atividades.
- Na terceira e última sessão, serão propostas atividades de construção com algumas explorações no modelo de disco de Poincaré. Esta sessão é composta de cinco atividades.

3.5.1 Primeira sessão: Apresentação e análise prévia

Como descrito acima, essa sessão vai ser dividida em duas partes: apresentação das Geometrias não Euclidianas e atividades de familiarização do menu hiperbólico do Cabri-géomètre.

A importância dessa sessão se justifica pelo fato dos professores não terem experiência de ensino da Geometria Hiperbólica e, conseqüentemente não estarem familiarizados com as ferramentas do menu hiperbólico do modelo de disco de Poincaré no Cabri-géomètre.

3.5.1.1 Primeira parte: Apresentação das Geometrias não Euclidianas

A apresentação¹⁵ sobre as Geometrias não Euclidianas fundamenta-se no seu desenvolvimento histórico e vai abranger três aspectos: a Geometria de Euclides, em particular, características do Livro I de sua obra “Os Elementos”; a relação do quinto postulado de Euclides com o surgimento de novas Geometrias, incluindo enunciados equivalentes a esse postulado, as proposições que utilizam direta ou indiretamente o quinto postulado, e a caracterização da Geometria Absoluta; e por fim, o modelo de disco de Poincaré, com a interpretação dos principais objetos hiperbólicos, como ponto, reta e plano, e também as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e a medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas.

¹⁵ Os slides da apresentação se encontram no anexo 4.

O objetivo principal desta apresentação é introduzir alguns conceitos de base da Geometria Hiperbólica, que serão importantes pré-requisitos para as atividades que seguem.

Com a apresentação dos dois primeiros slides, faremos uma abordagem histórica da Geometria de Euclides mostrando como foi dividida sua obra “os Elementos” e o que engloba cada livro. Enfatizaremos o Livro I explicando a classificação feita por Euclides sobre definições, axiomas, postulados e proposições. Nos três slides que seguem, enunciaremos o quinto postulado de Euclides, sua recíproca, que é a proposição 17 do Livro I, e algumas equivalências (Playfair, Proclus e Legendre).

Os slides 6 e 7 mostram as definições, postulados, noções comuns (axiomas) e proposições utilizadas para demonstrar cada uma das 48 proposições. Destacaremos que o quinto postulado é utilizado diretamente só na proposição 29, e que esta é mencionada a partir da proposição 30. Com isso, no slide seguinte, definiremos a Geometria Absoluta, que é a parte da geometria que independe do quinto postulado.

Nos slides 9, 10, 11 e 12, faremos uma abordagem histórica do nascimento das Geometrias não Euclidianas, enunciaremos as duas negações do quinto postulado de Euclides, uma das quais representa o postulado hiperbólico, e definiremos o que é um modelo para um dado sistema axiomático. Citaremos alguns modelos existentes e, na seqüência dos slides, detalharemos o modelo de disco de Poincaré, que será o modelo utilizado em nosso estudo.

Por meio deles, interpretaremos os principais objetos hiperbólicos: ponto, reta, plano e as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e a medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas. Por fim, apresentaremos a verificação do primeiro e do segundo postulado de Euclides nesse modelo, e a verificação do postulado hiperbólico.

3.5.1.2 Segunda parte: Atividades de familiarização do menu hiperbólico

A primeira sessão é composta por cinco atividades¹⁶ direcionadas à utilização das ferramentas básicas do menu hiperbólico; a última questão é “aberta”: o sujeito escolhe a construção a ser realizada.

Antes das atividades, apresentamos um quadro resumo (quadro 3.1) do modelo de disco de Poincaré, com a interpretação dos principais objetos do plano hiperbólico.

<i>Objeto Hiperbólico</i>	<i>Interpretação Euclidiana</i>
Plano	Interior de uma circunferência euclidiana (esta circunferência é chamada <i>horizonte</i>)
Ponto	Ponto interior ao horizonte
Reta	Diâmetro do horizonte e arcos de circunferências ortogonais ao horizonte.

Quadro 3.1: Objetos do plano hiperbólico

Em qualquer construção hiperbólica, é necessário primeiramente criar a circunferência que determina o plano hiperbólico (o horizonte). Assim, antes da primeira atividade, direcionamos os professores para a criação do horizonte destacando que, para o uso das ferramentas do menu, este objeto sempre deverá ser selecionado.

Os enunciados das atividades dessa sessão se encontram no quadro abaixo (quadro 3.2):

- 1) Utilize a ferramenta Ponto para criar dois pontos distintos A e B. Utilize a ferramenta H-droite para criar a reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B.
- 2) Usando a ferramenta H-distance, obtenha a distância entre A e B ($d_h(A,B)$).
- 3) Para construir uma reta perpendicular à outra reta dada, utilize a ferramenta H-perpendiculaire. Para medir o ângulo entre elas, utilize a ferramenta H-angle.
OBS: A medida aparecerá em radianos, se preferir, altere para graus no menu opções/preferências.
- 4) Crie um triângulo XYZ e obtenha seu perímetro.
- 5) Explore o menu hiperbólico para conhecer um pouco mais sobre as ferramentas disponíveis.

Quadro 3.2: Atividades de familiarização

¹⁶ A ficha completa das atividades de familiarização está nos anexos.

Com estas questões, esperamos que os professores conheçam as características dos objetos hiperbólicos e explorem o menu para verificarem as ferramentas disponíveis na barra correspondente ao modelo do disco de Poincaré.

Na quinta questão, as duplas ficam livres para explorarem o menu hiperbólico, esperamos que os professores façam construções que estão habituados a fazer no Cabri com o menu euclidiano para verificar as semelhanças ou diferenças entre os dois modelos de Geometria (por exemplo, triângulo equilátero, quadriláteros, etc...)

3.5.2 Segunda sessão: Apresentação e análise prévia

A segunda sessão é composta por três atividades. Estas atividades visam a exploração da Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré, e levam os sujeitos à formulação de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas.

Atividade 1

Abaixo estão enunciados alguns teoremas da Geometria Euclidiana. Utilizando o Cabri-géomètre, verifique quais deles também são válidos na Geometria Hiperbólica, justificando sempre sua resposta.

1. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
2. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
3. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° .
4. Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
5. Todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.
6. Podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado.
7. O ponto de intersecção das medianas divide cada uma delas na razão 2 para 1 a partir do vértice.

Quadro 3.3: Atividade 1 da segunda sessão

O objetivo principal da atividade 1 é verificar se os professores apresentam justificativas para o fato de alguns teoremas da Geometria Euclidiana serem (ou não) válidos na Geometria Hiperbólica. Dentre os teoremas que não são válidos na Geometria Hiperbólica, alguns podem ser

considerados enunciados equivalentes ao quinto postulado de Euclides (incluindo alguns da apresentação inicial) e outros enunciados que fazem uso do quinto postulado de forma não direta. Espera-se, assim, que os professores relacionem ou identifiquem a equivalência desses enunciados, para conseguirem justificar a não validade na Geometria Hiperbólica. Espera-se também que os sujeitos percebam que os teoremas válidos na Geometria Hiperbólica não dependem do quinto postulado.

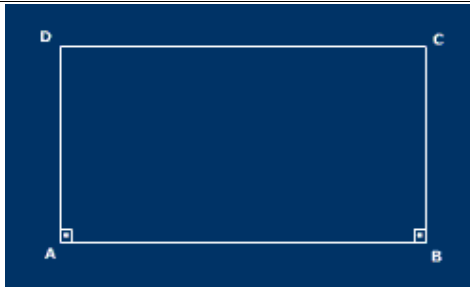
Para a justificativa de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes utilizam-se os casos de congruência de triângulos, LLL ou LAL, que fazem parte das proposições da Geometria Absoluta. E a justificativa para o teorema 6 “podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado”, é feita a partir da definição de bissetriz, e pela prova de que em todo triângulo as bissetrizes dos ângulos internos se encontram num único ponto, chamado incentro.

Os teoremas 1, 3, 4, 5 e 7 não são verdadeiros na Geometria Hiperbólica, o que pode ser justificado pelo fato de suas demonstrações utilizarem diretamente ou indiretamente o quinto postulado de Euclides, e necessitarem da existência e unicidade da reta paralela em sua prova.

Com essa atividade, poderemos perceber se os professores recorrem à propriedades e conceitos do modelo hiperbólico de Poincaré ou se ficam restritos a observações e justificativas baseadas na reprodução dos objetos na tela do computador.

Atividade 2

O jesuíta Gerolamo Saccheri (1667-1733) em sua tentativa de provar o 5º Postulado de Euclides criou um quadrilátero que ficou conhecido como *Quadrilátero de Saccheri*. Este quadrilátero tem dois ângulos retos e os dois lados perpendiculares à base, congruentes entre si. Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri, AB é o *lado base*, AD e BC são os *lados congruentes*, enquanto que DC é o *lado topo* do quadrilátero.



Construa esse quadrilátero no do modelo do disco de Poincaré. O que você percebe sobre os outros dois ângulos? Justifique sua resposta.

Quadro 3.4: Atividade 2 da segunda sessão

Um dos objetivos dessa segunda atividade é caracterizar/construir quadriláteros na Geometria Hiperbólica. Apresentaremos o quadrilátero de Saccheri, por meio de uma definição em linguagem natural, e pedimos sua construção no modelo de disco de Poincaré. Pretendemos verificar se os professores percebem e conseguem justificar que nesse quadrilátero, em que os ângulos da base são retos e os dois lados são congruentes, os outros dois ângulos são congruentes e agudos. Esperamos somente a justificativa da congruência dos ângulos, pois a justificativa para os ângulos serem agudos envolve conceitos da Geometria Hiperbólica, que os professores podem não conhecer. Portanto, não esperamos justificativas completas ou provas formais nesse caso.

Para provar a congruência dos ângulos ADC e BCD , pode-se traçar as diagonais AC e BD . Essas diagonais são congruentes pois os triângulos ABD e BAC , pelo caso de congruência LAL, são congruentes. Assim, tomando os triângulos ACD e BDC , percebe-se que também são congruentes pelo caso LLL. Portanto, os ângulos ADC e BCD são congruentes.

Para construírem o quadrilátero de Saccheri, os professores podem criar um segmento AB , traçar as perpendiculares por A e B (para garantir que os ângulos da base sejam retos), definir um ponto sobre uma das perpendiculares e, depois, utilizando o compasso hiperbólico, transferir a medida para a outra perpendicular, garantindo a congruência dos lados. A figura abaixo mostra o quadrilátero de Saccheri no modelo de disco de Poincaré. Os ângulos da base

AB são retos, e os lados AD e BC são congruentes. Medindo os outros dois ângulos, pode-se perceber que eles são congruentes e agudos.

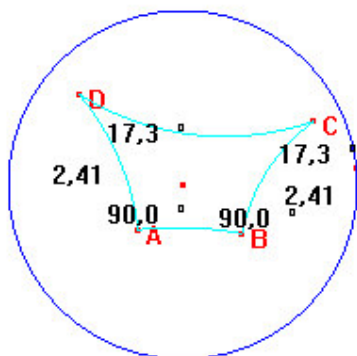


Figura 3.1: Quadrilátero de Saccheri na Geometria Hiperbólica

Atividade 3

Assim como Saccheri, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), um suíço-alemão, tentou provar o 5º Postulado por um argumento indireto. Ele começou com um quadrilátero com três ângulos retos, chamado Quadrilátero de Lambert.



Construa um quadrilátero de Lambert.

Quadro 3.5: Atividade 3 da segunda sessão

Na terceira atividade, apresentamos o quadrilátero de Lambert, que contém três ângulos retos. Nesta atividade, esperamos que os professores percebam que é possível a construção desse quadrilátero, pois para sua existência não é necessário que dois lados sejam congruentes. Acreditamos que os professores vão ter dificuldades para verificar isto pois, na atividade anterior, verificaram que se os ângulos da base são retos, os outros dois são congruentes e agudos, e este apresenta três ângulos retos. Nesta atividade, pode ocorrer também uma dificuldade em “fechar” o quadrilátero, conforme o exemplo na figura abaixo.

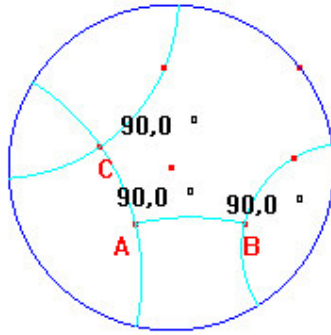


Figura 3.2: Tentativa de construir o Quadrilátero de Lambert

Se os professores construírem primeiro os três ângulos retos, podem conjecturar que não existe o quadrilátero de Lambert na Geometria Hiperbólica, mas se eles manipularem a construção, irão perceber que em algum momento, as retas se interceptam formando o vértice D do quadrilátero de Lambert. Esperamos que, depois de verificarem a existência, os professores tentem construir um quadrilátero que seja sempre de Lambert, conforme a figura 3.3 Para isso, deverão construir um segmento AB, a reta perpendicular a AB pelo ponto A, a reta perpendicular a AB pelo ponto B, e criar um ponto C sobre esta última perpendicular. Por fim, o ponto D será a intersecção da reta perpendicular a AB pelo ponto A, com a reta perpendicular a essa reta que passa por C.

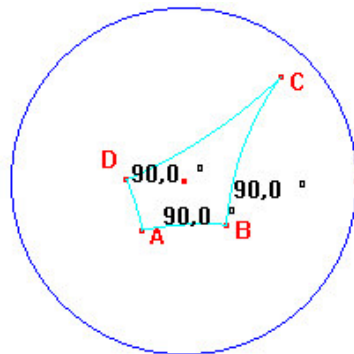


Figura 3.3: Quadrilátero de Lambert

3.5.3 Terceira sessão: Apresentação e análise prévia

Na terceira e última sessão, os professores serão confrontados com atividades de construção no modelo de disco de Poincaré. Esta sessão é composta por cinco atividades. As atividades 1 e 2 são construções euclidianas referentes à transformação "inversão", que será utilizada nas construções de retas hiperbólicas no disco de Poincaré. Assim, elas devem ser realizadas com as primitivas do menu euclidiano. As atividades 3, 4 e 5 são construções de objetos hiperbólicos e, portanto, devem ser consideradas no modelo do disco de Poincaré e utilizam tanto ferramentas do menu hiperbólico quanto do euclidiano.

Atividade 1

- a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A fora dela.
- b) Construa o segmento AO.
- c) Construa as retas tangentes à circunferência que passem pelo ponto A.
- d) Ligue os pontos de tangência e nomeie B, a intersecção desse segmento com o segmento AO.
- e) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 3.6: Atividade 1 da terceira sessão

Atividade 2

- a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A qualquer.
- b) Construa a reta AO.
- c) Construa a reta perpendicular ao segmento AO que passe por O, e nomeie as intersecções dessa reta com a circunferência de C e D.
- d) Construa a reta r, perpendicular à reta AC pelo ponto D.
- e) Nomeie B a intersecção entre as retas r e AO.
- g) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 3.7: Atividade 2 da terceira sessão

As atividades 1 (ponto externo à circunferência) e 2 (ponto qualquer) correspondem à construção do ponto B, inverso de A em relação à circunferência (C). Na primeira atividade, quando manipulamos o ponto A para o interior da circunferência, a construção não é mais válida e, por isso, o ponto inverso deixa de existir. A segunda atividade é

construída para qualquer ponto A , tanto interno quanto externo à circunferência.

O objetivo principal dessas atividades é introduzir o conceito de inversão e a característica do ponto inverso, sem a explicação do pesquisador. Esse conceito é importante para a construção de retas hiperbólicas solicitadas na próxima atividade.

Atividade 3: Construindo retas no modelo do disco de Poincaré

a) reta passando por um ponto

Seja A um ponto qualquer no interior do horizonte h . Construa uma reta hiperbólica, que indicaremos por $reta-h$, passando por A . Para isso, considere um ponto auxiliar P no horizonte h . A $reta-h$ procurada deve passar por A e P . Construa a mediatriz m de AP e, em seguida, obtenha a intersecção C de m com a reta tangente ao horizonte que passa por P . Este ponto C é o centro da circunferência ortogonal à h passando por A . (justificativa a cargo do leitor!).

Obtenha o lugar geométrico da circunferência construída quando P descreve h . O que você pode observar? Faça uma conjectura sobre a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência dada.

b) Reta hiperbólica definida por dois pontos distintos

Dados dois pontos distintos X e Y interiores ao horizonte, defina uma macro-construção da $reta-h$ que passe pelos dois pontos dados no modelo do disco de Poincaré.

Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.

Quadro 3.8: Atividade 3 da terceira sessão

Na primeira parte da atividade 3, pedimos a construção da reta hiperbólica, passando por um ponto. Neste caso, usamos o auxílio de um ponto P que pertence ao horizonte (não faz parte do plano hiperbólico) para construir uma circunferência ortogonal ao horizonte, conforme a figura abaixo. Esperamos que os professores não tenham dificuldade em fazer essa construção, pois o exercício indica passo a passo como construir a circunferência ortogonal. O que pode não descartamos é a hipótese de os professores não lembrarem de como construir uma reta tangente a uma circunferência. Se esta hipótese se confirmar, os observadores estão

autorizados pela pesquisadora a auxiliá-los, pois esta construção não é o foco da atividade.

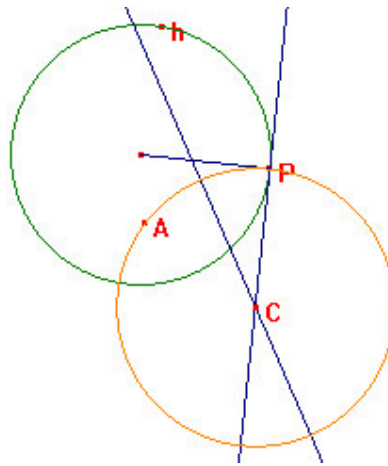


Figura 3.4: Resolução da atividade 3a

Pedimos também a obtenção do lugar geométrico da circunferência construída quando P descreve o horizonte h. O objetivo principal é fazer com que os professores percebam que toda circunferência ortogonal ao horizonte passa pelo ponto A interior ao horizonte e por um ponto fora, que é o inverso de A em relação ao horizonte, conforme a figura abaixo. Se os professores não conseguirem verificar essa relação, não conseguirão continuar com as outras atividades, pois esta é essencial para as próximas construções.

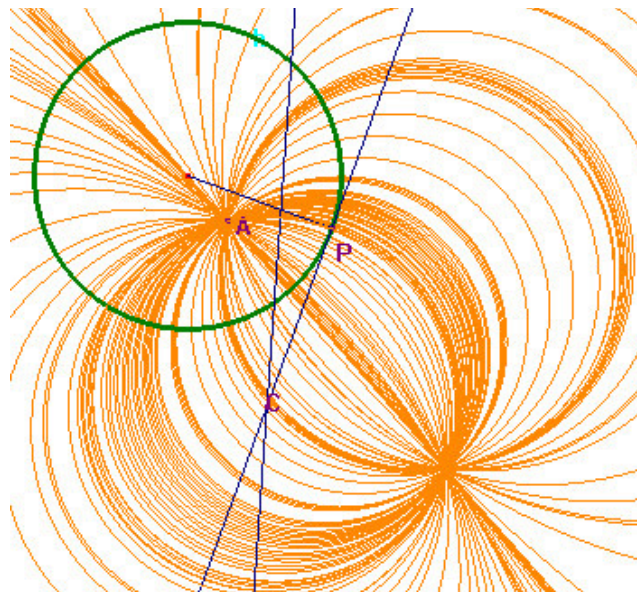


Figura 3.5: Lugar geométrico solicitado na atividade 3a

Se os professores conseguirem enxergar que toda circunferência que passa por um ponto dado e pelo seu inverso é ortogonal à circunferência dada, eles não terão dificuldades em construir uma reta definida por dois pontos, que é a construção solicitada na segunda parte da atividade 3. Basta criar dois pontos no plano hiperbólico e o inverso de um deles, utilizando a ferramenta inversão do menu euclidiano, traçar as mediatrizes entre os pontos para achar o centro da circunferência ortogonal e, por fim, criar a macro-construção da reta-h definida por dois pontos.

Atividade 4

Construa um *ângulo-h* de 60° no modelo do disco de Poincaré. Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.

Quadro 3.9: Atividade 4 da terceira sessão

O objetivo principal dessa atividade é fazer com que os professores coloquem em prática os conceitos que acabaram de adquirir com as atividades anteriores, como por exemplo, a construção de retas hiperbólicas. Para realização desta atividade, é fundamental o conceito de medidas de ângulo no modelo de disco de Poincaré. Na apresentação feita pela pesquisadora na primeira sessão foi dado que a medida de um ângulo entre retas hiperbólicas é a medida euclidiana de suas tangentes. Neste caso, os professores deveriam criar um ângulo de sessenta graus, na Geometria Euclidiana, e depois criar as retas hiperbólicas, que são tangentes ao ângulo euclidiano. As figuras abaixo mostram a essa construção passo a passo.

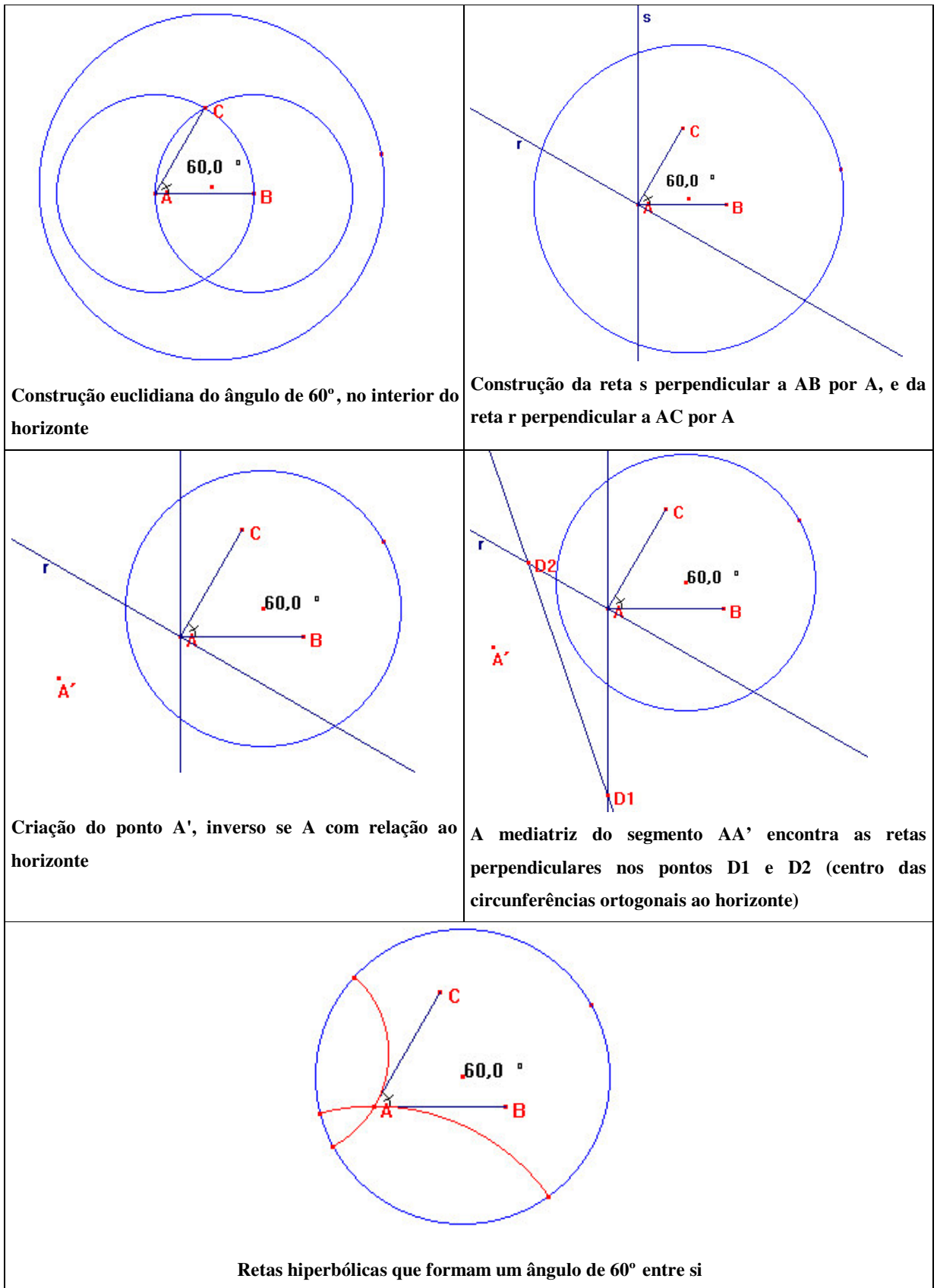


Figura 3.6: Construção passo a passo do ângulo de 60° no modelo de disco de Poincaré

Atividade 5

Construa um *paralelogramo-h* no modelo do disco de Poincaré. Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.

Quadro 3.10: Atividade 5 da terceira sessão

Na Geometria Euclidiana, o paralelogramo tem várias propriedades, tais como lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos congruentes, diagonais se interceptam no ponto médio, entre outras, o que possibilita vários tipos de construções. Somente uma delas, em sua prova, não utiliza o quinto postulado de Euclides.

O objetivo desta atividade é verificar se os professores percebem que existe uma maneira de construir o paralelogramo, utilizando uma definição que independe do quinto postulado. Nesta atividade, os sujeitos podem construir um paralelogramo utilizando a propriedade dos lados opostos paralelos e congruentes, mas será uma *construção mole*, pois os lados opostos podem ser sempre congruentes, mas nada garante que serão sempre paralelos.

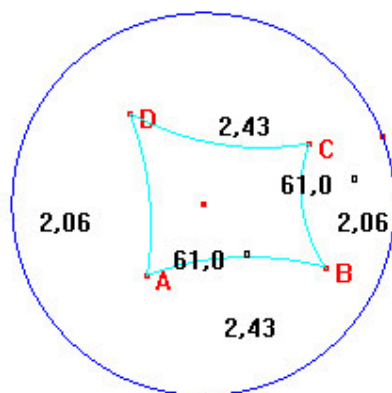


Figura 3.7: Paralelogramo pela propriedade de lados opostos paralelos (construção mole)

Na figura acima, construímos um paralelogramo pela definição de lados opostos paralelos e congruentes e ângulos opostos congruentes. Mas quando deslocamos, por exemplo, o ponto D, o quadrilátero não continua sendo um paralelogramo, pois os lados não se mantêm paralelos (cf. figura 3.12).

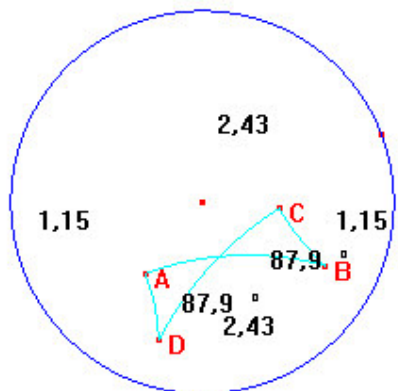


Figura 3.8: Verificação da construção do paralelogramo-h

Para uma *construção robusta* de um paralelogramo no modelo de disco de Poincaré, deve-se utilizar como definição de paralelogramo a propriedade de que as diagonais se interceptam no ponto médio, conforme as figuras abaixo.

