JEAN-PIERRE PETIT

## As Aventuras de Anselmo Curioso

# OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA

Publicações Dom Quixote


Há algum matemático na sala?

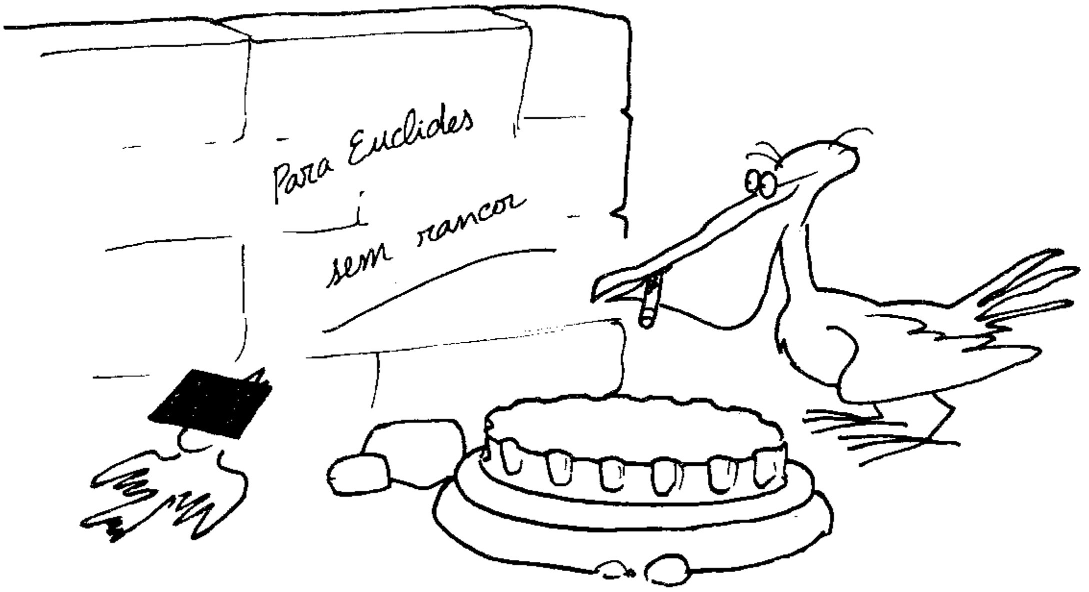
O AUTOR:

Doutor em Ciências, investigador no C.N.R.S., astrofísico, professor de Belas-Artes, responsável por um serviço de micro-informática na Faculdade de Letras de Aix-en-Provence, Jean-Pierre Petit utilizou a técnica da banda desenhada para, durante cinco anos, ensinar ciências a pessoas sem formação científica. Dessa experiência nasceram **Les Aventures d'Anselme Lanturlu,** agora publicadas em tradução portuguesa sob o título de **As Aventuras de Anselmo Curioso.**

**JEAN-PIERRE PETIT**

## As Aventuras de Anselmo Curioso

# OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA




**Publicações Dom Quixote**

LISBOA
1982

FICHA:



Título original: *Les Aventures d'Anselme Lanturlu — Le Geometricon.*

Editor original: *Librairie Classique Eugène Belin, Paris.*

Tradução: *Luís Pignatelli.*

Revisão técnica: *Dr. António St. Aubyn, professor de Matemática do I.S.A.*

Colecção: *As Aventuras de Anselmo Curioso, N.º 1*

Capa: *Fernando Felgueiras, sobre desenho original de Jean-Pierre Petit.*

Desenho das legendas: *João Carlos Cruz.*

1.ª edição: *Abril de 1982.*

Edição: *IAAC 710*

Direitos de edição, reprodução e adaptação reservados por:
*Publicações Dom Quixote, Rua Luciano Cordeiro, 119, Lisboa.*

Impressão: *Gráfica Barbosa & Santos, Lda, em Maio de 1982.*

Distribuição: *Diglivro, Rua das Chagas, 2, Lisboa.*

# ADVERTÊNCIA

ISTO NÃO É UM TRATADO, NEM UM CURSO.

É SIMPLESMENTE A HISTÓRIA DE ANSELMO

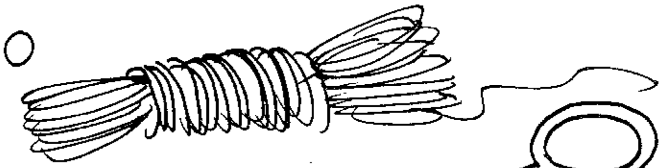
E DE UMA DAS SUAS VIAGENS,

AO PAÍS DA GEOMETRIA.

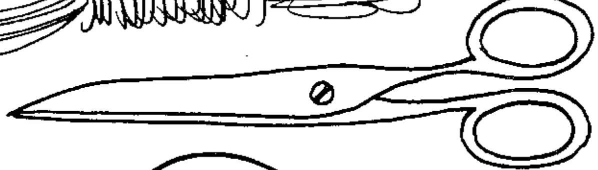
PARA LER DE PREFERÊNCIA, ACOMPANHADO DE:

* UM TUBO DE ASPIRINAS

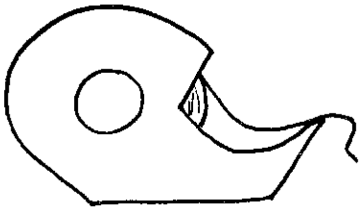
* UMA MEADA DE FIO



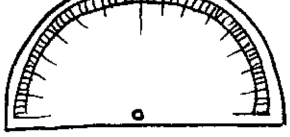
* UMA TESOURA



* UM ROLO DE FITA-GOMADA

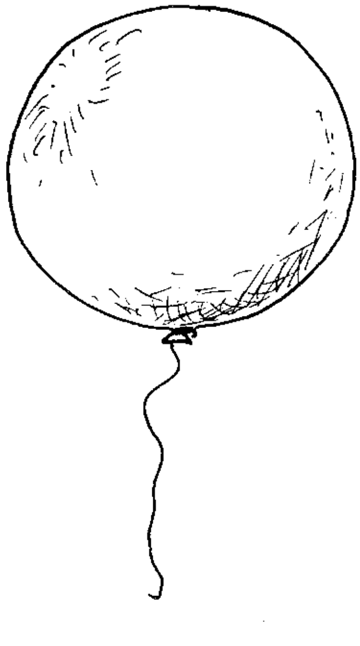


* UM TRANSFERIDOR



* E UM LINDO BALÃO

BEM CHEIO...

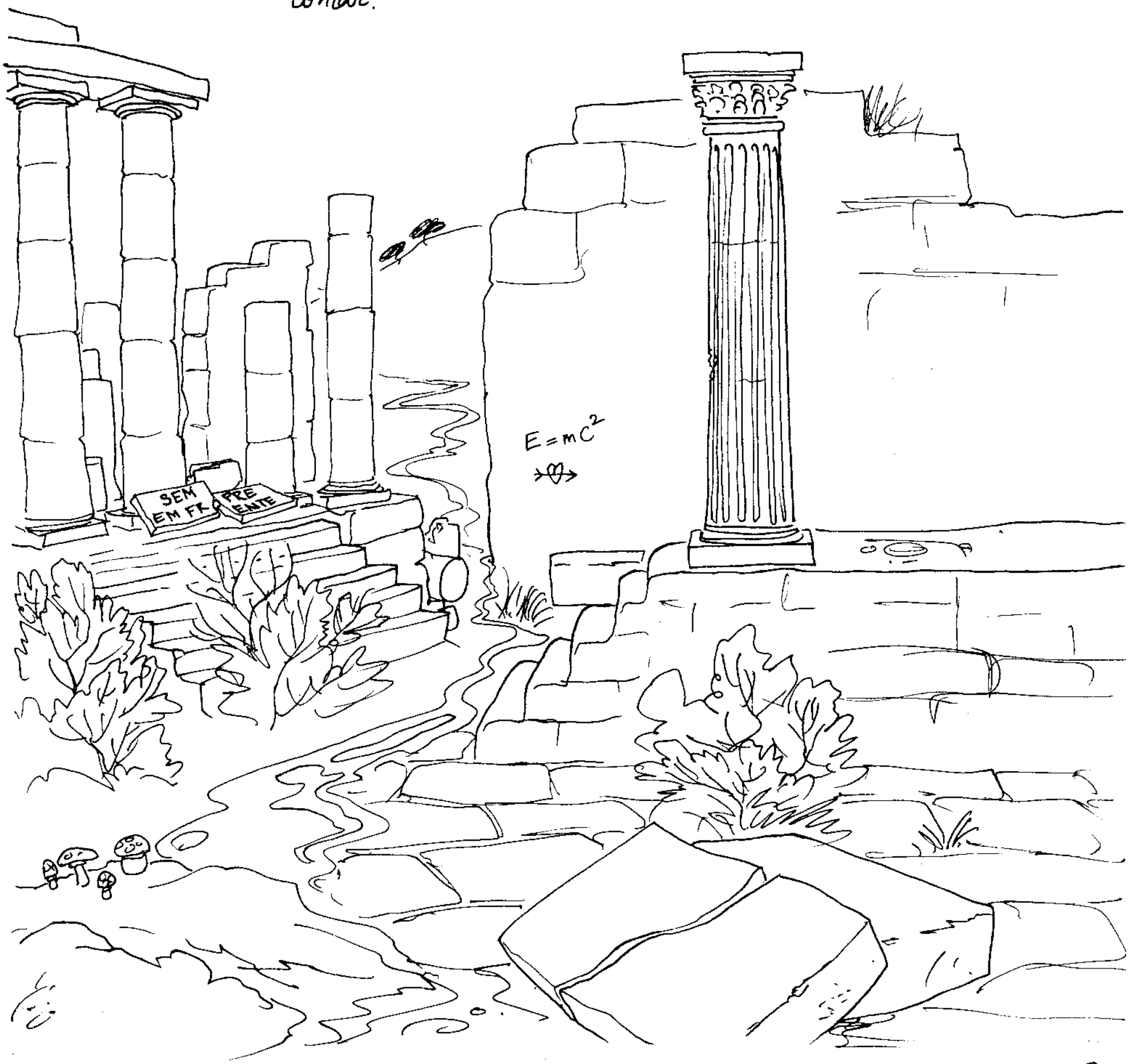


A Sociedade Euclides & Cª nasceu em Alexandria no século III a.C. Durante dois mil e duzentos anos os negócios prosperaram. Os produtos eram apreciados e a clientela estava satisfeita e era dedicada.

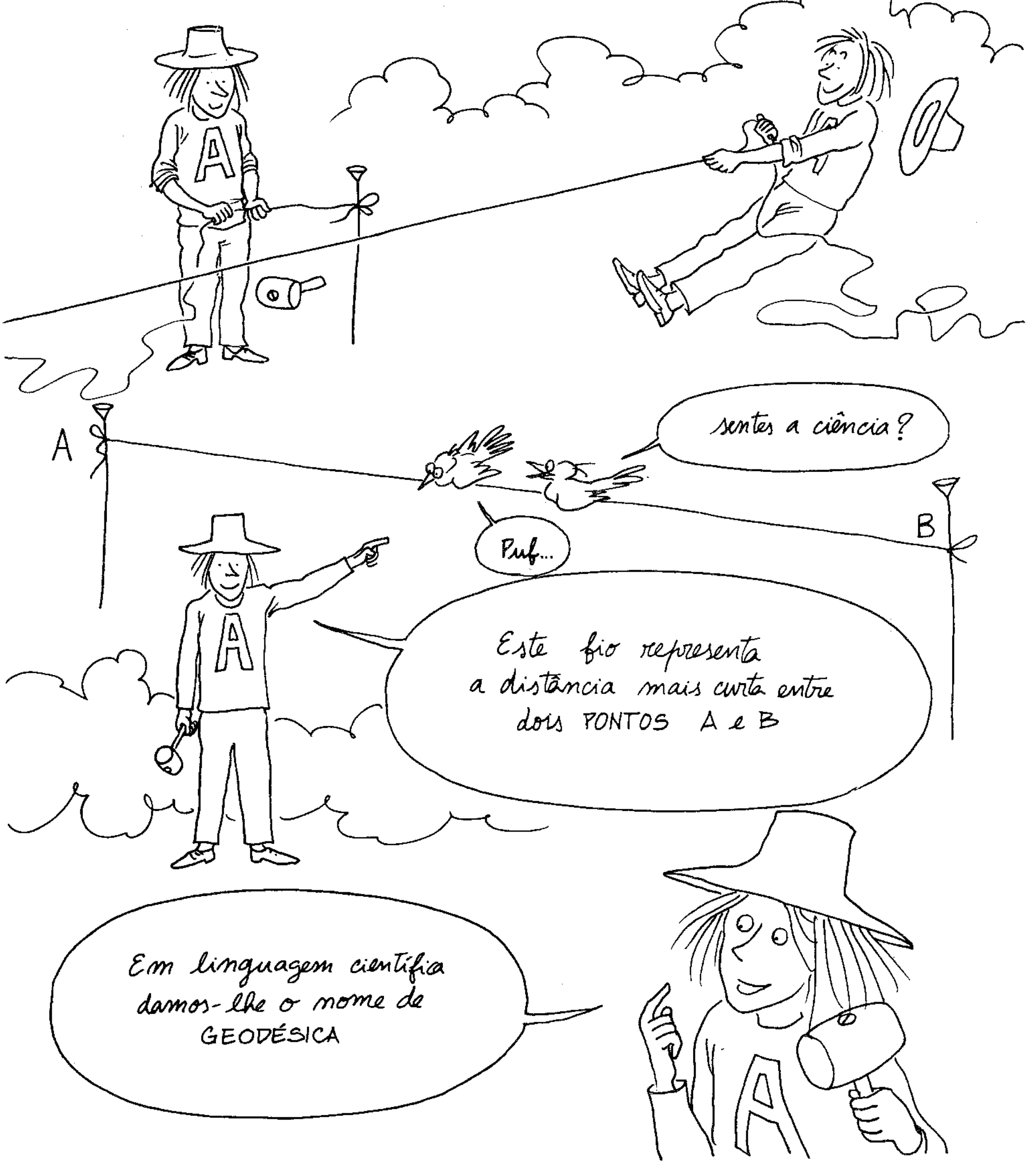
Mas, pouco a pouco, os gostos dos clientes mudaram. Alguns deles, outrora fervorosos adeptos da firma em questão, depois de curiosas experiências, perguntaram-se:

"O Euclides é realmente o que há de melhor em toda a parte e para tudo?"

A história de um deles é o que aqui vos vamos contar.

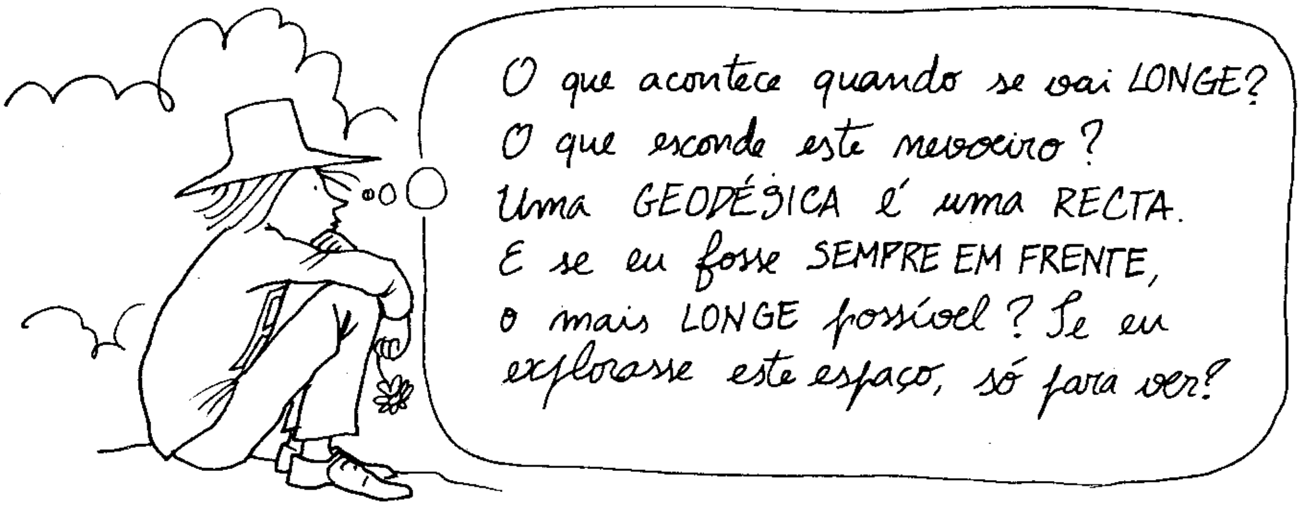


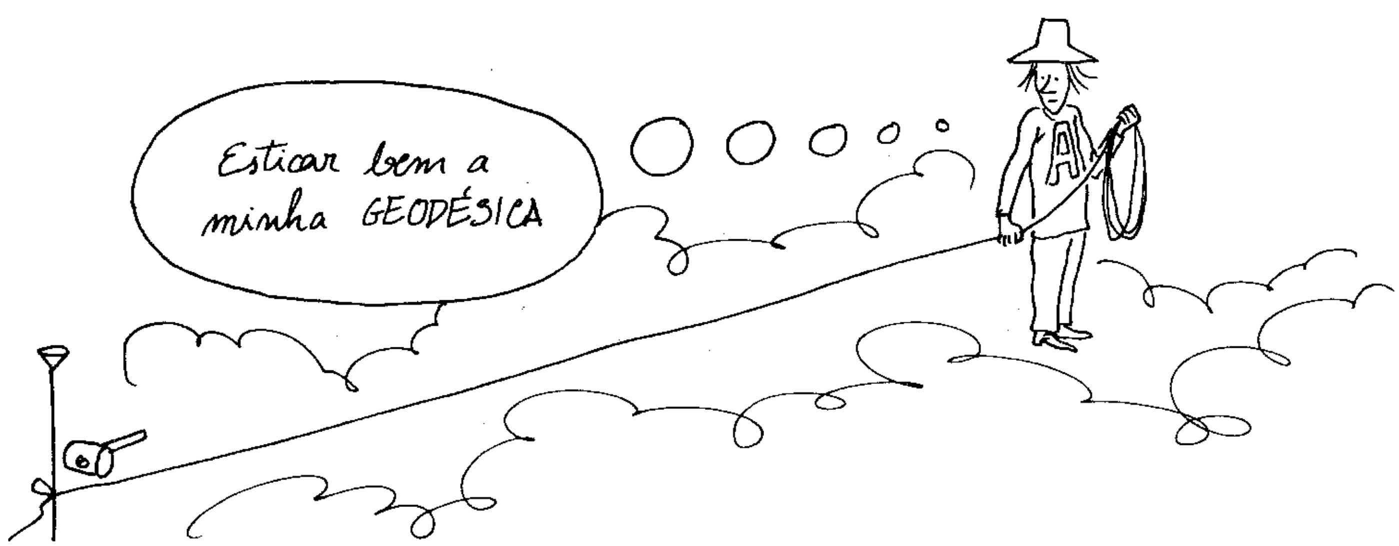
# PRÓLOGO: Um dia, Anselmo decidiu esticar um fio entre duas estacas:




Com três fios esticados, quer dizer, com três GEODÉSICAS
B
A
Anselmo construiu um TRIÂNGULO
Adaptando o seu transferidor a cada vértice desse TRIÂNGULO, mediu os ângulos Â, B̂, Ĉ, e fez a soma.
Segundo o excelente teorema da sociedade Euclides & Cª essa soma equivale a 180°
Ora bem...
Â + B̂ + Ĉ = 180° Ευκλιδε

O mundo onde Anselmo vivia era nebuloso como o diacho. Não se via um palmo diante do nariz.




Mas, não sei se já deram por isso, há dias em que tudo corre ao contrário.


Anselmo, que tinha ainda algum fio, decidiu deslindar este assunto.

Imperturbável, continuou portanto a esticar o fio, e prosseguiu, SEMPRE EM FRENTE, cheio de curiosidade.

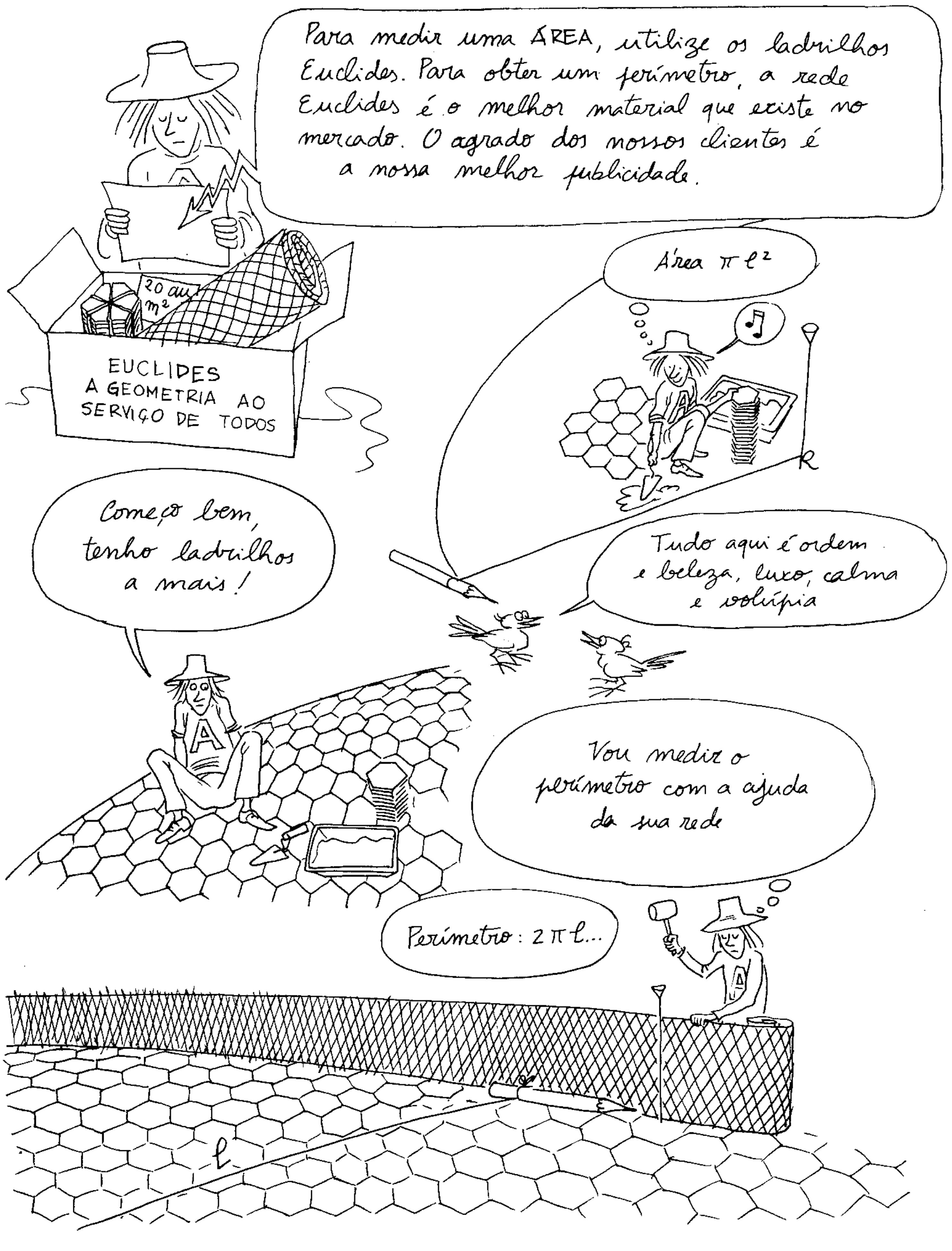
Mas...