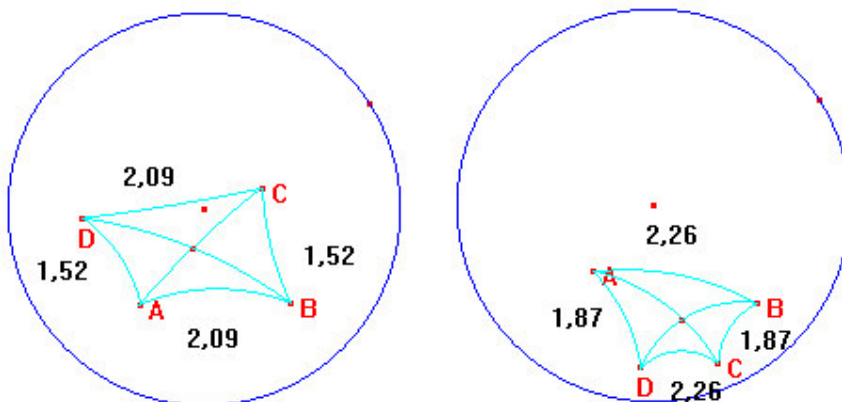


Figura 3.9: Construção robusta do paralelogramo

3.6 Coleta e análise dos dados

Nosso estudo foi realizado em três sessões de aproximadamente 1h30 de duração. Trabalhamos com três duplas de professores, formadas na primeira sessão por critérios aleatórios.

Cada dupla trabalhava em um computador e dispunha de uma ficha de atividades. As interações entre os professores foram áudio-gravadas e cada

dupla contava com um observador. O papel do observador era anotar informações importantes, eventualmente não presente nas gravações, além de estar autorizado a auxiliar os sujeitos participantes na parte “técnica”, principalmente no uso de ferramentas do menu hiperbólico do Cabri.

No início da primeira sessão, a pesquisadora assume papel de “professor” responsável pela apresentação das Geometrias não Euclidianas, a partir da segunda parte desta sessão, a pesquisadora se torna observadora de uma dupla.

As análises foram baseadas nos seguintes dados: arquivos de figuras Cabri gravados no computador, fichas com respostas dos professores (uma ficha para cada dupla) e os protocolos experimentais elaborados a partir das transcrições das áudio-gravações contendo as interações entre as duplas.

Com o intuito de investigar quais caminhos os professores utilizaram para relacionar essas idéias no modelo hiperbólico com a Geometria Euclidiana e como estas relações se desenvolvem, a análise divide-se em 2 fases:

- (i) identificação de episódios – os protocolos de cada dupla serão organizados em termos de episódios no qual os sujeitos fazem referências aos invariantes de um ou mais modelos de Geometria.
- (ii) classificações dos episódios para cada dupla – cada episódio será analisado de acordo com 2 dimensões (a) o papel de trocas entre os domínios geométricos – Geometria Euclidiana e hiperbólica – além de interações entre os campos espaço-gráfico e teórico (b) papel do Cabri como ferramenta de construção, exploração, verificação e relacionada em particular aos modos de “arrastar”.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a descrição dos dados e a análise das soluções apresentadas pelas duplas de professores que fizeram parte do estudo experimental. Optamos por dividi-lo em quatro partes:

- Análise dos resultados da primeira sessão
- Análise dos resultados da segunda sessão
- Análise dos resultados da terceira sessão
- Síntese das análises do estudo de caso

Esta análise baseia-se nos seguintes aspectos:

- dinâmica das trocas entre os domínios geométricos – Geometria Euclidiana e Hiperbólica – além de interações entre os campos espaço-gráfico e teórico.
- papel do ambiente Cabri-géomètre como ferramenta de construção, exploração e verificação, especialmente relacionadas aos modos de arrastar.

4.2 Descrição dos resultados da primeira sessão

No decorrer do capítulo, vamos nos referir aos professores da dupla A como A1 e A2; da dupla B, como B1 e B2 e aos professores da dupla C, como C1 e C2.

As duplas não apresentaram dificuldades na interpretação do plano hiperbólico, nem na criação do horizonte – circunferência euclidiana que delimita esse plano. Apenas os professores da dupla A questionaram-se sobre a possibilidade de modificarem o horizonte, isto é, se este ficaria fixo ou poderia ser manipulado. Após a manipulação do ponto que determina o horizonte, verificaram que o raio pode ser alterado, concluindo que o "*horizonte se amplia*", e, portanto "*o horizonte não é único*". Neste momento, pode-se dizer que os professores encontram-se no nível gráfico-espacial (SG), observando a representação dos objetos na tela, no que se refere à forma, posição e tamanho, ao utilizarem o deslocamento dos pontos de base.

As atividades seguintes foram de construções básicas no modelo de disco de Poincaré, visando a familiarização com o menu hiperbólico (criação de pontos, retas-h, triângulos-h, distância-h entre dois pontos, medição de ângulos, etc...).

Os professores da dupla A realizaram as atividades 1, 2 e 3 sem problemas, dificuldades ou questionamentos. A dupla B, quando criou um ponto no plano hiperbólico, manipulou e percebeu que este "sai" do horizonte (externo à circunferência). Pensando que não era ponto, apagaram e procuraram novamente a ferramenta "Ponto", criando um outro ponto. Perceberam novamente que o ponto poderia ficar exterior ao horizonte e, depois de discutirem um pouco, chegaram à conclusão que as construções somente são válidas "dentro" do horizonte, observando que, ao posicionarem um ponto exteriormente, não obtinham construções hiperbólicas. Esta mesma dupla tentou construir uma reta-h com um ponto interior ao horizonte e outro sobre ele, e verificou que a construção não é realizada pelo Cabri. A

interpretação dada pela dupla para este caso, foi resumida textualmente por "*o ponto no horizonte não faz parte do plano hiperbólico*".

Os professores da dupla C tiveram um pouco de dificuldade no início, pois em geral esqueciam de selecionar o horizonte para a criação dos objetos após ativarem as ferramentas. Quando construíram uma reta perpendicular à outra, pensaram em utilizar a ferramenta de verificação de propriedade (Perpendicular?) para verificar se as retas eram realmente perpendiculares. Procuraram esta ferramenta no menu hiperbólico e observaram sua não disponibilidade. Solicitaram então ao observador e este sugeriu, como no enunciado do exercício, que medissem os ângulos entre as retas.

A dupla A, no exercício 4 – criação de um triângulo XYZ – decidiu fazer o triângulo como polígono, para medir seu perímetro diretamente, sem ter necessidade de medir todos os lados e somar suas medidas. Isto decorre da experiência dessa dupla com o menu euclidiano do Cabri, com o qual isso é possível. Depois de muitas tentativas, perceberam que esse não era o caso no menu hiperbólico, uma vez que o polígono é criado por meio de segmentos e, portanto, eles deveriam medir cada lado do triângulo para, em seguida, obter seu perímetro. Os professores da dupla C criaram o triângulo, mediram seus lados, mas, estranhamente, não forneceram o perímetro.

Nas questões de 1 a 4, os professores utilizaram tanto primitivas do desenho puro, quanto primitivas geométricas para a criação ou construção de objetos no modelo de disco de Poincaré. Nesse momento, pode-se dizer que existe uma relação entre os níveis teórico (T) e espaço-gráfico (SG), ocorrendo interpretações de um fenômeno espacial, em termos do referido modelo, ainda que com predominância da utilização de ferramentas de criação e observações no nível SG. De fato, os professores não aprofundaram suas observações, restringindo-se a representar os objetos solicitados na ficha. Desse modo, não ocorreram discussões sobre distâncias hiperbólicas ou sobre o perímetro de um triângulo.

Nessas atividades de familiarização, podemos indicar a utilização de um modo de "arrastar vagamente", pois para a maioria dos deslocamentos efetuados, os professores tinham a intenção de observar as configurações e verificar as regularidades dos objetos hiperbólicos criados.

Na última atividade, os professores ficaram livres para explorar o menu hiperbólico, visando conhecer um pouco mais as ferramentas disponíveis. A dupla A optou por construir um quadrilátero por meio de segmentos, e manipulou o horizonte para verificar se o objeto mantinha-se quadrilátero. Eles não deslocaram seus vértices pois entenderam, desde o início, que existia uma relação de dependência entre o horizonte e os objetos criados no seu interior. Rapidamente passaram à tentativa de construção de um triângulo com três ângulos retos, sugerida pelo professor A1. Abaixo transcrevemos a discussão da dupla sobre essa questão.

1. A1: *Primeiro preciso de uma reta para fazer outra perpendicular.* (construíram uma reta, uma perpendicular à esta reta e outra perpendicular à que acabaram de construir)
2. A1: *Eu já tenho dois ângulos retos, certo?*
3. A2: *Certo.*
4. A1: *Agora...eu tenho este ponto de intersecção, então eu tenho uma tangente aqui, e outra tangente aqui, então este vai ser o ângulo reto. Ou será que vai ser este aqui, ou será que não faz diferença?*
5. A2: *Não sei, você achou as medidas dos quatro ângulos?*
6. A1: *isso que eu ia falar agora, não tem que ser os quatro retos?*
7. A2: *É...vamos ver se isso dá certo...(mediram os quatro ângulos)*
8. A1: *Eles são sim...*
9. A2: *Lógico...*
10. A1: *Então por que a gente está perguntando qual vai ser o ângulo reto, né? (risos)*
11. A1: *Bom, agora a gente tem um ângulo reto aqui e outro aqui...agora temos que mexer um pouco para fazer Ter outro lá...*
12. A2: *E se a gente traçar uma reta perpendicular a essas duas...*
13. A1: *Como é que traça uma perpendicular às duas?*
14. A2: *Só se elas forem paralelas...então vamos traçar uma paralela...*
15. A1: *Como é que a gente vai construir...essa reta tem que ser perpendicular à essa reta e à essa reta...*
16. A2: *è verdade...vamos traçar retas paralelas...Vamos suspender esse projeto um pouco...*
17. [...]
18. A2: *Sabe o que a gente podia ver que não vimos? A soma dos ângulos internos de um triângulo.*
19. A1: *Tá bom...*
20. A2: *Provavelmente não vai ser 180° , pois ebs negaram o postulado lá...* (Construíram um triângulo qualquer, mediram seus ângulos e somaram)
21. A1: *A soma é menor que 180° ...*
22. A2: *É sempre menor?* (manipulam o horizonte)
23. A1: *Tá parecendo...e se tivéssemos três diâmetros...tem jeito de fazer Ter diâmetros e Ter um triângulo?* (Constróem retas diâmetros) *Não...não tem...*
24. A2: *Quando a soma tende a 180° , não tem quase triângulo.*
25. [...]

26. A1: *Eu quero saber A2, como é que a gente vai fazer o triângulo...ah A2, como é que a gente quer construir um triângulo com três ângulos retos, se não é nessa geometria que a soma dos ângulos internos dá maior que 180º...aqui deu menor...*
27. A2: *É verdade...agora nosso plano foi cancelado definitivamente.*

Quadro 4.1: Transcrição do diálogo da dupla A referente à primeira atividade (1ª sessão)

Nas linhas 1 a 11 da discussão transcrita acima, percebemos uma transição muito forte entre os domínios teórico e espaço-gráfico, principalmente no momento em que os professores verificam qual o ângulo reto da perpendicular. Teoricamente sabem que é perpendicular, mas perceptivamente têm dúvidas quanto ao ângulo reto, e isto ocorre porque, na passagem do campo teórico para o espaço-gráfico, a representação não é isomorfa comparativamente à Geometria Euclidiana, na qual o reconhecimento é imediato.

O professor A1, na tentativa de “fechar” um triângulo com três ângulos retos, utilizou o modo de arrastar orientado, pois manipulou pontos do diagrama para dar uma forma particular, como referido na linha 13 *“temos que mexer um pouco para fazer ter outro lá”*.

Depois de verificarem que não existe triângulo com a soma das medidas dos ângulos internos maior que 180º na Geometria Hiperbólica, os professores construíram a mediatriz de um lado do triângulo e verificaram se realmente o ponto de intersecção era o ponto médio, medindo os segmentos. Depois, criaram um ponto na mediatriz e verificaram se este era equidistante dos extremos do segmento. Estavam verificando se o conceito de mediatriz era o mesmo da Geometria Euclidiana, pois talvez não tivessem percebido que a proposição da mediatriz está na geometria absoluta.

É possível também que quisessem “testar” a coerência do modelo, pois visualmente não é possível perceber a igualdade das medidas. Neste momento, os professores utilizaram o modo de “arrastar em linha” pois, com o intuito de validar experimentalmente uma propriedade, criaram novos pontos na trajetória ou posição que mantém a regularidade da figura. Podemos dizer também que, nessa passagem, ocorre uma transição entre os campos gráfico-

especial e teórico. Pode ter ocorrido um problema entre os domínios T e SG, na medida em que a representação SG do objeto interfere na interpretação dada em termos de T.

Os professores optaram, na construção seguinte, por encontrar o baricentro de um triângulo hiperbólico e verificar uma propriedade válida na Geometria Euclidiana - o ponto de intersecção das medianas divide cada uma delas na razão 2 para 1, a partir do vértice. Os professores construíram o triângulo e as medianas com o auxílio das primitivas geométricas do menu hiperbólico – “triângulo-h” e “ponto médio-h” – depois nomearam B o encontro das medianas, conforme figura abaixo e calcularam as medidas dos segmentos, verificando que a razão não é 2 para 1. Acharam que havia alguma coisa errada, apagaram tudo e construíram novamente. Chegaram à conclusão de que essa propriedade não é válida na Geometria Hiperbólica.

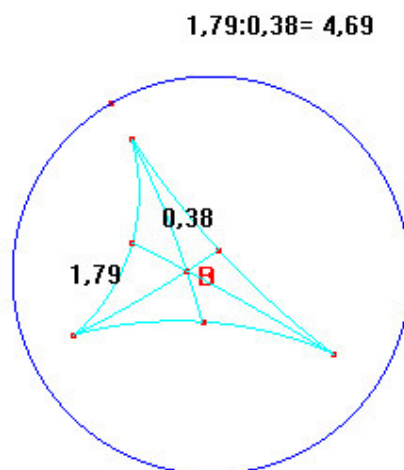


Figura 4.1: Propriedade do baricentro - construção feita pela dupla A

Podemos perceber que os professores relacionaram a Geometria Hiperbólica com a Euclidiana a todo o momento, pois pretendiam verificar se algumas propriedades conhecidas na Geometria Euclidiana também eram válidas na Geometria Hiperbólica e, ao mesmo tempo, quando se confrontavam com um resultado não esperado, acreditavam que suas construções estavam incorretas. Acreditamos que, neste momento, ocorre um problema interno ao domínio teórico, pois os professores estão entrando em contato com um novo

modelo (Geometria Hiperbólica), mas muito relacionado com o campo teórico já conhecido por eles (Geometria Euclidiana). Este problema interno T influencia a transição para o campo SG, pois a representação SG do objeto não é interpretada da mesma forma em termos de T.

A dupla B, por sua vez, optou por começar a explorar o menu hiperbólico construindo um triângulo retângulo. Na seqüência, construíram as bissetrizes dos ângulos do triângulo para verificarem se elas se interceptavam num mesmo ponto. Salvaram a figura e decidiram explorar o compasso hiperbólico.

Os professores B1 e B2 criaram dois pontos no interior do horizonte e transferiram a medida da distância entre estes dois pontos para um outro ponto com o compasso hiperbólico, o que resulta em uma circunferência hiperbólica. A seguir, transcrevemos a discussão:

1. *B1: Isso aqui é o centro da circunferência...olha lá...(Manipulando a circunferência)...*
2. *B1: Então...numa circunferência hiperbólica...a definição seria a mesma...a distância do centro à qualquer ponto dela se mantém...mas só que...*
3. *B2: Aquela nossa impressão de que o centro deve estar no centro, não tá...*
4. *B2: Por conta de que a distância é...é um arco, né?*
5. *B1: Logaritmo, né?*
6. *B2: Isso, um logaritmo...*
7. *B1: Que bonitinho...essa aqui é uma circunferência hiperbólica...com aquele raio lá de 1,56...(se referindo à distância dos dois pontos que criaram inicialmente)*

Quadro 4.2: Transcrição do diálogo da dupla B referente à primeira atividade (1ª sessão)

No quadro acima, percebemos nitidamente a relação entre os campos T e SG. Nas linhas 2 a 7 da discussão, encontramos interligações dos aspectos espaciais do objeto geométrico (centro da circunferência hiperbólica), com os aspectos teóricos das geometrias (definição de circunferência e distância hiperbólica).

Finalmente, a dupla C também optou por começar a explorar o menu traçando as bissetrizes dos ângulos do triângulo do exercício anterior. Acharam o ponto de encontro das bissetrizes - o incentro - e resolveram verificar se este era o centro da circunferência inscrita no triângulo. Para isto, construíram a circunferência inscrita no triângulo, fazendo a verificação experimental.

Depois destes procedimentos, decidiram construir um triângulo eqüilátero pelo “*método normal*”, utilizando transferência de medida. Construíram um segmento e duas circunferências com este segmento como raio, sendo cada extremidade do segmento, o centro de cada circunferência. Criaram o triângulo eqüilátero com o ponto de intersecção das circunferências. No quadro abaixo, transcrevemos as discussões entre C1 e C2:

1. C1: Ficou um triângulo eqüilátero...vamos medir para ver se ele é eqüilátero ou não?
2. C2: Vamos...não dá a impressão que este lado é maior?
3. C2: Isso não é um triângulo eqüilátero...Vamos medir...(mediram os lados do triângulo e começaram a rir quando viram que estes eram iguais)
4. C2: Nossa...o que é isso...
5. C1: Vai ver que o In do AU sobre o AV ...é o mesmo...
6. C2: Visualmente não é...
7. C1: Como mede a distância? O In do AU sobre BV, tudo sobre BU sobre AV...quem era longe fica primeiro, aí troca...olha que legal...
8. C2: Vamos fazer a mediatriz desse segmento?
9. C1: Vamos...olha que legal...
10. C2: É, vai ter que coincidir com a bissetriz...
11. C1: Vamos passear com eles...(manipulando o triângulo)
12. C2: Ai que lindo o triângulo eqüilátero...
13. C2: Vamos trabalhar com o simétrico?
14. C1: Não vai dar tempo...amanhã a gente continua...

Quadro 4.3: Transcrição do diálogo da dupla C referente à primeira atividade (1ª sessão)

Nas passagens de 1 a 4 do quadro acima, percebemos que a interpretação imediata do fenômeno espacial (triângulo-h eqüilátero) em termos geométricos foi influenciada pela representação SG, o que fez com que os professores constantemente verificassem suas próprias construções: mesmo utilizando duas circunferências de mesmo raio, eles mediram os lados para validar a construção. Enquanto ocorre o movimento contínuo entre os domínios T e SG, podemos dizer que no nível teórico, os professores relacionam sempre a Geometria Hiperbólica com a euclidiana. Nas linhas 5 a 7, ocorre uma interpretação da entidade SG em termos de T para justificar a representação SG do objeto hiperbólico. Nesse momento, os professores utilizaram um modo de “arrastar teste”, pois movimentaram o triângulo a fim de verificar se a propriedade desejada era mantida (linhas 11 e 12).

Os professores da dupla C fecharam o Cabri e não salvaram as figuras.

4.3 Resultados da segunda sessão

4.3.1 Atividade 1

Na segunda sessão, os professores trabalharam com atividades de exploração no modelo de disco de Poincaré. A primeira delas propõe a verificação da validade de algumas proposições, válidas na Geometria Euclidiana, na Geometria Hiperbólica.

Dupla A

Os professores da dupla A começaram a ler o enunciado e apresentaram uma resposta imediata para a primeira proposição sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, pois tinham verificado experimentalmente (por meio de medida de ângulo) na sessão anterior, quando estavam explorando o menu hiperbólico. Segundo suas colocações, eles tinham apenas a justificativa experimental, e começaram a pensar como poderiam justificar teoricamente. O professor A1 começou a construir um triângulo retângulo usando duas retas diâmetros no intuito de formular alguma hipótese. Neste momento, ele utilizou o modo de “arrastar vagamente”, com a intenção de descobrir configurações interessantes. A seguir transcrevemos as discussões entre A1 e A2:

1. A1: *Porque que a soma desses ângulos vai ser menor que 180° ?*
2. A1: *Toda e qualquer reta aqui, é um arco que é perpendicular...*
3. A2: *Eu penso assim, a soma é sempre menor que 180° , por que os ângulos são...os ângulos alternos internos não são... por duas paralelas eles não são congruentes... porque não vale o quinto postulado... portanto... é...*
4. A1: *Os ângulos alternos internos não são congruentes... (Silêncio)*
5. A1: *porque os ângulos alternos internos não são congruentes? Porque as retas paralelas...*
6. A2: *Porque não vale o quinto postulado, né? Então esse ângulo não é congruente a esse...*
7. A2: *Eu acho que talvez par justificar, ou demonstrar, a gente precisava de mais elementos...*
8. A1: *Peraí...Eu tenho uma circunferência aqui...que é a circunferência que me dá este arco aqui... que é uma reta...o raio dela, neste ponto aqui, é perpendicular a este, certo?*
9. A2: *Certo...*
10. A1: *Isso é a única coisa que a construção fez, então tem que ter alguma coisa relacionado a isso, não? Vamos pensar...*
11. A1: *Aí eu vou traçar uma tangente...nesse ponto pra poder medir o ângulo, certo? Agora eu não quero mais este...eu quero um qualquer pra eu poder pensar direito...(se referindo ao triângulo retângulo) (Construíram um triângulo qualquer e acharam as medidas dos ângulos internos) .*
12. A1: *Pra medir esse ângulo, eu preciso medir o ângulo entre as tangentes...*

13. A2: *Por mim...eu faria...é lógico não vale esse teorema, mas eu queria saber...eu preciso traçar uma paralela a esta reta por aqui...eu queria ver a soma dos ângulos externos do triângulo...fazer uma experimentação...*
14. A1: *Mas vai mudar...porque eu tenho um monte de paralelas...*
15. A2: *Paralela a essa por esse ponto...*
16. A1: *Então...*
17. A2: *Tem duas paralelas, não é isso...pelo menos...*
18. A1: *Pelo menos...Oh, essa é paralela, essa é paralela, essa é paralela...cada uma delas vai ter um ângulo diferente em relação à esse lado e aquele lado, não vai?*
19. A2: *Vai. (Mediram os ângulos e viram que realmente são diferentes.)*
- [...]
20. A2: *Como não vale o teorema das paralelas, não se pode ter a soma das medidas dos ângulos iguais a 180° , porque não usa o quinto postulado.*

Quadro 4.4: Transcrição da dupla A referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão)

Na tentativa de justificar que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo hiperbólico é menor que 180° , os professores transitaram nos níveis T e SG, tanto da Geometria Euclidiana, quanto da hiperbólica. Mesmo tendo sido apresentado como um enunciado equivalente ao quinto postulado de Euclides, os professores não atentaram, no início, para este fato, e tentaram justificar geometricamente. O professor A2 expressa, desde o início, que não vale o quinto postulado (linhas 3, 6, 13 e 21), no entanto, o professor A1 acreditava que precisavam argumentar mais, e buscou uma justificativa na criação dos ângulos do triângulo, tangentes às retas-h (linhas 7 a 12). Podemos dizer que os professores utilizaram o modo de “arrastar teste” para verificar a regularidade das propriedades, uma vez que estavam tentando construir uma justificativa. Após esse tipo de manipulação, “reconfirmaram” experimentalmente que a soma das medidas dos ângulos não atinge 180° , chegando à resposta abaixo reproduzida.

1) *Falso.*

Pensamentos...

- ângulos alternos internos não são congruentes

- como não vale o teorema das paralelas, não se pode ter soma de medidas de ângulos igual a 180° (usa o quinto axioma para demonstrar)

Quadro 4.5: Resposta da dupla A à proposição 1 da atividade 1

Os professores da dupla A não ficaram satisfeitos e buscaram pensar em uma outra resposta para essa questão. Decidiram, então, continuar com as atividades. Passaram à leitura da segunda proposição relativa aos ângulos num triângulo isósceles.

1. A1: Mas se a soma dos ângulos não é 180° ...
2. A2: Mas eles podem ser congruentes...Eu acho que são...
3. A1: Vamos ver...Como faz um triângulo isósceles aqui?

Quadro 4.6: Transcrição da dupla A referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores, no nível teórico, começaram a conjecturar sobre a proposição em questão (linhas 1 e 2) e, como previsto, relacionaram imediatamente com o resultado visto anteriormente (linha 1).

Os professores construíram dois triângulos isósceles, usando primeiro a ferramenta compasso e, depois, a ferramenta simetria. A fim de verificarem se as duas construções eram válidas, mediram primeiramente os lados, e depois os ângulos, concluindo pela validação da proposição.

1. A1: Por que é verdadeira?
2. A2: Porque... pra mim é assim... não entrou o quinto axioma, tudo que vale na outra geometria vale nessa.
3. A1: Tá.
4. A2: Não é?
5. A1: É...e não tem o quinto axioma nessa, então?
6. A2: Não.
- [...]
7. A1: Eu achei que essa é uma boa desculpa, mas eu queria pensar em outras coisas pra justificar, entendeu?
8. A2: O quê? Do primeiro ou do segundo?
9. A1: Pra qualquer um deles...é muito fácil...eu vou lá agora e faço assim...esse usa, esse não usa, esse usa, esse não usa...É verdade...
10. A2: A gente pode demonstrar usando a outra geometria.
11. A1: Não, não é isso...Essa é uma justificativa verdadeira e perfeita, só que eu queria pensar em outras coisas entendeu?
12. A2: Certo...tá bom...
13. A1: Por que senão nós vamos brincar aqui...essa usa o quinto postulado...
14. A2: É mas aí tem algumas coisas que entra a questão da paralela, aí não pode...Isso não é justificativa...
15. A1: Entendi...
16. A2: A justificativa é a mesma que agente utiliza na outra geometria e traz pra cá...
17. A1: Tá certo...
18. A2: Eu penso assim...todos os axiomas que não ferem o quinto axioma, se eu puder usar, eu posso usar...
19. A1: Sim...
20. A2: Agora que nós não demonstramos...

Quadro 4.7: Transcrição da dupla A referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)

Como vemos, a dupla A respondeu que o segundo teorema é verdadeiro porque “o que não entra o quinto axioma está demonstrado”. O professor A2 percebeu que, nesta questão, o quinto postulado não é utilizado para provar a

congruência dos ângulos e que a justificativa teórica é a mesma da Geometria Euclidiana e tentou explicar ao professor A1, que não estava satisfeito com a resposta. Neste momento, eles estavam trabalhando no campo teórico, relacionando a Geometria Euclidiana com a Geometria Hiperbólica. Acreditamos que a Geometria Hiperbólica auxiliou uma “releitura” da propriedade do triângulo isósceles como independente do quinto postulado. Ainda que superficialmente, pode-se observar que a dupla tem uma percepção no sentido das bases e organização do modelo.

A dupla A passou para o próximo item (os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°). Temos, a seguir, a transcrição das falas da discussão entre eles.

1. A1: A soma dos ângulos, se forem 60° , vai dar 180° então não pode...
2. A2: São congruentes mas não são 60° . Vamos construir um triângulo equilátero?
3. A1: Vamos...Já vou por falso aqui porque não pode mesmo...
4. A2: Isso...
5. A1: E essa nós até já arrumamos uma outra justificativa...
6. A2: Essa está demonstrada, o que não está demonstrada é a primeira...
7. A1: É...(risos)

Quadro 4.8: Transcrição da dupla A referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão)

A dupla A construiu um triângulo equilátero usando um segmento e duas circunferências. Mediram os ângulos internos e verificaram que realmente eram congruentes, mas não de medida 60° . Realizaram esta construção no Cabri para verificar experimentalmente, no campo SG, passando a justificar no campo teórico. Nesse caso, utilizaram somente o modo de “arrastar teste”. No papel, escreveram a justificativa conforme segue abaixo.

3) Falso
 Como a soma das medidas dos ângulos internos é menor que 180° , os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes, porém tem medida menor que 60° .

Quadro 4.9: Resposta da dupla A à proposição 3 da atividade 1

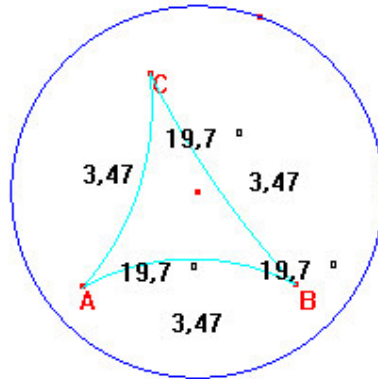
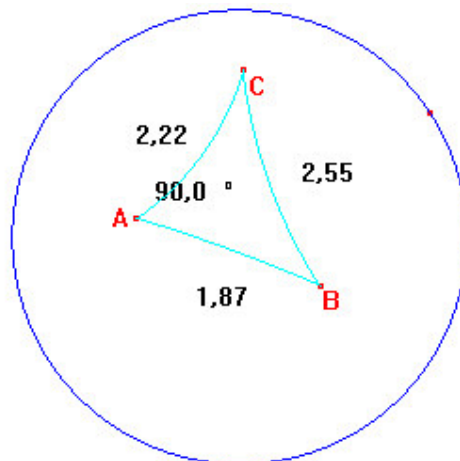


Figura 4.2: Triângulo-h equilátero - dupla A

Passaram, então, à análise do teorema de Pitágoras. Eles construíram um triângulo retângulo, mediram os catetos e a hipotenusa. Com o auxílio da calculadora obtiveram o quadrado da hipotenusa, e a soma dos quadrados dos catetos. Verificaram que não é válido o teorema de Pitágoras na Geometria Hiperbólica.



$$[2,22]^2 + [1,87]^2 = 8,42$$

$$[2,55]^2 = 6,50$$

Figura 4.3: Verificação do Teorema de Pitágoras - dupla A

A partir daí, os professores A1 e A2 empreenderam a discussão que segue:

1. A2: É...e faz sentido né...
2. A1: Distância...cadê a distância, cadê a métrica...
3. (A1 procura as anotações feitas durante a apresentação da pesquisadora na primeira sessão, onde foi explicado como é definida a distância na Geometria Hiperbólica)
4. A1: A métrica é com logaritmo, certo?

5. A2: Certo...
6. A1: É o módulo do logaritmo de qualquer coisa...Então...
7. (A1 começa a escrever)
8. A1: Ln de qualquer coisa que eu vou chamar de a, ao quadrado, mais Ln de qualquer coisa, que eu vou chamar de b, ao quadrado...tem que ser o quê??? O Ln de qualquer coisa que eu vou chamar de c, ao quadrado....
9. A2: Vê quanto que é isso, e prova que não é ln de c...
10. A1: Isso...Isso aqui seria dois Ln de a, mais dois Ln de b, que seria dois Ln de c...certo?
11. A1: Isso quer dizer que a soma...o ln de a, mais ln de b é igual a ln de c. Pra ser verdade o teorema...a soma de dois lados é igual ao terceiro lado...certo?
12. A2: Mas é que esse a não é o lado...é uma distância...mas não é o lado...
13. A1: o a não é o lado, mas o ln de a é o lado...A soma de dois lados tinha que ser igual ao terceiro. A soma de dois lados ser igual ao terceiro, não faz triângulo.
14. A2: E veja bem...o resultado dá sempre menor né?
15. A1: Não...esse aqui é o resultado...Não necessariamente... pode ser maior ou menor... (manipulam a figura)
16. A2: Será que tem algum caso que é igual?
17. A1: Não, é absurdo...

Quadro 4.10: Transcrição da dupla A referente à proposição 4 da atividade 1 (2ª sessão)

Assim, a resposta final dessa dupla aparece abaixo reproduzida.

4) Falso

$$\ln a^2 + \ln b^2 = \ln c^2$$

$$2 \ln a + 2 \ln b = 2 \ln c$$

$$\ln a + \ln b = \ln c$$

o que é absurdo (a soma de dois lados ser igual ao terceiro)

Quadro 4.11: Resposta da dupla A à proposição 4 da atividade 1

Nesse caso, o Cabri foi utilizado para explorar uma situação, favorecer a elaboração de conjecturas e validar experimentalmente. Novamente foi utilizado o modo de “arrastar teste”. Os professores, depois de verificarem experimentalmente a partir de uma representação SG do objeto, passaram para o nível teórico buscando justificar o resultado obtido empiricamente. O diálogo acima mostra que os professores recorreram à métrica do modelo de disco de Poincaré com o intuito de justificar a não validade do teorema de Pitágoras na Geometria Hiperbólica (linhas 4 a 13). Os professores não fizeram alusão ao ou qualquer relação com o quinto postulado de Euclides, centrando-se na distância.

Para verificar a validade do quinto item (todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo), os professores construíram uma circunferência, acharam seu diâmetro e construíram um triângulo inscrito em

uma das semicircunferências. Mediram o ângulo e verificaram que ele não é reto. Conforme lemos abaixo, a discussão assim se procedeu:

1. A1: Olha que engraçado...o menor...é 38...
2. A2: Ah, tem um ângulo que vc achou menor aí???
3. A1: É olha...você passa daqui...38, 39, 40, ...até quase 90, você vem, 39...
4. A2: Será que tem uma reta perpendicular que passa pelo menor ângulo...A minha hipótese é... só pra brincar um pouco...
5. A1: Vamos...
6. A2: Traça uma perpendicular a essa reta por esse ponto, que é o centro da circunferência...
7. A1: Uma perpendicular aqui?
8. A2: É...é no mesmo ponto...
9. A1: É no mesmo lugar que faz um triângulo isósceles....
10. A2: É isso...
11. A1: Bom, agora temos que justificar...

Quadro 4.12: Transcrição da dupla A referente à proposição 5 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores, experimentalmente, verificaram que a proposição não é válida na Geometria Hiperbólica e, no momento em que estavam manipulando o vértice do triângulo sobre a semicircunferência, perceberam que o ângulo não é constante, que ele assume um valor mínimo em um determinado ponto, e que este valor aumenta quando o vértice se afasta deste “ponto” (linhas 1 a 3). Neste momento, a manipulação pode ser caracterizada como um modo de “arrastar em lugar mole”, uma vez que, embora o ponto esteja sobre a circunferência, o que os professores desejam observar é posição (ou as posições) para as quais o ângulo é mínimo. O professor A2, conjecturou que neste ponto passaria a reta perpendicular ao diâmetro que também passa pelo centro da circunferência (mediatriz do lado AB). Para verificar sua hipótese, ele criou essa perpendicular. Nesse momento, ele utilizou o modo de “arrastar ligado” (linhas 4 a 8). Os professores verificaram que o menor ângulo inscrito é formado a partir da obtenção de um triângulo isósceles.

Percebemos uma relação entre os níveis teórico e espaço-gráfico, uma vez que a dupla interpretou a representação SG em termos de T. A figura abaixo mostra a construção dos professores da dupla A. O ponto A é o vértice do triângulo inscrito que construíram inicialmente, e o ponto A' é o vértice do triângulo isósceles que obtiveram pelas suas explorações para obter um triângulo com menor ângulo inscrito.

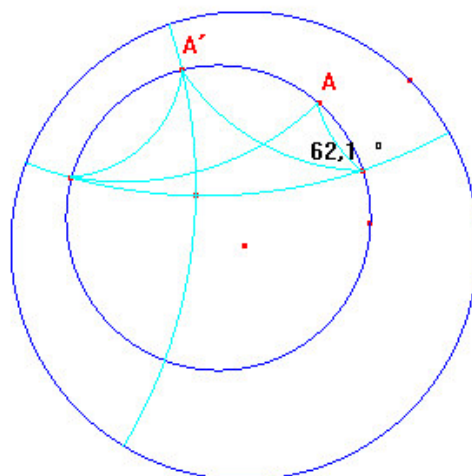


Figura 4.4: Triângulo inscrito numa semicircunferência - dupla A

Para justificar teoricamente a não validade do referido teorema na Geometria Hiperbólica, os professores relacionaram, novamente, a Geometria Euclidiana com a hiperbólica, e mais uma vez não citaram o quinto postulado em sua justificativa, como mostra o quadro abaixo.

5) Falsa.

Na Geometria Euclidiana, o ângulo central β é o dobro do ângulo "inscrito", no caso $m(\beta) = 180^\circ$, o inscrito é 90° .

Na geometria não euclidiana, a medida do ângulo é medida pelas retas tangentes aos arcos que são retas hiperbólicas. Essas tangentes não interceptam a circunferência nos extremos do diâmetro. Logo, o ângulo não pode ser metade de 180° .

Quadro 4.13: Resposta da dupla A à proposição 5 da atividade 1

Os professores construíram um triângulo qualquer para verificar se era possível inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado. Para tanto, construíram, então, as bissetrizes dos ângulos desse triângulo e determinaram o incentro, como intersecção delas. Traçaram uma perpendicular do incentro a qualquer um dos lados do triângulo para achar o raio da circunferência inscrita e criaram a circunferência. Manipularam e verificaram que era verdadeiro, conforme transcrição descrita abaixo.

1. A1: Por quê é verdadeiro?(silêncio)
2. A1: A gente consegue fazer porque tudo é válido...

3. A2: É...
4. A1: A gente tem...bissetriz, elas se interceptam...
5. A2: Eu não vejo razão de não poder...
6. A1: agora porque que aquele ponto lá, também o centro da circunferência inscrita?
7. A2: Isso não pode mudar...
8. A1: Por que a bissetriz divide o ângulo em dois ângulos congruentes e a distância de qualquer ponto da bissetriz até o lado...
9. A2: Bissetriz até o lado...
10. A1: A distância desse ponto da bissetriz até um lado do triângulo, é igual a distância desse mesmo ponto até o outro lado...
11. A2: Isso...
12. A1: A bissetriz não pode mudar de definição...
13. A2: Não...sabe quando tem problema? Só vai ter problema quando tem as restrições das medidas...quando envolve a questão dos valores...
14. A1: Pode ser...
15. A2: Pode ver...o Pitágoras não vale, não vale a soma 180 graus...mas o resto tudo vale...o triângulo isósceles tem dois lados congruentes, e os lados opostos a esses lados são congruentes...certo? Não tem problema quanto a isso....Acho que a questão pega quando fala a questão da medida, né??
16. A1: Eu acho que não...Eu não acho que o problema é a medida...por que aqui a gente tá usando, por exemplo, a medida, a distância de um ponto até um dos lados...
17. A2: Quando a afirmação fala...que nem o teorema de Pitágoras...fala que esse ao quadrado, mais esse aí quadrado é igual a esse ao quadrado, não vale...o ângulo de 90 graus não vale...não sei se é a questão da medida...mas é uma...
18. A1: É assim...nessa história do teorema de Pitágoras é por que a métrica que foi feita, ela não ...como fala? A métrica não comporta essa propriedade?
19. A2: Isso...ela não comporta essa propriedade...
20. A1:A distância de um ponto pertencente...
21. A2: por que ela foi definida pelo logaritmo de um quociente, lá...aquele quociente grandão...

Quadro 4.14: Transcrição da dupla A referente à proposição 6 da atividade 1 (2ª sessão)

Nas linhas 2 a 12, os professores tentaram justificar a validade do teorema na Geometria Hiperbólica pela construção que fizeram e pelas definições dos objetos geométricos envolvidos. Eles relacionaram os campos teórico e espaço-gráfico, quando interpretaram em termos de T as representações SG dos objetos. Nas passagens 13 a 21 do diálogo, percebemos que eles estavam relacionando as duas geometrias e fazendo conjecturas sobre a validade das proposições na Geometria Hiperbólica, trabalhando, portanto, no campo teórico. Os professores não conseguiram justificar teoricamente a validade do teorema, e escreveram a resposta abaixo.

6) Verdadeiro
 Bissetrizes → não mudou de definição (distâncias de um ponto pertencente à bissetriz, aos lados do triângulo são iguais)
 Se interceptam

Quadro 4.15: Resposta da dupla A à proposição 6 da atividade 1

No último item dessa primeira atividade, referente ao ponto de intersecção das medianas, os professores dessa dupla tinham verificado na primeira sessão que não era válido na Geometria Hiperbólica e, portanto, não fizeram novamente a construção, apenas discutiram a justificativa conforme o trecho abaixo.

1. A1: O ponto de intersecção das medianas, divide cada uma delas na razão dois pra um, a partir de um vértice, nós já vimos ontem que é falsa...(Lendo o último teorema da atividade 1)
2. A2: Isso...
3. (Silêncio)
4. A1: Por que? Precisamos pensar na justificativa...
5. A2: A minha hipótese...
6. A1: É justamente por causa da métrica... aí vem a sua coisa da métrica... não é não?
7. A2: É... é da métrica... as distâncias, falam que são iguais... se você medir... não é... é verdade... o mesmo argumento que você usou lá no logaritmo...
8. A1: Deve ter qualquer coisa na métrica que impeça... pronto...
9. A2: A demonstração na geometria plana, da razão 2 pra 1, não é que é complicado, mas é uma demonstração meio trabalhosa... mostrar pra um triângulo, mostrar pra outro... agora aí... a questão não vai valer por causa da questão do logaritmo, da propriedade do logaritmo...
10. A1: Ok... vamos para outra...

Quadro 4.16: Transcrição da dupla A referente à proposição 7 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores continuaram a discussão que estavam fazendo para justificar a proposição anterior. O professor A2 chegou a citar, na linha 9, que a demonstração na geometria plana não é complicada, mas não comentou que nesta demonstração o quinto postulado é indiretamente utilizado, e por isto, o teorema não é válido na Geometria Hiperbólica. Os professores concluíram que o problema estava nas propriedades do logaritmo, e formularam a seguinte resposta.

7) Falso

Deve ter qualquer coisa na métrica.

Quadro 4.17: Resposta da dupla A à proposição 7 da atividade 1

Dupla B

Os professores da dupla B leram o enunciado do primeiro teorema e automaticamente afirmaram ser falso. Em seguida, construíram um triângulo

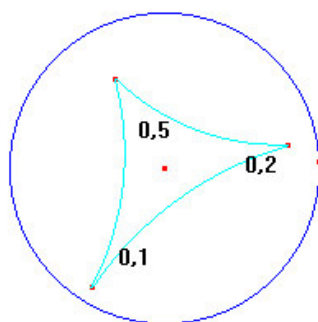
qualquer e mediram a soma dos ângulos internos desse triângulo. Manipularam o triângulo para verificar se a soma permanecia menor que 180° .

1. B1: *Aqui ta pedindo pra justificar...Agora pra justificar...pra mim teria que estar demonstrando. O que o Cabri vai me dar é uma comprovação de que ela é falsa.*
2. B2: *É...*
3. B1: *Então experimentalmente, usando a calculadora, a gente vê que isso é verdade...*
4. B2: *Que a soma não é...*
5. B1: *Isso...que a soma é menor que 180° ...*
6. B2: *A nossa conclusão seria...(começa a escrever a justificativa)*

Quadro 4.18: Transcrição da dupla B referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores dessa dupla optaram por escrever a justificativa na própria tela do Cabri, usando a ferramenta “comentários”.

Résultat : 0,87



a soma é sempre menor que 180° , comprovado experimentalmente no Cabri.

Figura 4.5: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo - dupla B

Nesta atividade, os professores da dupla B utilizaram somente o “arrastar teste” para validar sua conjectura e verificar se a propriedade é mantida. No diálogo entre a dupla (quadro 4.18), percebemos um desejo do professor B1 em provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° na Geometria Hiperbólica, mas acabaram por responder que este resultado foi comprovado experimentalmente. Neste momento, os professores trabalharam no nível gráfico-espacial e também no nível teórico, chegando, entretanto, a uma resposta, que foi dada somente em termos SG.

A dupla B iniciou a leitura do segundo teorema, “em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes” e passaram a construir um triângulo isósceles, tentaram usar translação de segmentos, mas o professor

B2 propõe usar simetria axial. Por fim, resolveram construir usando mediatriz. Neste momento, percebemos uma relação muito grande com a Geometria Euclidiana, e com os modos de construção dos objetos nessa Geometria. Eles trabalharam relacionando os níveis teórico e espaço-gráfico, fazendo a interpretação de um fenômeno, neste caso o conceito de mediatriz, em termos geométricos.

Depois de construído o triângulo isósceles, eles mediram os lados congruentes, para verificar se realmente são congruentes. Os professores estão transitando entre os campos teórico e gráfico-espacial, pois por construção sabem que os lados são congruentes, uma vez que foi uma representação dada em termos SG de uma definição em termos T. Como estão trabalhando em um campo com que não estão muito familiarizados (Geometria Hiperbólica), ocorre esse tipo de problema envolvendo os dois domínios.

Por fim, mediram os ângulos da base e verificaram que essas medidas são congruentes. Manipularam a figura, utilizando o modo de *arrastar teste*, e já escreveram a justificativa no Cabri.

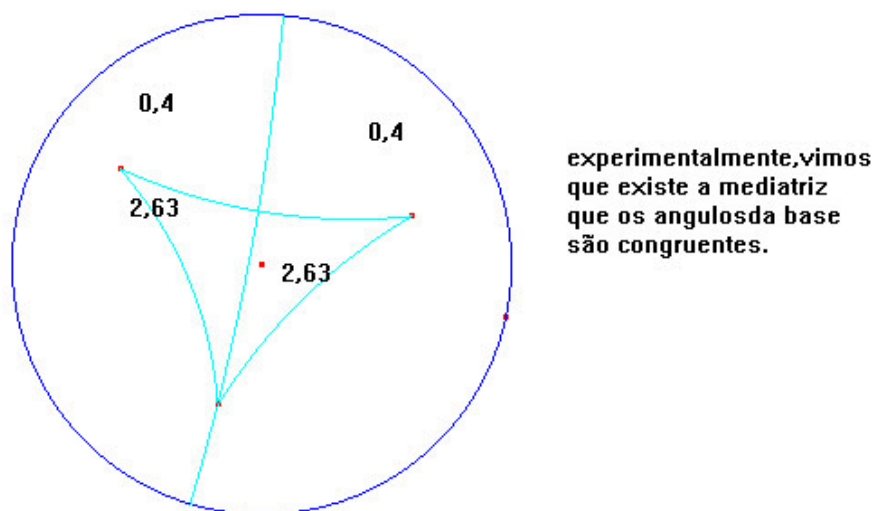


Figura 4.6: ângulos da base de um triângulo isósceles - dupla B

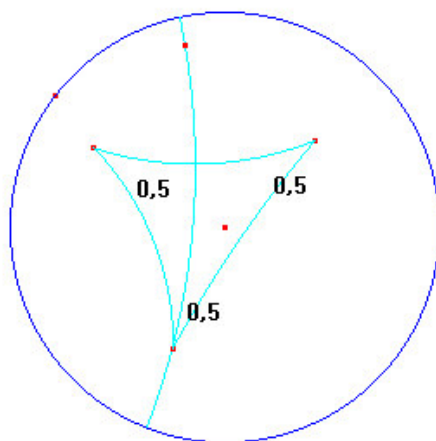
Novamente, os professores da dupla B, justificam sua resposta somente no campo SG. Neste momento, a observadora intervém perguntando se eles podem dar alguma justificativa sem ser experimental, se baseando na Geometria Euclidiana. Os professores disseram que precisariam pensar e

verificar os postulados de Euclides, para ver quais utilizam o quinto o postulado. Decidiram fazer todos experimentalmente e depois pensariam em outra justificativa.

Passaram para o próximo teorema que diz que os ângulos internos de um triângulo eqüilátero medem 60° . Tentaram construir usando mediatriz, mas o professor A1 sugeriu usar circunferências. Mais uma vez os professores se referem à Geometria Euclidiana, pois a construção “usual” de triângulo eqüilátero nessa geometria é por meio de circunferências. Depois de construído o triângulo eqüilátero, eles medira os ângulos internos.

1. B1: Os três ângulos são iguais, mas obviamente, como a soma das medidas dos ângulos internos é menor que 180° , é menor que 60° , certo?
2. B2: Com certeza...
3. B1: Na minha cabeça era assim...eu acho que eles não iam ser nem iguais, entendeu? Não é nem ser 60° , mas é terem a mesma medida...eu tava achando que não ia nem confirmar...
4. B2: Eu tava achando que iam ser iguais, uma vez que o isósceles deu igual, então o eqüilátero teria que dar igual.
5. B1; Como na realidade, você tem arcos que aparentemente são menores e que tem a mesma medida, neh?
6. B2: É...
7. B1: As três medidas são iguais, mas obviamente não é 60° ...

Quadro 4.19: Transcrição da dupla B referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão)



experimentalmente o triângulo eqüilátero tem os três ângulos internos de mesma medida, menores que 60°

Figura 4.7: Ângulos internos de um triângulo eqüilátero- dupla B

No diálogo entre os professores da dupla B (quadro 4.19), percebemos que eles tinham conjecturas diferentes. O professor B1, acreditava que os ângulos não iam ser congruentes, e o professor B2, achava que seriam congruentes, mas não medindo 60° , pois no teorema anterior, os ângulos da

base eram congruentes. Novamente, os professores justificam em termos SG, e não perceberam que os critérios de congruência fazem parte da Geometria Absoluta.

Para verificar a validade do Teorema de Pitágoras, construíram um triângulo retângulo com um segmento e reta perpendicular. Mediram os lados do triângulo, calcularam o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. Verificaram que o teorema não é válido na Geometria Hiperbólica. Consideraram a justificativa experimental válida, porque como é falso, a construção vale como contra exemplo.

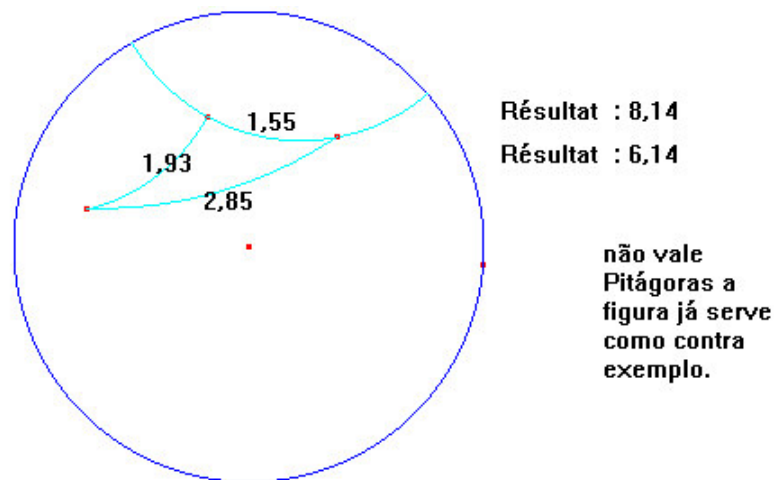


Figura 4.8: Triângulo retângulo - dupla B

Neste caso, os professores responderam em termos SG, colocando que a representação é válida como contra-exemplo. Novamente os professores dessa dupla não mencionam o quinto postulado de Euclides, nem se referiram à Geometria Euclidiana.

O próximo teorema fala que todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo. Os professores da dupla B criaram uma circunferência e seu diâmetro através da reta-h. Construíram o triângulo inscrito na semicircunferência, e mediram seu ângulo. Verificam que esse teorema não é válido.

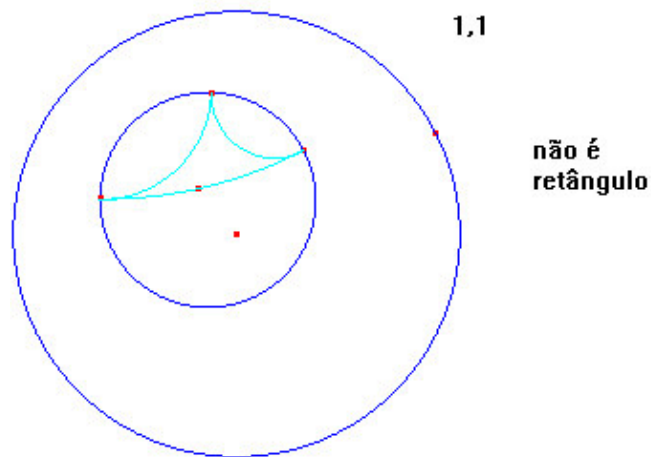


Figura 4.9: Triângulo inscrito numa semicircunferência - dupla B

Os professores dessa dupla utilizaram o modo de “arrastar teste” para verificar a regularidade das figuras e trabalham no nível SG para justificar sua resposta.

Para verificar se é possível inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado, começaram construindo um triângulo qualquer, suas bissetrizes e acharam o incentro. Traçaram a perpendicular a um dos lados pelo incentro e construíram a circunferência inscrita no triângulo. Manipularam e escreveram a justificativa no Cabri.

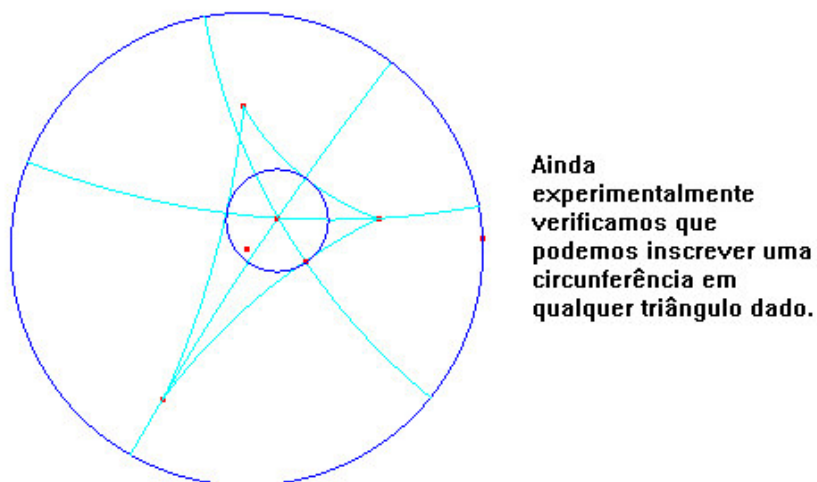


Figura 4.10: Circunferência inscrita num triângulo qualquer- dupla B

Quando os professores da dupla B leram o último teorema, já afirmaram que era falso, pois haviam conversado no dia anterior com os professores da dupla A, e estes expuseram que, quando estavam explorando o menu hiperbólico na primeira sessão, verificaram que o ponto de intersecção das medianas não dividia cada uma delas na razão 2 para 1.

A dupla B construiu, então, um triângulo qualquer, suas medianas e acharam o baricentro. Mediram as partes da mediana separadas pelo baricentro e verificaram sua razão. Manipularam um pouco e escreveram a conclusão no Cabri.

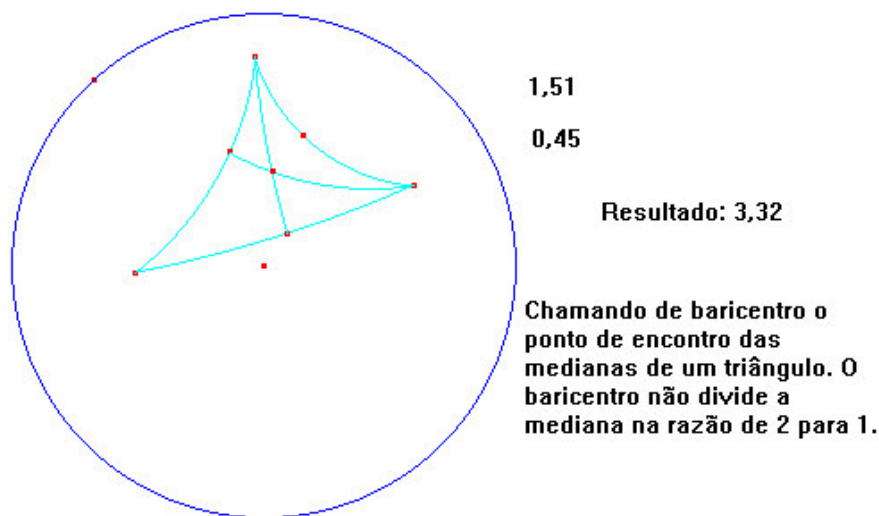


Figura 4.11: Baricentro de um triângulo - dupla A

No final de todas as atividades dessa sessão, os professores da dupla B se sentiram incomodados com o fato de justificarem somente experimentalmente os resultados obtidos na atividade 1. Em momento algum falaram do quinto postulado de Euclides, tentaram justificar relacionando com as demonstrações da Geometria Euclidiana e, como descrito acima, justificaram somente em termos gráfico-espaciais.