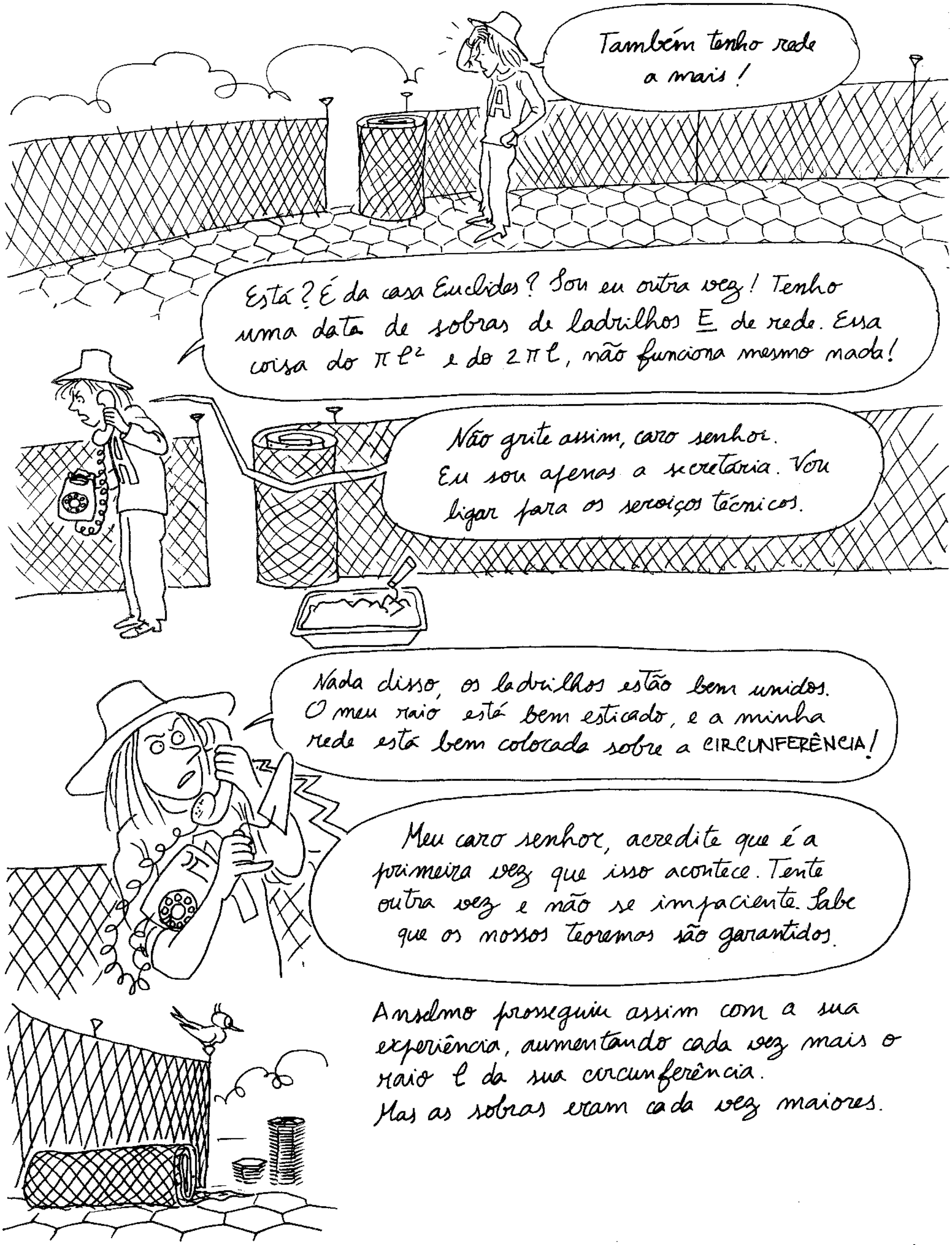

A RECTA de Anselmo fechava-se sobre si própria!

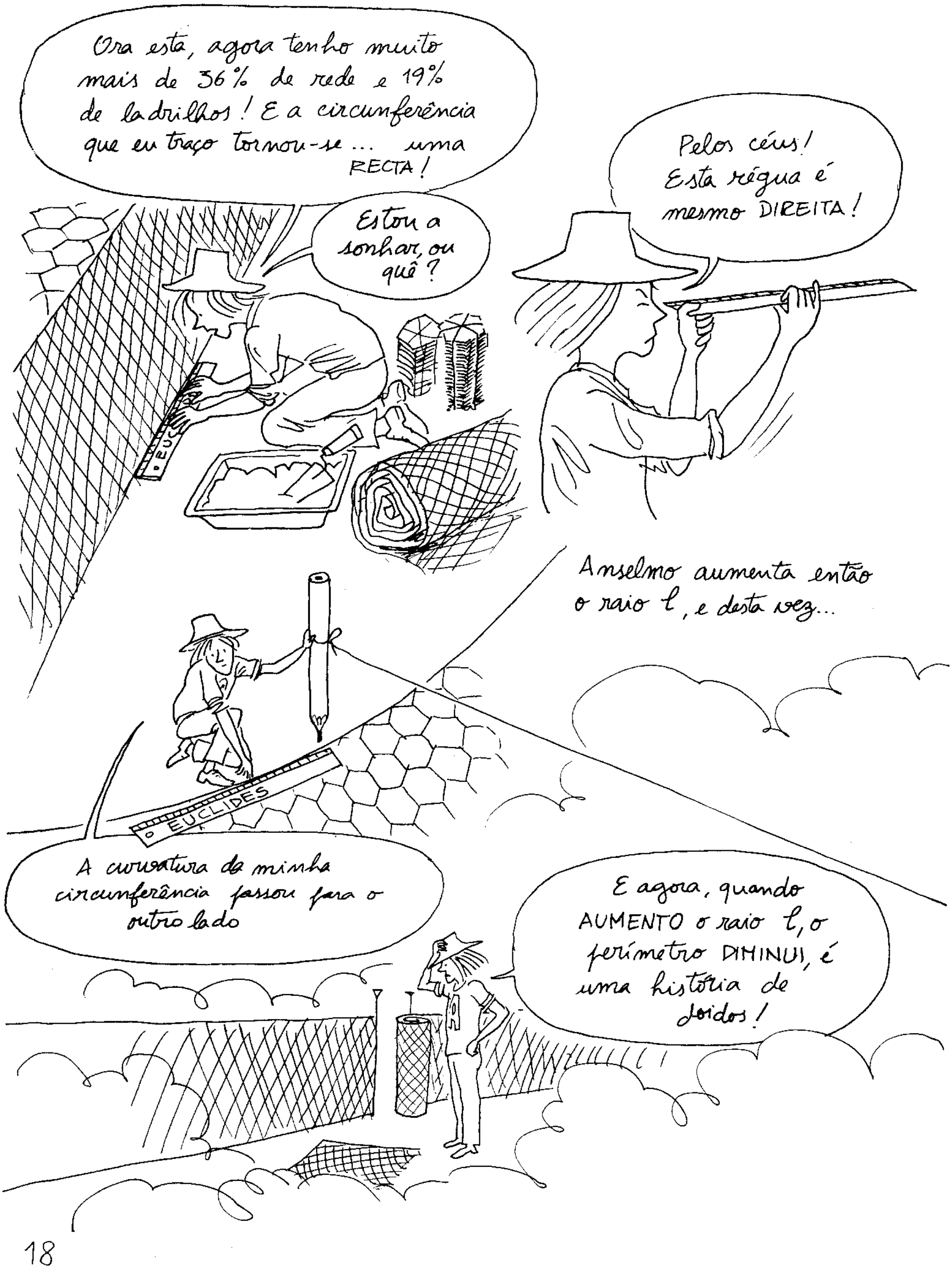



(*) A RAZÃO VENCE SEMPRE. (N. do T.)

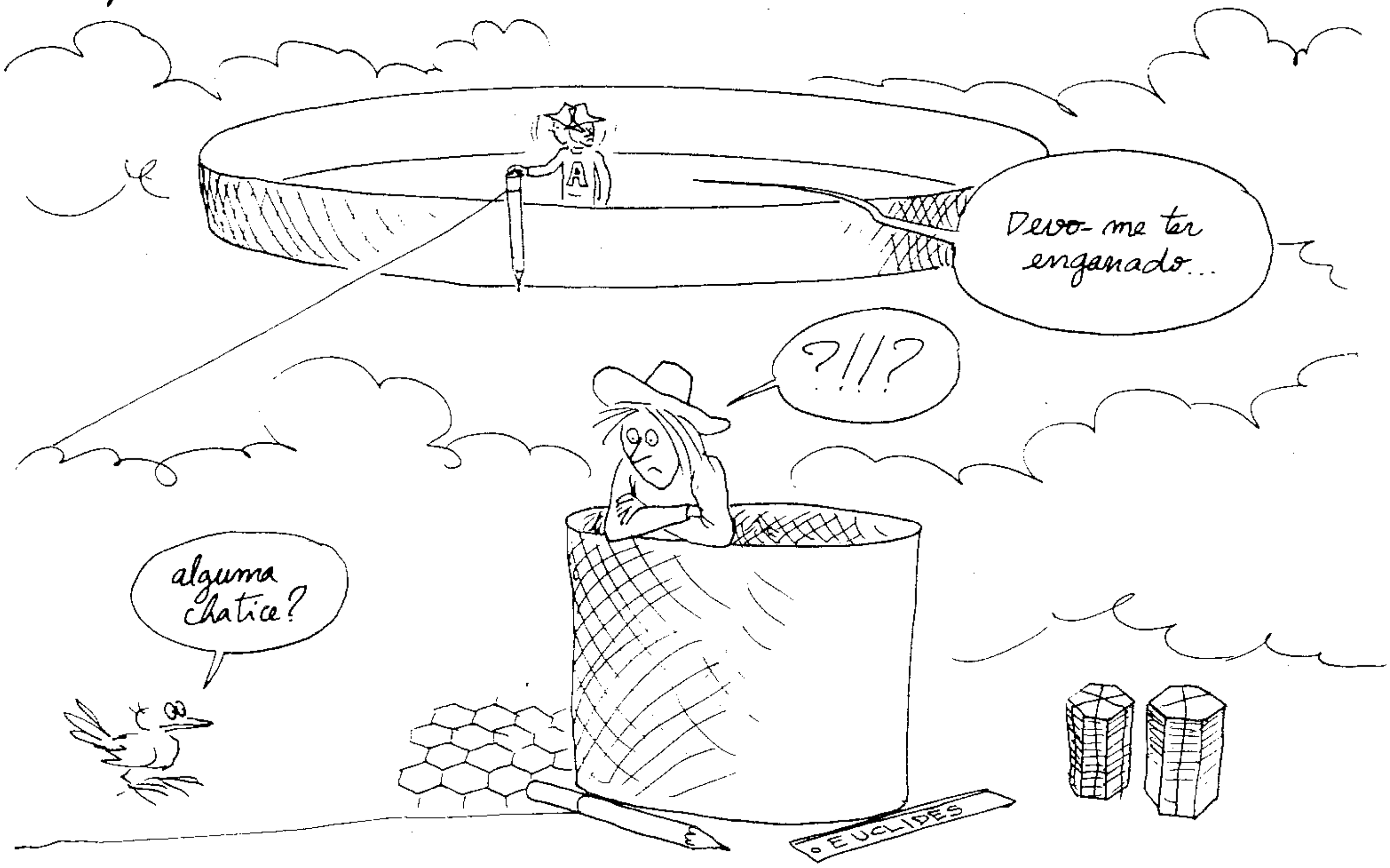

No entanto, ao ASSENTAR bem a minha régua verifiquei que os meus fios estavam bem DIREITOS.
EUCLIDES
Está, é da casa Euclides? Olhe, tenho problemas com o vosso material.
Um momento, vou-lhe passar os serviços técnicos.
Problemas com os nossos triângulos? Esquisito. Porque não experimenta as nossas circunferências? Os nossos clientes estão muito satisfeitos com elas.
... Uma circunferência é portanto um conjunto de pontos situados a uma distância l dum ponto fixo.
Então o senhor diz: perímetro 2π l, ÁREA: π l².
Tomei nota.
Às ordens
l


Para medir uma ÁREA, utilize os ladrilhos Euclides. Para obter um perímetro, a rede Euclides é o melhor material que existe no mercado. O agrado dos nossos clientes é a nossa melhor publicidade.
EUCLIDES
A GEOMETRIA AO
SERVIÇO DE TODOS
Área π ℓ²
R
Começo bem, tenho ladrilhos a mais!
Tudo aqui é ordem e beleza, luxo, calma e volúpia
Vou medir o perímetro com a ajuda da sua rede
Perímetro: 2 π ℓ...
ℓ


Também tenho rede a mais!
Está? É da casa Euclides? Sou eu outra vez! Tenho uma data de sobras de ladrilhos E de rede. Essa coisa do $\pi \ell^2$ e do $2\pi \ell$, não funciona mesmo nada!
Não grite assim, caro senhor. Eu sou apenas a secretária. Vou ligar para os serviços técnicos.
Nada disso, os ladrilhos estão bem unidos. O meu raio está bem esticado, e a minha rede está bem colocada sobre a CIRCUNFERÊNCIA!
Meu caro senhor, acredite que é a primeira vez que isso acontece. Tente outra vez e não se impaciente. Sabe que os nossos teoremas são garantidos.
Anselmo prosseguiu assim com a sua experiência, aumentando cada vez mais o raio $\ell$ da sua circunferência. Mas as sobras eram cada vez maiores.

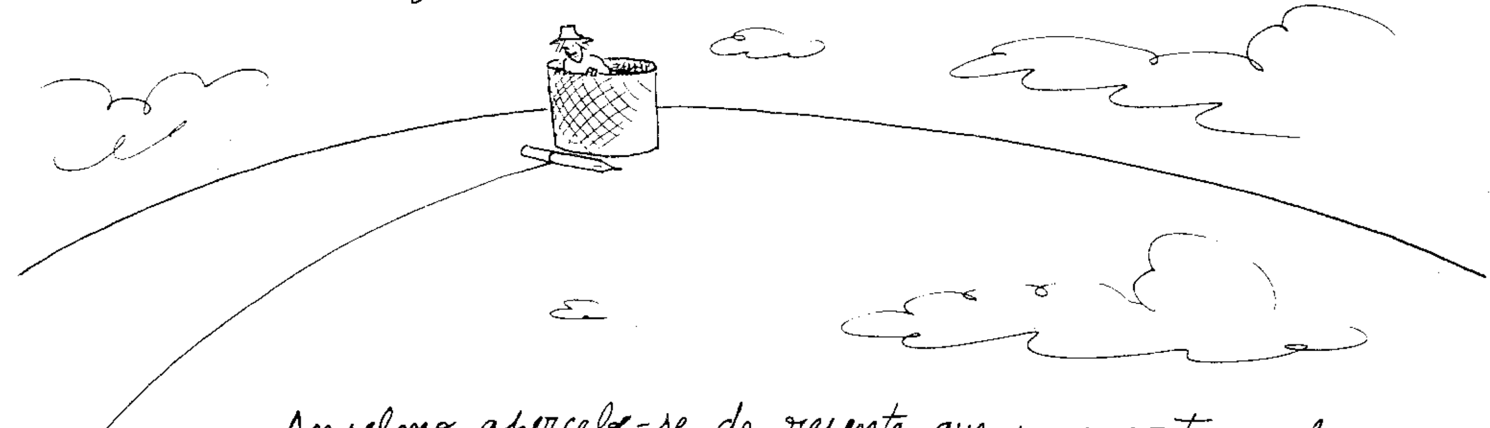

Ora esta, agora tenho muito mais de 36% de rede e 19% de ladrilhos! E a circunferência que eu traço tornou-se... uma RECTA!
Estou a sonhar, ou quê?
Pelos céus! Esta régua é mesmo DIREITA!
EUCLIDES
Anselmo aumenta então o raio l, e desta vez...
EUCLIDES
A curvatura da minha circunferência passou para o outro lado
E agora, quando AUMENTO o raio l, o perímetro DIMINUI, é uma história de doidos!

Depois dum último calcetamento:

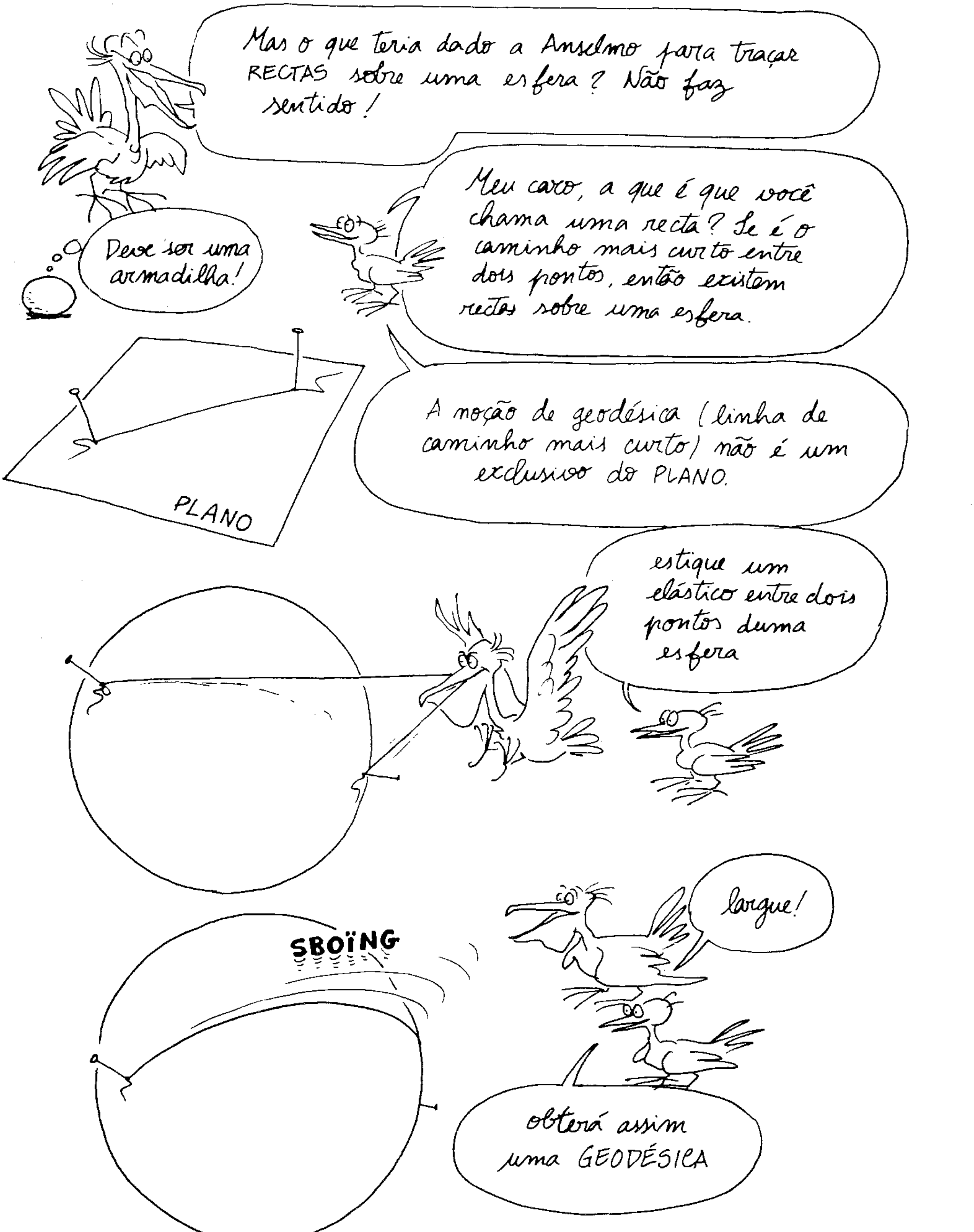


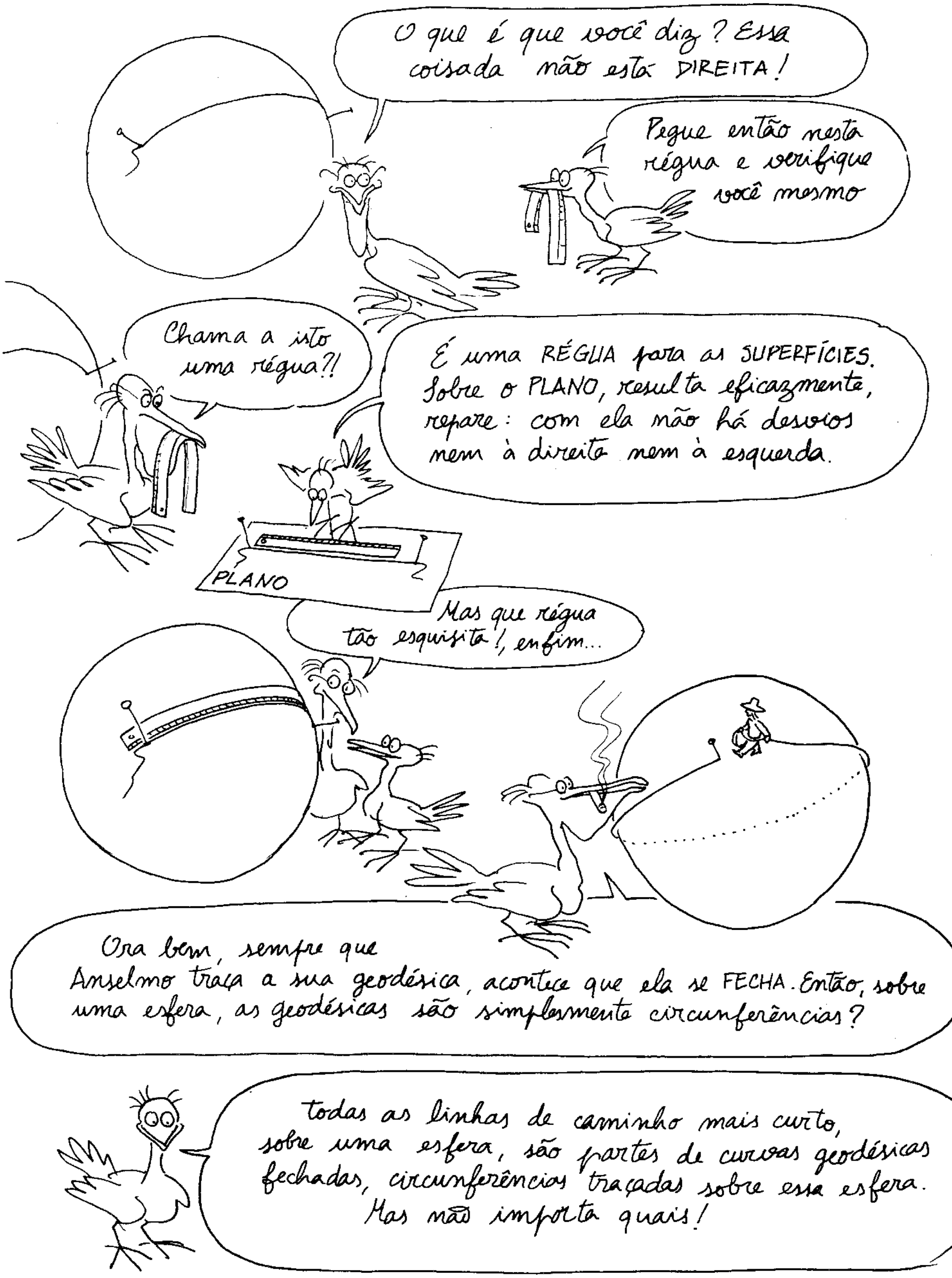

# O QUE FOI QUE ACONTECEU ?

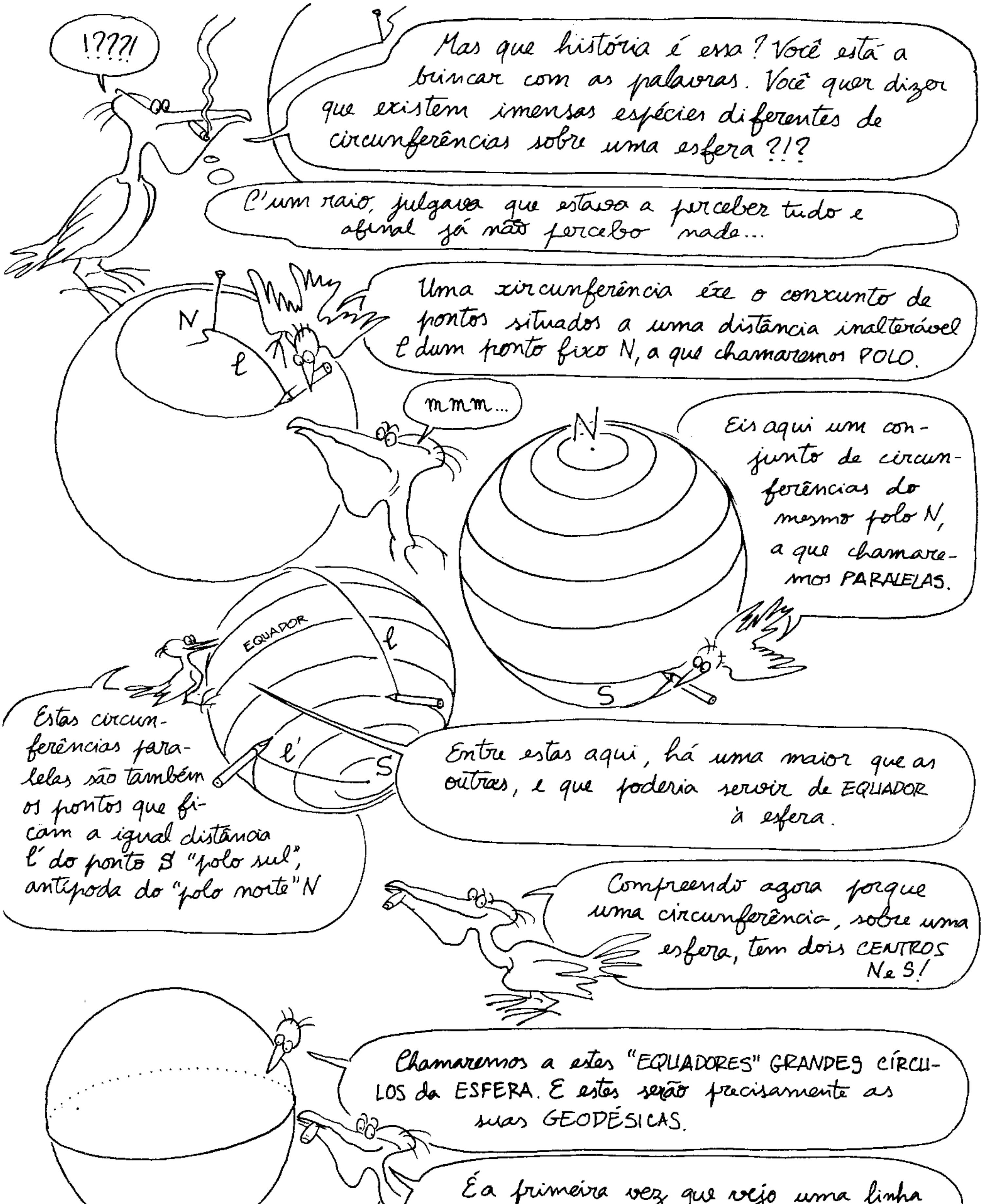
Para o saber, afastemos as nuvens:

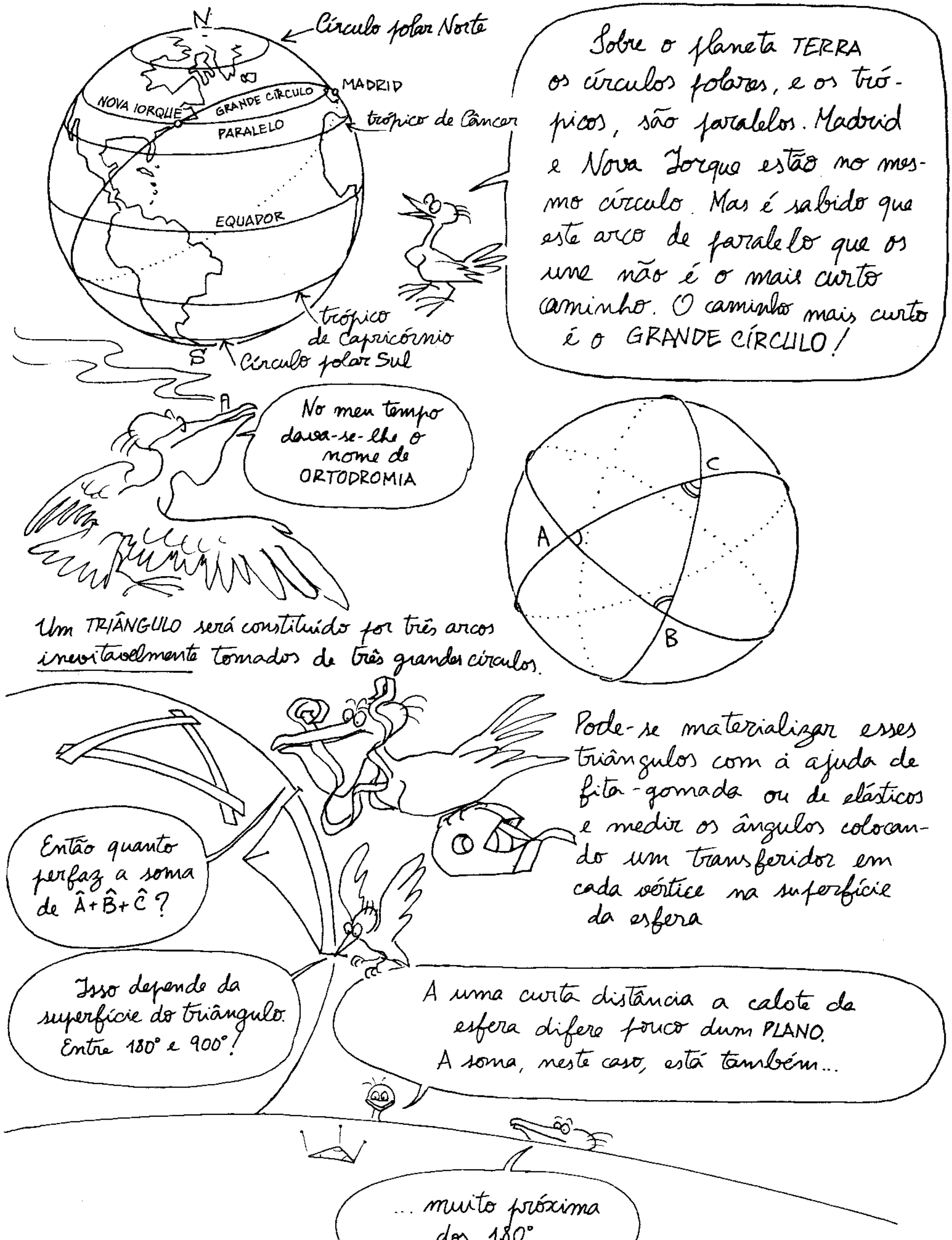


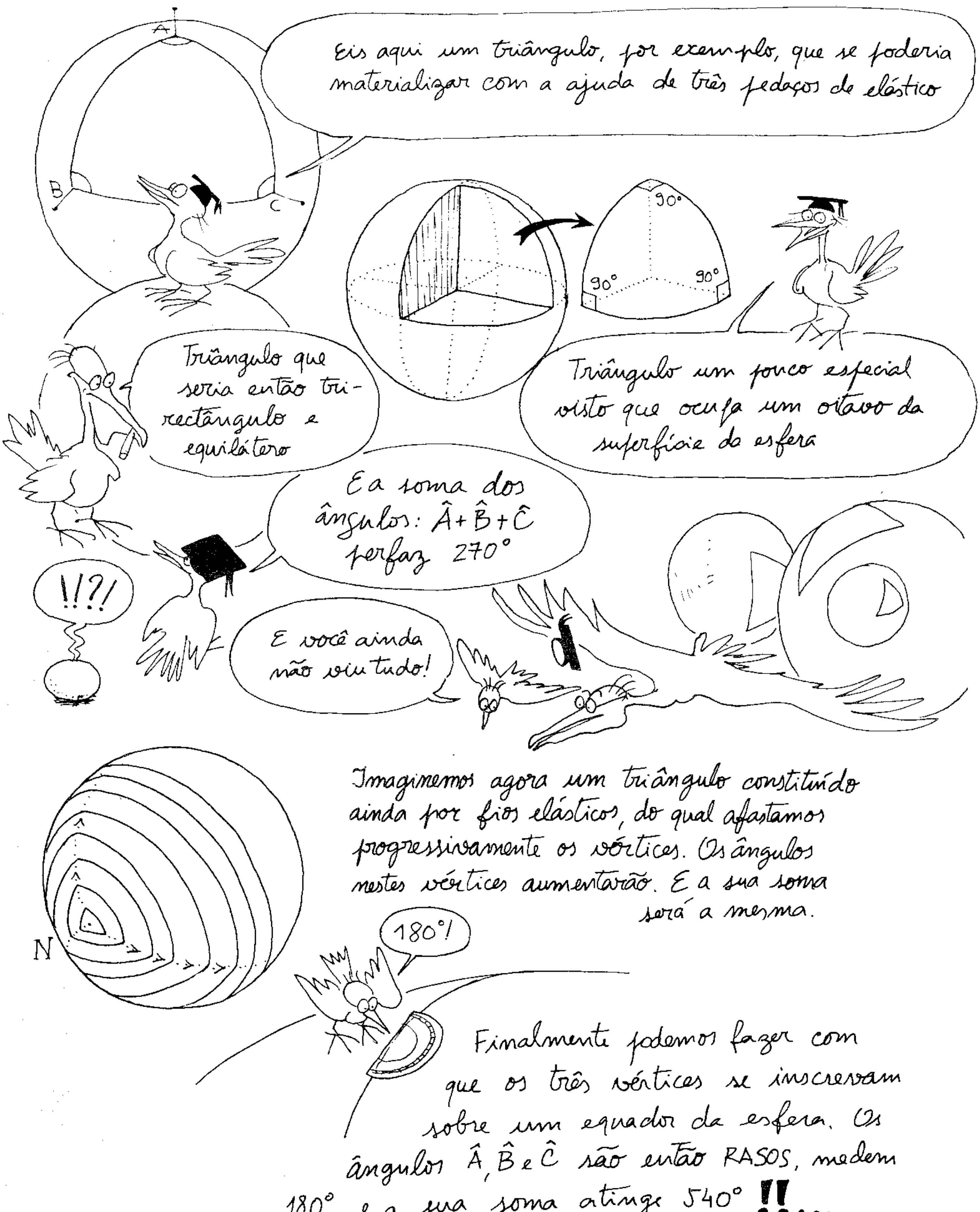
Anselmo apercebe-se de repente que se encontra sobre uma esfera na qual aplicou as regras da GEOMETRIA NO PLANO.


Mas o que teria dado a Anselmo para traçar RECTAS sobre uma esfera? Não faz sentido!
Deve ser uma armadilha!
Meu caro, a que é que você chama uma recta? Se é o caminho mais curto entre dois pontos, então existem rectas sobre uma esfera.
A noção de geodésica (linha de caminho mais curto) não é um exclusivo do PLANO.
PLANO
estique um elástico entre dois pontos duma esfera
largue!
SBOÏNG
obterá assim uma GEODÉSICA

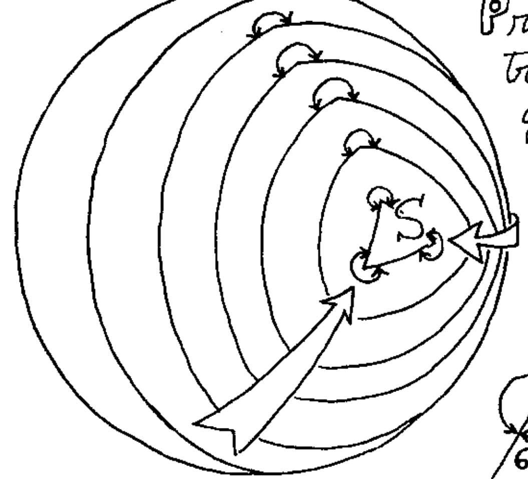

O que é que você diz? Essa coisada não está DIREITA!
Pegue então nesta régua e verifique você mesmo
Chama a isto uma régua?!
É uma RÉGUA para as SUPERFÍCIES. Sobre o PLANO, resulta eficazmente, repare: com ela não há desvios nem à direita nem à esquerda.
PLANO
Mas que régua tão esquisita!, enfim...
Ora bem, sempre que Anselmo traça a sua geodésica, acontece que ela se FECHA. Então, sobre uma esfera, as geodésicas são simplesmente circunferências?
todas as linhas de caminho mais curto, sobre uma esfera, são partes de curvas geodésicas fechadas, circunferências traçadas sobre essa esfera. Mas não importa quais!


!???!
Mas que história é essa? Você está a brincar com as palavras. Você quer dizer que existem imensas espécies diferentes de circunferências sobre uma esfera?!?
C'um raio, julgava que estava a perceber tudo e afinal já não percebo nada...
N
ℓ
Uma xircunferência éxe o conxunto de pontos situados a uma distância inalterável ℓ dum ponto fixo N, a que chamaremos POLO.
mmm...
N
Eis aqui um conjunto de circunferências do mesmo polo N, a que chamaremos PARALELAS.
S
EQUADOR
ℓ
ℓ'
S
Estas circunferências paralelas são também os pontos que ficam a igual distância ℓ' do ponto S "polo sul", antípoda do "polo norte" N
Entre estas aqui, há uma maior que as outras, e que poderia servir de EQUADOR à esfera.
Compreendo agora porque uma circunferência, sobre uma esfera, tem dois CENTROS N e S!
Chamaremos a estes "EQUADORES" GRANDES CÍRCULOS da ESFERA. E estes serão precisamente as suas GEODÉSICAS.
É a primeira vez que vejo uma linha GEODÉSICA de tão perto... é impressionante!

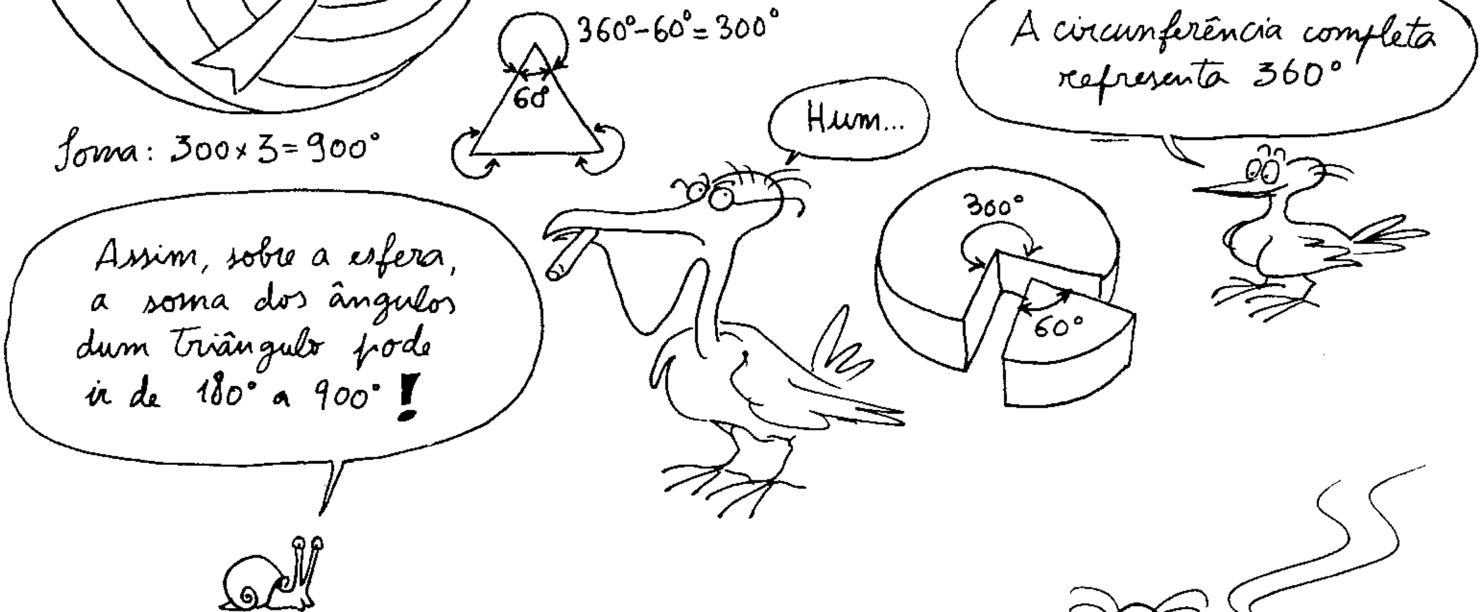

N
Círculo polar Norte
MADRID
NOVA IORQUE
GRANDE CÍRCULO
PARALELO
trópico de Câncer
EQUADOR
trópico de Capricórnio
S
Círculo polar Sul
Sobre o planeta TERRA os círculos polares, e os trópicos, são paralelos. Madrid e Nova Iorque estão no mesmo círculo. Mas é sabido que este arco de paralelo que os une não é o mais curto caminho. O caminho mais curto é o GRANDE CÍRCULO!
A
No meu tempo dava-se-lhe o nome de ORTODROMIA
C
A
B
Um TRIÂNGULO será constituído por três arcos inevitavelmente tomados de três grandes círculos.
Pode-se materializar esses triângulos com a ajuda de fita-gomada ou de elásticos e medir os ângulos colocando um transferidor em cada vértice na superfície da esfera
Então quanto perfaz a soma de Â+B̂+Ĉ ?
Isso depende da superfície do triângulo. Entre 180° e 900°!
A uma curta distância a calote da esfera difere pouco dum PLANO. A soma, neste caso, está também...
... muito próxima dos 180°

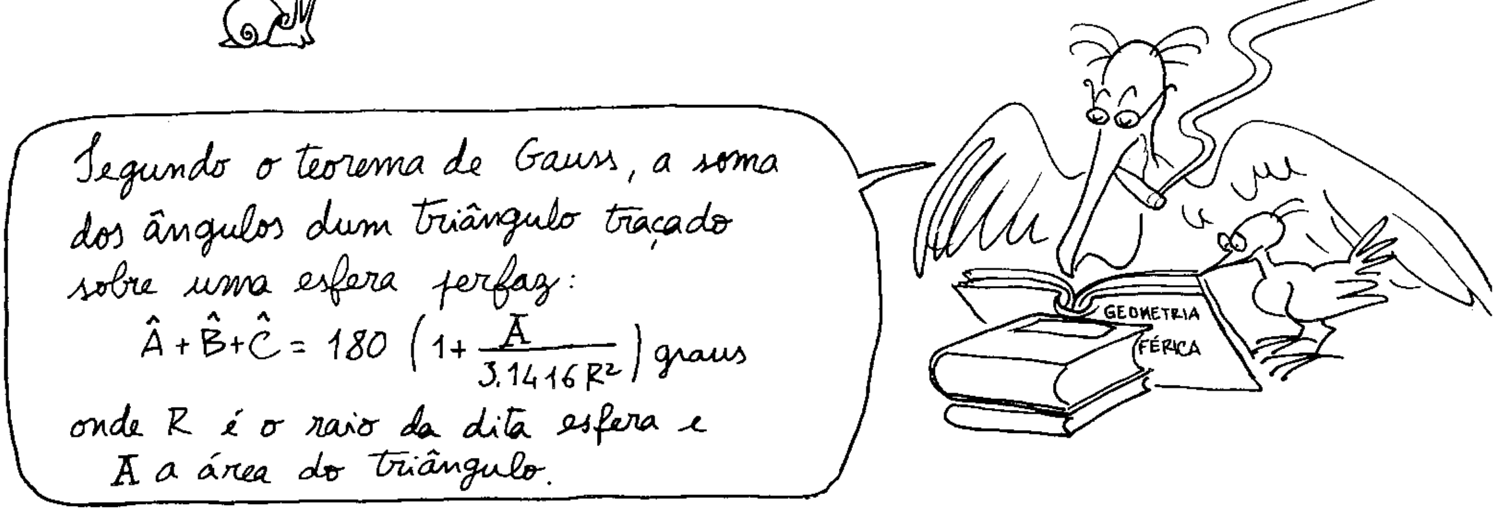


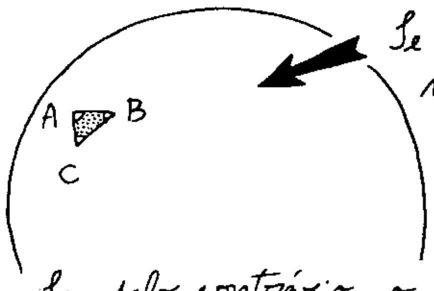
A
B
C
Eis aqui um triângulo, por exemplo, que se poderia materializar com a ajuda de três pedaços de elástico
90°
90°
90°
Triângulo que seria então tri-rectângulo e equilátero
Triângulo um pouco especial visto que ocupa um oitavo da superfície da esfera
E a soma dos ângulos: Â+B̂+Ĉ perfaz 270°
!!?!
E você ainda não viu tudo!
Imaginemos agora um triângulo constituído ainda por fios elásticos, do qual afastamos progressivamente os vértices. Os ângulos nestes vértices aumentarão. E a sua soma será a mesma.
N
180°!
Finalmente podemos fazer com que os três vértices se inscrevam sobre um equador da esfera. Os ângulos Â, B̂ e Ĉ são então RASOS, medem 180°, e a sua soma atinge 540° !!...



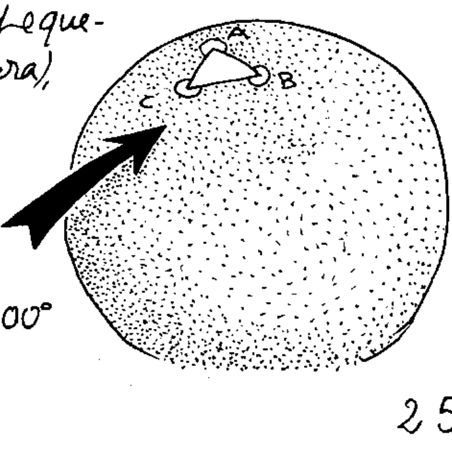

Prolongando esta migração dos vértices do triângulo sobre o outro hemisfério, este convergirá para o ponto S, antípoda de N. Conservando a definição inicial dos ângulos nos vértices, cada um deles terá então mais de 180°!
Para ser mais preciso, terão cada um
360° − 60° = 300°.