Os professores sentaram para discutir suas justificativas e, neste momento, a sessão já tinha sido encerrada, portanto, não estavam com as construções feitas na tela do computador, e o diálogo não foi gravado. As respostas escritas estão no quadro 4.20.

Atividade 1

Os teoremas 1,3,4,5 e 7 são falsos. Ver contra-exemplo construído no Cabri. Todos eles dependem da construção de paralelas no sentido euclidiano para justificá-los.

O teorema 2 é verdadeiro pois o caso LAL de congruência de triângulos é postulado.

O teorema 6 é verdadeiro pois vale a proposição de que todo ponto da bissetriz de um ângulo é eqüidistante aos lados desse ângulo. O ponto de encontro das bissetrizes é o centro da circunferência inscrita.

Quadro 4.20: Respostas da atividade 1 elaboradas pela dupla B

Analisando os resultados obtidos experimentalmente, os professores da dupla B, trabalhando no campo teórico, relacionando a Geometria Euclidiana com a Geometria Hiperbólica, perceberam que, para justificar a validade do segundo teorema, teriam que utilizar o caso LAL, que é uma proposição da Geometria Absoluta. Assim, para justificar o teorema 6, utilizariam a proposição de que todo ponto da bissetriz de um ângulo é eqüidistante aos lados desse ângulo, o que também faz parte da Geometria Absoluta. Para justificar os teoremas que não são válidos na Geometria Hiperbólica, os professores colocaram que necessitariam do quinto postulado.

Dupla C

Os professores da dupla C começaram a ler a atividade 1 e iniciaram a construção do triângulo para verificar se a soma das medidas dos ângulos internos é 180° . Depois de construído o triângulo, mediram os ângulos internos, transformaram as medidas em radianos e calcularam a soma. Verificaram que a soma é menor que 180° , e o professor C1 disse imediatamente que isso acontece por que existe a questão das paralelas, e começam a discutir sobre isso.

1. C2: Como que a gente faz pra ver que é 180° ? É a questão das paralelas, né? Você pensa num ângulo externo...
2. C1: e vc usa os ângulos alternos internos, que na GE...ah tah...como na GE só vai passar uma paralela por um ponto fora da reta...o teorema dos ângulos alternos internos é baseado nesse teorema...
3. C2: é...
4. C1: como esse postulado não vale pra GH, nós não poderemos usar esse postulado pra provar isso...
5. C2: Será que existe algum triângulo que a soma dê 180° ?

6. C1: Quanto menor for o triângulo, por exemplo, se for aproximando esses pontos do centro da circunferência, aí ele vai ficar difícil de enxergar, mas quanto menor for o triângulo, mais próximo do centro, vai se aproximando mais de 180° ...
7. C2: Eu acho que 180° mesmo nunca...
8. C1: Ele teria que praticamente coincidir com o centro da circunferência...
9. C2: É... não tem como os três passarem pela circunferência e formarem um triângulo...
10. C1: Eu acho que a justificativa é essa... nós provamos que vale 180° a soma dos ângulos internos com base no quinto postulado de Euclides, mas como ele não vale pra essa geometria...
11. C2: O b...o que fala o b ? (mudando de teorema)

Quadro 4.21: Transcrição da dupla C referente à proposição 1 da atividade 1 (2ª sessão)

Procurando uma justificativa para o fato da soma ser menor que 180° , os professores transitaram nos níveis T e SG, relacionando a todo o momento a Geometria Euclidiana com a Hiperbólica. Procuraram na Geometria Euclidiana a justificativa para a soma dos ângulos internos ser 180° e verificaram que para esta, utilizariam o quinto postulado de Euclides, portanto não poderiam provar da mesma maneira (linhas 1 a 4). Utilizaram o modo de “arrastar teste” para verificar se essa propriedade se mantém constante (linha 5), e acabaram concluindo que, como o quinto postulado não é válido nessa geometria, a soma das medidas dos ângulos internos é menor que 180° . Os professores perceberam que, quanto menor o triângulo e mais próximo do centro do plano hiperbólico, a soma se aproxima cada vez mais de 180° .

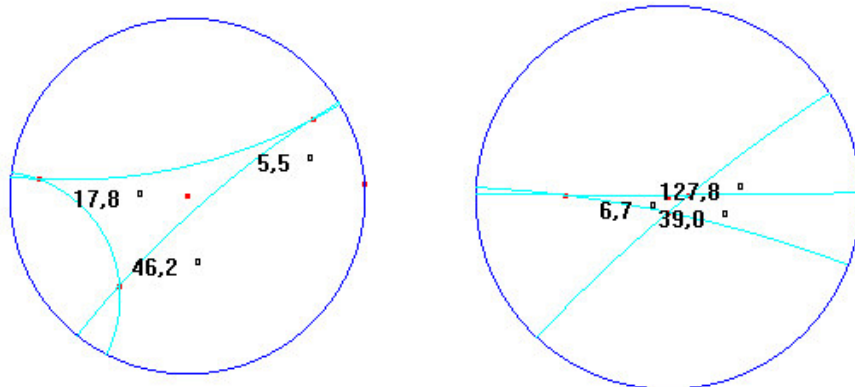


Figura 4.12: Soma das medidas dos ângulos internos –dupla C

No primeiro triângulo da figura 4.12, a soma das medidas dos ângulos internos é $69,5^\circ$ e quando os professores aproximaram do centro do horizonte os vértices do triângulo, a soma aumentou para $173,5^\circ$.

Os professores dessa dupla não escreveram a justificativa e passaram para o segundo teorema desta atividade, onde deveriam verificar se os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Para construir um triângulo isósceles, os professores criaram um segmento e construíram sua mediatriz. Definido o triângulo isósceles, mediram os ângulos da base, verificando sua congruência.

1. C1: Os ângulos da base são congruentes...
2. C2: Agora vamos justificar... Como que a gente faz no...
3. C1: A mediatriz... se é a mesma definição de perpendicularismo...
4. C2: mediatriz... perpendicular no ponto médio...
5. C1: Então aqui temos um ângulo de 90° ...
6. C2: Interessante por que como a soma não é mais 180° ...
7. C1: Vamos medir isso aqui...(os ângulos formados pela mediatriz)
8. C2: Como que a gente prova que os ângulos da base são congruentes na Geometria Euclidiana?
9. C1: Considerando dois triângulos e utilizando congruência de triângulos... Eu sei que ele é isósceles...
10. C2: Mas aí...
11. C1: eu tenho certeza que ele é isósceles, por que nós fizemos foi construir a mediatriz...
12. C2: então... eles têm um lado comum...
13. C1: dois lados congruentes... e como é mediatriz, esse lado é congruente à esse...
14. C2: temos três...
15. C1: É LLL... então os ângulos correspondentes são congruentes...
16. C2: mas não é interessante o fato de que não é mais 180° ? Como a gente vai justificar?
17. C1: e se a gente medir os lados pra ver se vale os casos de congruência de triângulos?...
18. C2: E se nós passarmos pros outros por que é tudo triângulo e depois a gente volta pra justificar...
19. C1: Vamos...

Quadro 4.22: Transcrição da dupla C referente à proposição 2 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores voltaram à Geometria Euclidiana para justificar a congruência dos ângulos, e verificaram que, nesta geometria, a justificativa é feita utilizando congruência de triângulos. Não conseguem perceber que os casos de congruência são válidos também na Geometria Hiperbólica, pois são proposições da Geometria Absoluta. Neste momento, ocorre um problema interno T, pois não percebem que, na demonstração dos casos de congruência, não é utilizado o quinto postulado. Mesmo verificando que a mesma justificativa seria válida na Geometria Hiperbólica, não conseguem fazer essa relação, finalizando a atividade sem justificativas.

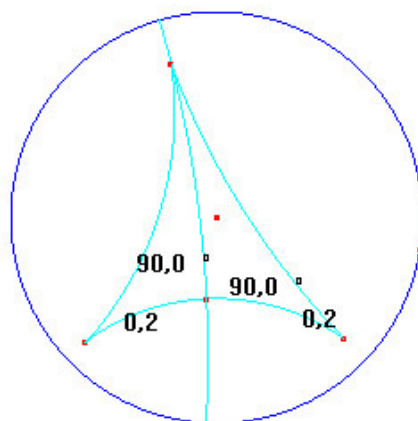


Figura 4.13: Ângulos da base de um triângulo isósceles - dupla A

Em seguida, iniciaram a leitura do próximo teorema para verificar se os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° . Como esses professores tinham construído esse triângulo na atividade do dia anterior, não tiveram dificuldades na sua construção e, antes de medir, o professor C2 diz que os ângulos não serão 60° e ao mesmo tempo congruentes. Depois de medirem os ângulos, e utilizarem o modo de “arrastar teste” verificaram que a conjectura de C2 estava correta.

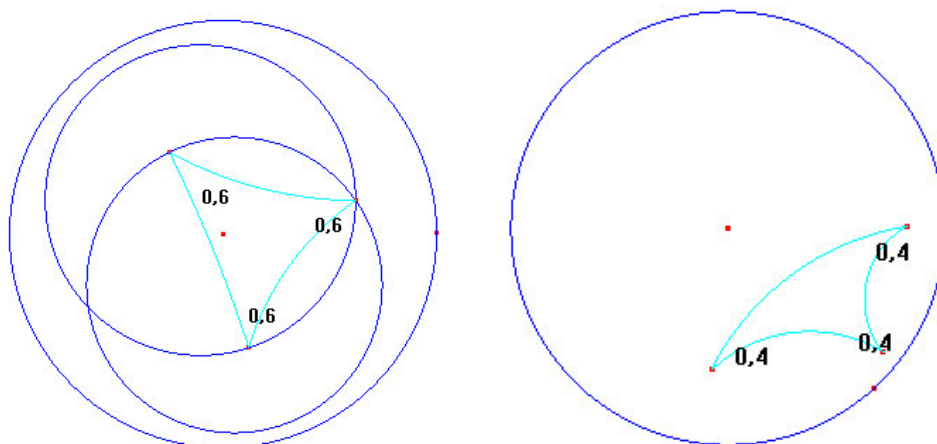


Figura 4.14: Triângulo equilátero - dupla C

C1: são menores que 60° porque a soma dos ângulos não é 180° ...

Quadro 4.23: Fala do professor C1 referente à proposição 3 da atividade 1 (2ª sessão)

Os professores dessa dupla não escreveram a justificativa e, para eles, a fala do professor C1 já seria uma justificativa.

Para verificar se é válido o teorema de Pitágoras, construíram um triângulo retângulo a partir de uma reta e uma perpendicular. Definiram o triângulo reto e mediram os catetos e a hipotenusa. Não fizeram os cálculos na calculadora, mas já perceberam que não é válido por cálculos mentais.

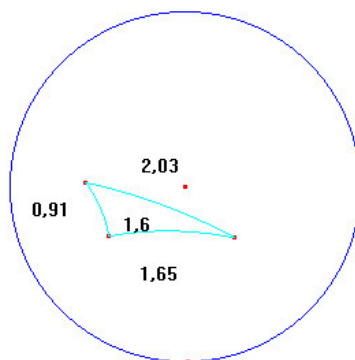
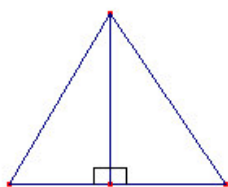


Figura 4.15: Triângulo retângulo - dupla C

1. C1: O teorema de Pitágoras não é válido...
2. C2: Por que? Vamos ver...
3. C1: Tudo isso a gente tem que basear pensando no quinto postulado...
4. C2: As manias que a gente tem que demonstrar né? (pega um papel e começa a desenhar). Uma maneira é trabalhar o...
5. C1: com os dois triângulos que se forma usando a altura...
6. C2: dois triângulos que são semelhantes....
7. C2 e C1 desenharam na folha de papel a seguinte figura:



8. C1: Ah...mas aqui...não existem triângulos semelhantes....quando eles tiverem a mesma forma, eles são congruentes...não existem dois triângulos semelhantes nessa geometria...como esse aqui é provado por semelhança de triângulos...
9. C2: Porque?
10. C1: Eu não sei por que...não sei te explicar...mas se tiver duas figuras com a mesma forma elas vão ser igualzinhas...
11. C2: se a soma não é 180° , o fato de dois triângulos...
12. C1: não existe uma medida exata pra soma dos ângulos internos de qualquer triângulo...
13. C2: então não se pode pensar em triângulos semelhantes...mas é que não existe nenhum triângulo semelhante ao outro, ou você não consegue identificar...
14. C1: Não existem figuras...mas eu acho que a causa é essa...duas medidas podem ser...[...]
15. C1: Bom, uma das formas de justificar isso, é que na Geometria Euclidiana, a gente usaria semelhança de triângulos, a semelhança de triângulos é baseada nas paralelas, né?
16. C2: Agora que outra...pensando nas outras formas de demonstrar Pitágoras...nas outras 300...(risos)
17. C1: e se nós construíssemos...
18. C2: Vamos ver o outro...

Quadro 4.24: Transcrição da dupla C referente à proposição 4 da atividade 1 (2ª sessão)

No diálogo acima, percebemos que os professores da dupla C, novamente voltaram para a Geometria Euclidiana, transitando nos campos teórico e espaço-gráfico. Depois de terem construído no Cabri a representação SG do objeto hiperbólico, entraram no nível T, relacionando a Geometria Hiperbólica com a Euclidiana, e passaram para o nível SG construindo a representação, no papel, do objeto euclidiano para conseguir formular uma justificativa. Neste momento, eles estão usando os dois domínios – o T e o SG – constituindo um movimento contínuo entre eles. Verificaram que na prova do teorema de Pitágoras, na Geometria Euclidiana, utiliza-se semelhança de triângulos e que para provar a semelhança, o quinto postulado é usado indiretamente, portanto, não existem triângulos semelhantes na Geometria Hiperbólica. Assim, o teorema de Pitágoras não é válido.

Os professores não escreveram nenhuma justificativa na folha de respostas e passaram para o próximo teorema. Optamos por não colocar as análises feitas dos últimos teoremas da dupla C para não tornar este texto muito extenso e repetitivo. A partir deste momento, decidimos também, colocar apenas as interações e relações mais importantes e interessantes de cada dupla.

4.3.2 Atividade 2: Quadrilátero de Saccheri

A segunda atividade desta sessão apresenta a definição do quadrilátero de Saccheri e solicita a construção desse quadrilátero no modelo do disco de Poincaré. Perguntamos, então, aos professores o que poderiam observar sobre os outros dois ângulos, e pedimos que justificassem sua resposta.

Dupla A

Para construir o quadrilátero de Saccheri, A1 e A2 criaram um segmento AB, construíram a reta perpendicular a AB que passa por A e outra perpendicular que passa por B. A seguir, criaram um ponto D na reta perpendicular que passa por A e transferiram a medida do segmento AD para a perpendicular que passa por B com a ferramenta compasso, obtendo o ponto

C. Ligaram os pontos C e D, formando o segmento CD, o lado do topo do quadrilátero.

Neste momento os professores estão trabalhando nos dois domínios, T e SG, pois estão produzindo uma representação SG de um objeto geométrico, cuja definição é dada em termos de T.

Em seguida, os professores utilizaram as medidas dos segmentos AD e BC para verificar a congruência dos lados. O mesmo fizeram para os ângulos D e C do quadrilátero. Neste momento, estão utilizando o modo de *arrastar teste*, para verificar a regularidade da figura. A verificação foi positiva quanto à congruência e, para tentar justificar, fizeram a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero. Como eles não chegaram a uma justificativa, passaram, então, para a última atividade.

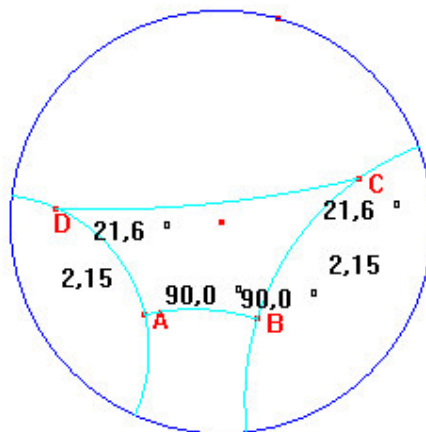
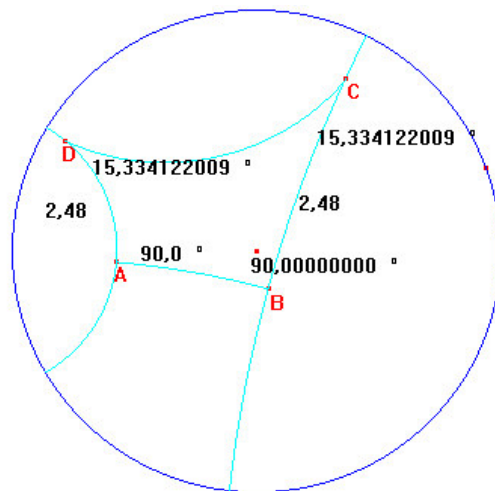


Figura 4.16: Quadrilátero de Saccheri - dupla A

Dupla B

Os professores da dupla B construíram o quadrilátero, mediram seus ângulos, fizeram a soma dos ângulos internos. Manipularam e, baseados em tal construção, e como eles próprios denominaram, fizeram uma justificativa experimental. Os professores perceberam que os ângulos são congruentes e agudos, mas não pensaram em justificar esse fato em termos de T. Os professores trabalharam relacionando os dois domínios, mas a justificativa ficou somente em termos SG.



Resultado: 210,67 °

Os outros dois ângulos são sempre congruentes de maneira que a soma dos quatro seja menor que 360 graus. Ou seja, cada um deles mede menos que 90 graus, ou ainda são ângulos agudos.

Figura 4.17: Quadrilátero de Saccheri - dupla B

4.3.3 Atividade 3: Quadrilátero de Lambert

Dupla A

Depois de lerem o enunciado, os professores A1 e A2 começaram a construir o quadrilátero de Lambert. Criaram o segmento AB, traçaram uma perpendicular à reta AB por A, criaram o ponto D sobre essa perpendicular, e depois construíram uma perpendicular à reta AD pelo ponto D. Procederam a manipulações e chegaram à conclusão de que não é possível construir um quadrilátero de Lambert no modelo de disco de Poincaré. Na verdade, eles estavam tentando fazer um quadrilátero com três ângulos retos e dois lados congruentes. Depois que releeram o enunciado, observaram que não havia necessidade dos lados serem congruentes, mas, mesmo assim, finalizaram por não apresentar uma construção. Na folha de respostas, expressaram somente a impossibilidade de obter tal figura. Não tendo mais tempo para discussões, a sessão 2 foi encerrada.

Nesta atividade, podemos dizer que a representação SG do objeto não foi interpretada adequadamente em termos de T. Primeiro ocorreu um problema interno ao domínio T, no qual os professores estavam tentando construir o quadrilátero de Lambert, mas com base na construção que fizeram do quadrilátero de Saccheri. Portanto, quando foram relacionar os dois

quadriláteros, perceberam que não seria possível a construção, pois os ângulos deveriam ser congruentes e agudos.

Depois que perceberam o problema, tentaram construir o quadrilátero de Lambert. Mesmo verificando a existência do quadrilátero, por meio de uma construção mole, colocaram como resposta a impossibilidade de construção do quadrilátero. Ocorreu um problema envolvendo os domínios T e SG.

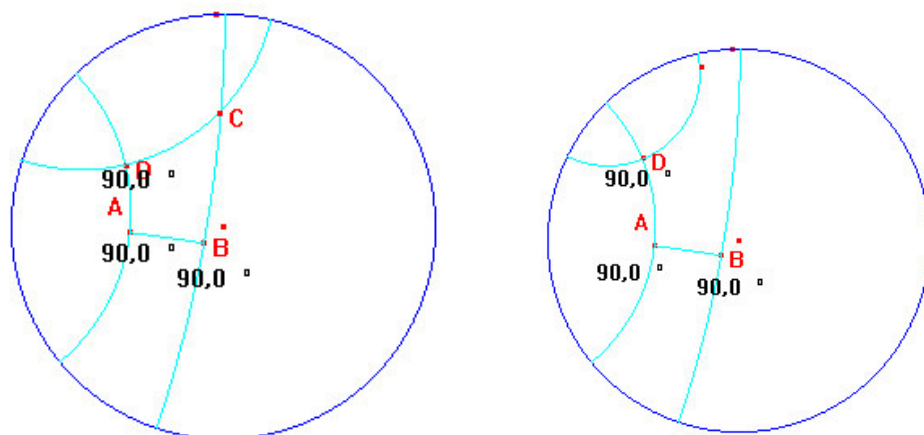


Figura 4.18: Quadrilátero de Lambert - dupla A

Dupla B

Os professores da dupla B leram o enunciado da atividade 3 e começaram a construir o quadrilátero solicitado. Fizeram um segmento, traçaram as retas perpendiculares nas extremidades do segmento. Criaram um ponto sobre uma das perpendiculares e traçaram outra perpendicular por este ponto. A figura Cabri feita pela dupla B, correspondente a essa atividade, foi corrompida e não conseguimos recuperar. Infelizmente, não temos a resposta que os professores escreveram na tela do computador, mas o diálogo entre eles está transcrito no quadro abaixo.

1. B1: Não tem intersecção...taí um contra exemplo...nem sempre é possível...eu posso agora movimentar e buscar essa intersecção, concorda?
2. B2: É...tinha que ter a intersecção...
3. B1: Agora eu vou mexer...pode ser que eu consiga um quadrilátero...
4. B2: Três retos e um qualquer...
5. B1: Três retos e um qualquer que é menor que 90° ...Mas tem um contra exemplo, então a justificativa é a seguinte...
6. B1: (Escrevendo) Nem sempre é possível tal construção...

7. B2: Sabe por que? Se essa é perpendicular e aquela é perpendicular elas deveriam ser paralelas...Vale essa propriedade...
8. B1: Elas são paralelas...Vale a propriedade...mas isso não garante que elas se interceptam...
9. B2: Que aja intersecção das duas...pra...
10. B1: O que vc prefere? Eu vou por assim...(começa a escrever). Com a mobilidade do Cabri, podemos até buscar uma posição em que tal possibilidade aconteça...
11. B2: Aí vem aquele de Lambert...
12. B1: Vou mexer a figura e deixar no quadrilátero bonitinho...A existência do quadrilátero está aí...Ela só pediu a construção do quadrilátero de Lambert, construí, mas não é pra toda posição que vale...

Quadro 4.25: Transcrição da dupla B referente à atividade 3 (2ª sessão)

Os professores perceberam que o quadrilátero de Lambert existe nessa geometria e, como eles mesmos disseram, a sua construção não é válida para toda posição. Eles utilizaram o “arrastar orientado”, manipularam para obter o quadrilátero de Lambert, mas verificaram, pelo “arrastar teste”, que as propriedades não são mantidas. Neste caso, eles não pensaram em uma outra construção para esse quadrilátero.

Dupla C

Os professores da dupla C não conseguiram realizar esta atividade por falta de tempo.

4.4 Resultados da terceira sessão

Na terceira e última sessão, os professores trabalharam com atividades de construção no modelo de disco de Poincaré. Esta sessão era composta por cinco atividades. As atividades 1 e 2 são construções euclidianas referentes à transformação "inversão", que será utilizada em construções no modelo hiperbólico do disco de Poincaré. Assim, elas deveriam ser realizadas com as primitivas do menu euclidiano. As atividades 3, 4 e 5 são construções que devem ser consideradas no modelo do disco de Poincaré e utilizam tanto o menu hiperbólico quanto o euclidiano.

Dupla A

Atividade 1

- 1) a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A fora dela.
- b) Construa o segmento AO.

- c) Construa as retas tangentes à circunferência que passem pelo ponto A.
- c) Ligue os pontos de tangência e nomeie B, a intersecção desse segmento com o segmento AO.
- d) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 4.26: Atividade 1 da terceira sessão

Os professores da dupla A começaram a ler o enunciado da primeira atividade e seguiram suas orientações. Demoraram um pouco para lembrar a construção de retas tangentes a uma circunferência. Depois de feita a construção, começaram a verificar a relação métrica entre os segmentos AO e BO.

Mediram os segmentos para verificar a relação métrica entre eles, mas não chegaram a uma relação. Depois, verificaram a existência de triângulos retângulos, e começaram a verificar as relações de semelhança entre esses triângulos. Os professores chegaram na relação $R^2 = AO \cdot BO$. Nesta atividade, os professores trabalharam nos níveis teórico e gráfico-espacial referentes à Geometria Euclidiana, relacionaram os dois e encontraram uma razão geométrica para o que estavam observando em relação ao comportamento do diagrama.

Começaram a ler o enunciado da segunda atividade e fizeram a construção conforme as instruções.

Atividade 2

- 2) a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A qualquer.
- b) Construa a reta AO.
- c) Construa a reta perpendicular ao segmento AO que passe por O, e nomeie as intersecções dessa reta com a circunferência de C e D.
- d) Construa a reta r, perpendicular à reta AC pelo ponto D.
- e) Nomeie B a intersecção entre as retas r e AO.
- g) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 4.27: Atividade 2 da terceira sessão

Os professores fizeram a construção pedida e se engajaram na seguinte discussão:

- 1. A1: Investigar a relação métrica entre AO e BO. De novo?...Vai ver que é a mesma coisa...e aí? Aqui...um tava dentro e outro tava fora...
- 2. A2: É...

3. A1: Agora...o problema é a gente enxergar a mesma coisa que tem lá...isso aqui não é reta tangente...
4. A2: Por que tem que enxergar a mesma coisa que tem lá?
5. A1: Não, não tem...eu só tava querendo saber se era...
6. A2: A ta...
7. A1: AO e OB...Bom, a reta r é perpendicular a essa...então tem um triângulo retângulo aqui e outro triângulo retângulo aqui.
8. A2: Vamos fazer a relação métrica pra ver se é a mesma...Vamos pegar AO, OB e a medida do raio pra ver se vale...é isso que vc queria ver? Pra ver se a relação vale?
9. A1: É...medida do raio...
10. A2: Isso...a medida de AO e a medida de OB...
11. A1: É raiz quadrada de OA vezes OB, isso...
12. A2: Então vale...sua hipótese tava mais que certa...
13. A1: Não precisa fazer de novo...Só uma coisa...aqui tem um triângulo retângulo BEA e aqui tem COA outro triângulo retângulo. Como este ângulo aqui é comum aos dois, esse daqui vai ser igual aquele, eles são semelhantes, e vai sair tudo aquilo de novo...

Quadro 4.28: Transcrição da dupla A referente à atividade 2 (3ª sessão)

No diálogo acima, percebemos uma forte influência da atividade anterior. Os professores acreditavam que a relação seria a mesma e, antes de investigar a razão sobre o que estavam observando nesse novo diagrama, decidiram verificar se a relação encontrada anteriormente era válida nessa atividade. Somente após a verificação, relacionando os campos T e SG (linha 13), constaram a semelhança dos triângulos que chegariam na mesma relação.

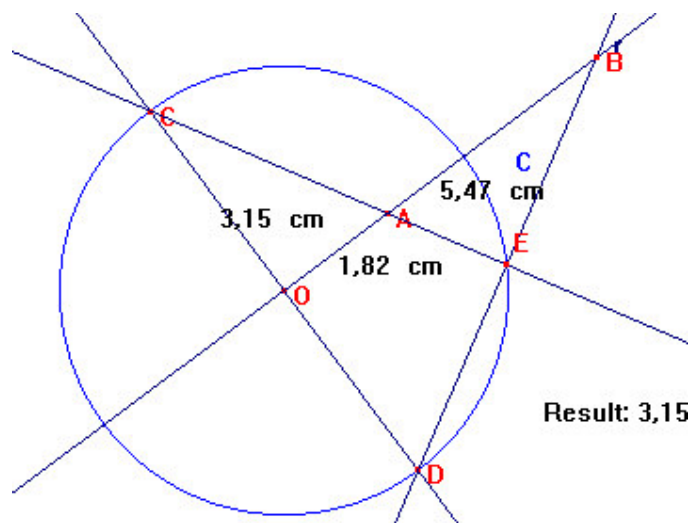


Figura 4.19: Construção do ponto inverso- dupla A

Antes de passarem para as outras atividades, os professores verificaram que as atividades 1 e 2 correspondem à construção do ponto B, inverso de A em relação à circunferência (C).

Os professores começaram a ler o enunciado da atividade 3, parte a, e fizeram a construção segundo as instruções.

3) Construindo retas no modelo do disco de Poincaré
a) reta passando por um ponto
Seja A um ponto qualquer no interior do horizonte h. Construa uma reta hiperbólica, que indicaremos por reta-h, passando por A. Para isso, considere um ponto auxiliar P no horizonte h. A *reta-h* procurada deve passar por A e P. Construa a mediatriz m de AP e, em seguida, obtenha a intersecção C de m com a reta tangente ao horizonte que passa por P. Este ponto C é o centro da circunferência ortogonal à h passando por A. (justificativa a cargo do leitor!).

Obtenha o lugar geométrico da circunferência construída quando P descreve h. O que você pode observar? Faça uma conjectura sobre a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência dada.

Quadro 4.29: Atividade 3(a) da terceira sessão

Depois da construção e antes de obter o lugar geométrico da circunferência construída, quando P descreve h, os professores dessa dupla justificaram a construção escrevendo:

Construímos duas circunferências ortogonais. Como o ponto C pertence a tangente por P, então o raio da circunferência construída é perpendicular ao raio OP (O é centro do h).

Quadro 4.30: Resposta da dupla A para a atividade 3 (a)

E logo em seguida empreenderam a seguinte discussão:

1. A1: Lugar geométrico da circunferência...uau, o que será que vai sair??
2. A2: Puxa ele com a molinha...
3. A1: Ta...cadê o castro? ...Fugiram com o rastro...ah, é trace...achei...
4. A1: Lugar geométrico da circunferência é um pouco estranho né?
5. A2: Sabe o que parece? Um campo magnético...carga aqui e carga aqui...
6. A1: Eu acho que isso parece um monte de circunferência...tem um monte de circunferência e um monte de intersecção...
7. A2: Todas são circunferências...no ponto de vista da física, elas são cargas opostas...
8. A1: Aqui e aqui são cargas opostas?
9. A2: É...mas eu acho que não é isso que ela quer saber...
10. A1: Ela vai, vira uma reta e volta...ta parecendo coisa de cônicas...ela vai pro infinito, passa pro outro lado e volta...Mas não é por que é uma circunferência, mas o centro da circunferência, vai pro infinito, vira reta e voltou...

Quadro 4.31: Transcrição da dupla A referente à atividade 3 (b) (3ª sessão)

Depois de muita discussão, tentando interpretar o fenômeno espacial em termos geométricos, transitando nos níveis T e SG, não chegaram ao resultado esperado. Neste momento, o observador dessa dupla interferiu e

perguntou aos professores o que pode significar o outro ponto, pensando em circunferências ortogonais. Começaram a discutir sobre o ponto e verificaram que esse outro ponto é alinhado com A e O (centro do horizonte). Em seguida, relacionando os domínios T e SG, conjecturaram que é o ponto inverso de A. Construíram o inverso de A, usando o modo de “arrastar ligado” e verificaram com o modo de “arrastar teste” que estavam certos.

Os professores da dupla A, chegaram à conclusão de que “As circunferências ortogonais passam por A, P e o ponto inverso de A em relação à circunferência C”.

Passaram para a próxima etapa da atividade 3, onde deveriam construir uma macro-construção de uma reta hiperbólica no modelo de disco de Poincaré.

Começaram construindo o horizonte, criaram os pontos X e Y interiores ao horizonte. E começaram a discutir:

1. A2: Agora vamos achar uma circunferência ortogonal a essa, não é isso?
2. A1: Isso...
3. A2: A circunferência ortogonal, passa pelo ponto...
4. A1: Ela tem que passar pelo X e pelo inverso do X...
5. A2: Isso...
6. A1: X linha...a circunferência tem que passar por esses dois e pelo Y...
7. A2: Isso...
8. A1: Agora pra achar o centro dela...posso achar pelas mediatrizes?
9. A2: Pode...
10. A1: Vou achar pelas mediatrizes...Pronto...agora tem que fazer a macro...
11. A2: Pontos iniciais...
12. A1: X e Y...pontos finais...temos que achar o arco, não achamos o arco...
(criaram o arco)
13. A2: Objetos iniciais...objetos finais...o arco...
14. A1: Por que não deu certo? Vamos fazer de novo...
15. A2: Não usa o X' ?
16. A1: Não...não é possível que não é consistente a macro...vamos fazer de novo...
17. A2: Só os iniciais e finais?
18. A1: Só...
19. A2: Eu acho que tem que colocar o horizonte...você colocou:
20. A1: Será que é isso? Objetos iniciais, esse ponto, esse ponto e o horizonte...objetos finais, esse arco...Nossa...era isso mesmo...vamos testar...
21. A2: Parabéns...
22. A1: Você sentiu alguma dificuldade...(lendo o resto do enunciado) Não...nós sentimos lá...
23. A2: Sentimos lá...aquí não...

Quadro 4.32: Transcrição da dupla A referente à atividade 3 (b) (3ª sessão)

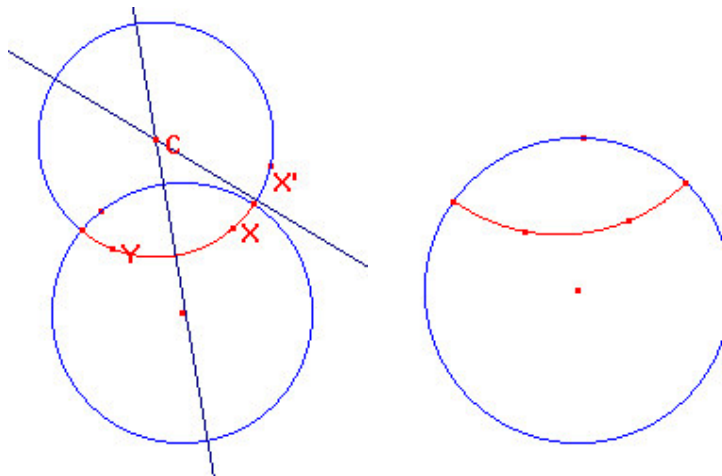


Figura 4.20: Construção do ponto inverso- dupla A

Nesta atividade, os professores dessa dupla não tiveram nenhuma dificuldade em relacionar o ponto inverso com a construção de circunferências ortogonais, definindo a macro-construção 'reta-h' sem maiores problemas. Para essa construção, os professores relacionaram os dois domínios, produzindo uma representação SG do objeto, que foi dado em termos de T.

Os professores começaram a ler a atividade 4, onde deveriam construir um ângulo de 60° . Abaixo segue a transcrição do diálogo entre eles:

1. A1: É que agente quer um ângulo de 60° , então eu vou pra Geometria Euclidiana...Segmento...aí eu quero um ângulo de 60° , como é que eu meço um ângulo? Eu meço o ângulo com as tangentes...então eu vou construir duas retas que tenham um ângulo de 60° , certo?
2. A2: Certo...
3. A1: Agora vou apagar algumas coisas...
4. A2: é que agente demorou muito numa...e nessa demora a gente a gente compreendeu muitas coisas...foi legal isso...
5. A1: Agora eu tenho que traçar uma circunferência...que passe pelo...pelo ponto de inversão...
6. A2: Esse ponto, esse ponto e você vai achar o inverso dele...
7. A1: Então vai passar por esses dois não vai?
8. A2: Eu entendi o caminho que você fez...eu me perdi na construção...
9. A1: Então aí vamos fazer a mediatriz...o centro da circunferência tem estar na mediatriz...porém como essa é uma reta tangente, o raio tem que ser perpendicular à tangente...
10. A2: Isso...
11. A1: Então vamos traçar uma perpendicular passando por A, e perpendicular à essa reta aqui que forma o ângulo de 60° , a intersecção dela com a mediatriz, vai ser
12. A2: centro da circunferência, que vai passar pelo...
13. A1: Agora...essa aqui é a outra tangente...
14. A2: Isso...você vai repetir...
15. A1: Fazer a mesma coisa...eu vou traçar uma perpendicular à ela passando por A,...interceptou a mediatriz lá no outro ponto que eu vou chamar de C2...
16. A2: Aí vc traça a circunferência...

17. A1: *Circunferência que passa por aqui e por aqui...agora vamos brincar de arco...*
 18. A2: *Pronto...elas são tangentes...como passam pelo inverso elas são circunferências ortogonais...e o ângulo é de 60° .*

Quadro 4.33: Transcrição da dupla A referente à atividade 4 (3ª sessão)

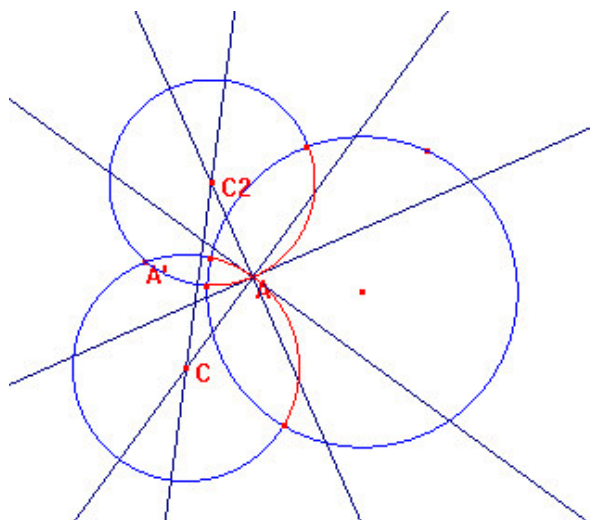


Figura 4.21: Construção do ângulo de 60° - dupla A

Para construírem o ângulo de 60° , os professores pensaram em termos teóricos para decidir como representar as propriedades gráfico-espaciais do objeto. Com a definição de medida de ângulos na Geometria Hiperbólica e com os conhecimentos que adquiriram nas atividades anteriores, tanto do campo teórico quanto do campo espaço-gráfico, transitaram entre os dois domínios a todo momento e finalizaram a construção desejada sem nenhum problema.

Depois de concluírem a quarta atividade, passaram para a quinta e última atividade desta sessão, em que eles deveriam construir um paralelogramo-h no modelo de disco de Poincaré. Segue a transcrição do diálogo.

1. A1: *Esse é pra construir um paralelogramo...to perdidinha...*
 2. A2: *Construa um paralelogramo-h...*
 3. A1: *Paralelogramo... lados opostos paralelos...*
 4. A2: *Dois pares de lados paralelos...*
 5. A1: *É que isso tem consequência com os ângulos...*
 6. A2: *É...a soma dos ângulos...*
 7. A1: *Eu acho que é assim... Vou colocar uma reta...*
 8. A2: *É um paralelogramo qualquer?*

9. A1: *É um paralelogramo...então eu preciso...de lados paralelos...mas como faz pra a gente construir de forma que nunca seja concorrente? Se eu puser qualquer coisa aqui...eu posso brincar com ela e levar lá...mas isso não é construir...*
10. A2: *A questão é mexer com os ângulos...tem que ser uma construção robusta...*
11. A1: *Como é que faz? Ah...mas paralelogramo tem lados congruentes...*
12. A2: *Isso...*
13. A1: *Então primeiro...compasso...*
14. A2: *Será que pode ser por simetria...(construíram o paralelogramo usando o compasso)*
15. A1: *Lados congruentes...agora vamos ver se são paralelos...*
16. A2: *Vamos achar as medidas, os ângulos...*
17. A1: *É...não tem hora que se intercepta...você quer achar os ângulos?*
18. A2: *Isso...e as medidas também...*
19. A1: *Olha...ângulos opostos congruentes...*
20. A2: *É...um paralelogramo...*
21. A1: *Se tivemos alguma dificuldade? (risos)*
22. A2: *Não...se for isso...esse foi o mais fácil de todos...(risos)*

Quadro 4.34: Transcrição da dupla A referente à atividade 5 (3ª sessão)

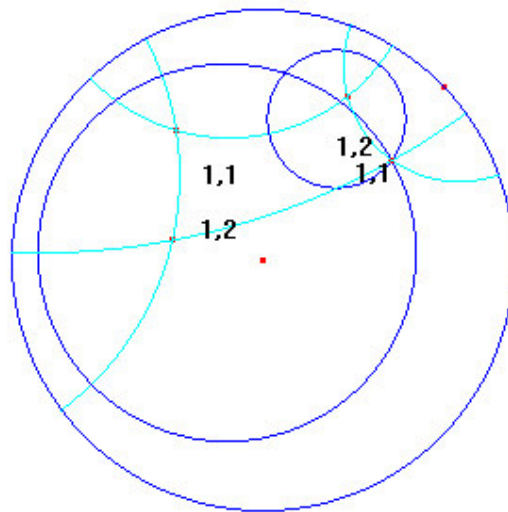


Figura 4.22: Construção não robusta do paralelogramo- dupla A

Os professores dessa dupla optaram por utilizar a definição de paralelogramo na qual os lados opostos são paralelos e congruentes. Dentro do campo teórico transitaram entre a Geometria Euclidiana e Hiperbólica, e sabiam que a representação do objeto em termos SG deveria ser robusta. Apesar de utilizarem o modo de “arrastar teste”, não encontraram nenhuma posição em que a representação não fosse mais um paralelogramo. Mas se os professores manipulassem de forma a obter todas as posições possíveis, manipulando cada vértice de uma vez, encontrariam essa posição, pois, da maneira que construíram o paralelogramo, estavam utilizando a definição que utiliza o quinto postulado de Euclides em sua prova.

O observador, verificando o fato ocorrido, interfere e pergunta se é possível construir um paralelogramo de outra forma no modelo do disco de Poincaré, e os professores engajaram na seguinte discussão:

1. A1: Paralelogramo...sem transferir as medidas...só com retas paralelas...mas como a gente vai ter certeza que ela é paralela? Tem reta paralela aqui? (procurando no menu)
2. A2: Tem esse menu?
3. A1: não...vamos lá...segmento...
4. A2: Isso...agora faz outro segmento...
5. A1: Um lado...outro lado...pode ser qualquer...
6. A2: Isso...agora os outros não podem ser qualquer...
7. A1: Agora tem que traçar paralelas...como é que traça paralelas...
8. A2: pelo menos duas paralelas...As diagonais...em qualquer paralelogramo, as diagonais se interceptam no ponto médio...
9. A1: ta bom...diagonal...isso funciona na não euclidiana?
10. A2: vamos partir desse princípio...se eles não gostarem...(risos)
11. A1:Ah...então vamos fazer por simetria...
12. A2: Isso...por simetria...
13. A1: Simétrico desse ponto, em relação à esse segmento...
14. A2: Agora faz os segmentos...
15. A1: Olha...um paralelogramo...
16. A2: Bem legal esse tema né?
17. A1: Demais...
18. A1: Vamos construir as retas para verificar que elas não se interceptam...Mas a gente usou simetria axial e não central...
19. A2: É verdade...vamos mudar...
20. A1: É pensamos no ponto médio e fizemos com a simetria errada...Agora tá certo...
21. A2: Pronto...

Quadro 4.35: Transcrição da dupla A referente à atividade 5 (3ª sessão)

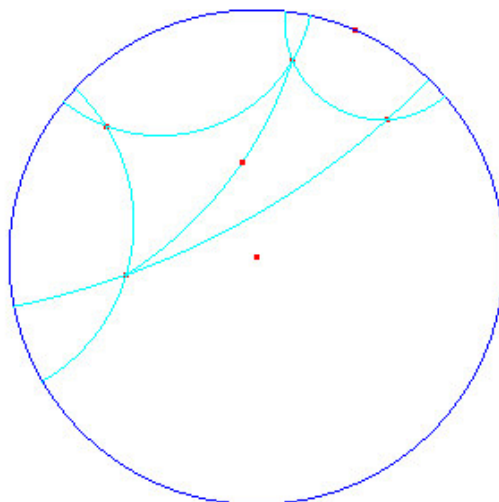


Figura 4.23: Construção robusta do paralelogramo- dupla A

Tentando achar uma definição de paralelogramo que não utiliza retas paralelas, o professor A2 (linha 8) coloca que as diagonais devem se interceptar no ponto médio, e com essa definição do objeto em termos de T, fazem sua

representação em termos SG. Por fim, utilizam o modo de “arrastar teste” e verificam a robustez da figura. Os professores da dupla A salvaram a figura e a sessão terminou.

Dupla B

Os professores da dupla B leram o enunciado e seguiram as instruções para construir a figura. Começaram a pensar na relação e pensaram primeiramente nos triângulos retângulos e nas relações métricas do triângulo retângulo.

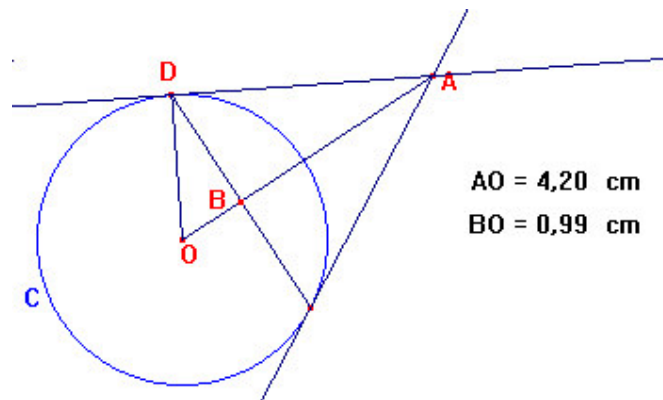


Figura 4.24: Construção do ponto inverso- dupla B

A primeira relação a que chegaram foi $BD^2 = OB \cdot BA$. Pensaram em outras relações nos triângulos retângulos, mas a pesquisadora intervém e fala em triângulos semelhantes, para pensarem em semelhança. Os professores começam a analisar os triângulos semelhantes e chegam à relação $R^2 = AO \cdot OB$.

Começaram a ler o enunciado da segunda atividade e não tiveram problemas em fazer a construção.

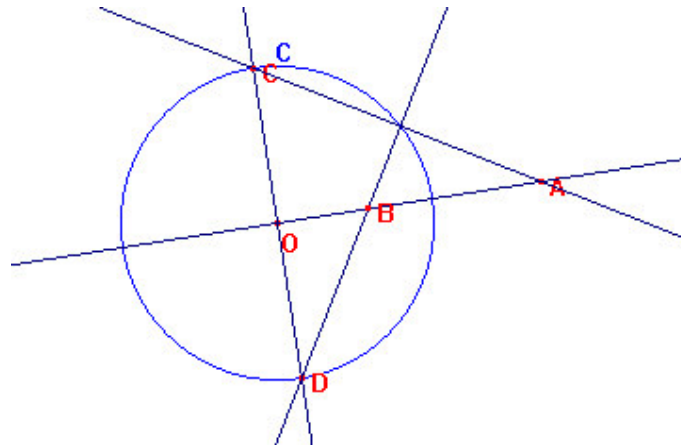


Figura 4.25: Construção do ponto inverso- dupla B

Para investigar a relação métrica entre os segmentos AO e BO, os professores começaram a analisar os triângulos semelhantes e chegaram à relação.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CO}{OB} = \frac{AO}{OD}$$

$$CO \cdot OD = AO \cdot OB$$

$$R^2 = AO \cdot OB$$

Quadro 4.36: Resposta da atividade 1 da terceira sessão feita pela dupla B

Os professores passaram para a atividade 3, parte a, mas infelizmente não poderemos transcrever as discussões dessa atividade, pois tivemos um problema na gravação. O observador dessa dupla anotou que os professores da dupla B construíram sem problemas, seguindo as instruções, e tentaram relacionar essa construção com a anterior. O observador não anotou nada sobre as conjecturas dos professores.

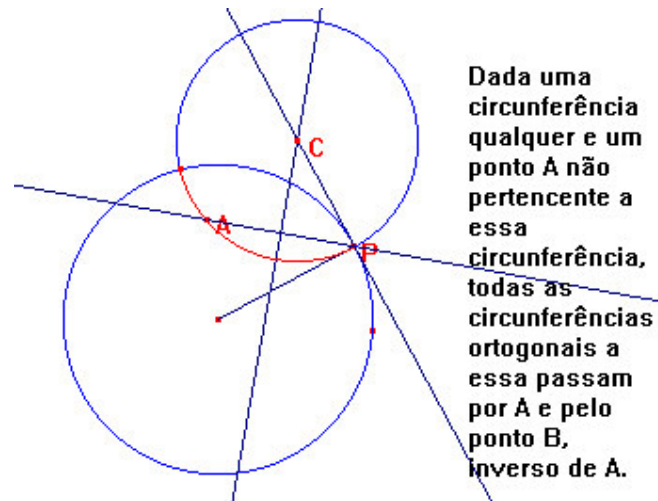


Figura 4.26: Construção da reta-h definida um ponto- dupla B

Na atividade 3, parte b, onde os professores deveriam construir uma reta hiperbólica definida por dois pontos; eles já perceberam que deveriam usar o inverso para construí-la.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. B1: Agora eu preciso construir uma circunferência que seja ortogonal à essa (horizonte), passando por X e por Y. Uma coisa eu sei...que a mediatriz desses pontos... 2. B2: O centro da circunferência ta nela... 3. B1: Mas eu preciso...não estou conseguindo lembrar da outra construção...Eu tenho que buscar o inverso... |
|---|

Quadro 4.37: Transcrição da dupla B referente à atividade 3 (b) (3ª sessão)

Neste momento, a observadora intervém e informa que podem usar o menu inversão, sem ter que fazer a construção do ponto inverso, como nas atividades anteriores.

Os professores olharam as construções anteriores e perceberam que não precisariam fazer a construção do inverso passo a passo. Com o menu, criaram o inverso de X, o ponto X', criaram a mediatriz do segmento XX' e acharam o centro da circunferência ortogonal ao horizonte. Construíram a circunferência e verificaram se realmente os raios das circunferências eram perpendiculares no ponto de intersecção.

Os professores dessa dupla esqueceram de fazer o arco que caracteriza a reta hiperbólica que passa por dois pontos e não fizeram a macro construção pedida na atividade. Depois de construírem circunferências ortogonais, já passaram para a atividade 4.

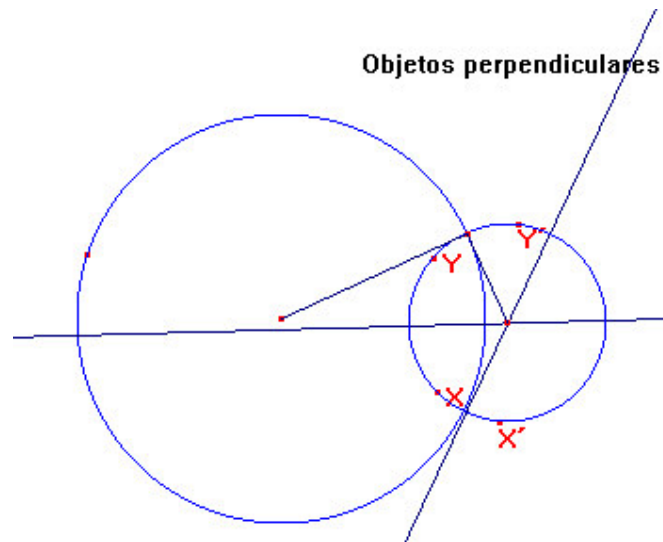


Figura 4.27: Construção da reta-h definida por dois pontos- dupla B

Na atividade 4, os professores deveriam construir um ângulo-h de 60° . Depois de lerem o enunciado, ficaram uns minutos em silêncio.

- | |
|--|
| <p>1. B1: um ângulo de 60°...eu tenho que Ter, o horizonte...e duas circunferências que na hora que ele der as tangentes aqui...essas tangentes nesse ponto aqui tem que ser 60°.
 2. B2: Não necessariamente isso...
 (Silêncio...)</p> |
|--|

Quadro 4.39: Transcrição da dupla B referente à atividade 4 (3ª sessão)

A partir desse momento, a gravação ficou ruim e não foi possível transcrever o diálogo entre a dupla B, durante a construção do ângulo de 60° .

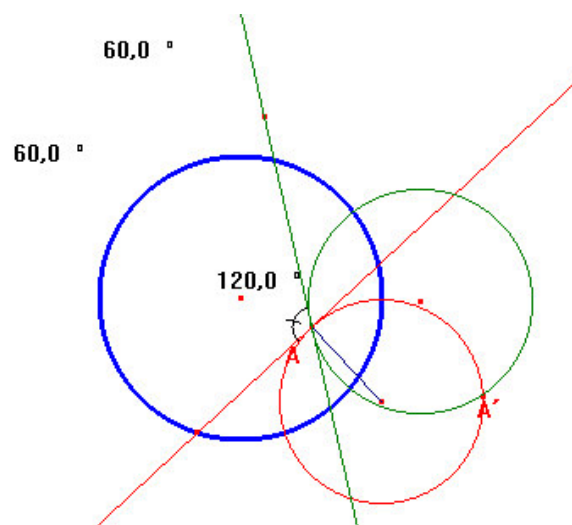


Figura 4.28: Construção do ângulo de 60° - dupla B

4.5 Síntese das análises do estudo experimental

Apresentaremos uma síntese das análises do nosso estudo realizado com professores-formadores de Geometria, descritas nos itens anteriores deste capítulo. Esses aspectos nortearão o desenvolvimento da proposta pedagógica voltada à concepção de situações didáticas para uma formação inicial ou continuada de professores, visando a exploração de relações entre a Geometria Hiperbólica e Geometria Euclidiana, em ambiente computacional.

Primeiramente, cabe salientar que o software Cabri-géomètre foi efetivamente uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento das atividades. De fato, com a barra do menu hiperbólico, o acesso as representações de objetos hiperbólicos foi totalmente facilitado, favorecendo a compreensão de conceitos, propriedades e relações. Assim, a ruptura (desequilíbrio) provocada no confronto aos sujeitos com situações no modelo hiperbólico do disco de Poincaré, a partir de uma breve apresentação de seus principais elementos – não adotando uma perspectiva clássica do estudo preliminar da Geometria Absoluta – mostrou-se salutar e possível com o apoio do Cabri-géomètre.

Os sujeitos de nosso estudo, experientes no uso do ambiente informático Cabri, distinguem claramente o desenho (representação) da figura (objeto ideal sobre o qual raciocinam). Dessa forma, procuram sempre a construção do objeto hiperbólico em termos de elementos e relações geométricas, de modo a atribuírem a essas construções um caráter robusto.

Observando as análises do estudo, percebemos que as duplas de professores, para tentar resolver um problema, sempre transitam entre os domínios teórico (T) e espaço-gráfico (SG), como afirma Laborde (1999). Inúmeros são os comportamentos observáveis que indicam o "trânsito" entre os domínios T e SG. Isso se deve ao tipo de situação proposta e, mais uma vez, à integração da ferramenta computacional Cabri, que possibilita a exploração de

propriedades dos objetos hiperbólicos a partir de sua representação ou a utilização de propriedades para produzir uma representação.

Tanto no domínio T quanto no SG, os professores relacionam a todo momento as Geometrias Hiperbólica e Euclidiana. No campo teórico, a relação é feita por meio de definições e teoremas, em geral, tomando-se como modelo de base a Geometria Euclidiana e, no campo gráfico-espacial, através da forma dos objetos, modo de construção, entre outros elementos.