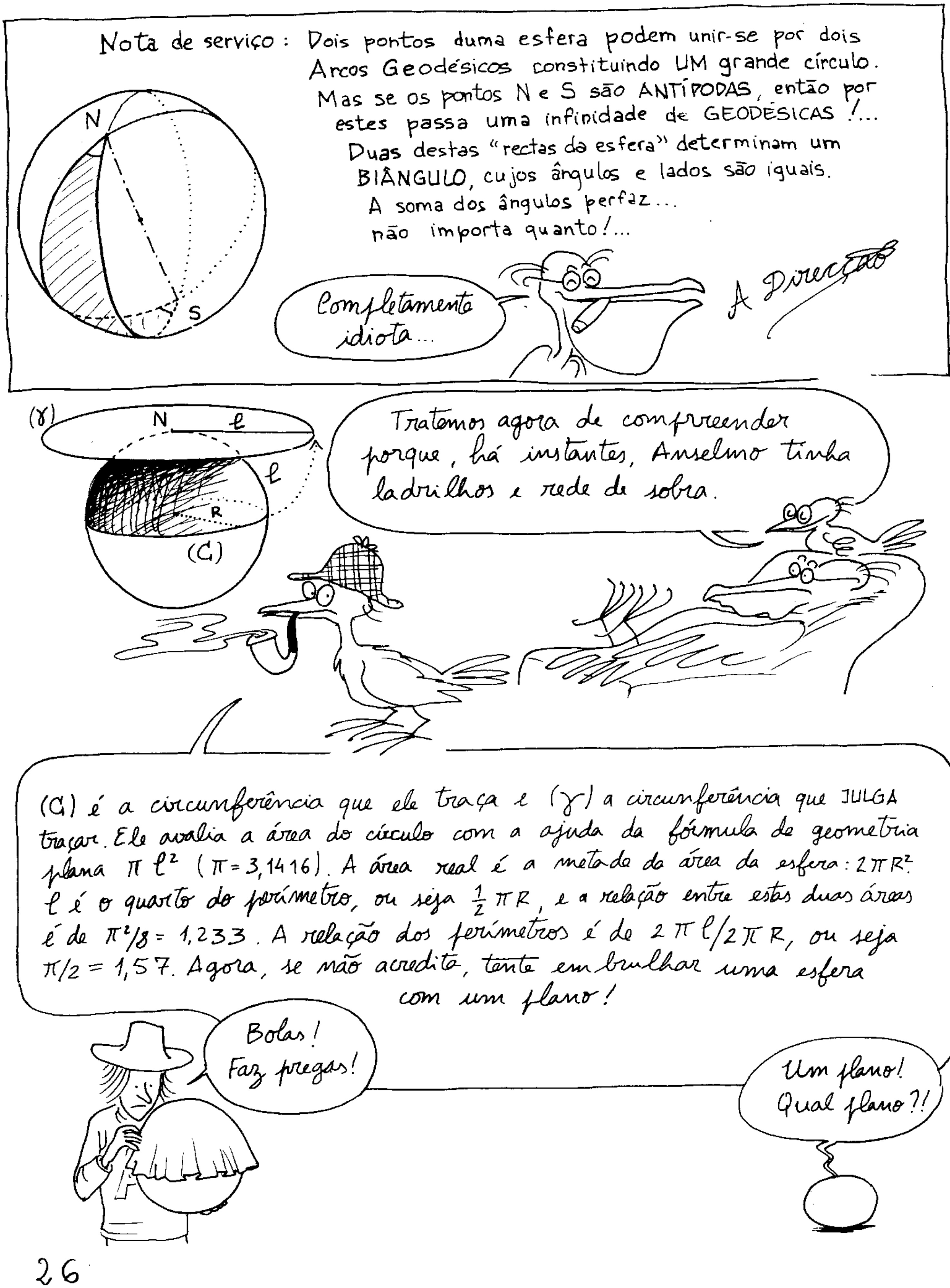



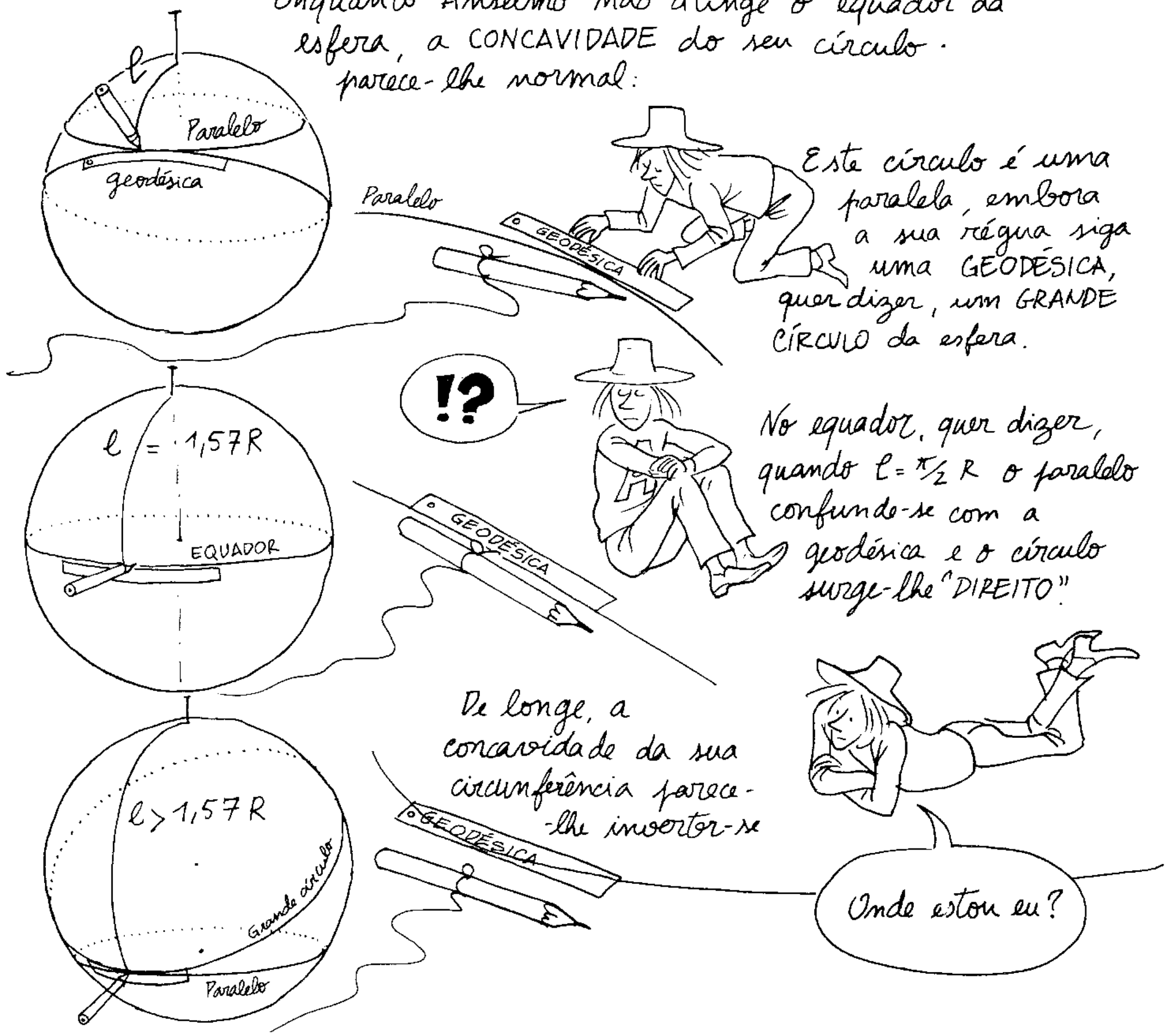

Se o triângulo tem a área pequena (em relação à da esfera), reencontramos Euclides
($\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$)



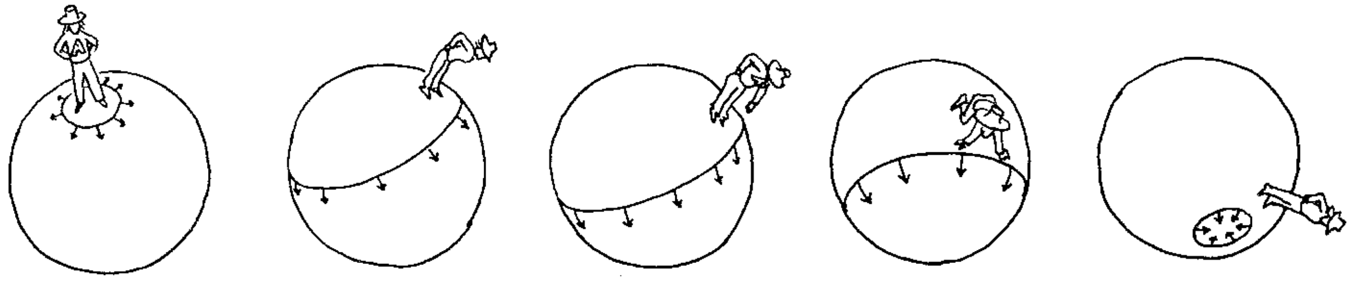

Se, pelo contrário, o triângulo tem quase a mesma área da esfera (4×3,1416×R²), cai-se nos 900°

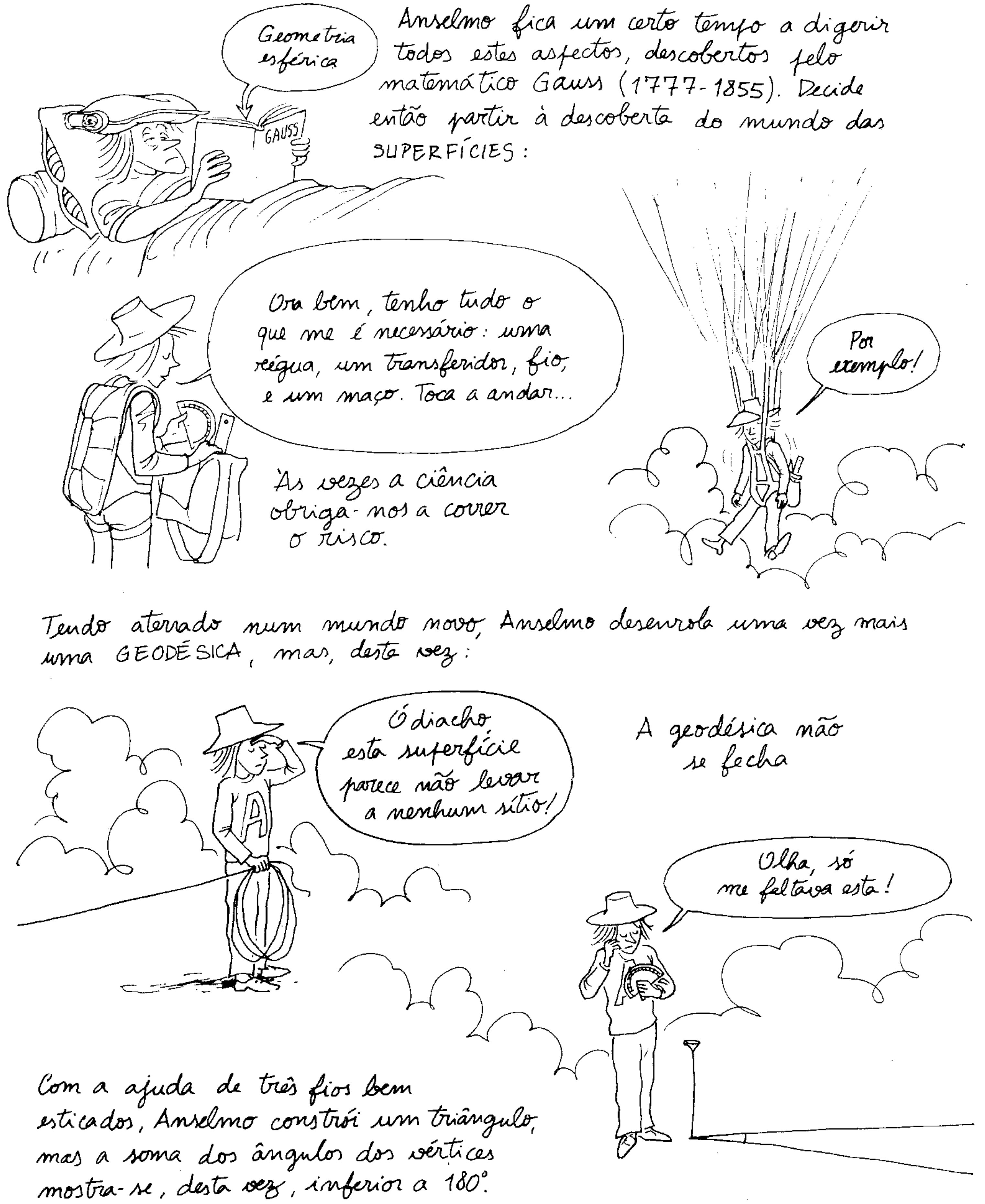


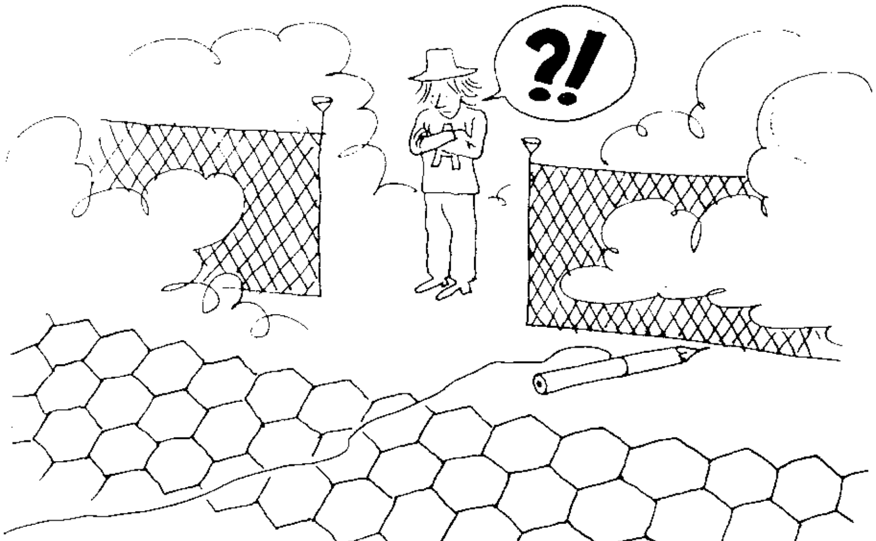
Nota de serviço: Dois pontos duma esfera podem unir-se por dois Arcos Geodésicos constituindo UM grande círculo. Mas se os pontos N e S são ANTÍPODAS, então por estes passa uma infinidade de GEODÉSICAS!... Duas destas "rectas da esfera" determinam um BIÂNGULO, cujos ângulos e lados são iguais. A soma dos ângulos perfaz... não importa quanto!...
A Direcção
N
S
Completamente idiota...
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Tratemos agora de compreender porque, há instantes, Anselmo tinha ladrilhos e rede de sobra.
(C) é a circunferência que ele traça e (γ) a circunferência que JULGA traçar. Ele avalia a área do círculo com a ajuda da fórmula de geometria plana $\pi \ell^2$ ($\pi = 3{,}1416$). A área real é a metade da área da esfera: $2\pi R^2$. $\ell$ é o quarto do perímetro, ou seja $\frac{1}{2}\pi R$, e a relação entre estas duas áreas é de $\pi^2/8 = 1{,}233$. A relação dos perímetros é de $2\pi\ell/2\pi R$, ou seja $\pi/2 = 1{,}57$. Agora, se não acredita, tente embrulhar uma esfera com um plano!
Bolas! Faz pregas!
Um plano! Qual plano?!




Esta propriedade explica como se pode "entrar" ou "sair" duma circunferência, sem a transpor, quando ela é traçada sobre uma esfera. É preciso imaginar esta circunferência como um anel elástico que se fizesse deslizar sobre uma bola de bilhar.



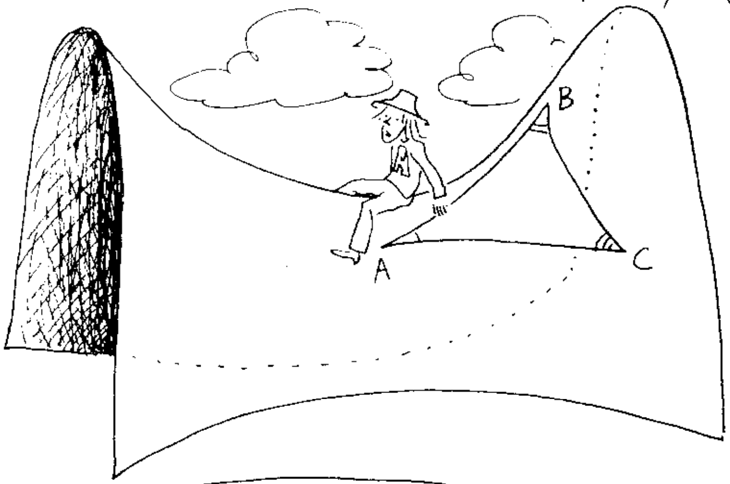

Geometria esférica
GAUSS
Anselmo fica um certo tempo a digerir todos estes aspectos, descobertos pelo matemático Gauss (1777-1855). Decide então partir à descoberta do mundo das SUPERFÍCIES:
Ora bem, tenho tudo o que me é necessário: uma régua, um transferidor, fio, e um maço. Toca a andar...
Às vezes a ciência obriga-nos a correr o risco.
Por exemplo!
Tendo aterrado num mundo novo, Anselmo desenrola uma vez mais uma GEODÉSICA, mas, desta vez:
Ó diacho esta superfície parece não levar a nenhum sítio!
A
A geodésica não se fecha
Olha, só me faltava esta!
Com a ajuda de três fios bem esticados, Anselmo constrói um triângulo, mas a soma dos ângulos dos vértices mostra-se, desta vez, inferior a 180°.

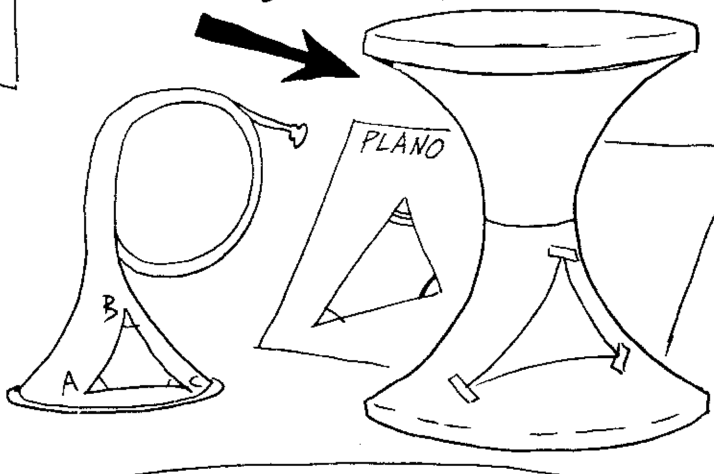



Uma circunferência sendo sempre o conjunto de pontos situados a uma mesma distância $l$ dum ponto fixo, Anselmo constata que essa circunferência, traçada sobre essa nova superfície, tem um perímetro SUPERIOR a $2\pi l$, enquanto que a área do círculo respectivo EXCEDE $\pi l^2$.

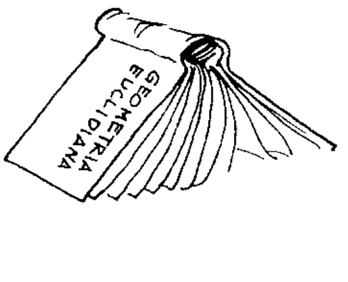
Dissipemos as nuvens:

A superfície representa, desta vez, a forma dum desfiladeiro ou duma sela dum cavalo. Alguns objectos do vosso quotidiano podem igualmente servir: uma trompa de caça ou este tipo de tamborete:








# CURVATURA:

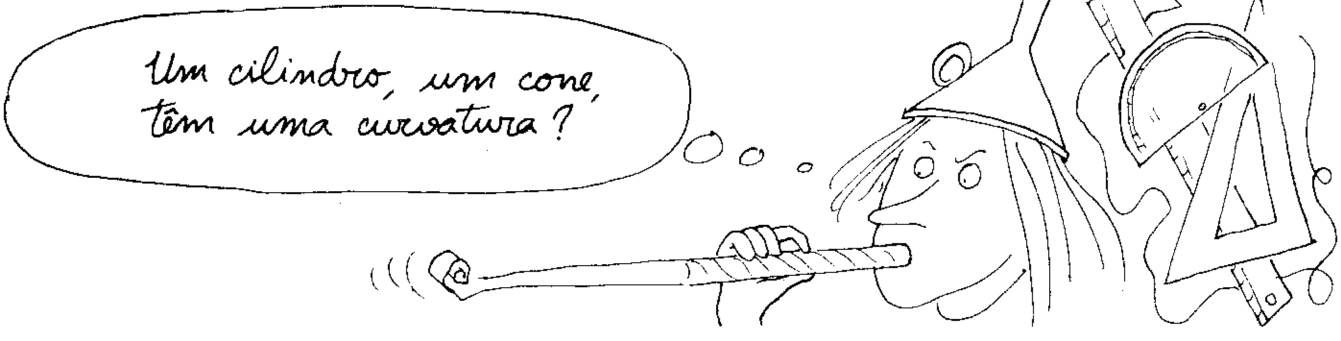
Uma superfície curva é uma superfície onde os teoremas euclidianos não funcionam. A curvatura pode ser positiva ou negativa.

Sobre uma superfície de CURVATURA POSITIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é superior a 180°. Se se traça uma circunferência de raio $\ell$, a área do círculo é inferior a $\pi \ell^2$ e o seu perímetro inferior a $2\pi\ell$.

Sobre uma superfície de CURVATURA NEGATIVA, a soma dos ângulos dum triângulo é inferior a 180°. Se se traça uma circunferência de raio $\ell$, a área do círculo é superior a $\pi \ell^2$ e o seu perímetro superior a $2\pi\ell$.

Há momentos, Anselmo constatou que ao tentar REVESTIR uma esfera, superfície de curvatura positiva, com um elemento plano, as pregas apareciam. O revestimento duma superfície de curvatura negativa com um plano é igualmente impossível: os rasgões acontecem. Este teste da embalagem é o mais simples para determinar se a curvatura é positiva ou negativa.

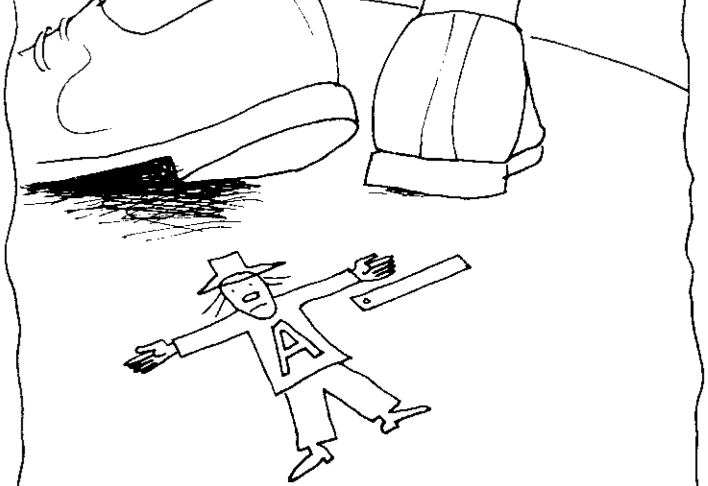

Como se pode verificar na página precedente, as superfícies podem apresentar zonas de curvatura positiva, e outras de curvatura negativa.