Nas atividades de familiarização, podemos indicar maior utilização do modo de "arrastar vagamente" (Olivero, 2002) pois, para a maioria dos deslocamentos efetuados, os professores tinham a intenção de observar as configurações e verificar as regularidades dos objetos hiperbólicos criados. Nas demais sessões, o modo de arrastar mais utilizado entre os professores foi o do "arrastar teste" (ibid.), onde ocorreu a movimentação de pontos com a intenção de verificar se as propriedades iniciais eram mantidas. Em alguns momentos, percebemos a utilização do modo de "arrastar em lugar mole" e o modo de "arrastar orientado" (ibid.). No primeiro modo, ocorreram movimentações de um ponto livre, para o qual a figura mantinha uma propriedade descoberta ou desejada pela dupla e, no segundo, ocorreu a manipulação de pontos básicos (livres) do diagrama com a intenção de dar uma forma particular.

Observamos uma dificuldade por parte dos professores na identificação das proposições que faziam parte da Geometria Absoluta. Pode-se considerar que a apresentação inicial não atingiu plenamente o objetivo de explicitar as proposições que independem do quinto postulado, como é o caso das condições de congruência de triângulos e as propriedades a elas relacionadas (por exemplo, do triângulo isósceles).

Outra dificuldade evidenciada pelas análises refere-se ao fato dos professores não apresentarem confiança nas construções realizadas com as ferramentas do menu hiperbólico. Podemos atribuir esse comportamento à incerteza que apresentavam em relação as definições dos objetos, sempre

questionando se são as mesmas nas duas geometrias. Por exemplo, ao construir retas perpendiculares utilizando a opção "reta perpendicular" do menu hiperbólico, alguns professores mediram o ângulo entre as retas a fim de verificar se este realmente era reto. Teórica e implicitamente, utilizam a relação de perpendicularidade tal qual no modelo euclidiano, entretanto, sua representação na tela coloca dúvidas quanto ao ângulo reto, uma vez que perceptivelmente não é identificado como tal. Um outro exemplo que pode ser citado é o da mediatriz, cuja eqüidistância de um de seus pontos até as extremidades do segmento foi verificada instrumentalmente (com a ferramenta "distância-h") pela maioria dos sujeitos. Podemos dizer que isto acontece porque, na passagem do campo teórico para o espaço-gráfico, a representação não é isomorfa quando comparada à representação na Geometria Euclidiana, na qual o reconhecimento é imediato.

Muitas vezes, quando os professores faziam alguma construção visando verificar se propriedades conhecidas na Geometria Euclidiana também eram válidas na Geometria Hiperbólica e se confrontavam com um resultado não esperado, acreditavam que suas construções estavam incorretas e sistematicamente as refaziam. Tal fato pode caracterizar um problema interno ao domínio teórico, pois esses professores estão entrando em contato com um novo modelo (Geometria Hiperbólica), muito relacionado com o campo teórico já conhecido por eles (Geometria Euclidiana). Este problema interno T influenciou, algumas vezes, na transição para o campo SG, pois a representação SG do objeto, não é interpretada da mesma forma em termos teóricos.

Este estudo experimental foi realizado com o intuito de investigar a possibilidade da introdução de noções da Geometria Hiperbólica (no modelo de disco de Poincaré) com o auxílio do ambiente Cabri-géomètre, em particular identificando as relações estabelecidas pelos professores entre as Geometrias Euclidianas e Hiperbólicas, a fim de fornecer subsídios para a concepção de nossa proposta.

As estratégias, soluções e comportamentos dos professores-formadores participantes, admitindo suas experiências no ensino de Geometria Euclidiana e no uso do Cabri, reforçam a pertinência da utilização desse referido ambiente, além de apontar aspectos para a melhoria de nossa proposta inicial, o que nos permite delinear a nova proposta que será apresentada no capítulo seguinte.

51 Introdução

Neste capítulo, dedicamo-nos à apresentação de uma proposta focada na modelização de situações didáticas¹⁷, visando à introdução de um estudo de Geometria Hiperbólica com o auxílio do software Cabri-géomètre, para a formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

Para o desenvolvimento dessa proposta, que é o objetivo principal de nosso trabalho, baseamo-nos nas análises de um estudo experimental (cf. capítulo III), que tinha como intuito investigar as possíveis relações que professores-formadores de Geometria Euclidiana estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio do software Cabri-géomètre.

No decorrer desse capítulo, apresentamos as atividades desenvolvidas para a referida proposta, bem como seus objetivos e elementos de análise preliminar, evidenciando como o estudo experimental nos auxiliou em sua elaboração.

Cabe ainda ressaltar que, tanto as atividades desenvolvidas para o estudo, como as atividades da presente proposta, baseiam-se nos princípios de Lesh et al. (2000), apresentados no Capítulo III, visando tarefas que levem

¹⁷ Estamos utilizando a expressão "situações didáticas" inspirada no modelo teórico desenvolvido por Brousseau (1986), no qual uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

estudantes ou professores a revelar explicitamente o desenvolvimento de suas construções.

Esta proposta apresenta-se em quatro etapas:

- Apresentação das Geometrias não Euclidianas, fundamentada no seu desenvolvimento histórico, seguida de atividades de reflexão sobre o papel do quinto postulado em proposições da Geometria Euclidiana;
- Atividades de construção do “menu hiperbólico”, dados apenas a régua (reta-h) e o compasso hiperbólicos (circunferência-h);
- Atividades de exploração no modelo de disco de Poincaré;
- Atividades de construção no modelo de disco de Poincaré.

5.2 Apresentação das Geometrias não Euclidianas

O objetivo principal desta apresentação é introduzir alguns conceitos de base da Geometria Hiperbólica, importantes pré-requisitos para as atividades desenvolvidas em nossa proposta. A apresentação realizada na primeira sessão do nosso estudo experimental possibilitou a introdução e a compreensão dos principais aspectos históricos e matemáticos, a saber: a base euclidiana com a estrutura do Livro I de Euclides; o V postulado de Euclides e o surgimento das Geometrias não Euclidianas; a Geometria Hiperbólica e o modelo de disco de Poincaré, entre outros...

Pode-se dizer que os objetivos foram atingidos, com exceção da explícita relação de dependência de certos resultados da Geometria Euclidiana com o V postulado. Assim, para essa introdução, optamos por utilizar os mesmos slides da apresentação feita no estudo experimental, mas acrescentando um maior espaço para discussão sobre algumas proposições pertencentes à Geometria Neutra, com destaque para os casos de congruência de triângulos. Estes são importantes para as justificativas de alguns teoremas que são válidos tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Hiperbólica. De fato, as análises de nosso estudo mostram-nos que os casos de congruência praticamente não foram utilizados nas justificativas dos professores. Estes evocavam esses casos, mas não os utilizavam por não terem segurança e clareza de sua validade na Geometria Hiperbólica.

Esta apresentação sobre as Geometrias não Euclidianas, em particular a Geometria Hiperbólica com o modelo de disco de Poincaré, fundamenta-se no seu desenvolvimento histórico e busca abranger três aspectos: a Geometria de Euclides, em particular, características e estrutura do Livro I de sua obra “Os Elementos”; a relação do quinto postulado de Euclides com o surgimento de novas Geometrias, incluindo enunciados equivalentes a esse postulado; as proposições que utilizam direta ou indiretamente esse postulado, e a caracterização da Geometria Absoluta; e, por fim, o modelo de disco de Poincaré, com a interpretação dos principais objetos hiperbólicos, como ponto, reta e plano, e também as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e de medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas.

Em síntese, essa sessão organiza-se como uma apresentação detalhada na forma expositiva pelo professor, além de momentos de discussão e questionamentos por parte dos participantes do estudo. Acreditamos que esta sessão cumpre o objetivo inicial de introduzir conceitos de base da Geometria Hiperbólica. Após a apresentação, iniciamos a proposição de atividades de construção do menu hiperbólico com o auxílio do Cabri-géomètre, ou seja, a definição de macro-construções representando objetos hiperbólicos como segmentos, triângulos, reta perpendicular, entre outros.

5.3 Atividades para construção do menu hiperbólico

No estudo realizado anteriormente, optamos por fornecer aos professores, desde o início, a barra de menu hiperbólico dita "completa", ou seja, com inúmeras ferramentas de criação e construção de objetos hiperbólicos. No entanto, as análises revelaram que os professores apresentaram dificuldades em saber o que era considerado válido ou não neste modelo. Por exemplo, eles construíam uma mediatriz-h de um segmento-h qualquer utilizando a ferramenta do menu, e sentiam necessidade de verificar ou discutir a definição desse objeto, sempre comparando com a definição Euclidiana e suas propriedades. Tal comportamento foi recorrente, mesmo após um trabalho de familiarização do menu hiperbólico ao longo de uma

sessão. Assim, decidimos por modificar a proposta, objetivando a construção dessa barra de menu.

Esperamos, com a construção dessa barra a partir de macro-construções (cf. descrição e exemplo no Capítulo I), levar os sujeitos participantes a uma melhor apropriação dos principais objetos geométricos do modelo de disco de Poincaré, dando oportunidade de discussão de suas propriedades e construções efetivas via Cabri.

Para essas atividades é necessário, então, disponibilizar o menu tradicional do Cabri-géomètre (menu euclidiano), e duas macro-construções: uma para criação de retas hiperbólicas por dois pontos (representando a régua não graduada), e a outra para fornecer circunferências hiperbólicas a partir de dois pontos (funcionando como compasso). São essas as ferramentas que devem ser utilizadas a construção de outros objetos e conseqüente definição da barra de menu hiperbólico.

Acreditamos que as atividades de construção do menu promovem e potencializam uma transição entre os níveis teórico (T) e espaço-gráfico (SG), na medida em que o objeto geométrico é dado em termos de T e os sujeitos devem produzir uma representação passando ao domínio SG.

Antes de apresentar os enunciados das atividades, optamos por fornecer um quadro síntese do modelo de disco de Poincaré, com a interpretação dos principais objetos hiperbólicos, como ponto, reta e plano, e também as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e a medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas.

Modelo do disco de Poincaré

Nesse modelo, o plano, o ponto, a reta, a distância e o ângulo são interpretados da seguinte maneira:

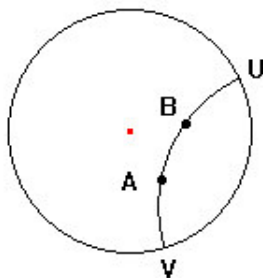
Plano-h: é o interior de uma circunferência euclidiana (C) de centro O e raio r, chamada de horizonte.

Ponto-h: é qualquer ponto no interior do horizonte.

Reta-h: é um diâmetro da circunferência (C) ou é um arco de uma circunferência ortogonal a (C).

Ângulo-h entre duas retas-h: é o ângulo euclidiano formado pelas retas tangentes às retas-h no ponto de intersecção delas.

A distância-h: entre dois pontos A e B é dada por $|\ln [(AU/AV)/(BU/BV)]|$, onde U e V são as intersecções da reta com o horizonte e as distâncias entre os pontos A e U, A e V, B e U e B e V são distâncias euclidianas.



Quadro 5.1: Quadro resumo do modelo de disco de Poincaré

Após uma breve retomada do que vem a ser uma macro-construção no Cabri e como ela é definida, pode-se introduzir as atividades de construção dos objetos que farão parte do menu hiperbólico do modelo de disco de Poincaré. Desta forma, admitimos mais uma vez que os sujeitos devem ter familiaridade com o ambiente Cabri e com a noção de macro-construções.

A atividade 1 tem como objetivo a definição de uma macro que forneça a distância entre dois pontos no modelo hiperbólico.

Atividade 1

Crie uma macro da “Distância entre dois pontos” no modelo do disco de Poincaré.

Objetos iniciais: ponto A, ponto B e o horizonte.

Objetos finais: o número.

Nomeie a macro de h-distância.

Quadro 5.2: Atividade 1 da proposta

Uma solução esperada para tal definição de macro envolve o uso da calculadora. Assim, é preciso calcular as distâncias euclidianas entre os pontos A e U, A e V, B e U e B e V, e com a ferramenta "Calculadora" do Cabri, inserir tais valores na fórmula de distância dada.

Para a definição da macro "Distância entre dois pontos", os objetos iniciais são os pontos A e B e o horizonte e o objeto final, o valor calculado pela fórmula da distância com o auxílio da calculadora. Com essa ferramenta é possível obter a distância-h entre dois pontos, com uma precisão de até dez casas decimais.

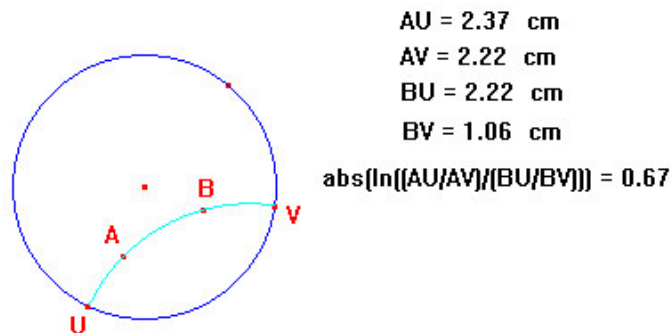


Figura 5.1: Distância entre dois pontos no modelo de disco de Poincaré

A atividade 2 refere-se à definição da macro de segmento de reta. Lembramos que um segmento hiperbólico é um arco de circunferência ortogonal ao horizonte e que, para criar um arco, precisamos de três pontos. A construção do segmento-h passa pela criação de uma reta-h por dois pontos A e B e pela definição de um arco euclidiano com extremidades nesses dois pontos, passando por um terceiro ponto qualquer do arco entre A e B. A fim de atender as características de uma construção robusta no Cabri, e garantir que esse terceiro ponto fique sempre entre A e B, é possível caracterizá-lo como ponto de intersecção. Uma possibilidade é traçar a mediatriz euclidiana do segmento AB e considerar o ponto M de intersecção desta com a reta-h. Com os três pontos A, M e B determina-se o arco AB, que é o segmento-h procurado. Antes de definir a macro, pode-se esconder o ponto M, utilizando a

ferramenta "Esconder/mostrar", para que este não apareça como parte do objeto final da macro. Para definir a macro "Segmento-h", os objetos iniciais são os pontos A e B e o horizonte; e o objeto final, o arco AB.

Atividade 2

Crie uma macro de um "Segmento hiperbólico" no modelo do disco de Poincaré.

Quadro 5.3: Atividade 2 da proposta

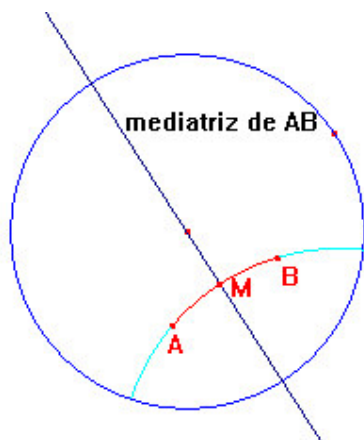


Figura 5.2: Construção de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré

De posse da definição e ferramenta correspondente ao segmento-h, pode-se introduzir a noção de polígono. Iniciamos com a construção de uma macro que fornece um triângulo hiperbólico a partir de três pontos tomados como vértices.

Atividade 3

Crie uma macro de um "Triângulo" no modelo do plano de Poincaré.

Quadro 5.4: Atividade 3 da proposta

Com a macro-construção "segmento-h" da atividade anterior, o triângulo-h pode ser obtido com a criação dos segmentos AB, BC e AC, dados os pontos A, B e C. Para definição da macro "Triângulo-h", os objetos iniciais são os pontos A, B e C e o horizonte, e os objetos finais são os segmentos AB, BC e AC.

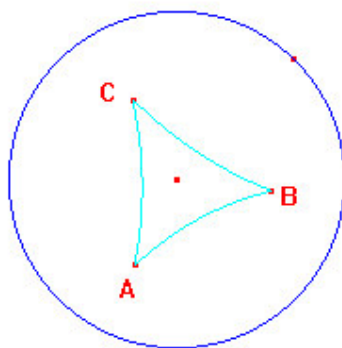


Figura 5.3: Construção de um triângulo-h no modelo de disco de Poincaré

Uma vez que esse objeto é inteiramente baseado na definição euclidiana, essa atividade não deve apresentar dificuldades, assim como a seguinte (atividade 4), que propõe a construção de um triângulo eqüilátero no modelo de disco de Poincaré.

Atividade 4

Crie uma macro de um “Triângulo eqüilátero” (3 lados congruentes) no modelo do disco de Poincaré.

Quadro 5.5: Atividade 4 da proposta

Cabe observar inicialmente, que o próprio enunciado destaca a característica do triângulo eqüilátero (*três lados congruentes*), funcionando como uma definição. Espera-se uma construção por analogia ao método euclidiano, utilizando-se um segmento-h de reta e a circunferência-h como compasso.

Assim, dado um segmento-h AB, cria-se uma circunferência-h com centro em A e raio AB, e uma circunferência-h com centro em B e raio AB. Com a intersecção das duas circunferências-h, obtém-se os pontos C e C', ambos podendo ser solução do problema – terceiro vértice do triângulo-h. Para definição da macro “Triângulo-h eqüilátero”, os objetos iniciais são os pontos A e B e o horizonte e os objetos finais, os segmentos AB, BC e AC.

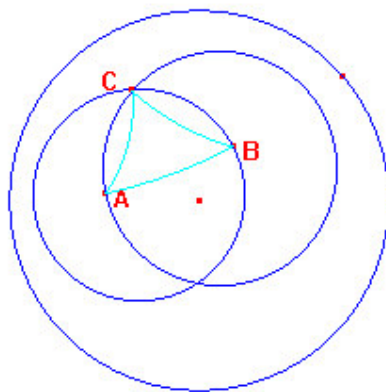


Figura 5.4: Construção de um triângulo-h equilátero no modelo de disco de Poincaré

Dando continuidade à proposta de construções "clássicas", sugerimos tratar na sequência as construções de mediatriz e ponto médio de um segmento-h (cf. enunciados das atividades 5 e 6 abaixo).

Atividade 5

Crie uma macro da "Mediatriz" de um segmento no modelo do disco de Poincaré.

Quadro 5.6: Atividade 5 da proposta

Atividade 6

Crie uma macro do "Ponto médio" de um segmento no modelo do disco de Poincaré.

Quadro 5.7: Atividade 6 da proposta

Para a construção da mediatriz de um segmento-h, pode-se seguir os passos da atividade anterior, considerando desta vez os dois pontos C e C' obtidos. Assim, dado um segmento-h AB, cria-se uma circunferência-h de centro em A e raio AB e uma circunferência-h de centro em B e mesmo raio. Os pontos de intersecção dessas circunferências-h (C e C'), definem uma reta-h chamada de mediatriz-h. Antes de definir a macro, utilizando "Esconder/mostrar", pode-se ocultar os pontos C e C'. A macro "mediatriz-h" é definida então, pelos pontos A e B e o horizonte como objetos iniciais, e a reta-h definida por C e C', como objeto final.

Com a macro "mediatriz-h", que acaba de ser definida, determina-se o ponto médio M do segmento-h como intersecção entre a reta-h mediatriz e o

segmento-h AB. Para definir a macro “Ponto médio-h”, os objetos iniciais são os pontos A e B e o horizonte; o objeto final é o ponto M.

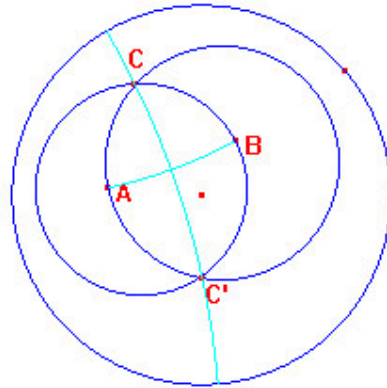


Figura 5.5: Construção da mediatriz de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré

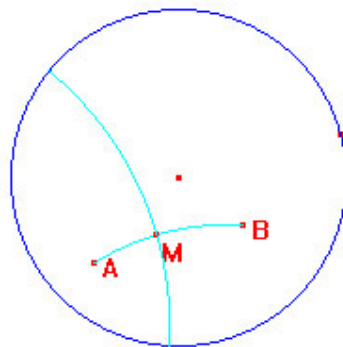


Figura 5.6: Construção do ponto médio de um segmento-h no modelo de disco de Poincaré

Nessa perspectiva, outras construções podem ser propostas visando ampliar o domínio da Geometria Hiperbólica e as ferramentas disponíveis no menu do Cabri para atividades de exploração. É o caso, por exemplo, da construção de reta perpendicular à uma dada reta, bissetriz de um ângulo...

Para todas as atividades propostas nessa fase, os sujeitos podem validar experimentalmente suas construções, ou seja, verificar suas propriedades mediante o uso de ferramentas do menu hiperbólico (em especial a de "Distância-h entre dois pontos") e do deslocamento dos objetos iniciais da construção. Tais verificações são importantes, nesse momento, para o estabelecimento de definições e propriedades de objetos do modelo hiperbólico, relacionando-os diretamente com os objetos do modelo euclidiano.

No entanto, a proposta para essa fase não leva a uma problemática de demonstração no sentido de solicitar a validação de proposições por meio de justificativas geométricas formais. Esse é o objetivo das atividades de exploração que seguem, e constituem a terceira fase da nossa proposta.

5.4 Atividades de exploração no modelo de disco de Poincaré

Estas atividades de exploração da Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré visam levar os sujeitos à formulação de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas.

O objetivo principal dessas atividades é levar os sujeitos à discussão da validade (ou não) de alguns teoremas da Geometria Euclidiana na Geometria Hiperbólica. Dentre os teoremas que não são válidos na Geometria Hiperbólica, alguns podem ser considerados enunciados equivalentes ao quinto postulado de Euclides (como citado na apresentação inicial), e outros enunciados fazem uso do quinto postulado de forma não direta, ou seja, relacionam-se a ele. Espera-se assim que os sujeitos identifiquem a equivalência ou relação entre esses enunciados, chegando a formular justificativas para sua não validade no modelo hiperbólico.

Nossa hipótese é que, na medida em que os professores fazem uma comparação entre as proposições nas duas geometrias, motivados por tais atividades de exploração, uma releitura da Geometria Euclidiana se torne possível. Neste caso, intensificam-se as trocas entre os domínios teóricos e espaço-gráficos das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica, o que pode levar à compreensão da noção de modelo em Geometria e melhor situar as proposições e relações que pertencem aos seus sistemas de axiomas.

Para essas atividades, é disponibilizada aos sujeitos a barra completa do menu hiperbólico de disco de Poincaré, com o diferencial de que, neste momento, grande parte dela foi efetivamente construída por eles.

Para as atividades de exploração, enunciamos alguns teoremas da Geometria Euclidiana e solicitamos a verificação de sua validade na Geometria

Hiperbólica. Com o auxílio do software Cabri-géomètre, os sujeitos podem fazer validações experimentais e levantar conjecturas que auxiliam para um processo de prova, no qual esperamos que os sujeitos se engajem.

Em nossa proposta, enunciamos sete teoremas da Geometria Euclidiana que consideramos fundamentais, observando que essa lista pode ser ampliada, incluindo-se outras proposições da Geometria Euclidiana.

Atividade 7

Abaixo estão enunciados alguns teoremas da Geometria Euclidiana. Utilizando o Cabri-géomètre, verifique quais deles também são válidos na Geometria Hiperbólica, justificando sempre sua resposta.

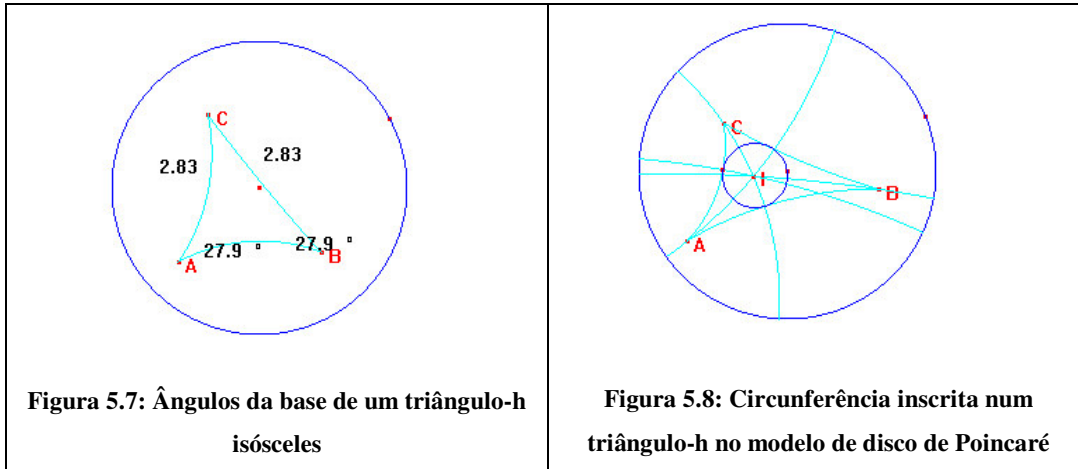
1. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
2. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
3. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° .
4. Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
5. Todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.
6. Podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado.
7. O ponto de intersecção das medianas divide cada uma delas na razão 2 para 1 a partir do vértice.

Quadro 5.8: Atividade 7 da proposta

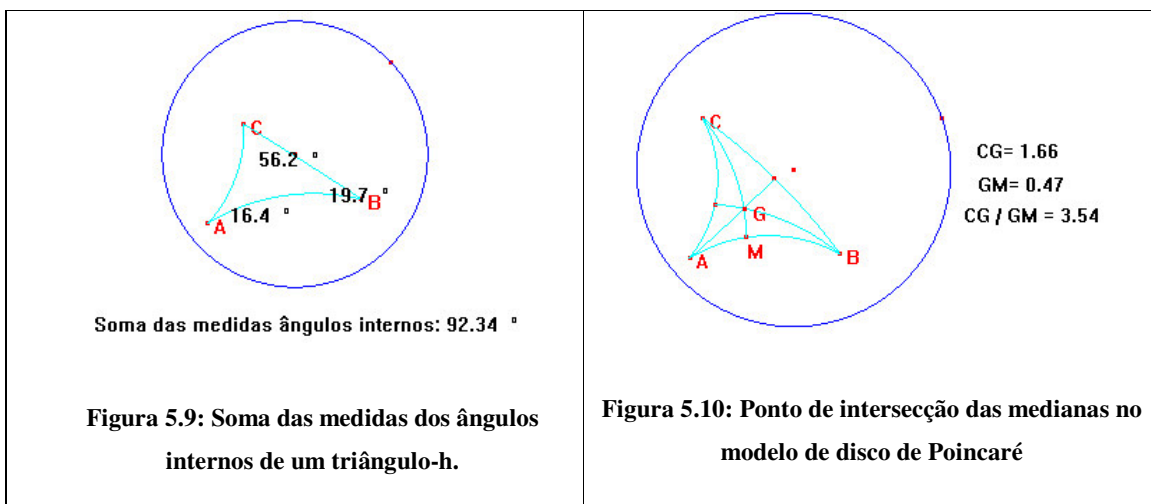
Entre os teoremas enunciados acima, somente o 2 e o 6 são verdadeiros, isto é, são válidos na Geometria Hiperbólica. Isto significa que não utilizam o quinto postulado de Euclides em sua demonstração, nem alguma proposição a ele relacionado. Portanto, as justificativas para estas proposições, seriam as mesmas da Geometria Euclidiana.

A justificativa que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes utiliza-se dos casos de congruência de triângulos (LLL ou LAL) que fazem parte das proposições da Geometria Absoluta, ou seja, independem do quinto postulado. E a justificativa para o teorema 6, pelo qual podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado, é feita a partir da definição de bissetriz e pela demonstração de que em todo triângulo as bissetrizes dos ângulos internos concorrem num único ponto chamado incentro.

Esses dois enunciados podem ser ilustrados no Cabri (cf. figuras abaixo) – válidos para muitos casos mediante o deslocamento dos objetos de base – o que leva à conjectura de que são verdadeiros.



Os teoremas 1, 3, 4, 5 e 7 não são verdadeiros na Geometria Hiperbólica, e podem ser justificados pelo fato de suas demonstrações utilizarem diretamente ou indiretamente o quinto postulado de Euclides, necessitando da existência e unicidade da reta paralela em sua demonstração. As construções de tais situações (reproduzidas abaixo) e a exploração do recurso dinâmico do software têm papel relevante na constatação da não validade, funcionando como contra-exemplos.



As atividades de exploração no modelo do disco de Poincaré, permitem a familiarização com propriedades e conceitos da Geometria Hiperbólica. A quarta fase de nossa proposta dedica-se às atividades de construção, pois estas envolvem conceitos importantes da Geometria Euclidiana que podem criar condições favoráveis para um aprofundamento deste próprio modelo.

5.5 – Atividades de construção no modelo de disco de Poincaré

Optamos por iniciar essa fase com a construção de quadriláteros que, até então, não foram abordados nas fases anteriores. Propomos a construção de alguns quadriláteros particulares, como o quadrilátero de Saccheri, de Lambert, o losango e o paralelogramo. As duas primeiras construções, além do interesse para uma abordagem histórica, permitem evidenciar questões relativas a soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero-h e, conseqüentemente, ao paralelismo.

Atividade 8

Construa um quadrilátero de Saccheri no modelo do disco de Poincaré.

OBS: ABCD é um quadrilátero de Saccheri quando os ângulos DAB e CBA são retos e os lados AD e BC são congruentes.

Quadro 5.9: Atividade 8 da proposta

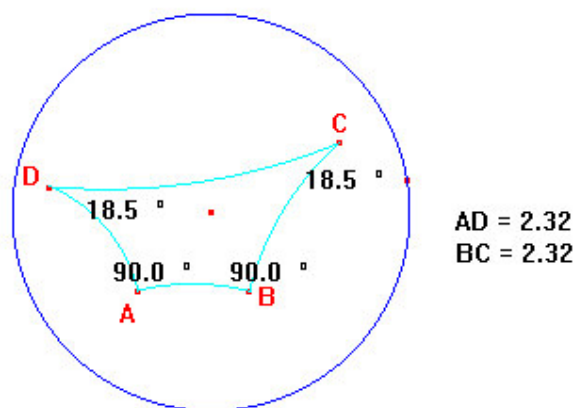


Figura 5.11: Construção do quadrilátero de Saccheri

Para construir um quadrilátero de Saccheri no modelo de disco de Poincaré, parte-se de um segmento-h AB e pelo ponto A constrói-se uma reta-h perpendicular ao segmento-h AB. Em seguida, outra perpendicular ao

segmento-h AB pelo ponto B pode ser construída, obtendo-se assim, dois ângulos retos. Com a ferramenta “Ponto sobre objeto” cria-se o ponto C na reta perpendicular que passa por B. Para tanto, utiliza-se a ferramenta “Compasso hiperbólico” na construção de uma circunferência-h de raio de mesma medida do segmento BC. Assim encontra-se o ponto D, o que garante a congruência dos segmentos-h BC e AD. Por fim, criam-se os segmentos AD, BC e CD, o que fornece os lados do quadrilátero de Saccheri.

A construção desse quadrilátero, como foi revelado pelas análises do estudo experimental realizado, não apresenta dificuldades, e com ela pode-se explorar a congruência dos ângulos.

Atividade 9

Construa um quadrilátero de Lambert no modelo do disco de Poincaré

OBS: ABCD é um quadrilátero de Lambert quando três de seus ângulos são retos.

Quadro 5.10: Atividade 9 da proposta

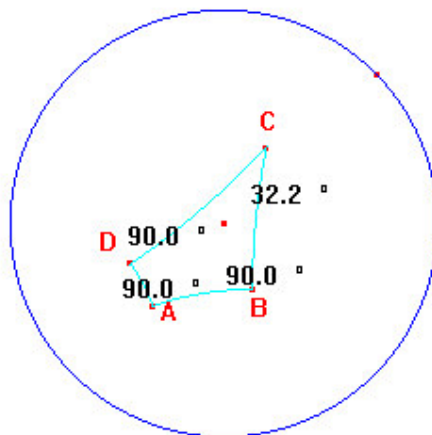


Figura 5.12: Construção do quadrilátero de Lambert

No estudo realizado, os professores apresentaram dificuldades na construção desse quadrilátero, principalmente no momento de construir o terceiro ângulo reto que fecha o quadrilátero. O início dessa construção é o mesmo do quadrilátero de Saccheri e, depois de obter os pontos A, B e C, basta construir uma reta perpendicular à reta que passa por A, pelo ponto C, e encontra o ponto D. Mas o último passo dessa construção não é evidente, e os

professores, no estudo experimental, construíram um ponto D qualquer, e por este, uma perpendicular à reta AD. Desse modo, eles obtiveram três ângulos retos, mas não o quadrilátero de Lambert pois, essa reta-h não necessariamente passa pelo ponto C.

Atividade 10

Construa um losango no modelo do disco de Poincaré

Quadro 5.11: Atividade 10 da proposta

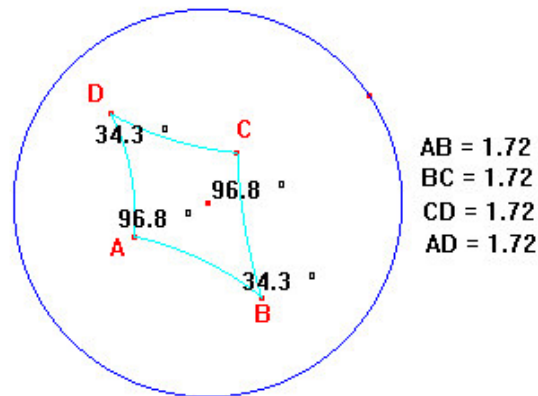


Figura 5.13: Construção de um losango-h

Uma das maneiras de se construir um losango no modelo de disco de Poincaré é iniciar criando um segmento-h AB, e por ele criar uma circunferência-h de centro A e raio AB. Define-se o ponto D pertencente a esta circunferência e traça-se a diagonal BD do losango. Constrói-se, então, uma reta perpendicular à diagonal que passa pelo ponto A e, em seguida, cria-se uma circunferência de centro B e raio AB. Nomeia-se a intersecção dessa circunferência com a perpendicular à diagonal BD de C e, por fim, definem-se os segmentos que são os lados do losango.

Atividade 11

Construa um paralelogramo no modelo do disco de Poincaré

Quadro 5.12: Atividade 11 da proposta

Essa atividade é interessante pois leva o sujeito a refletir sobre as definições de paralelogramo na Geometria Euclidiana. A construção desse quadrilátero no modelo de disco de Poincaré é possível utilizando-se apenas

uma propriedade deste: as diagonais de um paralelogramo se interceptam no ponto médio. Isto ocorre pois, neste modelo, por uma reta-h e um ponto não pertencente à ela, existem pelo menos duas retas paralelas à reta-h dada, portanto, não se pode utilizar a definição “convencional” de paralelogramo: tem lados dois a dois paralelos. Com a construção de um paralelogramo por esta definição, percebe-se, com a manipulação de pontos livres no Cabri, que a construção não é robusta, ou seja, os lados não são sempre paralelos. Portanto, para garantir a robustez da figura, deve-se construir primeiro as diagonais que se interceptam no ponto médio. Abaixo temos a ilustração de um paralelogramo-h.

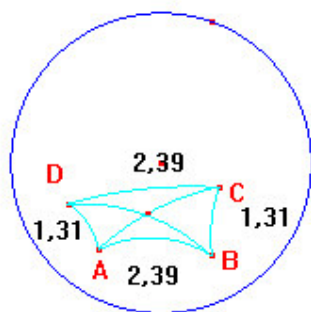


Figura 5.14: Construção robusta de um paralelogramo-h

A proposição de algumas atividades no modelo de disco de Poincaré, necessita da construção de circunferências ortogonais, ou seja, de elementos relacionados à construção de retas hiperbólicas. É o caso, por exemplo, de situações que envolvem ângulos hiperbólicos e suas medidas. Como descrito anteriormente em nossa proposta, essa construção é representada por uma macro disponível na barra de menu do Cabri. Em outras palavras, nas atividades propostas até o momento, a ferramenta “Reta-h” é apresentada como uma “caixa-preta”¹⁸. Acreditamos ser bastante interessante “desvendá-la”, uma vez que tal estudo envolve importantes conceitos da Geometria Euclidiana, em particular as relações entre circunferências ortogonais e inversão.

¹⁸ No sentido de uma ferramenta ser utilizada para fornecer um objeto (final) a partir de outros (iniciais) sem, contudo, se ter acesso aos passos intermediários da construção realizada e das relações geométricas existentes entre tais objetos.

Nessa perspectiva, para um aprofundamento da noção de reta hiperbólica, assim como para intensificar as relações entre as geometrias Euclidiana e Hiperbólica, nossa proposta inclui atividades de construção de uma reta-h por dois pontos, para posterior aplicação em situações de construção de ângulos hiperbólicos.

Para tanto, optamos por tomar como propriedade principal a que segue: dada uma circunferência (C) e um ponto A em seu interior, todas as circunferências ortogonais a (C) passando por A passam também pelo inverso de A em relação a (C). Assim, para a construção da reta hiperbólica definida por dois pontos A e B, necessita-se um terceiro ponto que, teoricamente, corresponde ao inverso de A ou de B (A' ou B') em relação ao horizonte. Na seqüência, uma vez estabelecido tal resultado, a construção da reta-h por dois pontos dados pode ser explicitada.

Esse estudo compreende 4 atividades que devem ser realizadas com as primitivas do menu euclidiano. Cabe observar que, como nosso objetivo é introduzir a noção de inversão e relacioná-la com a construção de circunferências ortogonais, sem a pretensão de uma abordagem exaustiva dessa transformação, nossa escolha foi por um estudo dirigido, no qual os enunciados das atividades apresentam, em geral, os passos das construções. Assim, o foco de atenção volta-se para a exploração e interpretação das relações e propriedades das configurações propostas.

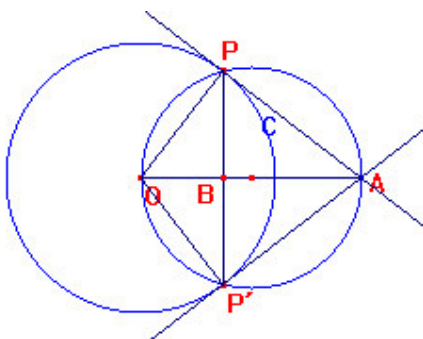
As atividades 12 e 13 correspondem à construção do ponto B, inverso de A em relação à circunferência (C) de centro em O. Mais especificamente, a primeira considera o ponto A externo à circunferência (C) e a segunda, o caso geral. Tal distinção pareceu-nos pertinente pois, no primeiro caso, a consideração das retas tangentes a (C) por A é explícita, e a identificação da semelhança de triângulos, importante para a investigação da relação métrica $AO \cdot BO$, pode ser facilitada.

Atividade 12

- Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A fora dela.
- Construa o segmento AO.
- Construa as retas tangentes à circunferência e que passem pelo ponto A.
- Ligue os pontos de tangência e nomeie B, a intersecção desse segmento com o segmento AO.
- Investigue a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 5.13: Atividade 12 da proposta

Espera-se que, com o auxílio dos elementos dados no enunciado e uma exploração utilizando as ferramentas do menu, a seguinte relação possa ser observada: os triângulo APO e PBO são semelhantes, portanto, tem-se a relação $\frac{OP}{BO} = \frac{AO}{PO}$ e, como $OP = PO = r$, sendo r o raio da circunferência (C), pode-se concluir que $AO \cdot BO = r^2$.

**Figura 5.15: Construção do ponto inverso por um ponto fora da circunferência**

Nessa atividade, os sujeitos podem tentar investigar a relação sem perceber a semelhança dos triângulos, apenas observando medidas e relacionando-as por operações com o auxílio da “Calculadora”. Outra dificuldade pode ser a não consideração do raio da circunferência (C). No estudo experimental realizado, alguns professores não pensaram imediatamente em semelhança de triângulos, fato que levou a uma intervenção por parte do observador, indicando a presença de triângulos semelhantes na situação. Como observamos anteriormente, na perspectiva de um estudo dirigido, o professor pode prever algum tipo de intervenção, apenas no sentido de fornecer informações que explicitem os elementos pertinentes à investigação.

A atividade que segue (cf quadro abaixo) refere-se à construção de ponto inverso dados uma circunferência e um ponto qualquer. Essa construção é válida para pontos interiores ou exteriores à circunferência.

Atividade 13

- a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A qualquer.
- b) Construa a reta AO.
- c) Construa a reta perpendicular ao segmento AO que passe por O, e nomeie as intersecções dessa reta com a circunferência de C e D.
- d) Construa a reta r, perpendicular à reta AC pelo ponto D.
- e) Nomeie B a intersecção entre as retas r e AO.
- g) Investigue a relação métrica entre AO e BO.

Quadro 5.14: Atividade 13 da proposta

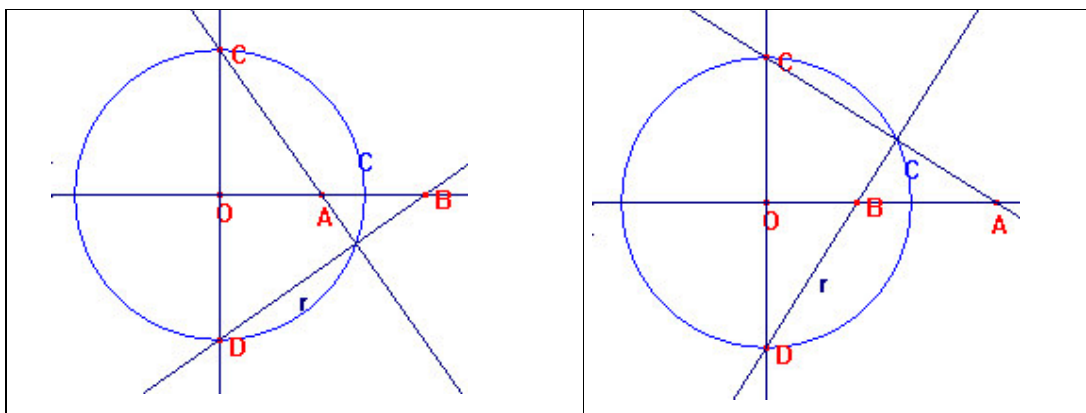


Figura 5.16: Construção do ponto inverso por um ponto qualquer

Em termos de solução matemática, de forma análoga à atividade anterior, temos que os triângulo BOD e COA são semelhantes e, portanto,

$$\frac{BO}{CO} = \frac{OD}{OA}.$$

Como $OD = OC = r$, sendo r o raio da circunferência C, tem-se a

seguinte relação métrica: $AO \cdot BO = r^2$.

É possível que a atividade anterior influencie sobremaneira a investigação nesse caso, minimizando as dificuldades. É o que se objetivou com a proposição das atividades nesta ordem.

Uma vez observada a referida relação métrica, necessário se faz introduzir formal e sistematicamente a definição de inversão de um ponto em relação a uma circunferência. Para tanto, é importante resgatar e destacar as propriedades e relações construídas pelos sujeitos no desenvolvimento das

atividades 12 e 13. Além disso, aproveita-se a oportunidade para introdução e familiarização da ferramenta "Inversão" do Cabri-géomètre.

Na seqüência, a atividade 14 tem o objetivo de relacionar a inversão com circunferências ortogonais, a partir da observação empírica do lugar geométrico das circunferências ortogonais a uma dada circunferência passando por um ponto dado. O enunciado desta atividade, abaixo transcrito, explicita os detalhes desse tipo de construção.

Atividade 14 – Construção de circunferências ortogonais

Seja A um ponto qualquer no interior de uma circunferência (C) de centro O . Construa uma circunferência (C') ortogonal à (C) , passando por A . Para isso, considere um ponto auxiliar P na circunferência (C) . A circunferência ortogonal procurada deve passar por A e P . Construa a mediatriz m do segmento AP e, em seguida, obtenha a intersecção O' de m com a reta tangente à circunferência (C) por P . Este ponto O' corresponde ao centro da circunferência ortogonal à (C) passando por A . (justificativa a cargo do leitor!).

Obtenha o lugar geométrico da circunferência (C') construída quando P descreve (C) .

O que você pode observar? Faça uma conjectura sobre a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência dada.

Quadro 5.15: Atividade 14 da proposta

No modelo de disco de Poincaré, tal atividade pode corresponder à construção de retas hiperbólicas que passam por um ponto qualquer do plano hiperbólico.

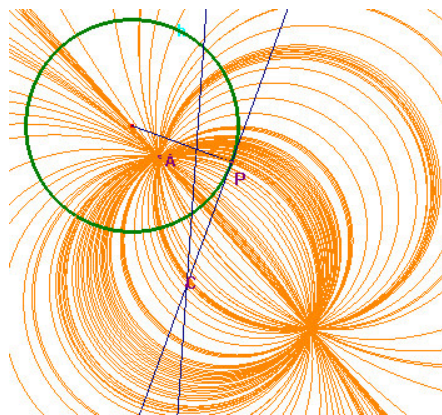


Figura 5.17: Lugar geométrico de circunferências ortogonais

Com a visualização do lugar geométrico da circunferência (C') ortogonal à (C) é possível observar que essas circunferências (C') passam por A (por construção) e por um outro ponto fixo – esta é uma possível formulação da conjectura esperada.

A continuação dessa atividade deve objetivar a caracterização de tal ponto como o inverso do ponto A . Novamente cabe salientar que tais conjecturas baseiam-se em explorações experimentais (via construções) em um contexto empírico, o que não impede, sob determinadas condições e intervenções do professor, a evolução para um contexto de prova.

Esse conjunto de três atividades (12,13 e 14) cumpre a função de permitir o estabelecimento da propriedade – "dado uma circunferência, toda circunferência ortogonal a ela que passa por um ponto dado, passa pelo seu inverso" – que, por sua vez, possibilita a proposição da atividade de construção de uma reta hiperbólica por dois pontos distintos.

Atividade 15 - Reta hiperbólica definida por dois pontos distintos

Dados dois pontos distintos A e B interiores ao horizonte, defina uma macro-construção da *reta-h* que passe pelos dois pontos dados no modelo do disco de Poincaré.

Quadro 5.16: Atividade 15 da proposta

Com os objetos e ferramentas desenvolvidos nas atividades anteriores, acreditamos que essa construção não apresenta dificuldades. Basta considerar dois pontos A e B dados no plano hiperbólico e o inverso de um deles em relação ao horizonte, para dispor, assim, de três pontos que definem a circunferência ortogonal ao horizonte. Para a definição de uma macro "Reta-h", os objetos iniciais são os pontos A e B e o horizonte e o objeto final, o arco da circunferência construída, delimitado pelos pontos de intersecção desta com o horizonte e um dos pontos dados (A ou B).

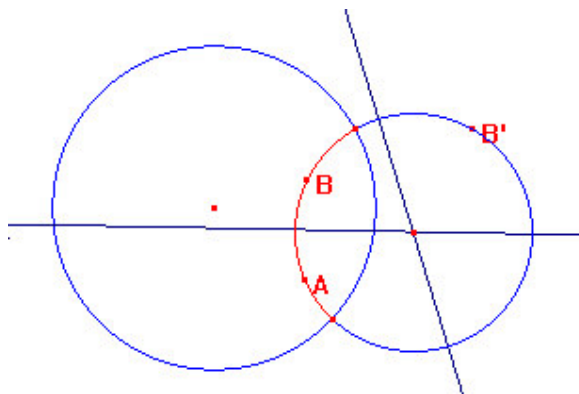


Figura 5.18: Construção da reta-h por dois pontos

O investimento na construção de retas hiperbólicas motiva uma discussão e aprofundamento do conceito de ângulo entre duas retas-h, o que pode ser feito, por exemplo, como na atividade proposta abaixo.

Atividade 16

Construa um ângulo de 60° no modelo de disco de Poincaré.

Quadro 5.17: Atividade 16 da proposta

Para ampliar essa fase de atividades, pode-se ainda propor um trabalho com as cônicas no modelo de disco de Poincaré. A ferramenta “Lugar geométrico” foi mantida no menu hiperbólico do Cabri, e permite esse tipo de construção. Com isso, tem-se uma caracterização geométrica dessas curvas. A seguir, a título de ilustração, apresentamos uma atividade de construção de uma parábola-h, que pode ser feita por analogia à do modelo euclidiano (a construção de uma parábola no modelo euclidiano apresenta-se no Capítulo I, pp. 27-28).

Atividade 17

Construa uma parábola dados o foco e a diretriz, no modelo do disco de Poincaré. A seguir, verifique que todo ponto da parábola eqüidista do foco e da diretriz.

Quadro 5.18: Atividade 17 da proposta

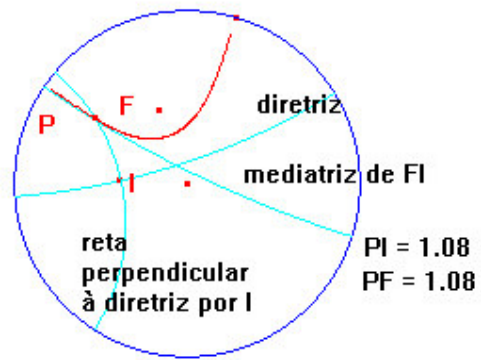


Figura 5.19: Construção da parábola-h

Esperamos que essa proposta possa ser discutida, trabalhada, ampliada e enriquecida com novos elementos por professores e pesquisadores que se interessam pelo estudo da Geometria Hiperbólica, especialmente com o auxílio do ambiente Cabri-géomètre.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este trabalho com o objetivo de desenvolver uma proposta pedagógica voltada à concepção de situações didáticas para uma formação inicial ou continuada de professores, visando a exploração de relações entre a Geometria Hiperbólica e Geometria Euclidiana.

Para buscar respostas às nossas indagações, que envolviam a importância da abordagem das Geometrias não Euclidianas e suas contribuições na formação de um professor de Matemática, investigamos um caso. Para tanto, elaboramos um questionário que foi aplicado a três professores de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade privada do Estado de São Paulo. Este caso foi delimitado em função do referido curso compreender em sua grade curricular uma disciplina de Geometrias não Euclidianas, e desses três professores já terem ministrado tal disciplina. Dentre as respostas desses professores, alguns aspectos sobre a importância dessa disciplina, bem como seus objetivos, mereceram destaque:

- possibilitar a compreensão da concepção moderna de axiomática, relacionada à noção de modelo matemático;
- intensificar a problemática da demonstração;
- promover uma releitura da Geometria Euclidiana.

Diante dessas informações, reconhecemos, juntamente com os professores entrevistados, e adotamos como hipótese de trabalho do nosso estudo, a importância e pertinência da incorporação do estudo das Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática.

Definidos o objetivo e a hipótese inicial de trabalho, realizamos, com professores-formadores, um estudo experimental cujo objetivo era investigar, a partir de uma proposta inicial, as principais relações estabelecidas pelos professores quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com o auxílio de um ambiente computacional. A descrição e a análise dos resultados desse estudo nos permitiram redimensionar e reformular as atividades com vistas à concepção de uma modelização de situações didáticas para subsidiar um trabalho de introdução a modelos não euclidianos na formação de professores de Matemática.

As atividades da proposta inicial foram elaboradas tendo como base os princípios para o desenvolvimento de tarefas “*thought revealing*” descritos por Lesh et al. (2000). Tal metodologia tem como objetivo caracterizar tarefas que levam os sujeitos a revelar explicitamente o desenvolvimento de suas construções, auxiliando pesquisadores na natureza dos dados coletados para suas análises. Essas revelações nos permitiram não apenas analisar as formas pelas quais os professores solucionaram as atividades propostas, mas, sobretudo, identificar o papel das trocas entre os domínios geométricos (Geometrias Euclidiana e Hiperbólica), as interações entre os campos espaço-gráfico e teórico, e o papel do Cabri-géomètre como ferramenta de construção, exploração e verificação, com sua dimensão dinâmica e os diferentes modos de “arrastar”.

O ambiente computacional foi fundamental para o desenvolvimento das atividades, pois além de conceber um caráter mais “palpável” aos objetos hiperbólicos, favoreceu a compreensão de conceitos e relações. Os sujeitos de nosso estudo, experientes no uso do ambiente informático Cabri, trouxeram consigo a distinção feita por Laborde (1993) sobre desenho e figura, procurando sempre a construção do objeto hiperbólico em termos de elementos e relações geométricas, ou seja, construções robustas.

A solução de um problema geométrico, segundo Laborde (1999), solicita o uso de dois domínios, o teórico (T) e o espaço-gráfico (SG), pois é constituída pelo movimento contínuo entre esses. De fato, as atividades

propostas para este estudo, propiciaram a transitividade, por parte dos professores, entre os domínios T e SG para tentar resolver uma dada situação-problema. Tanto no domínio T, quanto no SG, os professores relacionaram a todo o momento as Geometrias Hiperbólica e Euclidiana. Este fato era ainda mais evidente quando precisavam justificar algum teorema da Geometria Hiperbólica: inicialmente sempre recorriam à Geometria Euclidiana.

Em relação aos modos de “arrastar” pudemos perceber claramente que os professores utilizaram o “arrastar” de forma diferente, segundo seus propósitos, tal como prevê Olivero (2002). Nas atividades de familiarização, pudemos constatar, por exemplo, a maior utilização do modo de “arrastar vagamente”, pois os professores, por não conhecerem as configurações e regularidades dos objetos hiperbólicos, quiseram melhor observá-los. Já o modo de “arrastar teste” foi o mais identificado em nossas análises das atividades posteriores, uma vez que os professores tinham como finalidade verificar se as propriedades iniciais estavam mantidas. Em alguns momentos percebemos a utilização do modo de “arrastar em lugar mole”, o modo de “arrastar orientado” e o modo de “arrastar vagamente”, para o qual os professores tinham a intenção de observar as configurações e verificar as regularidades dos objetos hiperbólicos criados.

Os professores sentiram dificuldades em identificar as proposições que fazem parte da Geometria Absoluta, quando relacionaram a Geometria Hiperbólica com a Euclidiana. Este foi o caso da congruência de triângulos. Para resolver esse problema, incluímos em nossa proposta uma apresentação e discussão mais explícita de proposições que fazem parte da Geometria Neutra e proposições da Geometria Euclidiana, que nelas se baseiam, com o objetivo de definir a base dessa Geometria e entender o que se pode, ou não, considerar como válido no modelo.

No nosso estudo experimental, optamos por fazer uma breve apresentação das Geometrias não Euclidianas, uma primeira sessão de familiarização do menu hiperbólico, e centramo-nos em atividades de exploração e construção focando nas validações de proposições. Uma das

conseqüências geradas pela nossa opção inicial, diagnosticada em nossas análises, foi que os professores pareceram não apresentar confiança nas construções utilizando o menu hiperbólico, talvez por não terem muita segurança a respeito das definições dos objetos nas duas geometrias: o “aspecto” das figuras construídas pareciam fugir à intuição.