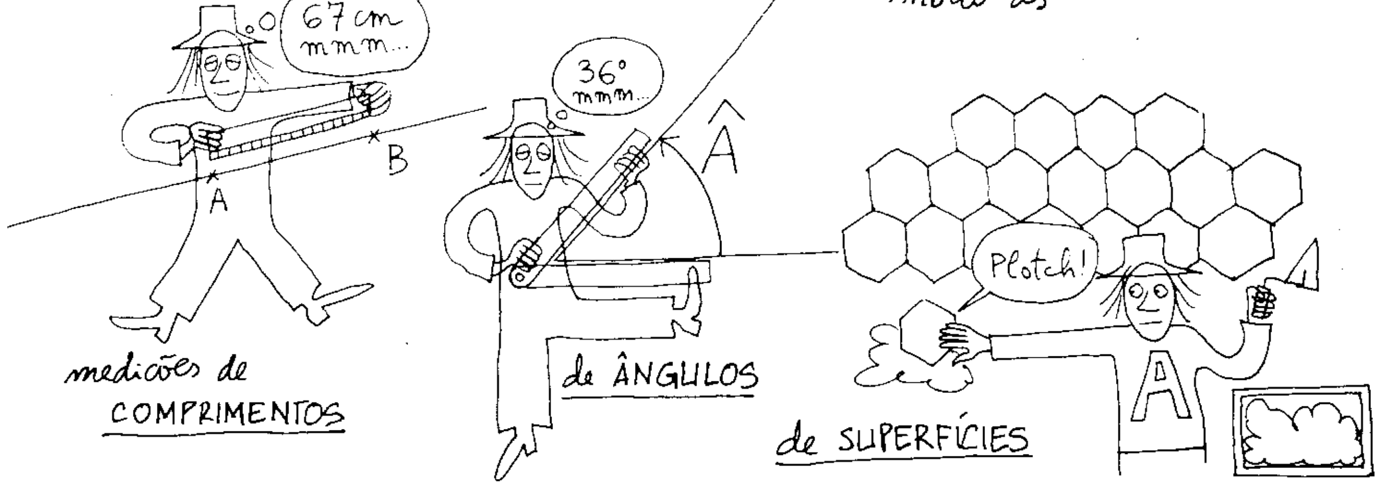
Teste da embalagem
Um cilindro, um cone, deixam-se revestir por um plano!
Nada de inquietações. Colo três fios elásticos, quer dizer, três geodésicas, sobre o meu cilindro com a ajuda de fita-gomada...
B
A
C
... Agora marco as minhas geodésicas SOBRE a superfície...
Coloco o meu cilindro bem ASSENTE
!...
B
A
C
Segundo a nossa definição, os cilindros e os cones obedecem à geometria EUCLIDIANA, são SUPERFÍCIES PLANAS !!!


# A NOÇÃO DE ESPAÇO:

Há momentos, as nuvens impediam Anselmo de ver mais longe do que a ponta do seu nariz... ou quase. Se não tivesse sido assim teria podido aperceber-se da CURVATURA do seu ESPAÇO ESFÉRICO.
Há uma outra maneira de impedir Anselmo de VER essa curvatura: é a de o fazer habitar a superfície, de modo a que ela lhe fique a PERTENCER.

Apercebemo-nos de que esta nova situação não impede de nenhum modo as




Embora estando confinado À superfície, Anselmo teria podido facilmente constatar a curvatura e o seu sinal (Positivo ou negativo) e até mesmo medi-la, sem por isso ser capaz de a VER. Se a soma dos ângulos dum triângulo perfazem 180°, então essa superfície é PLANA. Se essa soma excede os 180°, a curvatura é positiva e Anselmo pode calcular o raio de curvatura R local com a ajuda da fórmula : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1+\frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)$ graus onde A é a área do triângulo.

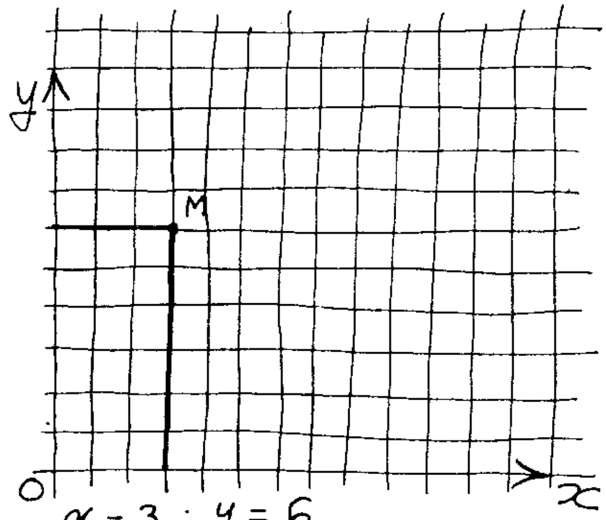
Se essa soma é inferior a 180°, pode-se determinar um raio de curvatura R, dado por : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1-\frac{A}{3{,}14\,R^2}\right)$ graus mas não tem mais o sentido físico habitual.

Apercebemo-nos de que um PLANO pode ser assimilado a uma superfície tendo um raio de curvatura R infinito.

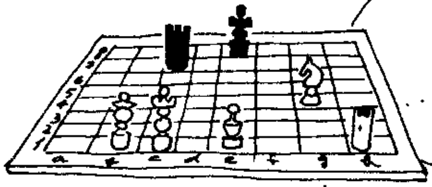
Encontramos então todos os teoremas de Euclides.

# O CONCEITO DE DIMENSÃO

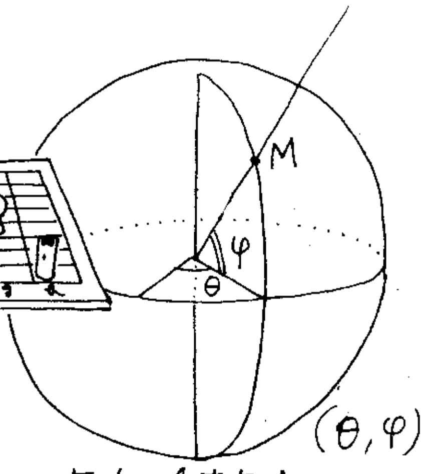
O número de dimensões é simplesmente o número de quantidades, de coordenadas, que é necessário conhecer, num espaço qualquer, para determinar um PONTO.
As SUPERFÍCIES são representações de espaços a duas dimensões.
As quantidades que servem para referenciar podem ser comprimentos, números, ângulos...




$x = 3$ ; $y = 6$

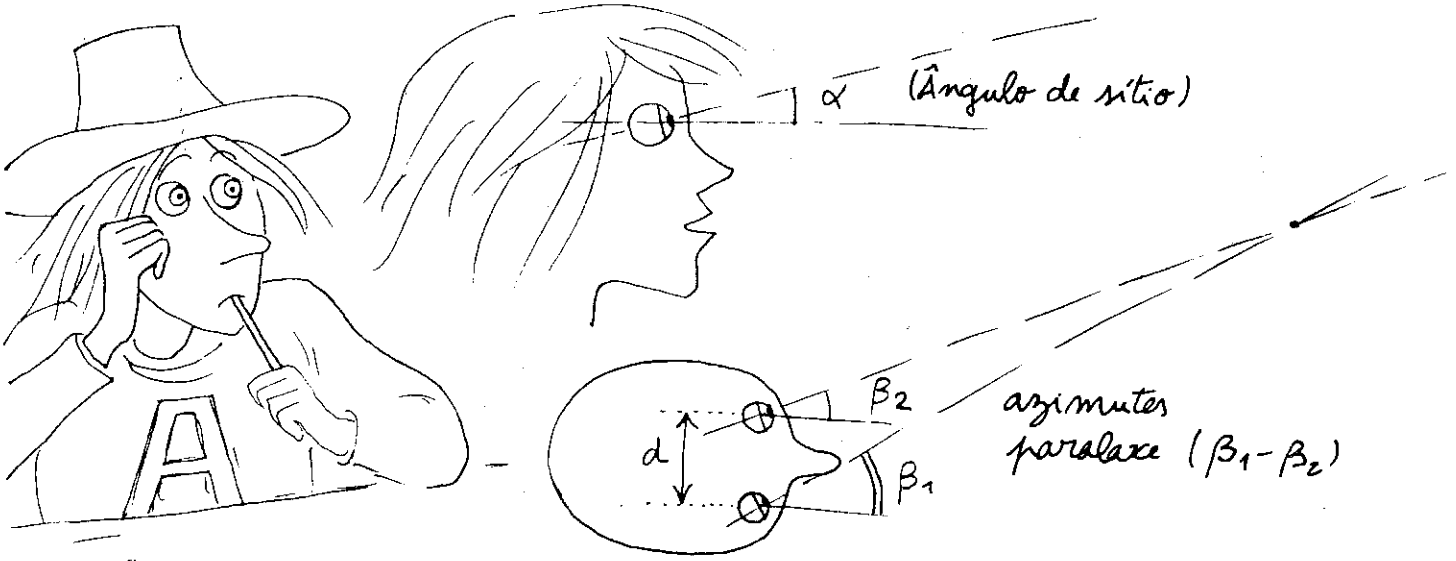


cavalo em g4



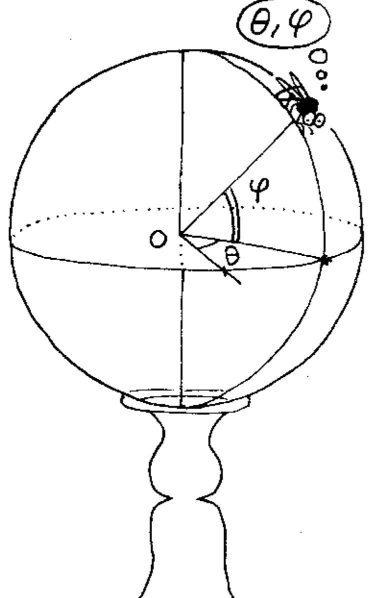

Longitude, latitude.

É costume dizer-se que o nosso espaço, exceptuando o tempo, tem três dimensões.



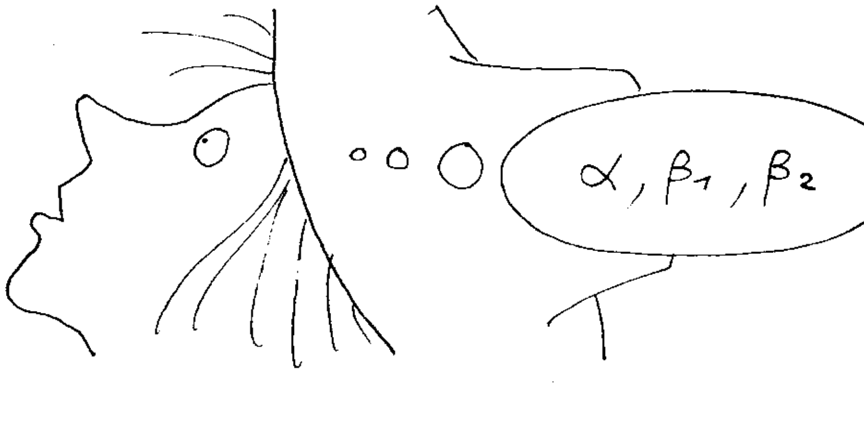

Anselmo descobre os objectos em relação ao seu corpo, à sua caixa craniana. A posição dum objecto pontual é conhecida com a ajuda de três ÂNGULOS: o ângulo de sítio e os azimutes de seus dois olhos: $\beta_1$ e $\beta_2$. A diferença angular $\beta_1 - \beta_2$ chama-se paralaxe. No cérebro de Anselmo efectua-se uma descodificação que transforma essa paralaxe em distância.

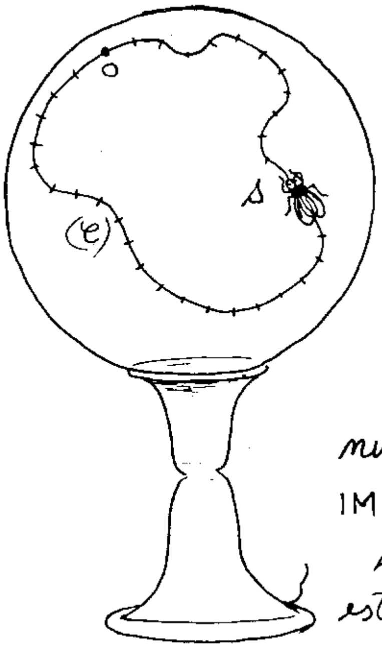
# A IMERSÃO:




Mas a mosca progride igualmente sobre o globo esférico do candeeiro onde a sua posição, nesse espaço bidimensional, pode ser assinalada com a ajuda de dois ângulos $\theta$ e $\varphi$ (longitude e latitude).

Diremos que este espaço a duas dimensões está MERGULHADO no nosso espaço a três dimensões.



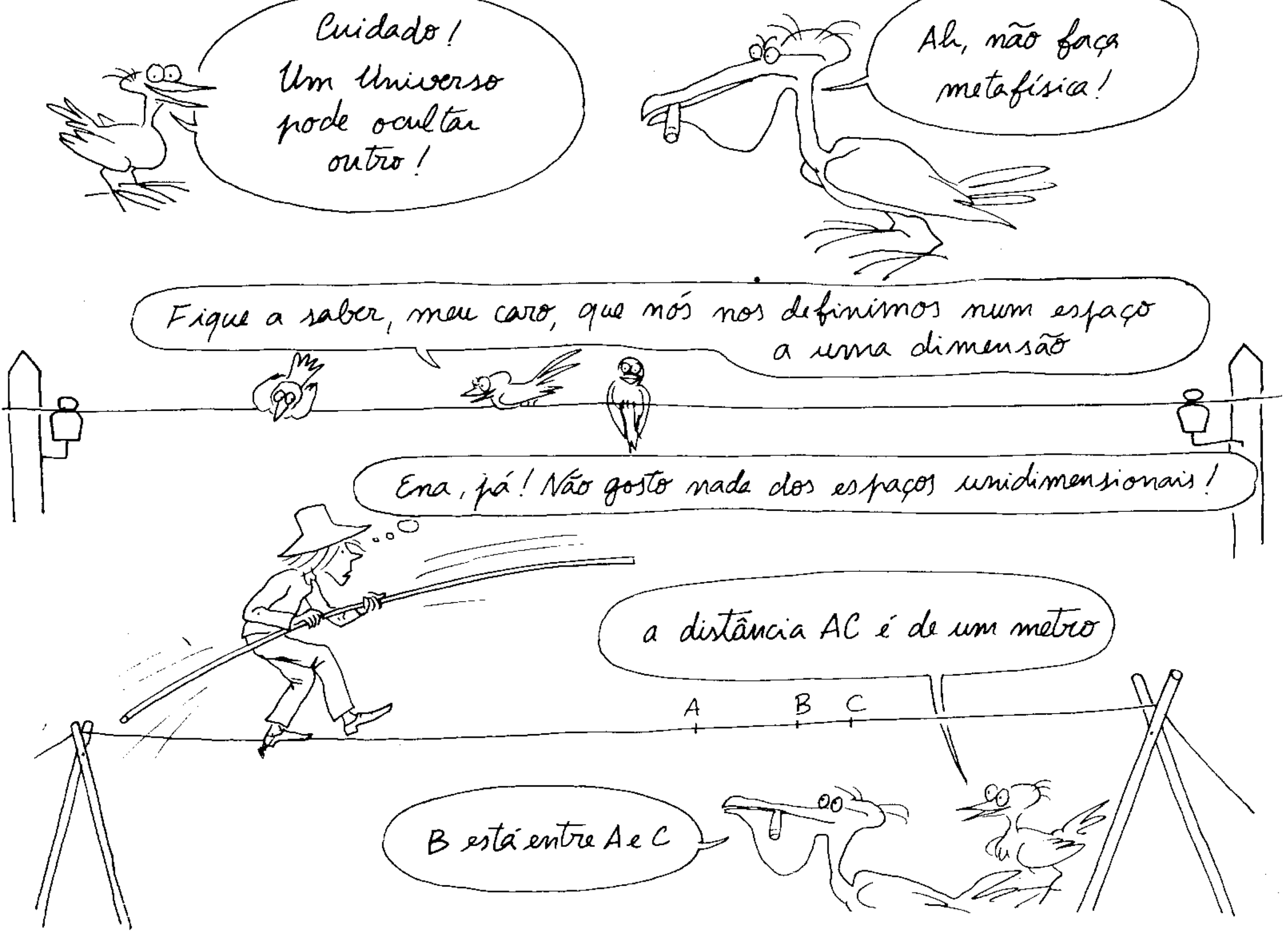


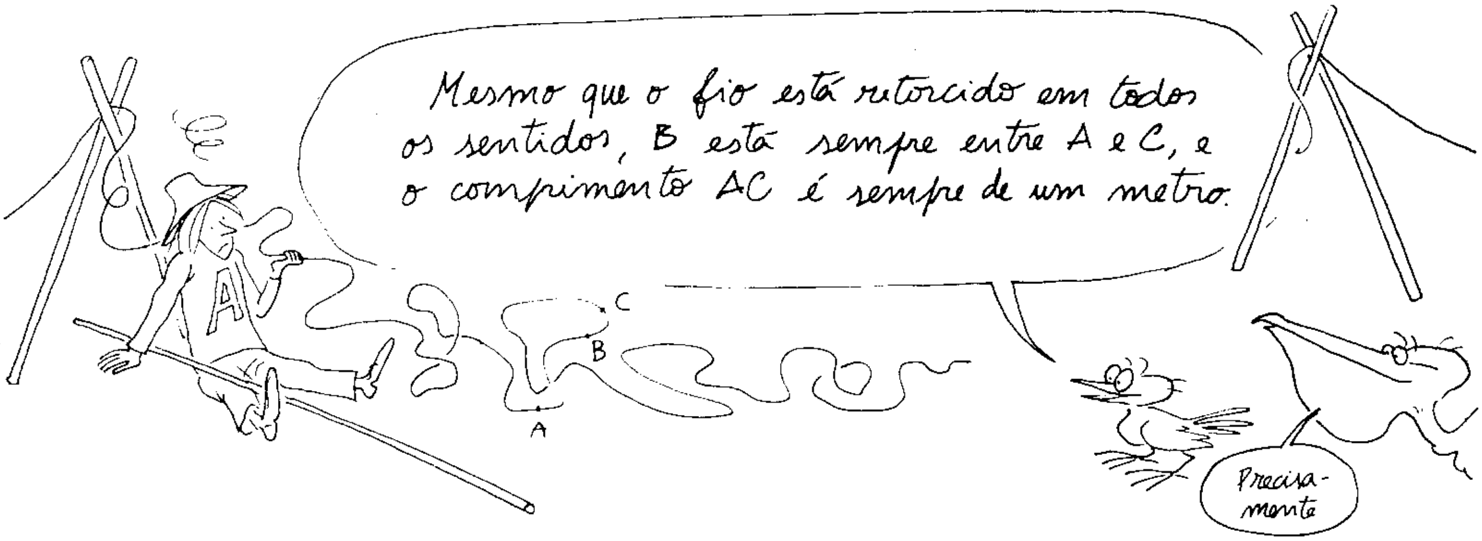

Suponhamos que a mosca segue uma curva (C) traçada sobre a esfera. Poder-se-á assinalar a sua posição com a ajuda duma única coordenada (a sua distância s tem um ponto de origem, calculado algebricamente)

Uma curva é uma imagem dum espaço a UMA dimensão.

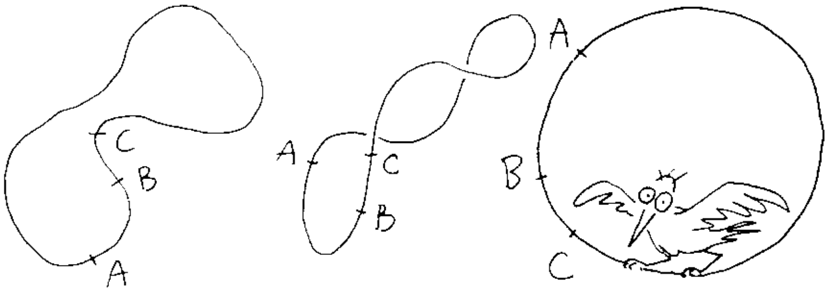
Esse espaço unidimensional está mergulhado num espaço bidimensional (esfera), ele próprio IMERSO num espaço tridimensional.

Assim o espaço em que nos deslocamos poderia estar mergulhado num espaço de dimensão superior sem que tivéssemos consciência disso.





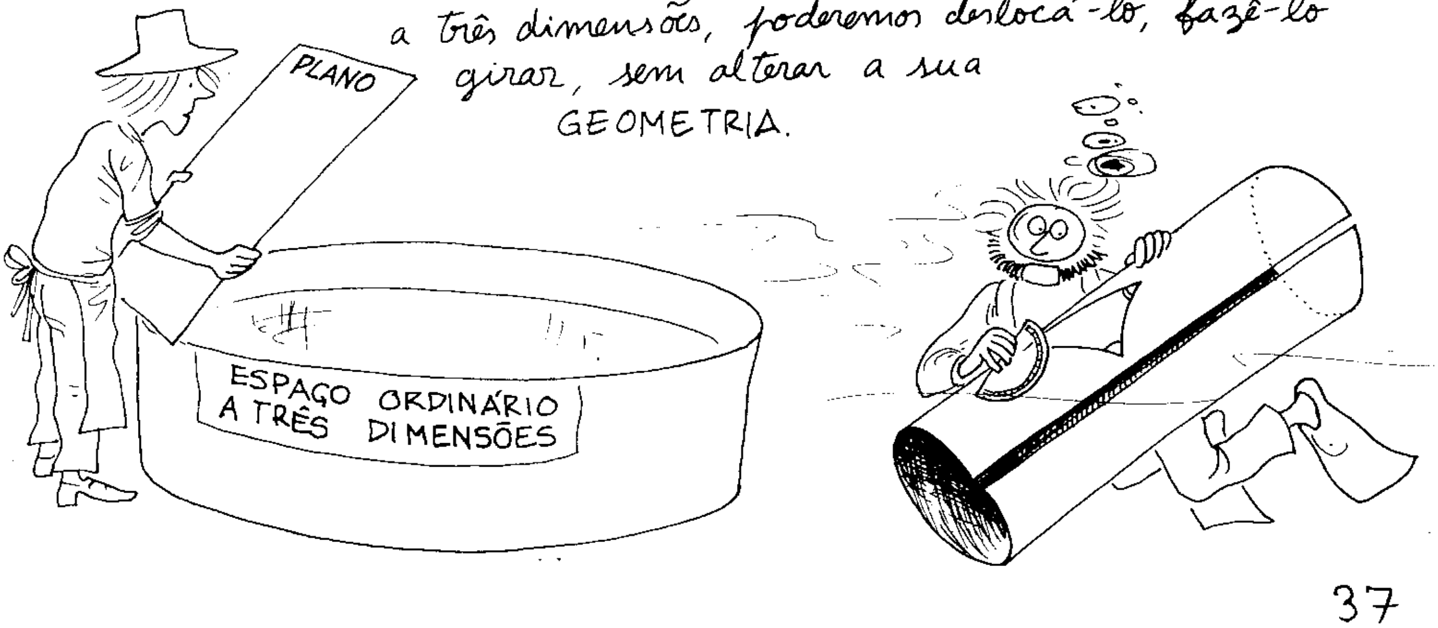

Isto sugere que certas propriedades podem ser independentes da maneira como se efectua a imersão.



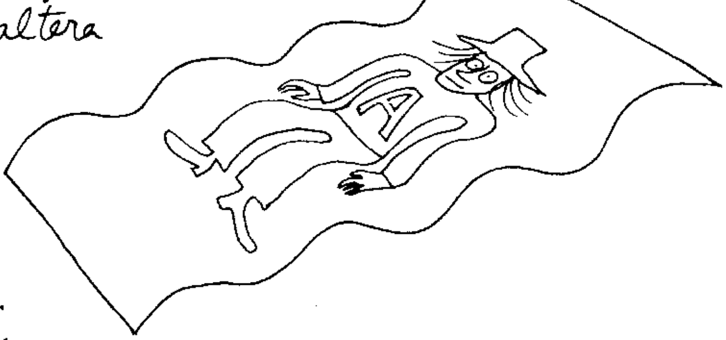

Eis aqui diferentes maneiras de MERGULHAR uma CURVA FECHADA no espaço ordinário. Este FECHO é uma propriedade independente da imersão.

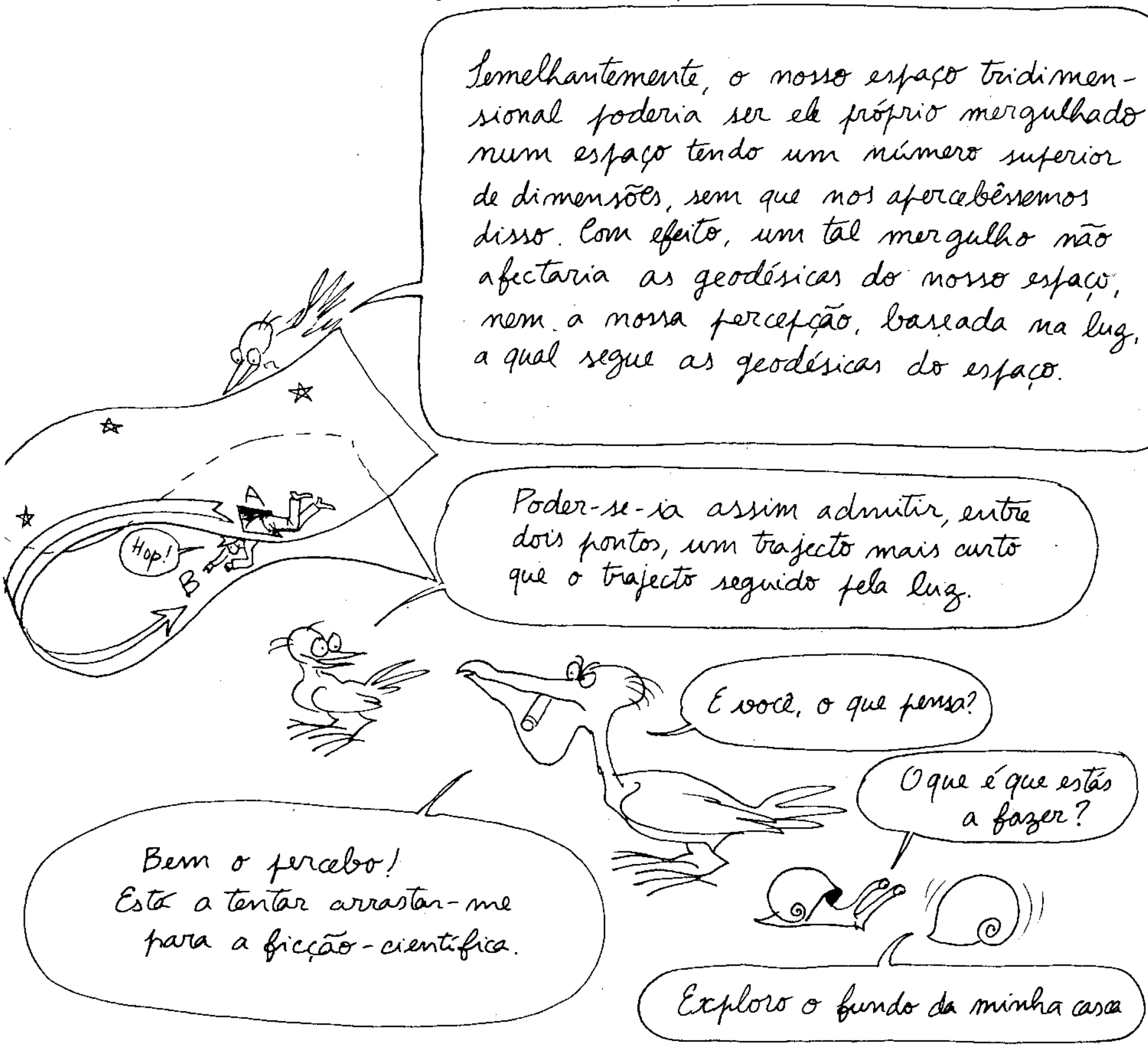
Mas nós não queremos esticar ou encolher o fio, a fim de não alterar os COMPRIMENTOS entre pontos sucessivos. Vamos agora MERGULHAR SUPERFÍCIES no espaço ordinário a três dimensões.

Se MERGULHARMOS um PLANO no espaço ordinário a três dimensões, poderemos deslocá-lo, fazê-lo girar, sem alterar a sua GEOMETRIA.

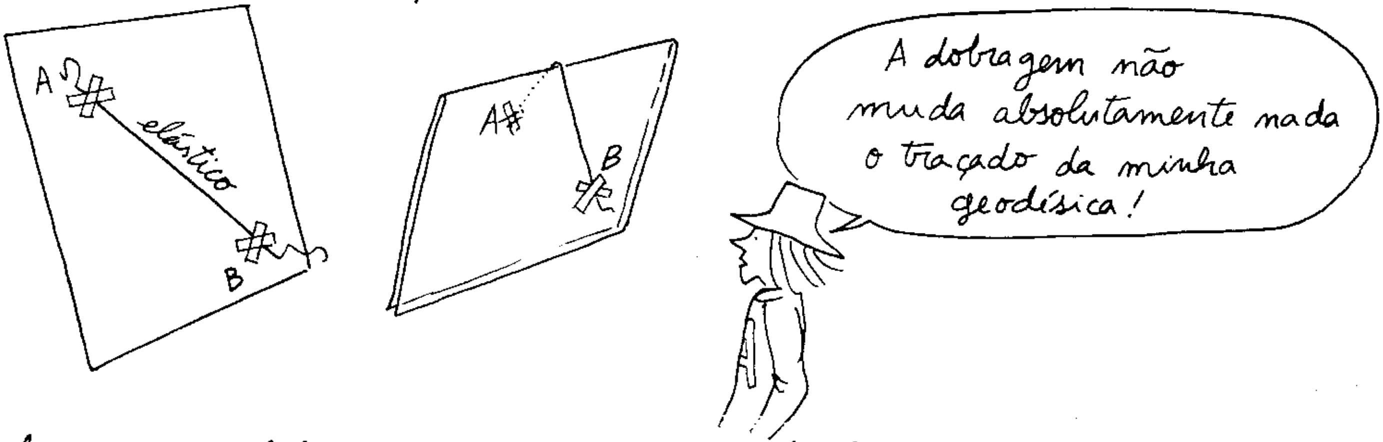


Verificámos que o facto de modificar um plano para um cilindro não altera nem as geodésicas, nem os ângulos.
Dentro desta óptica, uma chapa ondulada tem sempre uma geometria PLANA, EUCLIDIANA.
Um habitante dum tal espaço bi-dimensional, euclidiano, não teria nenhuma consciência das translações, rotações ou ondulações, que não seriam mais do que variações do modo de mergulhar no espaço tridimensional.



Tomemos um elemento plano e dobremo-lo:

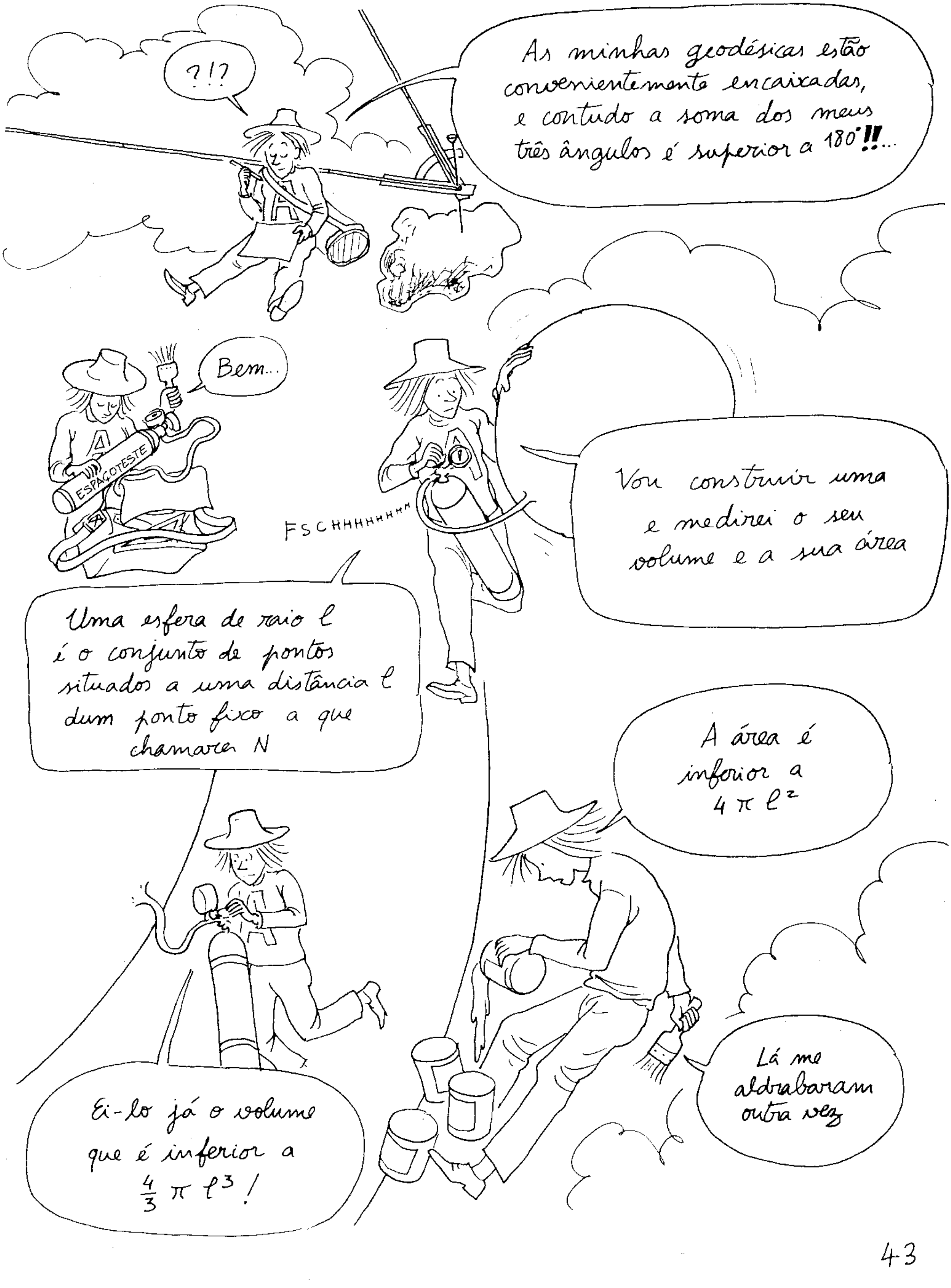



Sobre uma folha de papel, com a ajuda duma régua, traça todo um conjunto de rectas, de geodésicas, e depois amarrota a folha. Terá sempre debaixo dos olhos as geodésicas da superfície, com dobras ou sem elas.

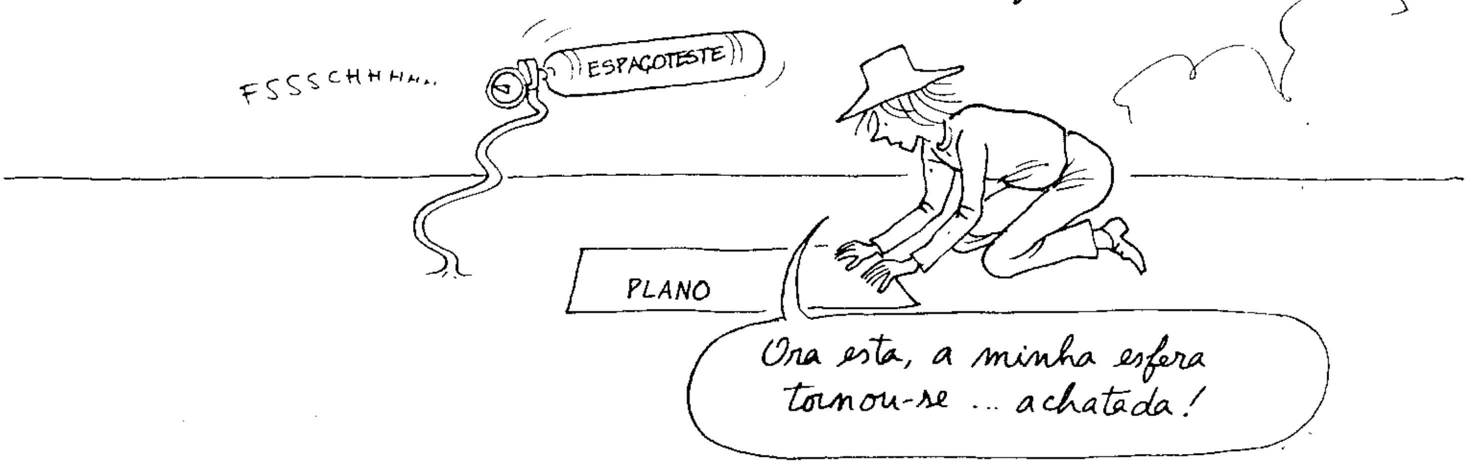

O senhor Anselmo?
Certamente
Sou o representante da Casa Euclides & Cª. Sabemos que teve alguns aborrecimentos com o nosso material.
EUCLIDES & Cª
Tenho aqui novos artigos que, desta vez, serão do seu inteiro agrado.
Vá mostrando
O Futuro está no tridimensional. Bem vê, a geometria a duas dimensões está um pouco...
... ultrapassada
FLUÍDO CÓSMICO
ESPAÇOTESTE
O nosso novo estojo de geodésicas...
... compõe-se de barras rígidas, ajustando-se perfeitamente umas nas outras.
Que lhe permitirão não se desviar nem para a direita, nem para a esquerda, nem para cima, nem para baixo, mas seguir SEMPRE EM FRENTE!


Para medição das superfícies, esta tinta. Cem gramas por metro quadrado, exactamente.
engenhoso
Para a medição dos volumes, encha isto de gás. Você lerá directamente o valor no debímetro do ESPAÇOTESTE
E não se esqueça: área da esfera: $4\pi l^2$, volume: $\frac{4}{3}\pi l^3$
entendido
EUCLIDES & Cª
que trabalho!
Anselmo aterrou, desta vez, num espaço tridimensional e nós vamos segui-lo na sua exploração.

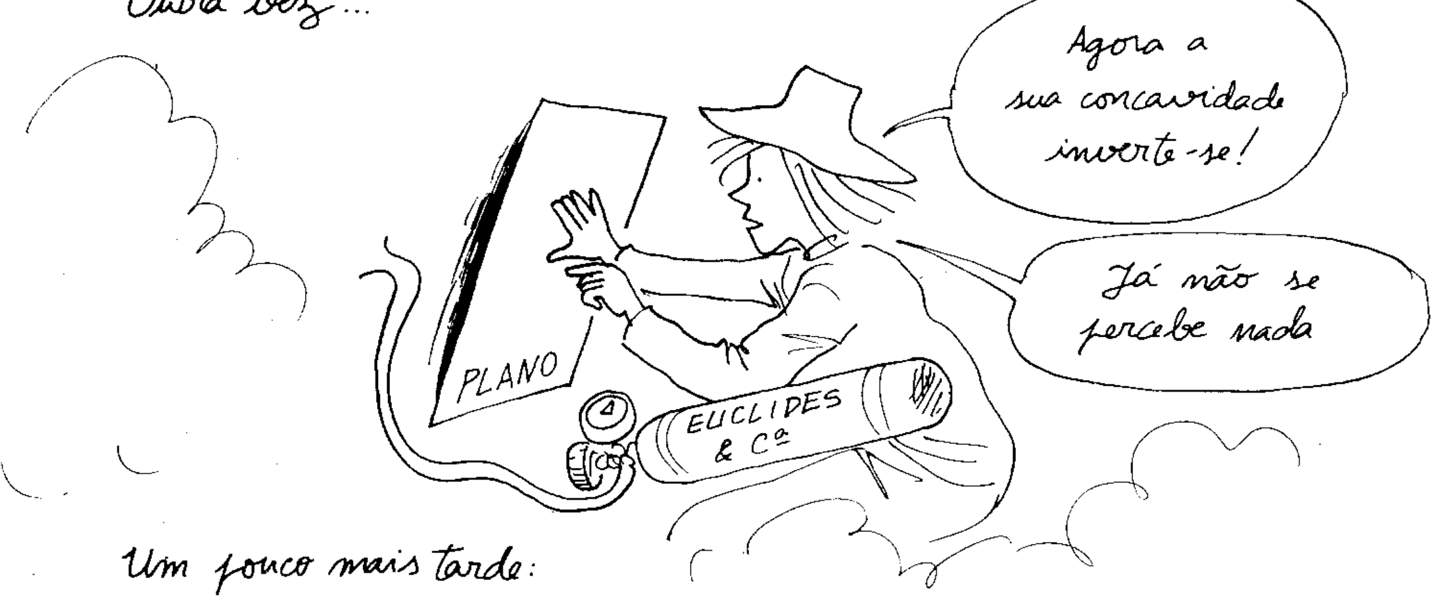

Material do bom
E estas varas têm exactamente um metro
Mas, após ter colocado uma boa quantidade de varas...
Lá recomeça isto novamente!
A minha geodésica fecha-se sobre si própria!
Um espaço tridimensional fechado?
é o fim de tudo
Anselmo, que tinha parado sobre um asteróide para comer uma bucha, decidiu voltar ao método da medição dos ângulos
EUCLIDES & Cº
Como há momentos, vou utilizar três GEODÉSICAS para construir um TRIÂNGULO


?!?
As minhas geodésicas estão convenientemente encaixadas, e contudo a soma dos meus três ângulos é superior a 180°!!...
Bem...
ESPAÇOTESTE
FSCHHHHHHHH
Vou construir uma e medirei o seu volume e a sua área
Uma esfera de raio l é o conjunto de pontos situados a uma distância l dum ponto fixo a que chamarei N
A área é inferior a 4 π l²
Ei-lo já o volume que é inferior a 4/3 π l³!
Lá me aldrabaram outra vez

Anselmo aumenta novamente o raio ℓ da esfera




Outra vez ...




Um pouco mais tarde:



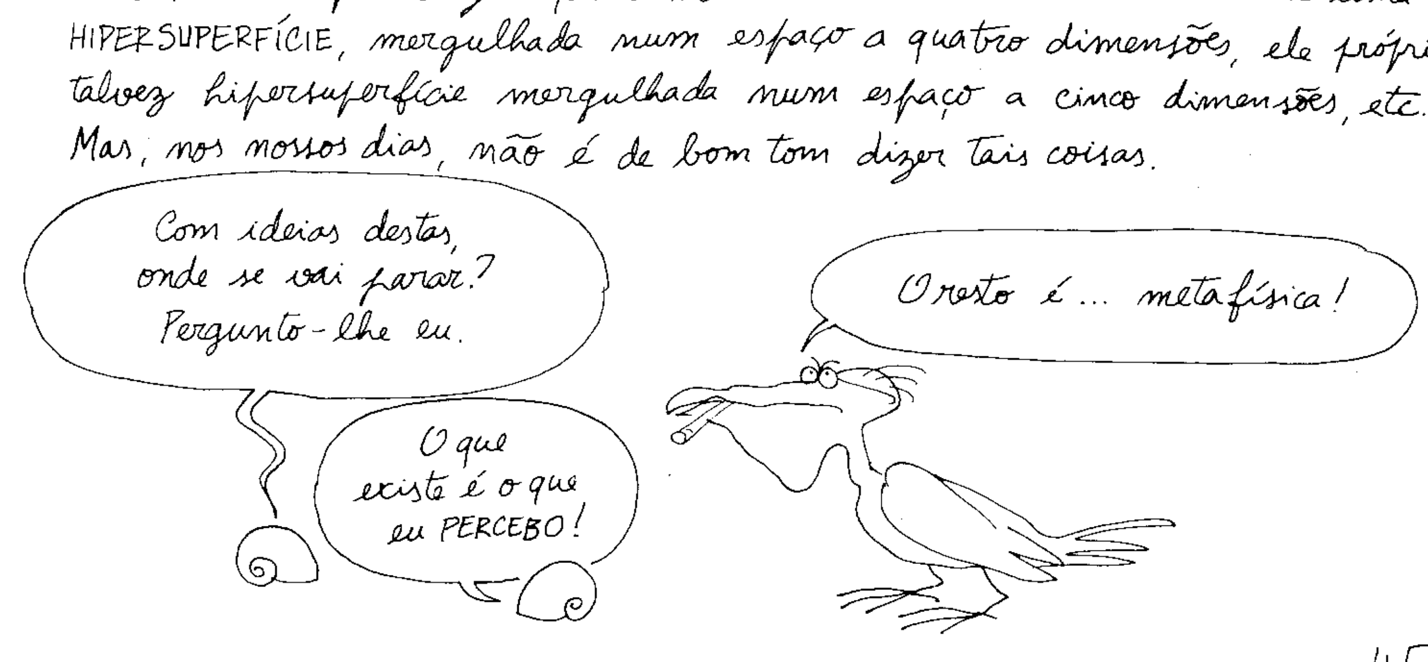
Assim, enchendo um balão monstruoso num espaço a três dimensões, Anselmo acabou por se encontrar ... DENTRO dele!

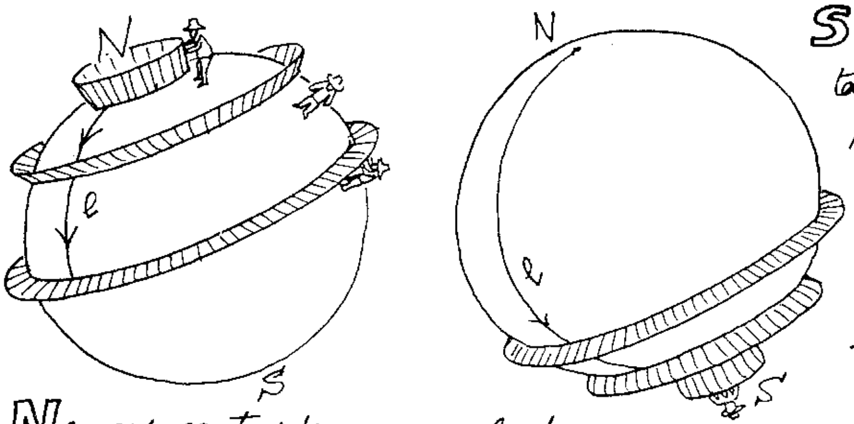
Se ele não tivesse fechado a garrafa a tempo, teria morrido esmagado, como acabara por se encontrar aprisionado pela sua cerca, página 13.

Com a melhor vontade do mundo, agora não se pode mais VISUALIZAR a CURVATURA deste espaço tridimensional. As suas geodésicas fecham-se e o seu volume não representa mais que um número FINITO de metros cúbicos, assim como a superfície do nosso planeta, superfície fechada, não oferece mais que um número FINITO de metros quadrados.

A soma dos ângulos dum triângulo, neste espaço a três dimensões, é superior a 180°. Para "VER" a sua curvatura, seria preciso a capacidade de ver a quatro dimensões.


Podemos sempre dizer que o nosso UNIVERSO a três dimensões é uma HIPERSUPERFÍCIE, mergulhada num espaço a quatro dimensões, ele próprio talvez hipersuperfície mergulhada num espaço a cinco dimensões, etc... Mas, nos nossos dias, não é de bom tom dizer tais coisas.





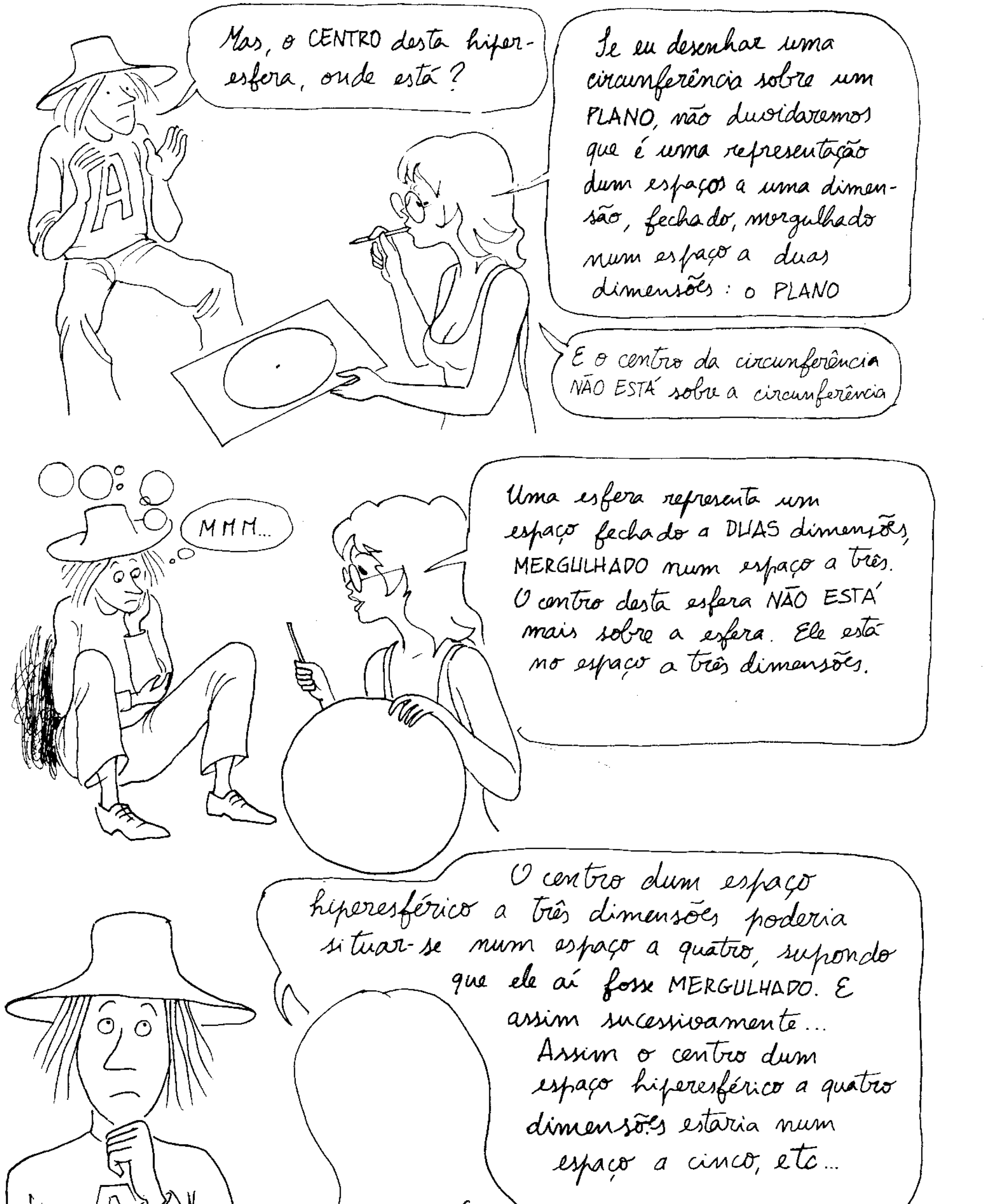

Sobre a sua esfera, aumentando o raio ℓ do seu domínio, Anselmo acabara por se encontrar nos antípodas S do ponto N, centro do seu círculo, e asfixiado pela sua própria cerca.

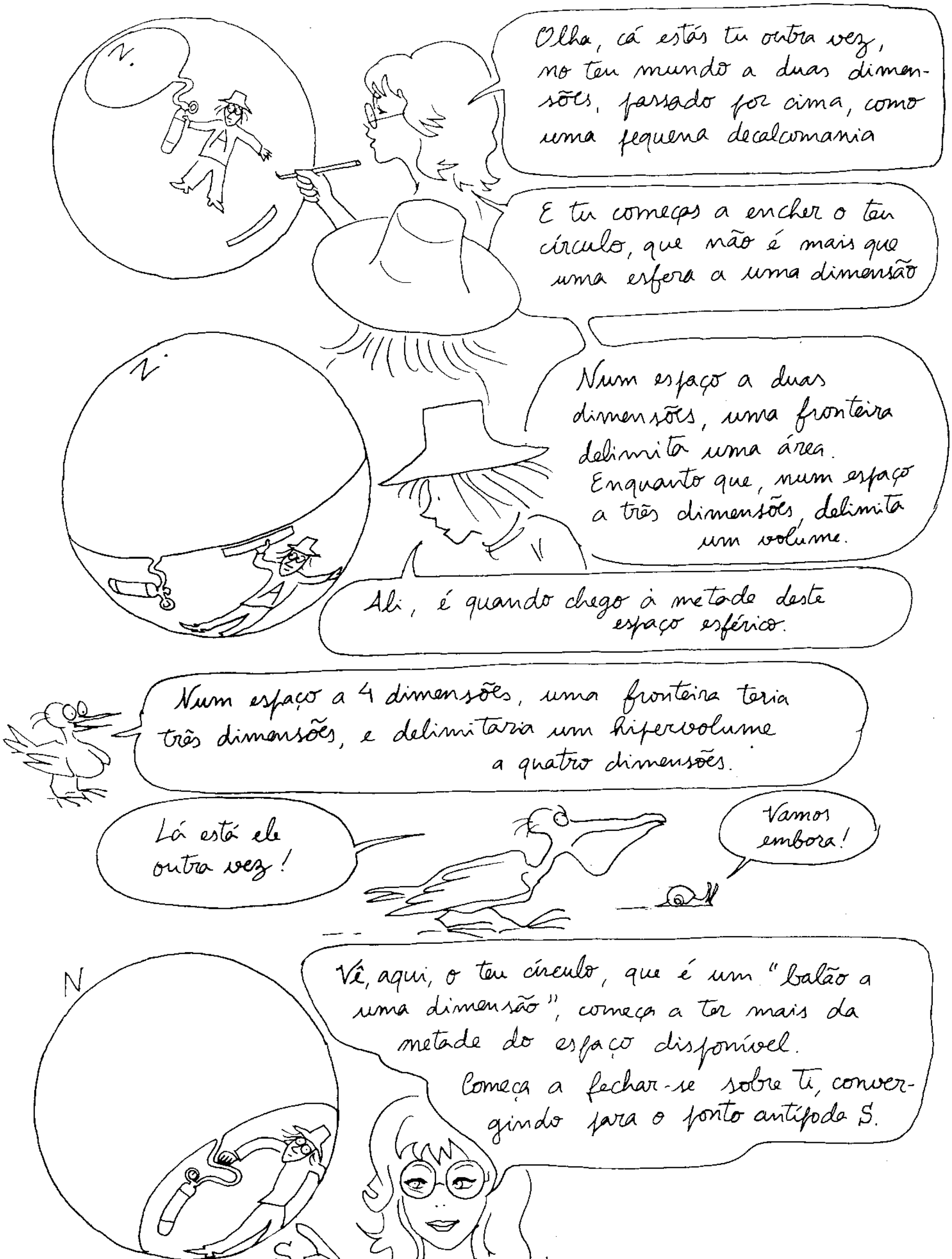
No espaço tridimensional de curvatura positiva, a mesma coisa: Neste espaço bidimensional que é a esfera, Anselmo encontrou o EQUADOR quando ele cercara a metade da superfície disponível. O EQUADOR do espaço tridimensional HIPERESFÉRICO também existe. Anselmo chega lá logo que o seu balão ocupa a metade do volume disponível. Sobre a esfera, o círculo equador surgia-lhe como uma RECTA. Do mesmo modo, no espaço hiperesférico, o "balão equador" terá para ele o aspecto dum PLANO.

Para lá do equador a CONCAVIDADE do balão inverte-se e ele vem automaticamente centrar-se sobre o ponto antípoda S do ponto N, centro do balão.



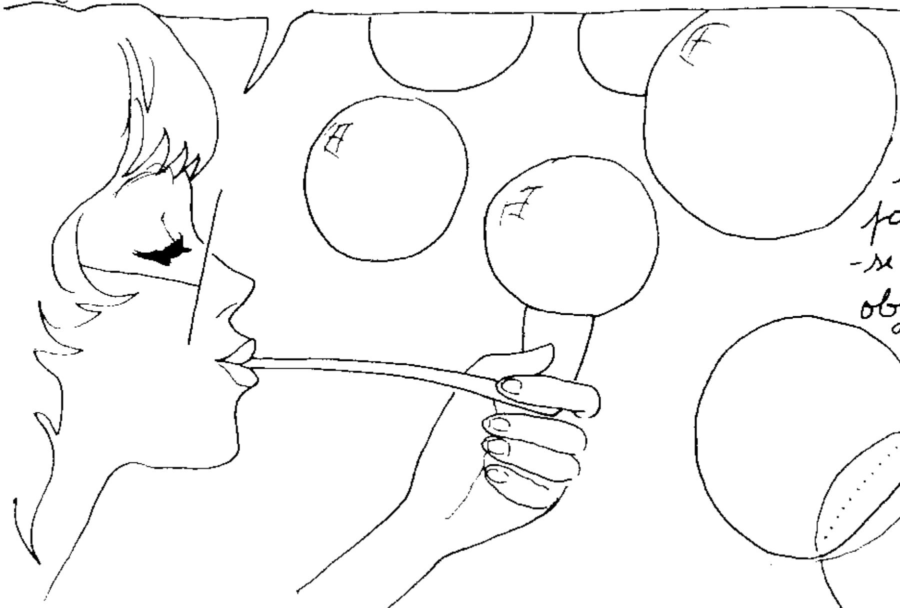
Chatices?
Quer dizer... tudo se mistura um pouco na minha cabeça.
Chamo-me Sofia, as curvaturas de todas as espécies são a minha especialidade.
A navegação nas hiperesferas, surpreende sempre um pouco inicialmente. É preciso evitar o bloqueamento. Isso faz-se pouco a pouco.
Pois...
Perdi um pouco o fio à...


Mas, o CENTRO desta hiper-esfera, onde está?
Se eu desenhar uma circunferência sobre um PLANO, não duvidaremos que é uma representação dum espaços a uma dimensão, fechado, mergulhado num espaço a duas dimensões : o PLANO
E o centro da circunferência NÃO ESTÁ sobre a circunferência
MMM...
Uma esfera representa um espaço fechado a DUAS dimensões, MERGULHADO num espaço a três. O centro desta esfera NÃO ESTÁ mais sobre a esfera. Ele está no espaço a três dimensões.
O centro dum espaço hiperesférico a três dimensões poderia situar-se num espaço a quatro, supondo que ele aí fosse MERGULHADO. E assim sucessivamente... Assim o centro dum espaço hiperesférico a quatro dimensões estaria num espaço a cinco, etc...

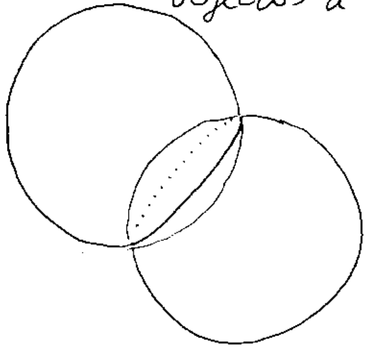

Olha, cá estás tu outra vez, no teu mundo a duas dimensões, passado por cima, como uma pequena decalcomania
E tu começas a encher o teu círculo, que não é mais que uma esfera a uma dimensão
Num espaço a duas dimensões, uma fronteira delimita uma área. Enquanto que, num espaço a três dimensões, delimita um volume.
Ali, é quando chego à metade deste espaço esférico.
Num espaço a 4 dimensões, uma fronteira teria três dimensões, e delimitaria um hipervolume a quatro dimensões.
Lá está ele outra vez!
Vamos embora!
N
Vê, aqui, o teu círculo, que é um "balão a uma dimensão", começa a ter mais da metade do espaço disponível. Começa a fechar-se sobre ti, convergindo para o ponto antípoda S.
S

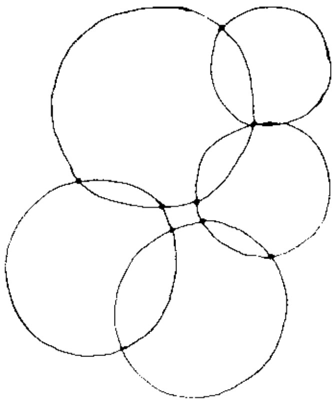

O mesmo acontece, no meu espaço curvo a três dimensões, logo que eu injecto mais da metade do volume total, o balão fecha-se sobre mim, convergindo para o ponto antípoda
Porque a esfera, neste espaço tridimensional curvo, tem evidentemente dois centros que são antípodas.
Compreendi!
?!!?
Enfim, não sei exactamente o que é que compreendi, mas tenho a impressão de ter sido alguma coisa
Que angústia!
Nada disso, Anselmo, quando há mais de três dimensões, **COMPREENDER É EXTRAPOLAR**
Extrapolo sem o saber
O desenho, é você que vai fazê-lo... ... na sua cabeça!

Agora, tomo um espaço a três dimensões onde coloco esferas a duas dimensões, um bando de pequeninos universos bidimensionais.



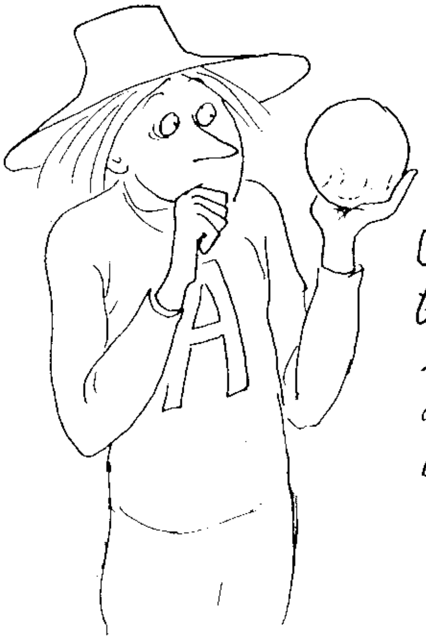
Estes universos podem interpenetrar-se. Os seus pontos comuns repartem-se segundo circunferências, objectos a uma dimensão.





Do mesmo modo, circunferências, objectos a uma dimensão, colocadas sobre uma folha de papel (2 dimensões) cortam-se segundo PONTOS. (É costume dizer-se que o PONTO tem dimensão zero.)

Uma esfera poderá então ser considerada como a intersecção de duas "bolas" tridimensionais, evoluindo num espaço a quatro.

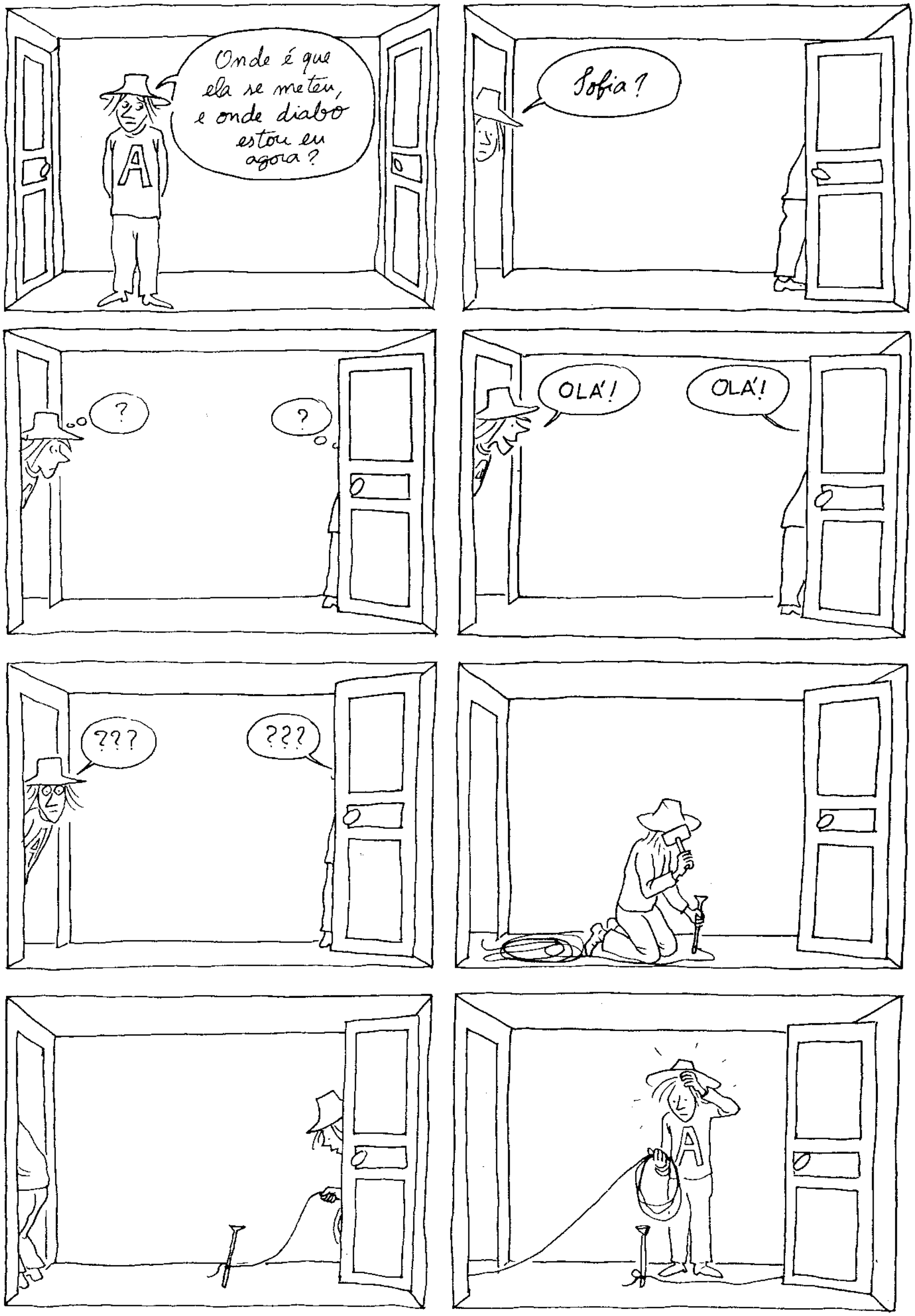


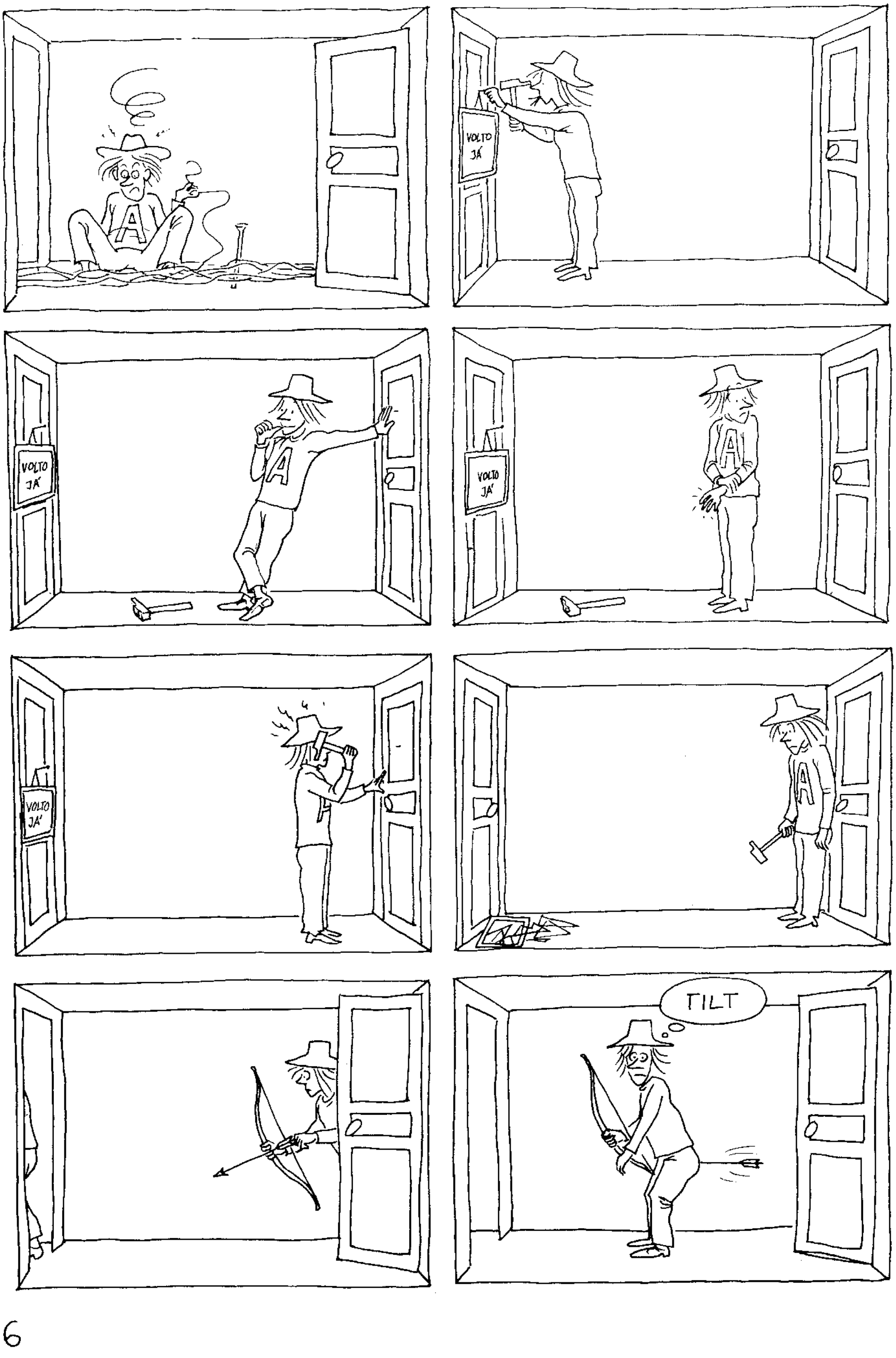

E assim sucessivamente: um espaço tridimensional curvo, hiperesférico, poderá ele próprio ser considerado como a intersecção de duas bolas de sabão a quatro dimensões, evoluindo num espaço a cinco.


Anselmo e Sofia, após terem conhecido as vertigens da extrapolação, continuam a exploração de novos mundos tridimensionais.
a matemática já não é o que era dantes
Ora vê, isto é um rolo de fita-gomada tridimensional, para as geodésicas. A parte colante está na extremidade... evidentemente.
Olha lá, neste espaço, as geodésicas não parecem fechar-se. E entretanto encho o balão do ESPAÇOTESTE, o volume debitado é superior a $\frac{4}{3}\pi l^3$, enquanto que a área é superior a $4\pi l^2$. Quanto à soma dos ângulos dum triângulo, ela é desta vez inferior a 180°
Lembra-te da página 23, tu estás novamente num espaço de curvatura NEGATIVA.


RESUMO:
Nos espaços a três dimensões, tu sabes que podem acontecer muitas coisas. É como nas superfícies, que são espaços a duas dimensões Assim, se a soma dos ângulos dum TRIÂNGULO, num espaço a três dimensões, é superior a 180° nós diremos que a curvatura é positiva. Formando aí uma esfera de raio $\ell$, encontrarás pelo ESPAÇOTESTE um volume inferior a $\frac{4}{3}\pi \ell^3$ e uma área inferior a $4\pi \ell^2$. Este espaço, dito HIPERESFÉRICO, fechar-se-á sobre si próprio.
Se a soma dos ângulos dum triângulo, num espaço tridimensional, é inferior a 180°, então a curvatura será negativa. O volume duma esfera de raio $\ell$ será superior a $\frac{4}{3}\pi \ell^3$ e a sua área superior a $4\pi \ell^2$. Este espaço terá uma extensão infinita.
Mas se a soma dos ângulos perfaz 180°, então o espaço é estupidamente euclidiano.
tanta coisa para chegar aí!...

# É NECESSÁRIO QUE UM ESPAÇO SEJA ABERTO OU FECHADO !...


Onde é que ela se meteu, e onde diabo estou eu agora?
Sofia?
?
?
OLÁ!
OLÁ!
???
???

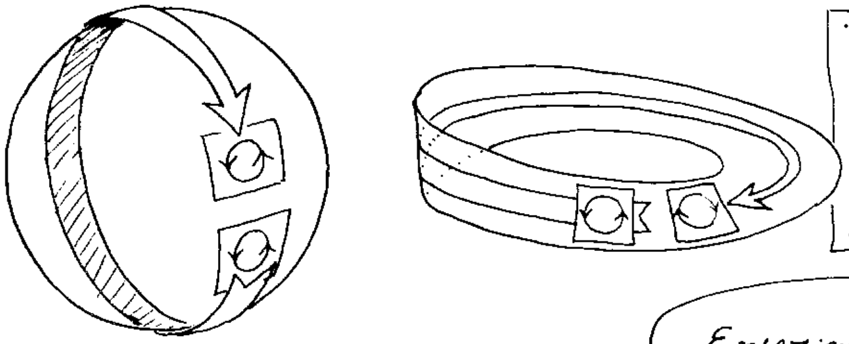

VOLTO JÁ
VOLTO JÁ
VOLTO JÁ
VOLTO JÁ
TILT


Ah, sim, Anselmo tinha sido projectado num espaço cilíndrico a três dimensões.
Ainda que euclidiano, sem curvatura, (a soma dos ângulos dum triângulo aí é igual a 180°) esse mundo fecha-se sobre si próprio.
TILT
Bem, admitamos... Mundos esféricos, hiperbólicos, cilíndricos. Deu-se a volta toda, não?
GEOMETRIA
Você acredita?
Façamos um pequeno giro no bidimensional
Que é isso?!
NUVENS

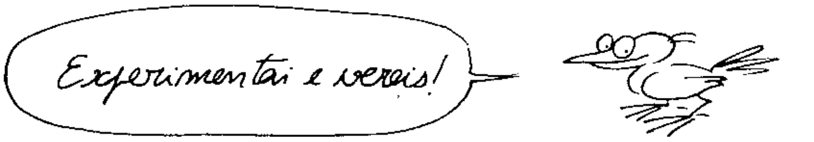

DE PERNAS PARA O AR:
Caro Anselmo,
Eis aqui um caracol domesticado. Vendando-lhe os olhos, farás com que ele não ande nem para a direita, nem para a esquerda. E assim ele traçará uma perfeita GEODÉSICA.
Até muito breve
Sofia
Vamos lá
PONTO DE PARTIDA DA GEODÉSICA
De facto, andar sempre em frente ou seguir o mais curto caminho entre dois pontos, é idêntico
Mas... onde se meteu aquele animal?!
Toca a andar!


Isto fecha-se, como há momentos.
Soma dos ângulos: 180°. É euclidiana, esta coisa. Mais uma vez o golpe do cilindro!
Assim, não!...
!?!
Ora esta!
PONTO DE PARTIDA DA GEODÉSICA
Anselmo, desta vez, encontrou-se num ESPAÇO BIDIMENSIONAL NÃO ORIENTÁVEL. A imagem mais conhecida dum tal espaço é a banda de Möbius (1830). A ideia escapou aos Gregos, que todavia tinham pensado em tudo.
PONTO DE PARTIDA DA GEODÉSICA
Sofia, tira-me daqui

Tracemos uma circunferência sobre uma superfície e orientemo-la arbitrariamente. Imaginemos que se trata de uma pequena decalcomania que podemos fazer deslizar à vontade sobre uma superfície. Se a circunferência se mantiver idêntica a si própria, diremos que essa superfície é ORIENTÁVEL (é o caso da esfera, do cilindro, do plano, etc...). Mas se esta decalcomania desliza sobre uma fita de Möbius, passa-se tudo doutro modo:



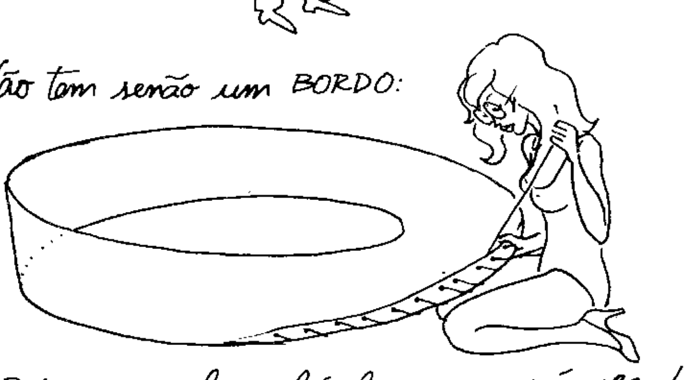
De cada vez que dá a volta a este universo a duas dimensões, a circunferência muda de orientação





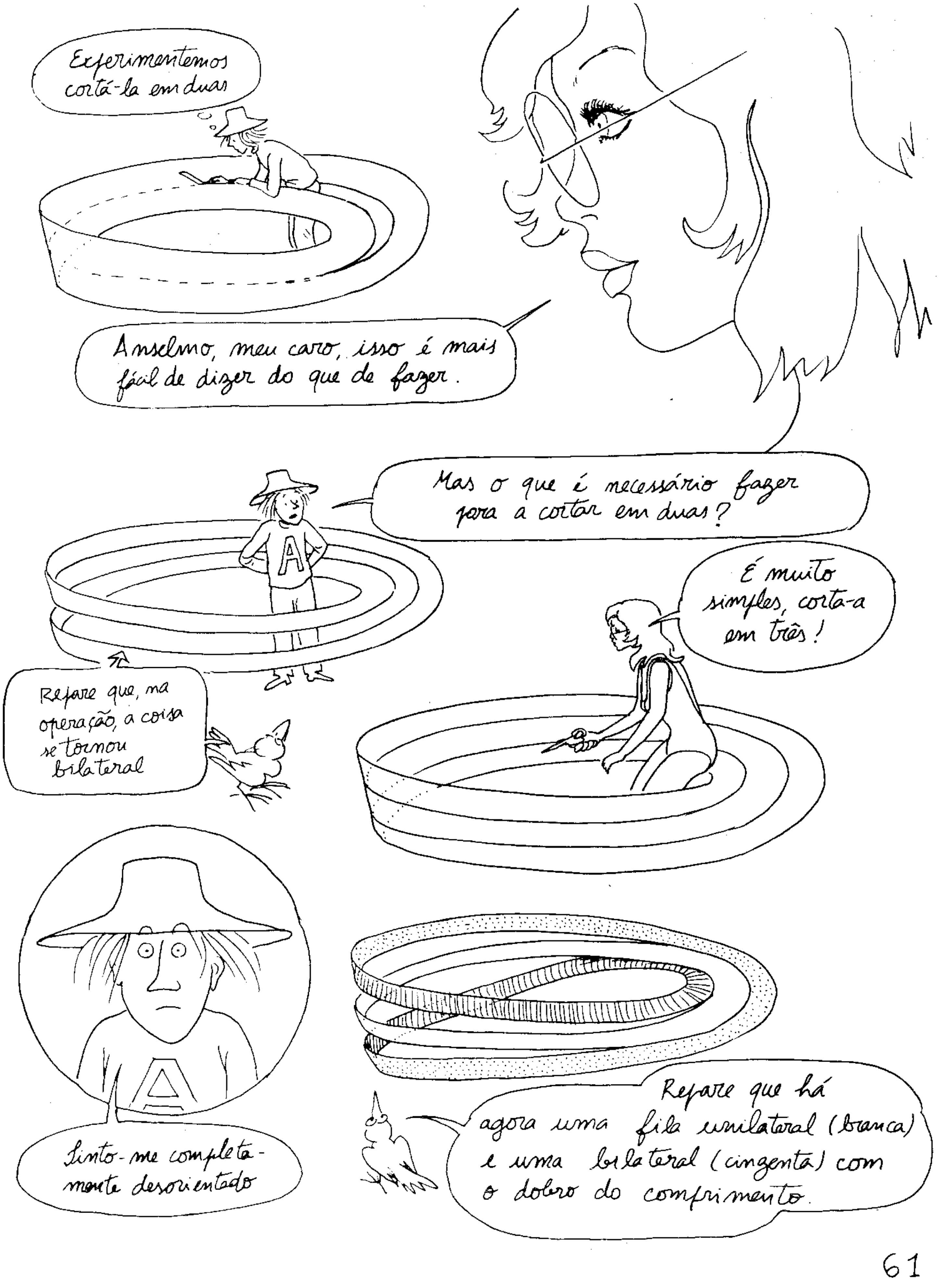
Correlativamente, não se pode pintar uma banda de Möbius de duas cores diferentes: ela não tem senão um lado, é UNILATERAL.

Não tem senão um BORDO:



Pode-se embainhá-la uma só vez!



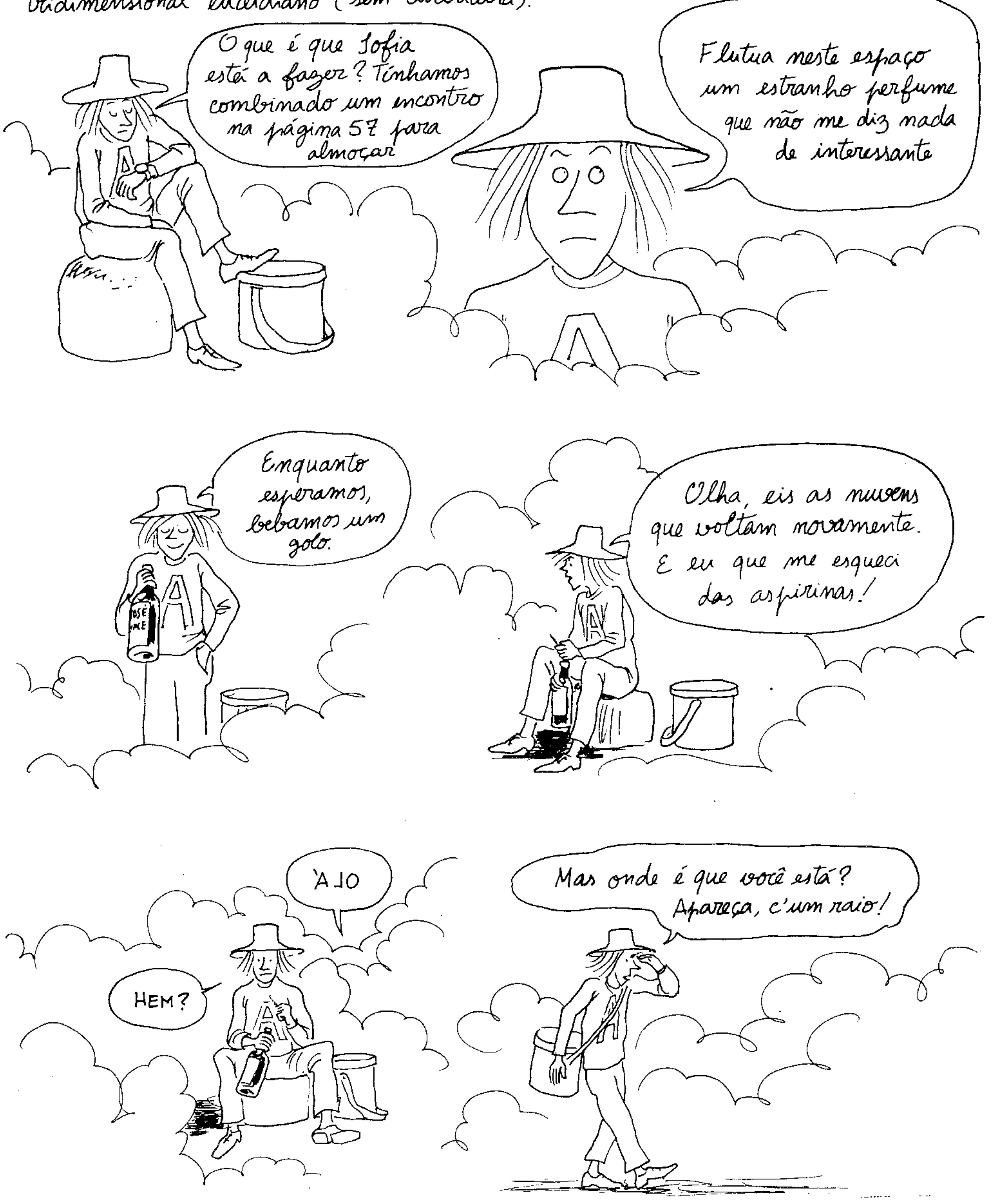


Experimentemos cortá-la em duas
Anselmo, meu caro, isso é mais fácil de dizer do que de fazer.
Mas o que é necessário fazer para a cortar em duas?
Repare que, na operação, a coisa se tornou bilateral
É muito simples, corta-a em três!
Sinto-me completamente desorientado
Repare que há agora uma fita unilateral (branca) e uma bilateral (cinzenta) com o dobro do comprimento.

Depois deste passeio sobre a banda de Möbius, voltemos aos espaços euclidianos (sem curvatura) a três dimensões:

# A orientação do espaço:

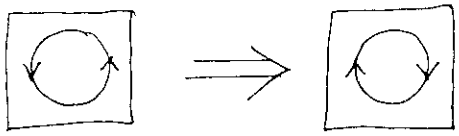
**A**companhemos Anselmo na sua exploração dum novo mundo tridimensional euclidiano (sem curvatura).



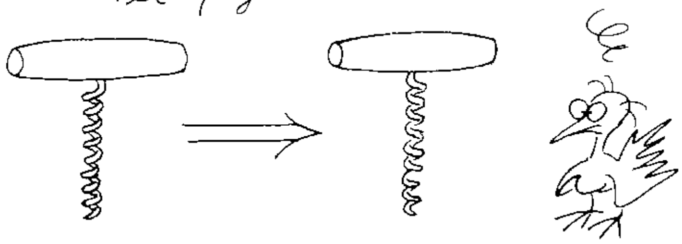

IH IH IH
!IH !IH !IH
Vou fazer alguns testes
Soma dos ângulos 180°
área $4\pi e^2$
volume $\frac{4}{3}\pi e^3$
bem, regressemos
É euclidiano
Mas que sorte, encontrei a minha garrafa
Mas o que é que se passa com este saca-rolhas!
Mas é o meu saca-rolhas, reconheço-o.
Mas o que é que lhe aconteceu?
OBSERVAI-O COM ATENÇÃO!
Há problema?
eu, bem...

É um rosé da Provença, de qualidade vulgaríssima, mas enfim...
você tem aí um saca-rolhas?
eu... sim
Se todos os cangurus do mundo se unissem ♫
BLUB BLUB BLUB
Não notou nada de anormal?
Não, você está só um pouco mal encarado, é tudo
Tome um pouco de bissulfito de parmesão duas vezes ao dia.
Que tudo lhe corra bem
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
Alguém mexeu no meu saca-rolhas e um canguru bêbedo emborcou o meu rosé. O que é que isto quererá dizer?
Irra!
SBLING!
NÓS NÃO SABERÍAMOS MAIS COMO INCITAR-VOS A OBSERVAR ESTE SACA-ROLHAS COM A MAIOR ATENÇÃO

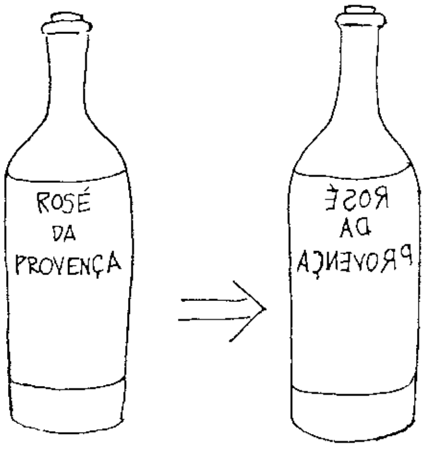
A banda de Möbius (espaço não orientável a duas dimensões) tem portanto um equivalente tridimensional. Sobre a banda de Möbius, logo que a circunferência decalcomania dava a "volta" a este espaço euclidiano, a sua orientação mudava:



Ver página 54



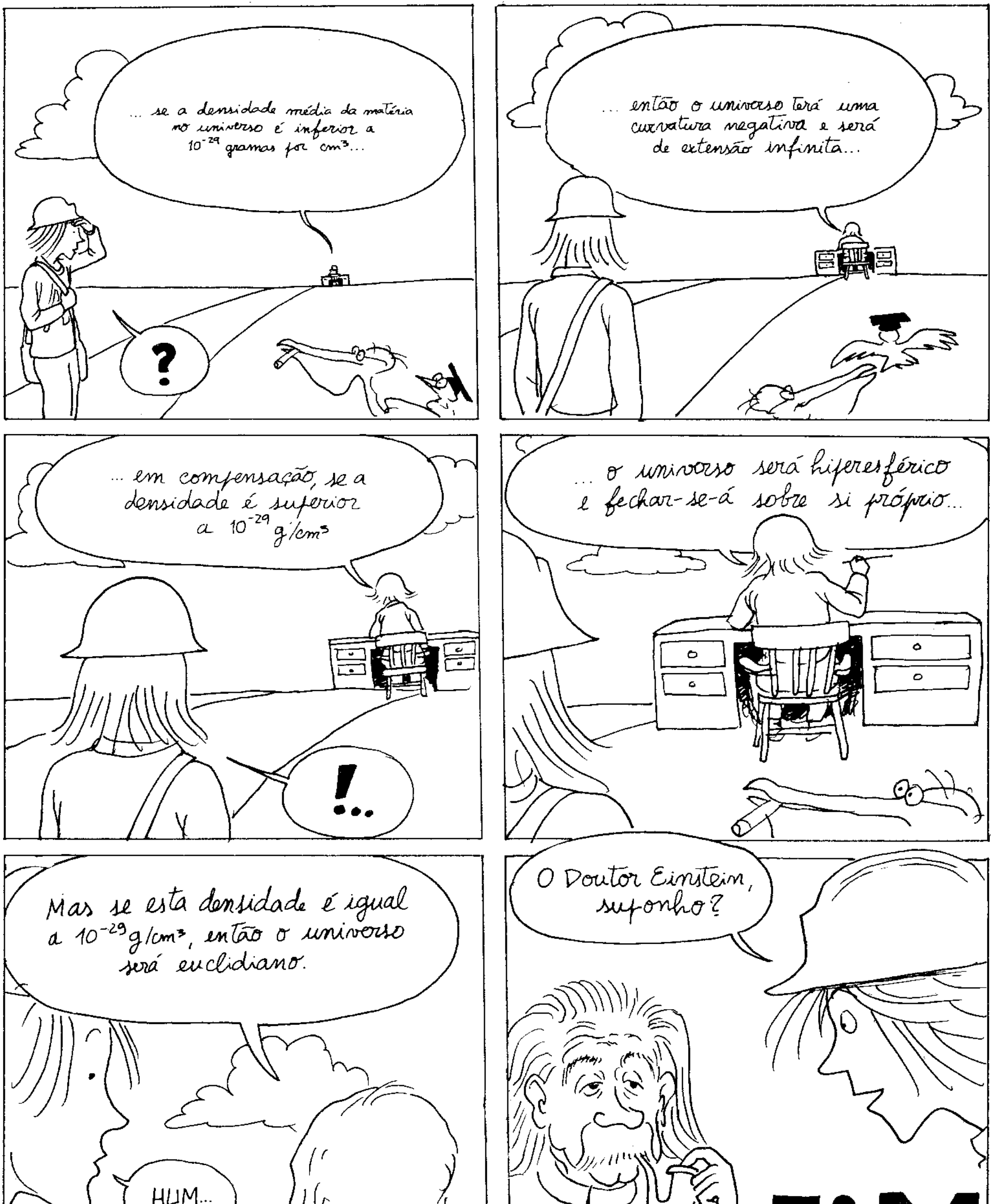
Verificar-se-á que estes objectos estão como "ao espelho"!
O saca-rolhas, ou o próprio Anselmo, podem ser considerados como "decalcomanias a três dimensões". De cada vez que um objecto dá a "volta" a este espaço tridimensional, a sua orientação inverte-se.
Como nós acompanhamos Anselmo no seu périplo circum-espacial, é normal que reencontremos, com ele, a garrafa "ao espelho" e o saca-rolhas aparafusando num sentido não habitual.
Uma segunda "volta" a este universo dar-nos-ia a ~~visão~~ visão inicial das coisas (com a condição de deixarmos os objectos no seu lugar).




Anselmo e o canguru (da espécie dos antípodas) habitam o mesmo espaço, mas diferem neste sentido: o que é "o direito para o canguru" é "o avesso para Anselmo", e vice-versa.


EPÍLOGO:
Anda tudo ao contrário. Não há mais nem direita, nem esquerda, nem avesso nem direito. Aonde é que isto levará? E qual o caminho?
É preciso seguir as geodésicas, Anselmo, as geodésicas da tua vida.
Jamais alguém me fará acreditar que o Universo seja uma coisa tão retorcida. Isso são delírios de matemático.
Isto é banda desenhada!
Porquê preocupações com tudo isto? É evidente que o espaço É euclidiano (*)
(*) Afirmação feita em 1830 por Ostrogradsky, professor titular da cadeira de matemáticas em Petrogrado, após leitura dos trabalhos de Riemann e Lobatchevsky.


Admitamos que o Universo é totalmente diferente do que é, já imaginou tudo aquilo que tem sido ensinado nas escolas?!?
que calamidade!
E depois, o que interessa, na realidade, é a vida. E, para a vida de todos os dias, você estará de acordo comigo que...
Mas o que é que há por detrás de tudo isto?
A FÍSICA, meu querido...
VOU tirar isto a limpo!
Avante para o CONCRETO
Está aqui alguém?


... se a densidade média da matéria no universo é inferior a $10^{-29}$ gramas por $cm^3$...
?
... então o universo terá uma curvatura negativa e será de extensão infinita...
... em compensação, se a densidade é superior a $10^{-29}$ $g/cm^3$
!..
... o universo será hiperesférico e fechar-se-á sobre si próprio...
Mas se esta densidade é igual a $10^{-29}$ $g/cm^3$, então o universo será euclidiano.
HUM...
O Doutor Einstein, suponho?
Sim?...
FIM