Entretanto, com essa seqüência de atividades, os professores não se engajaram em processos de justificativas ou provas, e sim de verificação experimental com as ferramentas do ambiente Cabri. Assim, optamos por alterar tal introdução, que acreditamos ser imprescindível para nossa proposta, e substituímos as atividades de familiarização por atividades de construção do menu hiperbólico. Em síntese, as principais fases da proposta compreendem:

- Apresentação das Geometrias não Euclidianas fundamentada no seu desenvolvimento histórico, seguida de atividades de reflexão sobre a utilização do quinto postulado em algumas proposições da Geometria Euclidiana. O objetivo principal dessa fase é introduzir alguns conceitos de base da Geometria Hiperbólica, importantes pré-requisitos para as atividades desenvolvidas em nossa proposta;
- Atividades para construção do menu hiperbólico, dados apenas a régua (reta-h) e o compasso hiperbólicos (circunferência-h), cujo objetivo é levar os sujeitos participantes a uma melhor apropriação dos principais objetos geométricos do modelo de disco de Poincaré;
- Atividades de exploração no modelo de disco de Poincaré, essas atividades visam a exploração da Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré, cujo objetivo principal é levar os sujeitos à discussão da validade (ou não) de alguns teoremas da Geometria Euclidiana na Geometria Hiperbólica;
- Atividades de construção no modelo de disco de Poincaré, um dos objetivos principais dessa fase é a compreensão de dois conceitos euclidianos que são fundamentais para o desenvolvimento do modelo do disco de Poincaré, bem como a construção de objetos hiperbólicos.

Como nossa proposta foi voltada à concepção de situações didáticas, acreditamos que ela pode promover um trabalho produtivo com a História das Geometrias não Euclidianas e destacar a importância da demonstração, que não foi suficientemente problematizado neste estudo, além de uma releitura da Geometria Euclidiana.

Para finalizar, reiteramos que um trabalho com as Geometrias não Euclidianas, tal como o que propusemos nesse estudo, pode favorecer o processo de compreensão pelo professor das principais características e natureza da Matemática, visto que esse conhecimento faz-se presente não apenas pela quantificação do real e pelo desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, mas, sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados por vezes a fenômenos do mundo físico.

Nesse sentido, é fundamental que o professor compreenda o “avanço” da Matemática quando se supera a visão de uma única geometria do real – a Geometria Euclidiana – para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos logicamente consistentes.

Essa perspectiva também está contemplada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p. 35), que determinam como um dos objetivos gerais da Matemática, nos currículos da Educação Básica, “identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas”.

Bibliografia

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In Pimm D. (ed.) *Mathematics, teachers and children*. London: Hodder & Stoughton, pp. 216-235, 1988.

BALACHEFF, N.; KAPUT, J. Computer-based learning environments in Mathematics. In: Bishop, A. et al. (ed.) *International Handbook in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 469-501, 1996.

BARBOSA, R. M.; LOURENÇO, M. L. Nova investigação de aplicabilidade do Cabri-Géomètre I: Geometria Analítica In *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, CO 271, Vol II, pp. 726-727, 1998.

BERNAT, P. Evaluation et évolution d'un logiciel de géométrie dynamique. In *Repères-IREM*, n° 28, pp. 9-36, 1997.

BOGDAN, R. C., & BIKLEN, S. *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1982.

BONETE, I. P. *As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*. Dissertação de Mestrado. UNICENTRO/UNICAMP, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A.J. *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*. Dissertação de Mestrado. FE-UNICAMP, 1995.

BROUSSEAU, g. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique de mathématiques*. Paris, v.7, n° .2, pp. 33-115, 1986.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não Euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte/MG, 1996.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *Revista Brasileira de Informática na Educação*. v.2, n.1, pp. 73-88. PGIE-UFRGS, 1999.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: W.H. Freeman and Company, 1990.

HANNA, G. *Proof, Explanation and Exploration: an overview*. *Educational Studies in Mathematics* (EMS), vol. 44. Dordrecht: Kluwer: Academic Publishers, 2001.

HEALY, L. & HOYLES, C. *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. London: Institute of Education, Univ. London, 1988.

JAHN, A. P. *Des transformations des figures aux applications ponctuelles: étude d' une séquence d' enseignement avec Géogéomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*. Tese de Doutorado. Universidade Joseph Fourier (Grenoble I), França, 1998.

KAPUT, J. Technology and Mathematics Education In Grouws, D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

LABORDE, C. & LABORDE, J. M. Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M.

Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice*, pp. 177-192. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

LABORDE, C. The computer as part of learning environments: The case of geometry. In C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology*, pp. 48-67. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

LABORDE, C. The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In C. Hoyles, J. Kilpatrick, O. Skousmose (Eds), *Meaning and Communication*. Dordrecht, Boston, London: Klüwer Academic Publishers, 1999.

LABORDE, J. M. & STRÄSSER, R. *Cabri-Géomètre: A microworld of geometry guided discovery learning. International reviews on mathematical education*. In Zentralblatt fuer didaktik der mathematik (ZDM), 90 (5), pp. 171-177, 1990.

LESH, R. A. et al. Principles for developing Thought-Revealing Activities for students and teachers. In Kelly, A.E.; Lesh, R.A. Mahwah (eds) *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: LEA, 2000.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MARTOS, Z. G. *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado. UNESP-Rio Claro, 2002.

NOSS, R. & HOYLES, C. *Windows on Mathematical Meanings: learning cultures and computers*. Mathematics Education Library, v. 17. Dordrecht: Klüwer Academic Publishers, 1996.

OLIVERO, F. *Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations*. In Maull, W. & Sharp, J. (eds), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Plymouth/UK, 1999.

OLIVERO, F. *Conjecturing in open geometric situations in a dynamic geometry environment: an exploratory classroom experiment*, In Morgan, C. & Jones, K. (eds.), *Research in Mathematics Education*, vol. 3, pp. 229-246, 2001.

OLIVERO, F. *The proving process within dynamic geometry environment*. Tese de Doutorado . Graduate School of Education, Bristol, 2002.

PAPERT, S. *Logo: computadores e educação*. São Paulo: Editora Brasiliense, 1988.

PEREZ, G. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria, para as camadas populares*. Tese de doutorado. UNICAMP, Campinas, 1991.

PONTE, J. P. *O estudo de caso na investigação em Educação Matemática*. *Quadrante*. v. 3, n.1, pp. 3-18. Lisboa, 1994.

SILVA, M. C. L. *Contribuições do uso do ambiente Cabri-géomètre para a formação inicial e contínua de professores de Matemática*. Tese de Doutorado. PUC/São Paulo, 2002.

VITRAC, B. *Euclide d' Alexandrie, "Les Eléments"*Traduits du texte de Heiberg, vol.1, Introduction générale de M. Caveing, livres I – IV: Géométrie Plane. Paris: PUF, 1990.

ANEXOS

ANEXO 1

Descrição da disciplina Geometria 4

Carga horária semanal: 03 horas

Carga horária anual: 90 horas

Objetivos gerais:

- Desenvolver competências e habilidades para que o aluno adquira autonomia no estudo, na interpretação e na compreensão de problemas, bem como em sua discussão e solução; atenção, cooperação e respeito no estudo em grupo, concentração e confiança no estudo individual; e capacidade de pesquisa, não se restringindo ao livro texto;
- Familiarizar o aluno com os conceitos fundamentais, métodos e aplicações da Geometria para que identifique a importância da disciplina dentro do curso de Matemática e possa abordar problemas sob diferentes pontos de vista.

Objetivos específicos:

Conduzir gradativamente o aluno a:

- Abordar as cônicas sob diferentes pontos de vista, classificando e identificando propriedades em cada um deles;
- Visualizar a representação de um número complexo no plano, estabelecendo relações entre as operações de complexos e as transformações geométricas resultantes;
- Compreender conceitos abstratos das geometrias não Euclidianas;
- Compreender a concepção moderna axiomática e suas propriedades principais de consistência, independência e equivalência;
- Desenvolver o processo de demonstração.

Ementa:

Aplicações das transformações geométricas nas cônicas e nos números complexos; e uma introdução às Geometrias não Euclidianas.

Conteúdo programático:

- *Aplicações das transformações geométricas:* números complexos e cônicas. Cônicas: elipse, hipérbole e parábola como intersecções de um

cone como plano. Estudo das características e propriedades geométricas de cada uma delas. As cônicas como ferramentas para resolver problemas geométricos

- *Números complexos*: forma trigonométrica e representação. Relacionar algumas funções complexas com as transformações geométricas.
- *Geometrias não Euclidianas*: Axiomas da Geometria Neutra. História do quinto postulado de Euclides. A descoberta das Geometrias não Euclidianas. A independência do postulado das paralelas. O estudo dos modelos de Poincaré (semi-plano e disco) e Klein-Beltrami. Isomorfismos entre esses modelos.

ANEXO 2



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática

Questionário para Professores

Caro(a) Colega,

Este questionário tem por objetivo levantar informações referentes à sua formação e atividade docente, em particular sobre a disciplina *Geometrias Não Euclidianas*.

Este instrumento faz parte de um projeto de pesquisa de Mestrado em Educação Matemática, sendo a identidade dos sujeitos participantes preservada.

Desde já, agradecemos muitíssimo sua participação. Obrigada.

Nome: _____ data: _____

1) Identificação

1) Sexo : Masculino () Feminino ()

2) Idade: _____ anos

3) Estado Civil: _____

4) Qual é sua formação acadêmica profissional?

Graduação

Curso: _____

Pós Graduação

Especialização: _____

Mestrado: _____

Doutorado: _____

5) Há quanto tempo você leciona? _____ anos

6) Em que graus de ensino você leciona?

() Ensino Fundamental Ciclo: _____

() Ensino Médio () Supletivo () Técnico () Magistério

() Ensino Superior Cursos: _____

7) Há quanto tempo você leciona no Ensino Superior? _____ anos

8) Em quais instituições você leciona?

II) Sobre Geometrias Não Euclidianas

9)- Há quanto tempo você leciona/lecionou Geometrias Não Euclidianas?
_____ anos

- Quantas vezes você lecionou essa disciplina? _____

10) A disciplina é optativa ou faz parte da grade?

11) Qual é a duração do curso dessa disciplina e qual é o número de aulas semanais?

12) Qual tipo de material de apoio que você utiliza nessa disciplina? (livros, artigos, apostilas, etc...)

13) Você utiliza algum tipo de novas tecnologias para o ensino dessa disciplina?

() Não

() Sim. Qual? _____

14) Que tipo de geometria é abordada?

() Geometria Hiperbólica

() Geometria Elíptica

() Geometria Esférica

Caso a Geometria Hiperbólica tenha sido abordada, que modelo(s) foi(ram) trabalhado(s)?

15) Qual o conteúdo programático da disciplina Geometrias Não Euclidianas?

16) Qual(is) o(s) principal(is) objetivo(s) associado(s) à essa disciplina?

17) Na sua opinião, qual a importância dessa disciplina na formação do licenciando?

18) Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam nessa proposta?

19) Do ponto de vista do aproveitamento dos alunos, você poderia apontar aspectos positivos dessa proposta?

20) Que mudanças você fez na estrutura do curso entre a primeira vez que lecionou GNE e a última vez? Por quê?

21) Que sugestões você daria para o professor que vai trabalhar pela primeira vez com as Geometrias Não Euclidianas?

Outras informações que julgar relevante:

PS: Caso seja possível, por favor anexe a ementa e a bibliografia da sua disciplina de Geometrias Não Euclidianas.

ANEXO 3

	P1	P2	P3
Sexo	F	M	M
Idade	39 anos	51 anos	54 anos
Formação Acadêmica	Mestre, com doutorado em andamento.	Doutor	Doutor
Leciona há: (anos)	19 anos	28 anos	28 anos
Quais os principais objetivos associados à essa disciplina?	Desenvolver de maneira axiomática a Geometria Neutra, concluindo nessa etapa da formação um tratamento mais rigoroso da Geometria. Dar continuidade ao desenvolvimento do raciocínio abstrato por meio do trabalho com demonstrações de propriedades e teoremas. Possibilitar uma releitura da Geometria Euclidiana por meio da oposição via o estudo das Geometrias não Euclidianas.	Compreender conceitos abstratos das Geometrias não Euclidianas. Compreender a concepção moderna de axiomática e suas propriedades principais de consistência, independência e equivalência. Desenvolver o processo de demonstração.	O curso visa contemplar três aspectos: a história das geometrias não Euclidianas; a demonstração e a visualização dos modelos em um ambiente informático.
Qual a importância dessa disciplina na formação do licenciando?	Ressignificar a interpretação e os conhecimentos já sedimentados da Geometria Euclidiana. Discutir a importância do estabelecimento dos pressupostos iniciais na construção de uma determinada teoria. Destacar a relação entre o trabalho com a demonstração e o desenvolvimento da capacidade de argumentação.	Formação do futuro professor em Geometria, em especial em Geometrias não Euclidianas, lhe proporcionando um pensamento não euclidiano.	A disciplina mostra ao aluno que a geometria de Euclides não é única e absoluta, e que o homem é livre para criar outros sistemas lógicos.
Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam nessa proposta?	Romper com a lógica euclidiana e trabalhar sobre uma nova base de postulados. A Geometria Euclidiana é muito forte e consolidada, assim, pensar de maneira que a nega ou contradiz é bastante difícil para os alunos.	A Geometria Euclidiana constitui um obstáculo epistemológico aos pensamentos não euclidianos. Uma das principais dificuldades é superar isto.	A maior dificuldade dos alunos é a dedução de algumas propriedades que decorrem do postulado hiperbólico. A demonstração continua sendo para os alunos um dos pontos mais delicados.
Do ponto de vista do aproveitamento dos alunos, você poderia apontar aspectos positivos dessa proposta?	Considero que os objetivos foram obtidos.	Aquisição de saber e conhecimento que permite resolver problemas da Geometria não Euclidiana.	A parte do curso mais apreciada pelos alunos foi a visualização dos modelos pelo uso do software Cabri-géomètre.

ANEXO 4

Slides da Apresentação

Introdução à Geometria Hiperbólica

Eliane Cabariti
Orientação: Profa. Dra. Ana Paula Jahn

Slide Apresentação

Euclides (±300a.C.)

- Obra: Os Elementos (livros I ao XIII)
- Forma sistemática ao saber geométrico
- Livro I:
 - enuncia 23 definições, cinco postulados e nove axiomas.
 - deduz 48 proposições ou teoremas.

Slide 1

Os Elementos

Livro I	Propriedades elementares dos triângulos Teoria das paralelas (prop 27 à 32) Figuras equivalentes	23 definições, 9 axiomas, 5 postulados e 48 proposições
Livro II	Álgebra geométrica	2 definições e 14 proposições
Livro III	A geometria do círculo	11 definições e 39 proposições
Livro IV	Polígonos regulares	7 definições e 16 proposições
Livro V	A teoria das proporções	18 definições e 25 proposições
Livro VI	As figuras semelhantes	4 definições e 33 proposições
Livro VII	Teoria dos números	23 definições e 39 proposições
Livro VIII	Teoria dos números	27 proposições
Livro IX	Teoria dos números	36 proposições
Livro X	Números incomensuráveis	4 definições e 115 proposições
Livro XI	Geometria espacial	28 definições e 39 proposições
Livro XII	Áreas e volumes	18 proposições
Livro XIII	Poliedros regulares	18 proposições

Slide 2

O quinto postulado

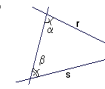
Postulado V de Euclides



« Se $\alpha + \beta < 180^\circ$ as retas r e s se interceptam do lado de α e β »

Recíproca (Proposição 17 do livro I)

Em todo triângulo, dois ângulos quaisquer são menores que dois retos.



Se r e s se interceptam, $\alpha + \beta < 180^\circ$

Vários matemáticos durante mais de vinte séculos tentaram demonstrar este postulado a partir dos outros.

Slide 3

V Postulado de Euclides

- "Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."

Slide 4

Equivalências do V Postulado

- Por um ponto exterior à uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada. (Playfair).
- Retas paralelas tem distância constante uma da outra. (Proclus).
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (Legendre).

Slide 5

Livro 1 (Vinc, p. 514)

	Definições	Postulados	Noções comuns	Proposições
Proposição 1	15, 20	1, 3	1	
Proposição 2	15, 20	1, 2, 3	1, 3	
Proposição 3	15	3	1	2
Proposição 4			7, 8	
Proposição 5		1, 2	3	3, 4
Proposição 6		1	8	3, 4
Proposição 7		1	8	5
Proposição 8			7	
Proposição 9	20	1		1, 2, 8
Proposição 10	20			1, 4, 8
Proposição 11	10, 20	1		1, 2, 3, 8
Proposição 12	10, 15	1, 3		8, 10
Proposição 13	10		1, 2	11
Proposição 14		2, 4	1, 2, 3, 8	13
Proposição 15		4	1, 2, 3	13
Proposição 16		1, 2	8	2, 3, 4, 10, 15
Proposição 17		2	4	13, 16
Proposição 18		1	8	3, 5, 16
Proposição 19			5, 10	
Proposição 20		1, 2	8	2, 5, 19
Proposição 21		2	4	16, 20
Proposição 22	15	1, 3	1	2, 3, 20
Proposição 23		1		6, 22
Proposição 24		1	1, 8	2, 4, 5, 19, 23

Slide 6

Livro 1 (Vinc, p. 514)

	Definições	Postulados	Noções comuns	Proposições
Proposição 25		1	1, 8	4, 24
Proposição 26		2		3, 4, 16
Proposição 27	23			16
Proposição 28		4	12, 3	13, 15, 27
Proposição 29	23	2, 5	12, 4	13, 15
Proposição 30			1	2, 7, 29
Proposição 31		1, 2		23, 27
Proposição 32		2	1, 2	13, 29, 31
Proposição 33		1		4, 27, 29
Proposição 34		1	2	4, 26, 29
Proposição 35			12, 3	4, 29, 34
Proposição 36		1	1	33, 34, 35
Proposição 37		2	8	31, 34, 35
Proposição 38		2	6	31, 34, 36
Proposição 39		1	1, 8	31, 37
Proposição 40		1	1, 8	31, 38
Proposição 41		1	1, 2	34, 37
Proposição 42		1	1, 2	10, 23, 31, 35, 41
Proposição 43			2, 3	34
Proposição 44		1, 2, 3	1, 8	15, 29, 30, 31, 42, 43
Proposição 45		1	1, 2	14, 29, 30, 33, 34, 42, 44
Proposição 46	22	4	1, 3	2, 3, 11, 29, 31, 34
Proposição 47		1, 4	12, 5	4, 14, 30, 31, 41, 46
Proposição 48		1	1, 2	2, 3, 5, 11, 47

Slide 7

Geometria Absoluta

- É chamada de Geometria Absoluta, a parte da Geometria que independe do quinto postulado.

Slide 8

Nascimento das Geometrias não Euclidianas

Como não se consegue demonstrar o quinto postulado sem utilizar proposições equivalentes, uma nova questão é colocada:

- Pode-se construir uma Geometria fundada sobre a negação do quinto postulado, conservando a geometria absoluta?

Gauss, Lobatchevsky (o inventor "oficial"), Bolyai, e mais tarde Riemman, perceberam que era possível conceber uma nova Geometria abordando um postulado diferente.

Slide 9

A negação do 5º Postulado

- Por um ponto não situado sobre uma reta não se pode construir uma paralela à uma reta dada.
- Por um ponto não situado sobre uma reta pode-se traçar ao menos duas paralelas à reta dada.

Slide 10

Os modelos

- Faltava ainda uma prova para dizer que nesta nova geometria não havia contradições.
- Beltrami (1868), Klein (1871) e Poincaré (1881) demonstraram a consistência desta nova geometria pelo método dos modelos.

Slide 11

O que é um modelo?

- Um modelo para um dado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todas propriedades verdadeiras.

Slide 12

Modelo do Disco de Poincaré

Plano: interior de uma circunferência Euclidiana. (esta circunferência chama-se horizonte)

Ponto: ponto no sentido habitual.

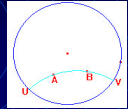
Reta: diâmetro ou arco de uma circunferência ortogonal ao horizonte.

OBS: Duas circunferências secantes são ortogonais, se em cada ponto de intersecção os raios são perpendiculares.

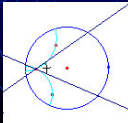
Slide 13

Distância entre dois pontos A e B:

$$d(A,B) = \ln \left(\frac{AU/AV}{BU/BV} \right)$$



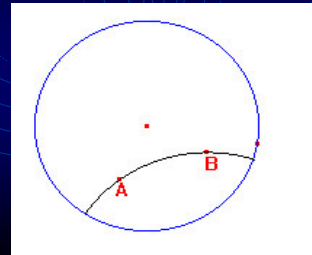
Ângulos: são os ângulos euclidianos de suas tangentes.



Slide 14

Verificação do postulado I de Euclides:

“Por dois pontos traça-se uma única reta.”



Slide 15

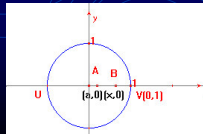
Verificação do postulado II de Euclides:

“Podemos prolongar indefinidamente um segmento de reta”

$$d(A,B) = \text{abs ln} \left[\frac{AU/AV}{BU/BV} \right]$$

$$d(A,B) = \text{abs ln} \left\{ \frac{[(1+a)/(1-a)]}{[(1+x)/(1-x)]} \right\}$$

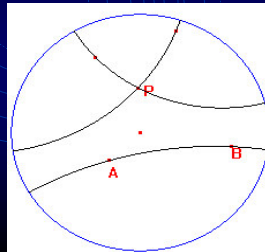
O limite de $d(A,b)$ quando x tende a 1 pela esquerda é mais infinito.



Slide 16

Verificação do postulado Hiperbólico:

“Por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada”



Slide 17

ANEXO 5



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática

Geometrias não Euclidianas
Atividades de familiarização com o menu Hiperbólico do Cabri-géomètre

Modelo do disco de Poincaré

<i>Objeto Hiperbólico</i>	<i>Interpretação Euclidiana</i>
Plano	Interior de uma circunferência euclidiana
Ponto	Ponto interior ao horizonte
Reta	Diâmetro do horizonte e arcos de circunferências ortogonais ao horizonte.

Para nossas atividades, vamos utilizar o menu hiperbólico desenvolvido por Jean-Marie Laborde (1996), um dos desenvolvedores do Cabri-Géomètre.

Gerando o Horizonte Hiperbólico:

Use a ferramenta *Horizon* do menu para construir uma circunferência cujos pontos interiores representam o plano hiperbólico. Todas as construções deverão ser feitas em relação a esse objeto, portanto, para utilizar qualquer ferramenta, é necessário acionar o comando e por fim selecionar o horizonte.

Pontos, retas, triângulos,...

- 1) Utilize a ferramenta Ponto para criar dois pontos distintos A e B. Utilize a ferramenta H-droite para criar a reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B.
- 2) Usando a ferramenta H-distance, obtenha a distância entre A e B ($d_h(A,B)$).
- 3) Para construir uma reta perpendicular à outra reta dada, utilize a ferramenta H-perpendiculaire. Para medir o ângulo entre elas, utilize a ferramenta H-angle.
OBS: A medida aparecerá em radianos, se preferir altere para graus no menu opções/preferências.
- 4) Crie um triângulo XYZ e obtenha seu perímetro.
- 5) Explore o menu hiperbólico para conhecer um pouco mais sobre as ferramentas disponíveis.

ANEXO 6



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática

Geometrias não Euclidianas
Atividades de exploração no modelo do disco de Poincaré

Atividade 1

Abaixo estão enunciados alguns teoremas da Geometria Euclidiana. Utilizando o Cabri-géomètre, verifique quais deles também são válidos na Geometria Hiperbólica, justificando sempre sua resposta.

- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
- Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
- Os ângulos internos de um triângulo eqüilátero medem 60° .
- Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
- Todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.
- Podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado.
- O ponto de intersecção das medianas divide cada uma delas na razão 2 para 1 a partir do vértice.

Atividade 2

O jesuíta Gerolamo Saccheri (1667-1733) em sua tentativa de provar o 5º Postulado de Euclides criou um quadrilátero que ficou conhecido como *Quadrilátero de Saccheri*. Este quadrilátero tem dois ângulos retos e os dois lados perpendiculares à base, congruentes entre si. Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri, AB é o *lado base*, AD e BC são os *lados congruentes*, enquanto que DC é o *lado topo* do quadrilátero.



Construa esse quadrilátero no do modelo do disco de Poincaré. O que você percebe sobre os outros dois ângulos? Justifique sua resposta.

Atividade 3

Assim como Saccheri, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), um suíço-alemão, tentou provar o 5º Postulado por um argumento indireto. Ele começou com um quadrilátero com três ângulos retos, chamado Quadrilátero de Lambert.



Construa um quadrilátero de Lambert.

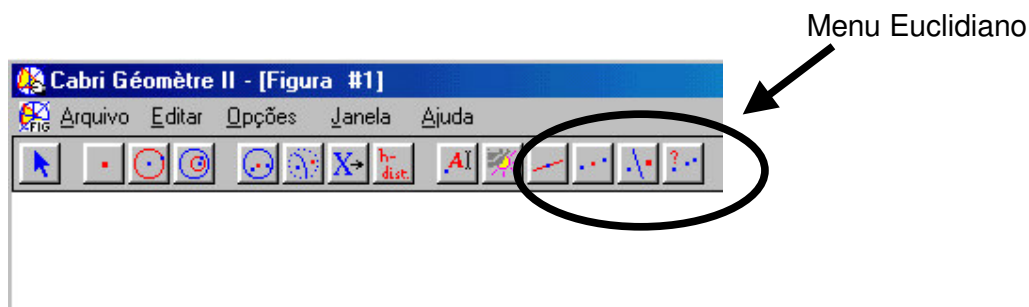
ANEXO 7



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática

Atividades de Geometrias não Euclidianas com o Cabri-géomètre
Atividades de construção no modelo do disco de Poincaré

As atividades 1 e 2 são construções euclidianas referentes à transformação "inversão" que será utilizada em construções no modelo hiperbólico do disco de Poincaré. Assim, elas devem ser realizadas com as primitivas do menu euclidiano (ícones do lado direito da barra de ferramentas).



- 3) a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A fora dela.
- b) Construa o segmento AO.
- c) Construa as retas tangentes à circunferência que passem pelo ponto A.
- c) Ligue os pontos de tangência e nomeie B, a intersecção desse segmento com o segmento AO.
- d) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

- 4) a) Construa uma circunferência (C) de centro O e um ponto A qualquer.
- b) Construa a reta AO.
- c) Construa a reta perpendicular ao segmento AO que passe por O, e nomeie as intersecções dessa reta com a circunferência de C e D.
- d) Construa a reta r, perpendicular à reta AC pelo ponto D.
- e) Nomeie B a intersecção entre as retas r e AO.
- g) Investigar a relação métrica entre AO e BO.

As atividades 1 (ponto externo à circunferência) e 2 (ponto interno à circunferência) correspondem à construção do ponto **B**, inverso de **A** em relação à circunferência (**C**).

Retornando à Geometria Hiperbólica...

As atividades 3A, 3B, 4 e 5 são construções que devem ser consideradas no modelo do disco de Poincaré e utilizam tanto o menu hiperbólico quanto o euclidiano.

3) Construindo retas no modelo do disco de Poincaré

a) reta passando por um ponto

Seja A um ponto qualquer no interior do horizonte h . Construa uma reta hiperbólica, que indicaremos por $reta-h$, passando por A . Para isso, considere um ponto auxiliar P no horizonte h . A $reta-h$ procurada deve passar por A e P . Construa a mediatriz m de AP e, em seguida, obtenha a intersecção C de m com a reta tangente ao horizonte que passa por P . Este ponto C é o centro da circunferência ortogonal à h passando por A . (justificativa a cargo do leitor!).

Obtenha o lugar geométrico da circunferência construída quando P descreve h . O que você pode observar? Faça uma conjectura sobre a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência dada.

b) Reta hiperbólica definida por dois pontos distintos

Dados dois pontos distintos X e Y interiores ao horizonte, defina uma macro-construção da $reta-h$ que passe pelos dois pontos dados no modelo do disco de Poincaré.

Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.

4) Construa um *ângulo-h* de 60° no modelo do disco de Poincaré. Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.

5) Construa um *paralelogramo-h* no modelo do disco de Poincaré. Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê.