

**GEOMETRIA
EM
DIMENSÃO 2**

Celso Melchiades Doria
cmdoria@mtm.ufsc.br

Sumário

1	Introdução	3
1.0.1	Teorema Principal	7
1.1	Fluxo de Ricci	10
1.2	Comentários	11
2	Conceitos Básicos	13
2.1	Grupos	13
2.1.1	Subgrupos	18
2.1.2	Classes Laterais e Teorema de Lagrange	20
2.1.3	Homomorfismos de Grupos	21
2.2	Métricas Riemannina	23
2.2.1	Grupo de Isometria	30
2.2.2	Aplicações Conformes	31
2.3	Ações de Grupos	31
3	Geometria Euclideana	41
3.1	Geodésicas em \mathbb{E}^2	42
3.2	Isometrias de \mathbb{E}^2	43
3.3	Subgrupos Discretos de $Isom(\mathbb{E}^2)$	56
3.3.1	Grupos Triangulares	65
3.3.2	Classificação dos Subgrupos Discretos de $Isom(\mathbb{E}^2)$	69
3.3.3	Superfícies e Orbitais Euclidianos	74
3.4	2 ^o -método para obter as geodésicas de \mathbb{E}^2	75
4	Geometria Esférica	81
4.1	A Esfera \mathbb{S}^2 . Coordenadas	81
4.1.1	Coordenadas Esféricas	81
4.1.2	Outras Coordenadas sobre \mathbb{S}^2	84
4.2	Métrica Esférica	86
4.3	Transformações Ortogonais em \mathbb{E}^3	89
4.4	Geodésicas de \mathbb{S}^2	93
4.5	Isometrias de \mathbb{S}^2	94
4.6	Relações Métricas em \mathbb{S}^2	96

4.6.1	Área de um Triângulo Esférico	103
4.7	Subgrupos Discretos de $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$	104
4.7.1	Ações de \mathbb{Z}_n e D_n sobre \mathbb{S}^2	105
4.7.2	Grupos Triangulares	106
4.8	Superfícies e Orbitais Esféricos	113
5	Geometria Hiperbólica	115
5.1	Espaço Hiperbólico	115
5.1.1	Reflexões no Espaço Hiperbólico	117
5.2	Geodésicas de \mathbb{H}^2	121
5.2.1	Produto Angular entre Geodésicas	123
5.3	Isometrias de \mathbb{H}^2	126
5.4	Modelos para o Espaço Hiperbólico	132
5.4.1	\mathbb{H}_P^2 : O Modelo de Poincaré	132
5.4.2	\mathbb{H}_M^2 : Modelo de Minkowski	134
5.4.3	\mathbb{H}_K^2 : Modelo de Klein	135
5.5	Relações Métricas Hiperbólicas	137
5.5.1	Distância Hiperbólica	138
5.5.2	Convexidade e Ângulos em \mathbb{H}^2	141
5.5.3	Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos	141
5.5.4	Área de uma região em \mathbb{H}^2	146
5.6	Identidades Métricas	147
5.6.1	Distância de um Ponto à uma Geodésica	147
5.6.2	A Mediatriz de um Segmento	149
5.6.3	A Distância entre Geodésicas	149
5.6.4	A Bissetriz de duas Geodésicas	150
5.6.5	Relações Métricas em Polígonos	151
5.7	Geometria das Isometrias de \mathbb{H}^2	157
5.7.1	Classificação das Isometrias	157
5.7.2	Classes de Conjugação e Centralizadores	160
5.7.3	A Função Deslocamento	167
5.7.4	A Geometria do Produto de Isometrias	169
5.7.5	A Geometria dos Comutadores	174
5.8	Grupos Discretos de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$	176
5.8.1	Grupos Fuchsianos	176
5.8.2	Grupos Puramente Hiperbólicos	179
5.8.3	Conjuntos Limites. Classificação por Espécie	183
5.8.4	Polígonos Fundamentais	186
5.8.5	Polígonos de Dirichlet. Teorema de Poincaré	191
5.8.6	Região de Nielsen	192
5.8.7	Grupos de Schottky	194
5.8.8	Superfícies de genus $g \geq 2$	195
5.8.9	Grupos Triangulares	202

Capítulo 1

Introdução

Historicamente, o estudo das superfícies foi uma fonte fundamental de idéias para o desenvolvimento das técnicas empregadas na solução de problemas onde a geometria do espaço mostrou-se relevante para obtermos uma solução. Por exemplo, na navegação a geometria da superfície da esfera tornou-se indispensável para a estimativa de distâncias e posições.

Anteriormente ao estudo da superfícies, todo o Cálculo Integral e Diferencial havia sido desenvolvido sobre o \mathbb{R}^n . Em 1828, Carl Friedrich Gauss publicou o trabalho *General Investigations of Curved Surfaces* [?] no qual, pioneiramente, ele empregou as ferramentas de cálculo integral e diferencial para descobrir objetos geométricos *intrínsecos* sobre as superfícies; a curvatura sendo o principal deles. A originalidade deste trabalho, conscientemente revelada na tese de doutoramento de seu aluno Bernhard Riemann, foi demonstrar a possibilidade de haverem diversas geometrias além da euclidena. Com seu trabalho, Gauss ajudou a responder a questão

O que é uma Geometria ?

Até então, o conceito de geometria era o estabelecido pelo conjunto de axiomas formulados por Euclides em sua obra *Os Elementos* [?]. A partir destes axiomas, Euclides deduziu diversos resultados da geometria plana. Um dos axiomas, que ficou conhecido como *axioma das paralelas* afirma o seguinte (versão moderna):

Por um ponto P não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à r .

Este axioma despertou interesse por acharem que ele deveria ser demonstrado a partir dos outros. Houveram vários matemáticos brilhantes que se deixaram envolver com o problema e alguns anunciaram demonstrações erradas.

No decorrer dos séculos XVII e XVIII, a geometria plana esteve absorvida com o problema do postulado das paralelas. Segundo D'Alembert, a polêmica sobre o axioma das paralelas e a incapacidade de chegarem a um entendimento matemático para uma situação tão simples era um escândalo.

Gauss havia sido colega, em Göttingen, de Farkas Bolyai, pai de Janós Bolyai. Em 1823, Janós Bolyai escreveu para seu pai as seguintes palavras:

“Eu descobri coisas tão maravilhosas que sinto-me aturdido ... do nada eu criei um estranho mundo novo.”

J. Bolyai referia-se ao fato de ter descoberto uma geometria não-euclideana. Sendo amigo de Farkas Bolyai, pai de J. Bolyai, Gauss ao ser informado da descoberta correspondeu-se com o colega para elogiar seu filho;

“Eu considero este jovem geômetra Bolyai um gênio de primeira ordem.”

Gauss aproveitou a oportunidade para comunicar de que ele próprio já havia descoberto aquele fato mas não havia publicado. Isto pode ser verdade, pois, por volta de 1817 Gauss estava convencido que o axioma das paralelas de Euclides era independente dos outros postulados. Naquela época, Kant era um filósofo dominante e havia afirmado que *A geometria euclideana é uma necessidade inevitável do pensamento*. É possível que Gauss não tenha anunciado a sua descoberta para evitar polêmica.

Em 1829, Lobachevsky's publicou seu trabalho sobre a descoberta da geometria não-euclideana, trabalho este desenvolvido na Rússia de forma completamente independente; nem Gauss estava ciente de suas idéias e de seu trabalho. A contribuição de Bolyai e de Lobachevsky's foi descobrir que era possível alterar o axioma das paralelas de Euclides sem que uma contradição fosse criada com os outros axiomas. É bom ressaltar que eles não demonstraram a consistência dos axiomas. Isto deu origem à uma geometria não-euclideana cunhada de *geometria hiperbólica*.

Na época, as diferenças entre as geometrias euclideana e hiperbólica eram puramente formais, ou seja, diferiam no conjunto de axiomas. Isto quer dizer que não havia um modelo concreto para a geometria hiperbólica, ou seja, não havia uma representação gráfica para os objetos geométricos, por exemplo, para uma *reta* hiperbólica. O primeiro modelo para a geometria hiperbólica foi criado por Beltrami. A geometria esférica já era objeto de estudo devido a natureza dos problemas de navegação que eram importantíssimos, porém, os objetivos neste caso eram meramente computacionais.

Conforme citamos, Bernhard Riemann foi um estudante de Gauss que desenvolveu as idéias de seu orientador e tornou-se um dos maiores matemáticos do século XIX. A grande contribuição de Riemann para geometria não-euclidiana foi introduzir o conceito do que denominamos, nos dias de hoje, de *métrica riemanniana*. A métrica riemanniana vem a ser o objeto fundamental numa geometria. Riemann também foi um dos pioneiros na descoberta da importância da geometria das superfícies no estudo da Teoria das Funções Analíticas, estudo este que deu origem, significado e valor ao Teorema da Uniformização 1.5.

As técnicas desenvolvidas por Gauss consistiam em estudar as propriedades geométricas de uma superfície $X \subset \mathbb{R}^3$ com as ferramentas do Cálculo. Ele observou que o comprimento de uma curva, a área e a *curvatura* eram objetos geométricos *intrínsecos*, ou seja dependiam apenas da métrica riemanniana. Além disto, estes são objetos invariantes por transformações que preservam a métrica riemanniana, denominadas de *isometrias*. Em suma, a métrica riemanniana possibilita definir o comprimento de uma curva e a área de uma região contidas numa superfície. Aqui vale mencionar as origens da motivação

de Gauss para chegar ao conceito de curvatura. No início de 1818, Gauss dirigiu um projeto de inspeção geodésica do Reino Germânico de Hannover. A execução do projeto levou Gauss a questionar-se se seria possível determinar a *forma da Terra* a partir das medidas realizadas, o que levou-o, em [?], ao conceito de curvatura. Também a Teoria de Funções Analíticas induziu ao estudo de invariantes por deformações contínuas sobre uma superfície. Assim, as superfícies tornaram-se laboratórios naturais para a generalização dos conceitos do cálculo integral e diferencial sobre espaços distintos de \mathbb{R}^n .

Euclides considerou que os elementos primitivos da geometria euclideana são *o ponto, a reta e o plano*. No conceito atual de geometria, os elementos primitivos são o espaço topológico, a estrutura diferenciável e a métrica riemanniana. A partir da métrica, definimos uma geodésica como sendo a curva que minimiza a distância entre dois pontos. Assim, o conceito euclideano de reta é substituído pelo de geodésica. Sobre a superfície da esfera não existem retas, mas dados dois pontos existe uma única geodésica ligando-os. Desta forma, um triângulo geodésico é formado pelas geodésicas que ligam 3 pontos que não encontram-se sobre uma mesma geodésica.

Figura 11

O estudo de Gauss culminou com o resultado, conhecido como forma local do teorema de Gauss-Bonnet, que a soma dos ângulos internos α, β, γ de um triângulo geodésico $\Delta \subset X$ é dado por

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K, \quad (1.1)$$

onde $K : X \rightarrow \mathbb{R}$ é a curvatura gaussiana de X . Observamos que quanto menor for o triângulo mais próximo de π estará a soma dos ângulos internos do triângulo.

Uma superfície dita fechada se for compacta e sem bordo. Neste caso, há um número natural associado a X que denominamos de *genus* e o denotamos por g . A característica de Euler-Poincaré de uma superfície fechada X orientável é $\chi(X) = 2 - 2g$, caso X seja não orientável, então $\chi(X) = 2 - g$.

Entre as superfícies temos a operação soma conexa definida assim: Sejam X e Y superfícies e $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ a bola aberta de raio 1. Considere $V_X \subset X$ e $V_Y \subset Y$ subconjuntos abertos homeomorfos a B_1 . Seja $\phi : \partial(X - V_X) \rightarrow \partial(Y - V_Y)$ um homeomorfismo. A soma conexa de X com Y é a identificação ao longo do bordo induzida por ϕ ;

$$X \# Y = (X - V_X) \underset{\phi}{\cup} (Y - V_Y),$$

Qualquer que seja a superfície X , segue que $X \# S^2$ é homeomorfo a X . Por isto, temos a seguinte definição;

Definição 1.1. Uma superfície X é irredutível quando uma decomposição $X = X_1 \# X_2$ implica em $X_1 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} S^2$ ou $X_2 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} S^2$.

Figura 12

Historicamente, um dos subprodutos do Teorema da Uniformização foi a classificação das superfícies fechadas, a menos de homeomorfismos, como mostra o seguinte teorema [?];

Teorema 1.1. Classificação das Superfícies *Seja X uma superfície fechada, então ela é homeomorfa a uma das seguintes superfícies:*

1. X é orientável

(a) Se $\chi(X) = 2$, então $X \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} S^2$.

(b) Se $\chi(X) = 2 - 2g$, então $X \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} T^2 \# \dots \# T^2$ ($g = n^\circ$ de toros = genus).

2. X é não orientável

(a) Se $\chi(X) = 2 - g$, então $X \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ ($g = n^\circ$ de planos projetivos)

Ao integrarmos a curvatura sobre uma superfície fechada e orientável X obtemos o primeiro teorema global de geometria;

Teorema 1.2. Gauss-Bonnet *Seja X uma superfície fechada e orientável. Sejam $K : X \rightarrow \mathbb{R}$ a curvatura gaussiana e $\chi(X)$ a característica de Euler de X . Então,*

$$\int_X K = 2\pi\chi(X) \tag{1.2}$$

A expressão 1.1 nos induz a indagar sobre quais são as superfícies que admitem curvatura constante. Neste caso, a área do triângulo é

$$K.A(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi,$$

da onde concluímos que,

1. $K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$.

2. $K > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$.

3. $K < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$.

O objetivo será expor as técnicas que resultam na construção de superfícies de curvatura constante e estudarmos a geometria destes espaços. Em dimensão 2, existem apenas três geometrias das quais originam-se todas as superfícies com curvatura constante com área finita, são a geometria euclideana, a geometria esférica e a geometria hiperbólica.

O princípio básico das técnicas que empregamos é o de *Simetria*. O conceito de *Simetria* tem sido fonte para diversas manifestações do conhecimento humano, o que de certa forma é o reflexo do mundo físico em que vivemos e de nossas estruturas cerebrais para o pensamento. Nas artes, a simetria contribui na estética enquanto no mundo físico ela simplifica a natureza. Para darmos uma definição precisa de *Simetria* precisamos do conceito de *grupo*, o qual deixaremos para a seção 2.1. Intuitivamente, o conceito de simetria tem a ver com padrões que se repetem. Embora simples e corriqueiros, os exemplo dos azulejos que preenchem um assoalho, ou de papéis de parede que cobrem uma parede servem como motivação para a teoria que desenvolveremos nestas notas; a isto denominaremos de ornamento.

Figura 13

Uma ornamentação é uma figura geométrica que se repete sobre uma superfície dando origem à uma simetria, tais tipos de simetrias são encontradas com abundância na natureza em materiais conhecidos como cristais. A cada um destes cristais corresponde um grupo. O estudo cristalográfico levou a classificação destes grupos, conhecidos como grupos cristalográficos planares, e mostrou que existem apenas 17 tipos diferentes. Os cristais com simetrias espacial foram classificados por Schönflies que demonstrou existirem 219 tipos distintos (219 grupos cristalográficos).

1.0.1 Teorema Principal

Considere X uma superfície fechada e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo. Diremos que uma superfície X é *simplesmente conexa* se toda aplicação contínua $\gamma : S^1 \rightarrow X$ é homotópica a uma curva constante $\gamma_{x_0} : S^1 \rightarrow X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in S^1$.

Sejam \tilde{X} e X superfícies. Diremos que \tilde{X} é o *recobrimento universal* de X se ocorrerem as seguintes condições:

1. \tilde{X} é simplesmente conexo;
2. existe uma aplicação contínua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que p é um homeomorfismo local.

Se apenas a condição (2) acima for verificada dizemos que \tilde{X} é o recobrimento de X . Segue da teoria de Espaços de Recobrimento ([?]) que existe um grupo G agindo livremente sobre \tilde{X} de tal forma que $X = \tilde{X}/G$. Este grupo denominamos de *grupo fundamental de X* e o denotamos por $\pi_1(X)$.

Uma métrica Riemanniana é uma aplicação que a cada ponto $p \in X$ associa um produto interno

$$g(p) : T_p X \times T_p X \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $T_p X$ é o plano tangente à X no ponto p . Assim, denominamos de superfície riemanniana ao par (X, g) .

No texto, consideraremos essencialmente os espaços

$$\text{euclideano } \mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, g_e), \quad K = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{esférico } S_{1/K}^2 = (S_{\frac{1}{K}}^2, g_s), \quad K > 0, \quad (1.4)$$

$$\text{hiperbólico } \mathbb{H}_K^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h) \quad K < 0; \quad (1.5)$$

onde g_e é a métrica euclideana, g_s é a métrica esférica e g_h é a métrica hiperbólica. É uma consequência do Teorema da Uniformização para Superfícies de Riemann [?], na Teoria das Superfícies de Riemann, que uma superfície simplesmente conexa é conformemente equivalente a um dos espaços \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 . Se exigirmos que a classificação seja a menos de isometria, então as únicas superfícies simplesmente conexas são \mathbb{E}^2 , $S_{1/K}^2$ e \mathbb{H}_K^2 , onde cada uma tem curvatura gaussiana constante igual a K ; no caso euclideano $K = 0$.

Teorema 1.3. *Seja \tilde{X} uma superfície simplesmente conexa munida de uma métrica riemanniana g com curvatura constante. Então, (\tilde{X}, g) é isométrico a um dos seguintes espaços;*

1. Se $K = 0$, então $\tilde{X} = \mathbb{E}^2$;
2. Se $K > 0$, então $\tilde{X} = \mathbb{S}_K^2 = (\mathbb{S}^2(\frac{1}{K}), g_s)$;
3. Se $K < 0$, então $\tilde{X} = \mathbb{H}_K^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h)$.

Em [?] há uma demonstração e do teorema acima no contexto de Geometria Riemanniana, enquanto em [?] encontra-se uma demonstração utilizando ferramentas de Teoria Analítica das Funções, mais precisamente da Teoria das Superfícies de Riemann.

Ao fixarmos uma métrica g sobre uma superfície X os difeomorfismos $f : X \rightarrow X$ que preservam g são denominados de *isometrias* de (X, g) . As isometrias preservam todas as propriedades métricas de (X, g) , por exemplo preservam a distância entre pontos, a área de regiões de X e a curvatura ¹. Além disto, o conjunto das isometrias de (X, g) , quando munidos com a operação de composição, formam um grupo denotado por $Isom(X, g)$. As propriedades intrínsecas de uma geometria (X, g) são aquelas preservadas por uma isometria.

Dizemos que uma superfície riemanniana (X, g) é homogênea quando o grupo $Isom(X, g)$ age transitivamente sobre X . Em dimensão 2, as únicas superfícies homogêneas simplesmente conexas são \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 , \mathbb{H}^2 e $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$; sendo que a partir da superfície $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ obtemos apenas superfícies com área ilimitada.

¹Teorema Egregium de Gauss

Definição 1.2. .

1. Uma superfície X é localmente homogênea se existe uma superfície homogênea (\tilde{X}, g) tal que todo ponto $x \in X$ admite uma vizinhança isométrica a um subconjunto aberto de (\tilde{X}, g) .
2. Se X é uma superfície localmente homogênea, então dizemos que X tem uma estrutura geométrica modelada sobre a geometria (\tilde{X}, g) .

Decorre que as superfícies homogêneas e localmente homogêneas tem curvatura gaussiana constante. Uma vez que uma métrica sobre X induz uma métrica sobre o seu recobrimento universal \tilde{X} , e vice-versa, segue que para construirmos uma estrutura geométrica sobre X é suficiente mostrarmos que existe um subgrupo $G < Isom(\tilde{X}, g)$, agindo livremente sobre \tilde{X} , tal que $X \overset{homeo}{\sim} \tilde{X}/G$, ou seja, $G \simeq \pi_1(X)$.

Questão EG 1. Seja X uma superfície fechada e irredutível. X admite uma estrutura geométrica ?

Existem três maneiras para respondermos a questão colocada: o método direto (que será o objeto de estudo neste texto), o Teorema da Uniformização para Superfícies (Teoria Analítica das Funções) e o Fluxo de Ricci. Os dois últimos métodos são indiretos e usam ferramentas puramente analíticas. Para respondermos a questão colocada iremos seguir o seguinte roteiro;

Roteiro: A estratégia para resolvermos a questão é definida de acordo com os seguintes passos;

1. fixamos o recobrimento universal (\tilde{X}, g) de acordo a classificação em 1.3;
2. determinamos as geodésicas da geometria (\tilde{X}, g) ;
3. determinamos o grupo $Isom_g(\tilde{X})$ e quais são os seus geradores;
4. determinamos os subgrupos discretos de $Isom(\tilde{X})$ e as respectivas regiões fundamentais.
5. para cada subgrupo discreto $G < Isom(\tilde{X}, g)$ determinamos a característica de Euler de \tilde{X}/G .

Ao completarmos o roteiro para todos os espaços homogêneos simplesmente conexos, obtemos o seguinte teorema;

Teorema 1.4. *Seja X uma superfície fechada;*

1. *Se $X = T^2$, então existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e T^2 é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$.*

2. Se $X = \mathbb{R}P^2$, então existe um subgrupo $G < \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{R}P^2$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$.
3. Se $X = \mathbb{K}^2$, então existe um grupo $G < \text{Isom}_g(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e \mathbb{K}^2 é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.
4. Se X é orientável e $g \geq 2$, então existe um subgrupo $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tal que $X \stackrel{\text{difeo}}{\sim} \mathbb{H}^2/G$.

Portanto, toda superfície fechada irredutível ou orientável admite uma estrutura geométrica. Entre as não-orientáveis, o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ é obtido da geometria esférica e a garrafa de Klein $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ da geometria euclideana.

Ao longo da exposição surgem espaços singulares sobre os quais há uma estrutura geométrica definida no complementar de um conjunto finito de pontos. Um espaço desta natureza é denominado de *espaço orbital*, ou simplesmente *orbital*.

1.1 Fluxo de Ricci

O método que utilizamos no texto para demonstrarmos o teorema 1.4 é direto, pois após analisarmos todas as estruturas geométricas geradas a partir das geometrias euclideana, esférica e hiperbólica concluímos, ao compararmos com o teorema 1.1, que toda superfície irredutível ou orientável admite uma estrutura geométrica. De fato, o Teorema da Uniformização para superfícies, versão geométrica, garante que toda superfície riemanniana admite uma geometria canônica;

Teorema 1.5. (*Uniformização*) *Seja (X, g) uma superfície riemanniana fechada. Então, na classe conforme de g existe uma única métrica g_0 cuja curvatura escalar é constante.*

Há um método de caráter essencialmente analítico, que conjectura-se ser equivalente ao Teorema da Uniformização, denominado Fluxo de Ricci. Introduzido por Richard Hamilton em [?], o Fluxo de Ricci consiste em resolver o problema de valor inicial associado à seguinte equação diferencial parcial de evolução (parabólica):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= (\kappa - K)g, & \kappa &= \frac{\int_X K dx_{g_t}}{\int_X dx_{g_t}}, \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde K é a curvatura gaussiana e κ é a curvatura gaussiana média de X que, de acordo com o Teorema de Gauss-Bonnet 1.2, é dada por $\frac{2\pi\chi(X)}{A_t(X)}$, onde $A_t(X) = \int_X dx_{g_t}$ é a área de X calculada com a métrica $g(t)$.

Teorema 1.6. *Seja (X, g_0) uma superfície riemanniana fechada. Então, existe uma única solução $g(t)$ da equação 1.1. A solução existe para todo tempo t . Quando $t \rightarrow \infty$, as métricas $g(t)$ convergem uniformemente, em qualquer norma C^k , para uma métrica g_∞ de curvatura escalar constante.*

Demonstração. Ver em [?]. □

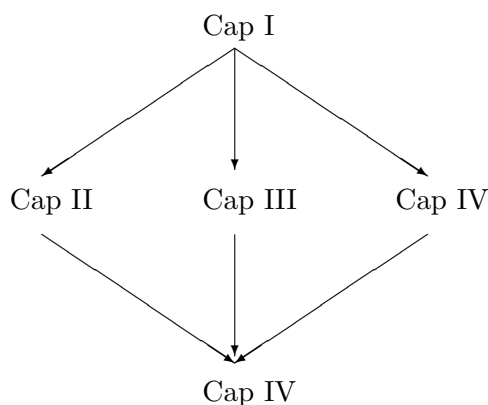
1.2 Comentários

O presente texto não se propõe a ser uma exposição das técnicas de *geometrização* em dimensão 2. A proposta é estudarmos as geometrias euclídeana e não euclídeanas inserindo-as numa questão maior, na sub-área de Topologia Geométrica, que é a classificação de superfícies ou de Variedades Diferenciáveis. No presente, a classificação da Variedades fechadas de Dimensão 3 é um problema em aberto. No entanto, há uma conjectura conhecida como *Conjectura da Geometrização*, descrita em [?], de como esta classificação deve ser, embora ela nada mais é do que a questão 1 (EG) enunciada em dimensão 3. Uma proposta de solução desta conjectura foi efetivada por Grisha Perelman seguindo o projeto iniciado por R.Hamilton em [?], projeto este baseado nas técnicas de Fluxo de Ricci.

Um fator de motivação para o texto foi expor, de maneira acessível, as geometrias mais elementares dentro de um enfoque geométrico. A maioria dos textos que descrevem o mesmo conteúdo o fazem num contexto menos elementar de Superfícies de Riemann ou no contexto de Grupos Kleinianos. Além disto, o conteúdo é relacionado com as técnicas que deram origem a famosa Conjectura da Geometrização para Variedades Fechadas de dimensão 3 (descrita em [?]).

O texto é autocontido e os pre-requisitos para a leitura são Álgebra Linear e Cálculo de Várias Variáveis. Ao leitor interessado em aprender o básico sobre cada uma das geometrias, recomendamos a leitura dos capítulos I, II e III sem incluir a classificação dos grupos discretos do grupo de isometria. O capítulo I é o único que deve ser lido antes de qualquer outro capítulo se o leitor não for familiar com os conceitos lá introduzidos. Dentre os capítulos II, III e IV qualquer um pode ser lido de maneira independente do conteúdo dos outros, muito embora a Geometria Euclídeana seja a mais fácil. O capítulo IV pode ser deixado para o final, pois lá são introduzidos conceitos mais avançados para o estudo de Geometria, porém necessários para questões mais atuais e também para as aplicações. Para o estudo do conteúdo no capítulo IV, os capítulos anteriores são fundamentais como fonte de exemplos.

A inter-dependência entre os capítulos esta descrita no diagrama abaixo;



Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Grupos

Os grupos são estruturas que surgem naturalmente no estudo de geometria.

Definição 2.1. Um conjunto G com uma operação $.G \times G \rightarrow G$ é um *grupo* se as condições seguintes são satisfeitas:

1. (associatividade),

$$a.(b.c) = (a.b).c, \quad \text{para todos } a, b \text{ e } c \in G$$

2. (elemento neutro)

$$\exists e \in G \quad \text{tal que} \quad e.a = a.e = a, \quad \text{para todo } a \in G$$

3. (elemento inverso)

$$\text{para todo } a \in G, \exists a^{-1} \in G \quad \text{tal que} \quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$$

Quando a operação satisfaz a propriedade adicional

$$a.b = b.a \quad \text{para todos } a \text{ e } b \in G$$

dizemos que o grupo é *abeliano*. Seguem dos axiomas de grupo algumas propriedades elementares;

Proposição 2.1. Num grupo G ,

1. O elemento neutro é único
2. O elemento inverso é único

3. O 3º axioma para grupos é equivalente ao fato da equação $a.x = b$ ter uma única solução em G , a saber, $x = a^{-1}.b$

Demonstração.

seja e' um outro elemento identidade, então

$$e = e.e' = e'$$

seja b um outro elemento inverso de $a \in G$, então

$$a^{-1} = a^{-1}.e = a^{-1}.(a.b) = (a^{-1}.a).b = b$$

□

Exemplo 2.1. Os seguintes exemplos são fundamentais para o conteúdo dos capítulos a seguir;

1. Grupo dos Inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
 $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito. A operação $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é a usual de soma de números inteiros;

$$(n, m) \rightarrow n + m.$$

2. Grupo dos Números Racionais $(\mathbb{Q}, +)$, dos Números Reais $(\mathbb{R}, +)$ e dos Números Complexos $(\mathbb{C}, +)$ são grupos abelianos infinitos.
3. Grupos dos Inteiros Módulo n
 $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo abeliano finito com n elementos $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, onde $\bar{k} \equiv k \pmod{n}$. A operação $+$ é definida da seguinte forma;

$$\bar{l} + \bar{k} \equiv l + k \pmod{n}.$$

4. (\mathbb{Z}_p, \cdot) , onde p é primo, é um grupo abeliano finito com $p - 1$ elementos.
 A operação \cdot : $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ é definida da seguinte maneira;

$$\bar{l}.\bar{k} \equiv l.k \pmod{p}.$$

5. Sejam $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - 0$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$. Consideramos sobre estes subconjuntos dos números reais a operação de multiplicação. Assim, (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) são grupos abelianos (multiplicativos)
6. Grupo Linear
 $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ é o grupo das matrizes $n \times n$ reais inversíveis. Se considerarmos a operação \cdot : $Gl_n(\mathbb{R}) \times Gl_n(\mathbb{R}) \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ de multiplicação de matrizes segue que $(Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$ é um grupo não abeliano.

7. Grupo dos Complexos Unitários

Seja $U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ e considere $\cdot : U_1 \times U_1 \rightarrow U_1$ a operação induzida pela multiplicação de números complexos, então U_1 é um grupo abeliano.

8. Grupo das Rotações em \mathbb{R}^2

Uma rotação em \mathbb{R}^2 é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação a base canônica de \mathbb{R}^2 é

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

A multiplicação de matrizes de rotação satisfaz a identidade $R_\theta \cdot R_\omega = R_{\theta+\omega}$. Por isto, o conjunto

$$SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo abeliano. Segue que SO_2 e U_1 são grupos isomorfos.

9. Grupo das Raízes Complexas da unidade.

Considere o conjunto $\mathcal{R}_n = \{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ munido com a operação de multiplicação de números complexos. Assim, (\mathcal{R}_n, \cdot) é um grupo abeliano.

10. Grupo de Rotação que deixa invariante um polígono regular de n lados

$$\mathbb{Z}_n = \{I, R_{\frac{2\pi}{n}}, R_{\frac{4\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$$

Figuras 21 e 22

11. Grupo de Reflexão sobre a reta determinada pelo eixo-x.

A transformação de reflexão sobre a reta do eixo-x é dada por $r_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$r_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_x^2 = I.$$

O conjunto $R = \{I, r_x\}$ munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo.

12. Grupo Diedral do triângulo equilátero .

Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma simetria de $\triangle ABC$ se $T(\triangle) = \triangle$. Considere que os vértices são os pontos $A = (1, 0)$, $B = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ $C = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Assim, é imediato que as rotações

$R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}$ e $R_{\frac{6\pi}{3}} = I$ deixam invariante o triângulo equilátero $\triangle ABC$. O conjunto $\{R_{\frac{6\pi}{3}} = I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$, munido com a multiplicação de matrizes é um grupo isomorfo a \mathbb{Z}_3 .

Figura 23

Além disto, as reflexões $\{r_A, r_B, r_C\}$ sobre as bissetrizes do $\triangle ABC$ também preservam o triângulo, mas não formam um grupo, pois

$$r_A \cdot r_B = r_B \cdot r_C = r_C \cdot r_A = R_{\frac{2\pi}{3}},$$

Portanto, o conjunto de transformações

$$D_3 = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, r_A, r_B, r_C\}$$

munido com a multiplicação de matrizes é um grupo; o grupo de simetrias do triângulo equilátero, também denominado de grupo diedral do triângulo.

13. Grupo Diedral do Quadrado.

Seja $\square ABCD$ um quadrado com centro na origem. Considere d_{AC} e d_{BD} as diagonais do quadrado. Sejam M, N, P, Q os pontos médios de cada um dos lados e l_{MP} e l_{NQ} as retas definidas pelos pares de pontos sobre lados opostos. Agora, considere as reflexões $\{r_{AC}, r_{BD}, r_{MP}, r_{NQ}\}$ sobre cada umas das retas construídas. Desta forma, o grupo diedral do quadrado é

$$D_4 = \{I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}, r_{AC}, r_{BD}, r_{MP}, r_{NQ}\}$$

Figuras 24

14. Grupo Diedral do Triângulo.

Sejam $\{1, 2, 3\}$ os vértices de um triângulo equilátero e sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações do plano que preservam o triângulo. Tais transformações são obtidas a partir da rotação do triângulo e de reflexões sobre as retas bissetrizes. Por exemplo, podemos representar a transformação f definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 1$ na forma

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Decorre das simetrias da figura que as seguintes transformações preservam o triângulo;

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ao considerarmos a composição das transformações como operação, o conjunto D_3 torna-se um grupo.

15. Grupo Diedral do Quadrado.

Sejam 1, 2, 3, 4 os vértices do quadrado. Neste caso, as transformações que preservam o quadrado são as rotações de 0° , 90° , 180° , 270° , as reflexões sobre as diagonais e as reflexões sobre as retas paralelas aos lados que passam pelo centro do quadrado. Assim, o grupo Diedral do Quadrado é

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Grupo das Permutações, ou Grupo Simétrico (S_n, \circ) .

Consideramos $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ e definimos o conjunto

$$S_n = \{f : I_n \rightarrow I_n \mid f \text{ é uma função bijetora}\}.$$

A operação de composição de funções $\circ : S_n \times S_n \rightarrow S_n$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ sobre S_n dá à S_n uma estrutura de grupo. Decorre que os grupos S_3 e D_3 são isomorfos, porém isto é falso em geral, pois é fácil verificarmos que $D_n \subset S_n$. No caso $n = 4$, o número de elementos de D_4 é 8, enquanto o de S_4 é 24.

17. Considere os grupos $(G_1, *)$ e (G_2, \odot) . O produto $(G_1 \times G_2, \cdot)$ é um grupo munido com a operação

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 * g'_1, g_2 \odot g'_2)$$

18. Grupo Ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que preserve o produto interno euclidiano, isto é, $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$. Segue que,

$$\langle u, T^t.T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \Rightarrow T^t.T = I.$$

O conjunto destas transformações, denominadas transformações ortogonais e denotado por O_3 , formam um grupo munido com a multiplicação de matrizes. Para verificarmos a afirmação é suficiente observarmos que, para quaisquer transformações ortogonais $T, Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, decorre das identidades

$$(T.Q)^t = Q^t.T^t, \quad (T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$$

que o produto delas e as transformações inversas também são ortogonais. Assim, O_3 munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo. A identidade $T^t.T = I$ implica em $|\det(T)| = 1$; o conjunto das matrizes ortogonais especiais é

$$SO_3 = \{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \det(T) = 1\}, \quad (2.1)$$

denominado grupo de rotações de \mathbb{R}^3 .

Exercício 2.1. :

1. Mostre que os conjuntos acima, munidos com as operações descritas, são grupos.

2.1.1 Subgrupos

Definição 2.2. Seja $(G, .)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H < G$) se, quando munido com a operação induzida de G , $(H, .)$ é um grupo. Equivalentemente, se as condições a seguir são satisfeitas;

1. $e \in H$;
2. se $h_1, h_2 \in H$, então $h_1.h_2^{-1} \in H$.

Exemplo 2.2. :

1. Dado um grupo G , $\{e\}$ e G são subgrupos (triviais);
2. $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$;
3. $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$ é um subgrupo de D_3
4. $\{I, R_\pi\}$ e $\{I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$ são subgrupos de D_4 .
5. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Se $m = np$, então $D_n < D_m$;
6. Seja G um grupo qualquer. O subconjunto

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \quad \forall g \in G\}. \quad (2.2)$$

é denominado o *centro* de G e $Z(G) < G$. Se G é abeliano, então $Z(G) = G$.

7. Se H e K são subgrupos de G , então $H \cap K$ é um subgrupo de G . De maneira mais geral, seja Λ um conjunto de índices tal que, para cada índice $\alpha \in \Lambda$, H_α é um subgrupo de G , então $H = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha$ é um subgrupo de G .
8. Seja G um grupo qualquer e $g \in G$. O *normalizador* de g é o subgrupo

$$N(g) = \{h \in G \mid g.h = h.g\}. \quad (2.3)$$

Cada elemento $g \in G$ gera um subgrupo, a saber

$$\langle g \rangle = \{I, g, g^2, g^3, \dots, g^n, \dots\}.$$

Definição 2.3. Se $g \in G$, o grupo $\langle g \rangle$ é denominado subgrupo cíclico gerado por g . Se $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$, dizemos que G é um grupo cíclico.

O conceito de grupo cíclico pode ser estendido para um subconjunto $S \subset G$; sejam $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ e

$$\langle S \rangle = \{x_1.x_2.x_3.\dots.x_n \mid x_i \in S \text{ ou } x_i^{-1} \in S\}$$

Dizemos que $\langle S \rangle$ é o subgrupo de G gerado por S . Caso $G = \langle S \rangle$, então G é gerado por S e os elementos de S são os geradores de G . Caso o conjunto S seja finito, o grupo G é dito ser finitamente gerado.

Definição 2.4. Seja G um grupo. O subgrupo

$$[G, G] = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle \quad (2.4)$$

é denominado subgrupo dos comutadores de G . Se G é abeliano, então $[G, G] = \{e\}$.

Exercício 2.2. :

1. Dê exemplos de subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Dê exemplos de subgrupos de $(\mathbb{Z}_m, +)$.
3. Dê exemplos de subgrupos de SO_2 .
4. Mostre que um subconjunto H de G é um subgrupo, se as seguintes condições são verdadeiras;
 - (a) $\forall h_1, h_2 \in H$, temos que $h_1.h_2 \in H$;
 - (b) $\forall h \in H$, temos que $h^{-1} \in H$.
5. Determine quando o grupo $(\mathbb{Z}_m, +)$ é cíclico.

6. Calcule o centro e o subgrupo dos comutadores dos grupos $(\mathbb{Z}, +)$, S_3 e D_4 .
7. Seja G um grupo abeliano e considere o subconjunto

$$T(G) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}. \quad (2.5)$$

Mostre que $T(G)$ é um subgrupo de G , denominado subgrupo de Torção de G .

2.1.2 Classes Laterais e Teorema de Lagrange

Definição 2.5. A ordem de um grupo G é o número de elementos em G e a denotamos por $o(G)$ ou por $|G|$. A ordem de um elemento $g \in G$ é a ordem do grupo $\langle g \rangle$.

Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Sobre G consideramos a seguinte relação de equivalência;

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} \cdot g_2 \in H, \quad (2.6)$$

O conjunto $gH = \{g' \in G \mid g \sim g'\}$ é denominado a classe lateral à esquerda de g . Segue da definição que $x \sim y$ se, e somente se, $xH = yH$.

A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda se chama índice de H em G e é denotado por $|G : H|$.

Teorema 2.1. (*Teorema de Lagrange*) *Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G . Então $o(G) = o(H) \cdot |G : H|$; consequentemente, a ordem e o índice de um subgrupo dividem a ordem do grupo.*

Demonstração. Fixemos $g_0 \in G - H$. Devido ao fato de G ser um grupo, a função $H \rightarrow g_0H$ definida por $h \mapsto g_0h$ é uma bijeção. Portanto, o número de elementos em g_0H é igual a H , ou seja, igual à $o(H)$. Considerando que o número de classes laterais à esquerda de H é $|G : H|$, segue a afirmação. \square

Um caso relevante para a teoria de grupos e suas aplicações é o caso quando o conjunto $G/H = \{g.H \mid g \in G\}$, das classes laterais de um subgrupo $H < G$, possuiu herda a estrutura de grupo de G . É fácil verificarmos que isto nem sempre acontece.

Definição 2.6. Um subgrupo N de G é Normal se, para todo $g \in G$, temos que $gNg^{-1} \subset N$. Neste caso, denotamos $N \triangleleft G$.

Proposição 2.2. *Seja N um subgrupo normal de G . Então o conjunto G/N com a operação induzida de G é um grupo*

Nem sempre um subgrupo é normal, no entanto, é possível normalizá-lo introduzindo o seguinte conceito:

Definição 2.7. Seja G um grupo qualquer e H subgrupo de G . O *normalizador* de H em G é o subgrupo

$$N(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} \in H, \forall h \in H\}$$

H é o maior subgrupo normal de $N(H)$.

Exercício 2.3. :

1. Defina classe lateral à direita. Mostre que há uma bijeção (explícite-a) entre os conjunto das classes laterais a esquerda e à direita.
2. Mostre que se $p \in \mathbb{Z}$ é primo, então

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \forall a \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}.$$

3. Mostre que se G é um grupo finito cuja ordem é um número primo, então G é cíclico.
4. Em D_4 , se considerarmos $H = \{I, r_d\}$, onde r_d é a reflexão sobre uma diagonal, mostre que $H.R_{\frac{\pi}{2}} \neq R_{\frac{\pi}{2}}.H$.
5. Prove a proposição 2.2.
6. Mostre que um subgrupo N de G é normal se, e somente se, $\forall g \in G$ temos que $gNg^{-1} = N$
7. Mostre que $[G, G] \triangleleft G$ e $G/[G, G]$ é um grupo abeliano.
8. Mostre que $Z(G) \triangleleft G$

2.1.3 Homomorfismos de Grupos

A principal questão na teoria de grupo é o problema de classificação dos grupos. Para isto, o conceito mais fundamental é o de homomorfismo;

Definição 2.8. Sejam G e H grupos. Um homomorfismo de G em H é uma função $\phi : G \rightarrow H$ tal que

$$\phi(g_1.g_2) = \phi(g_1).\phi(g_2). \quad (2.7)$$

Exemplo 2.3. As aplicações a seguir são todas exemplos de homomorfismos;

1. $\phi : G \rightarrow G, \phi(g) = g$ ($\phi = id_G$).
2. $\phi : G \rightarrow H, \phi(g) = e_H$.

3. Seja $n \in \mathbb{Z}$ fixo. Então, $\phi_m : (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ definido por $\phi(x) = \bar{m}x \equiv mx \pmod{n}$ é um homomorfismo.
4. Seja $g \in G$ fixo e $\phi : G \rightarrow G$ definido por $\phi(x) = gxg^{-1}$ (conjugação por g).
5. Seja $H \triangleleft G$, então $\phi : G \rightarrow G/H$, definido por $\phi(g) = gH$ é um homomorfismo denominado *projeção canônica*.

Proposição 2.3. *Sejam G e H grupos e $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo. O núcleo de ϕ é o conjunto*

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H\}. \quad (2.8)$$

Então, $\text{Ker}(\phi) \triangleleft G$.

Demonstração. Sejam $h \in \text{Ker}(\phi)$ e $g \in G$, portanto,

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker}(\phi)$$

□

Definição 2.9. Sejam G e H grupos e $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo. Dizemos que;

1. ϕ é um isomorfismo se ϕ é invertível, isto é, existe um homomorfismo $\psi : H \rightarrow G$ tal que $\phi \circ \psi = id_H$ e $\psi \circ \phi = id_G$
2. ϕ é um monomorfismo se ϕ for injetor, ou equivalentemente, se $\text{Ker}(\phi) = \{e\}$.
3. ϕ é um epimorfismo se ϕ for sobrejetor, ou seja, $\phi(G) = H$.

O núcleo de um homomorfismo sendo um subgrupo normal torna o seguinte resultado fundamental para compararmos grupos;

Teorema 2.2. *Seja $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre grupos. Se ϕ é um epimorfismo, então*

$$H \stackrel{iso}{\simeq} G/\text{Ker}(\phi). \quad (2.9)$$

Exercício 2.4. Sejam G e H grupos e $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo;

1. Mostre que o conjunto $Im(\phi) = \{y \in H \mid y = \phi(g), \text{ para algum } g \in G\}$ é um subgrupo de H .
2. Se N é um subgrupo de G , então $\phi(N)$ é um subgrupo de H e $\phi^{-1}(\phi(N)) = N \cdot (\text{Ker}(\phi))$.
3. Se $J < H$, então $\phi^{-1}(J) < G$ e $\phi(\phi^{-1}(J)) = J \cap Im(\phi)$.
4. Mostre que SO_2 é isomorfo à U_1 .

5. Mostre que o grupo de simetrias do triângulo equilátero gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{3}}$ é isomorfo à \mathbb{Z}_3 .
6. Mostre que o grupo \mathcal{R}_n das raízes enésimas da unidade é isomorfo à $(\mathbb{Z}_n, +)$.
7. Se $p \in \mathbb{Z}$ é primo, mostre que (\mathbb{Z}_p, \cdot) é isomorfo à $(\mathbb{Z}_{p-1}, +)$.
8. Prove o teorema 2.2.

2.2 Métricas Riemanniana

Na presente abordagem da geometria, a estrutura essencial é o de métrica riemanniana. Munidos com uma métrica nós podemos determinar o comprimento de curvas, a área de regiões e definir ângulos. Antes de dar a definição de uma métrica riemanniana vejamos como isto funciona em \mathbb{R}^2 . Em \mathbb{R}^2 , o produto interno euclidiano é definido da seguinte maneira: sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, então

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 \quad (2.1)$$

Desta forma, o produto interno acima define uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (bilinearidade) Para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\langle a_1u + a_2v, w \rangle = a_1 \langle u, w \rangle + a_2 \langle v, w \rangle$$

2. (simetria) para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

3. (positividade) para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$, $\langle u, u \rangle \geq 0$, e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Definição 2.10. A norma induzida pelo produto interno em \mathbb{R}^2 é a função $\| \cdot \|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (2.2)$$

Ao fixarmos a base canonica em \mathbb{R}^2 , a representação matricial do produto interno euclidiano 2.1 é

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

A medida do ângulo entre os vetores u e v é definida como sendo o número real θ tal que

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}\right). \quad (2.4)$$

Vamos verificar que o valor de θ esta bem definido;

Proposição 2.4. (*Desigualdade de Cauchy-Schwartz*) *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ vetores não nulos, então*

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} \leq 1.$$

Demonstração. Considere o vetor $w(t) = u + tv$, onde $t \in \mathbb{R}$. Assim, a inequação

$$0 \leq |w(t)|^2 = |v|^2 t^2 + 2\langle u, v \rangle t + |u|^2$$

é satisfeita para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a equação do 2º-grau em t tem discriminante negativo, isto é,

$$\langle u, v \rangle^2 - |u|^2 \cdot |v|^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} \leq 1.$$

□

Pela continuidade da função $\cos(x)$, existe $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cos(\theta), \quad \angle(u, v) = \theta.$$

Além disto, a função $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é invertível neste intervalo. Portanto, o ângulo entre os vetores u e v esta bem definido.

Vejamos agora como aplicar o conceito de produto interno para determinarmos o comprimento de uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Façamos uma regressão ao cálculo: seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável e

$$\mathcal{P}_n = \{a = t_0, \dots, t_k, \dots, t_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

O comprimento aproximado de γ , restrita ao intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, é

$$\Delta s = |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = |\gamma'(\xi_k)| \cdot \Delta t,$$

onde $|\gamma'(\xi_k)| = \sqrt{\langle \gamma'(\xi_k), \gamma'(\xi_k) \rangle}$ e $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, $1 \leq k \leq n$. Desta forma, o comprimento da curva γ é dado por

$$L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma'(\xi_k)| \cdot \Delta t.$$

Segue da teoria de integração que

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Na expressão acima, o termo $|\gamma'(t)|$ é definido ao tomarmos a norma do produto interno.

Definição 2.11. O comprimento de uma curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \quad (2.5)$$

Analisando o formalismo necessário para a definição do comprimento de uma curva, observamos a necessidade de termos uma norma. No entanto, existem diversos produtos internos e, por isto, diversas normas. Como o comprimento da curva depende da norma utilizada, concluímos que para cada norma haverá um valor do comprimento da mesma curva. Vejamos como generalizar o conceito de produto interno: consideramos a matriz

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

onde $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ e $\det(g) > 0$. Desta forma, g define um produto interno através da expressão

$$g(u, v) = u^t \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot v = \langle u, g \cdot v \rangle \quad (2.6)$$

A matriz g sendo simétrica é diagonalizável. Devido à positividade, os autovalores λ da matriz g são positivos, pois se $u \neq 0$ é um auto-vetor,

$$g \cdot u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad g(u, u) = \lambda \cdot |u|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

Analogamente, associamos ao produto interno $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a norma $|\cdot|_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $|u|_g = \sqrt{g(u, u)}$.

Proposição 2.5. (*Desigualdade de Cauchy-Schwartz*) *Seja g uma matriz simétrica positiva definida. Então, para todos u e v*

$$|g(u, v)| \leq |u|_g \cdot |v|_g$$

Demonstração. Análoga à da proposição 2.4. □

Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwartz que

$$-1 \leq \frac{g(u, v)}{|u|_g \cdot |v|_g} \leq 1.$$

Como a função $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ é contínua, existe θ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{g(u, v)}{|u|_g \cdot |v|_g}. \quad (2.7)$$

Desta maneira, o conceito de ângulo em \mathbb{R}^2 decorre do conceito de métrica.

A seguir, vamos introduzir o conceito de plano tangente, fundamental para estudar-mos geometrias não-euclidianas.

Definição 2.12. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, o plano tangente ao \mathbb{R}^2 em p , denotado por $T_p\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que existe uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujas condições iniciais são $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, isto é,

$$T_p\mathbb{R}^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}. \quad (2.8)$$

Definição 2.13. Uma métrica riemanniana sobre o \mathbb{R}^2 é uma aplicação que para cada $p \in \mathbb{R}^2$ associa um produto interno $g(p) : T_p\mathbb{R}^2 \times T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(u, v)_p = \langle u, g(p).v \rangle. \quad (2.9)$$

cuja dependência em relação à p é diferenciável.

Exemplo 2.4. Seja $p = (x, y)$;

1. métrica euclidiana

$$g_{(x,y)}(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2) \\ v &= (v_1, v_2) \end{aligned} \Rightarrow \langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

2. métrica hiperbólica.

$$g_{(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle, \quad g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Vejamos que no caso da métrica hiperbólica, o comprimento do vetor depende do ponto;

$$\text{ex: } p = (1, 10), \quad \begin{aligned} u &= (1, 1) \\ v &= (1, 0) \end{aligned} \Rightarrow g_{(1,10)}(u, v) = \frac{1}{100}$$

$$\text{ex: } p = (1, \frac{1}{10}), \quad \begin{aligned} u &= (1, 1) \\ v &= (1, 0) \end{aligned} \Rightarrow g_{(1, \frac{1}{10})}(u, v) = 100$$

3. métrica esférica.

Um ponto $p \in S^2$ é descrito em coordenadas esféricas por $p = (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$g_{(\theta, \phi)}(u, v) = \text{sen}^2(\phi)u_1v_1 + u_2v_2, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 2.14. Seja g uma métrica riemanniana definida em \mathbb{R}^2 ;

1. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. O comprimento de γ é dado por

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt. \quad (2.10)$$

2. A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dada por

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(g)} dx dy. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.5. Considere a métrica hiperbólica sobre o \mathbb{R}^2 .

1. Seja $\gamma : [\epsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reta dada por $\gamma(t) = (t, at)$ (figura ??). Assim, $\gamma'(t) = (1, a)$
e

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t))_{\gamma(t)} = \frac{1+a^2}{a^2} \cdot \frac{1}{t^2}$$

da onde temos que o comprimento é

$$L(\gamma) = \int_{\epsilon}^1 \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2} \cdot \frac{1}{t^2}} dt = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Consequentemente, quanto mais próximo do eixo-x estiver o ponto $\gamma(\epsilon)$ maior será o comprimento de γ .

Figuras 25 e 26

2. A parametrização do círculo com centro em (a, b) e raio R (figura ??), sendo que $R < b$, é $\gamma(\theta) = (R\cos(\theta) + a, R\sin(\theta) + b)$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 2\pi$. Assim,

$$\gamma'(t) = R(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot d\theta}{b + R\sin(\theta)} = \frac{2\pi R}{\sqrt{b^2 - R^2}}.$$

Casos limite,

- (a) $\lim_{b \rightarrow \infty} L(\gamma) = 0$.
 (b) $\lim_{R \rightarrow b} L(\gamma) = \infty$.
 (c) $b = 0 \Rightarrow L(\gamma) = \int_0^\pi \operatorname{cosec}(\theta) d\theta = \infty$.

3. O elemento de área associado a métrica hiperbólica é

$$dA = \sqrt{\det(g)} = \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Portanto, a área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é

$$A(\Omega) = \int \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy$$

Sejam α e β ângulos fixos. Na figura ??, consideramos a região (gomo hiperbólico)

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid R \cdot \cos(\pi - \beta) \leq x \leq R \cdot \cos(\alpha), \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \infty\},$$

Figura 27

$$\begin{aligned} A(\Omega_{\alpha\beta}) &= \int_{R \cdot \cos(\pi - \beta)}^{R \cdot \cos(\alpha)} \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \\ &= \int_{R \cdot \cos(\pi - \beta)}^{R \cdot \cos(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = -\operatorname{arccos}\left(\frac{x}{R}\right) \Big|_{R \cdot \cos(\pi - \beta)}^{R \cdot \cos(\alpha)} = \pi - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Definição 2.15. Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ e $\Omega(p, q) = \{\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \delta(0) = p, \delta(1) = q\}$ o espaço das curvas contínuas ligando p à q . Uma geodésica ligando p a q é uma curva $\gamma \in \Omega(p, q)$ tal que

$$L(\gamma) = \min_{\delta \in \Omega(p, q)} L(\delta) \quad (2.12)$$

No \mathbb{R}^2 munido com a métrica euclideana, a menor distância entre os pontos p e q é realizado pelo segmento de reta conectando-os cujo comprimento define a distância euclideana de p à q . Caso a métrica não seja a euclideana a segmento de reta pode não ser o menor caminho de p à q . O conceito de reta será substituído pelo conceito de geodésica, mas antes vejamos o seguinte;

Definição 2.16. A função distância $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$d(p, q) = \min_{\delta \in \Omega(p, q)} L(\delta). \quad (2.13)$$

Em decorrência da definição, a função distância satisfaz as seguintes propriedades;

1. (positividade) $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
2. (simetria) $d(p, q) = d(q, p)$.
3. (desigualdade triangular) Para quaisquer p, q e r em \mathbb{R}^2 ,

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q).$$

Para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$, a função distância nos permite definir vizinhanças de um ponto qualquer. A bola abertas com centro em p e raio ϵ é o subconjunto

$$B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, q) < \epsilon\}.$$

As bolas abertas formam uma base para a topologia de \mathbb{R}^2 .

A métrica hiperbólica não esta bem definida para os pontos pertencentes ao eixo- x ($y = 0$). Este tipo de situação implica em dificuldades técnicas, como por exemplo no cálculo de distâncias. Sendo assim, temos a seguinte definição;

Definição 2.17. Uma métrica é completa sobre uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se para quaisquer par de pontos $x, y \in \Omega$ existe uma geodésica ligando p à q e a distância $d(p, q)$ é finita.

No que segue, estaremos sempre trabalhando com métricas completas e, por isto, faremos menção apenas ao termo métrica. Chamamos a atenção para o fato de que definimos a *métrica riemanniana* e a *métrica* que nada mais é do que a função distância.

2.2.1 Grupo de Isometria

Definição 2.18. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e g uma métrica riemanniana definida sobre Ω ;

1. Uma isometria de (Ω, g) é um difeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que, para todo $x \in \Omega$ e $u, v \in T_x\Omega$,

$$g(df_x \cdot u, df_x \cdot v)_{f(x)} = g(u, v)_x \quad (f^*g = g) \quad (2.14)$$

2. O Grupo de Isometria de (Ω, g) é o conjunto

$$Isom_g(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid f \in Dif(\Omega), f^*g = g\} \quad (2.15)$$

Exemplo 2.6. Considere a aplicação definida pela rotação $R_\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$. Para cada $x \in \mathbb{E}^2$, a aplicação linear $(dR_\theta)_x : T_x\mathbb{E}^2 \rightarrow T_{R_\theta(x)}\mathbb{E}^2$ é $(dR_\theta)_x = R_\theta$. Como a métrica é a euclidiana, para todo $x \in \mathbb{E}^2$ e $u, v \in T_x\mathbb{E}^2$, temos que

$$g_x((dR_\theta)_x \cdot u, (dR_\theta)_x \cdot v) = \langle R_\theta \cdot u, R_\theta \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle = g(u, v).$$

Exercício 2.5. Seja g uma métrica definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in Isom_g(\Omega)$. Mostre que;

1. $df^t \cdot g(f(p)) \cdot df = g(p)$.
2. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma curva diferenciável, então $L(f(\gamma)) = L(\gamma)$.
3. Se $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ é uma região compacta e $f(\Omega)$ é a sua imagem, então $A(f(\Omega)) = A(\Omega)$.

Comentário 1. Considerando que *geometria* significa medir a terra, foi visto que para medirmos precisamos do espaço (terra) e do conceito de medição introduzido através da métrica riemanniana. Portanto, geometria significa um par (Ω, g) , onde Ω é um espaço e g é uma métrica riemanniana definida sobre Ω .

Na geometria (Ω, g) o conceito de reta é estendido para o conceito de geodésica. Portanto, as implicações dos Axiomas de Euclides não poderão mais serem aplicadas. Por exemplo, o Axioma das Paralelas será modificado de acordo com a natureza das geodésicas induzidas pela métrica. Nos capítulos subsequentes, mostraremos que na geometria esférica um ponto p não pertencente a uma geodésica l não passa nenhuma geodésica paralela à l , enquanto na geometria hiperbólica passam infinitas. Portanto, o mistério a respeito do 5º Axioma de Euclides está desvendado.

2.2.2 Aplicações Conformes

Se relaxarmos um pouco a definição de isometria e exigirmos que apenas ângulos sejam preservados, então temos o seguinte conceito;

Definição 2.19. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e g uma métrica riemanniana definida sobre Ω ;

1. Uma transformação conforme é um difeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $x \in \Omega$ e $u, v \in T_x\Omega$, existe uma função $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, C^∞ , tal que

$$g(df_x \cdot u, df_x \cdot v)_{f(x)} = \lambda(x) \cdot g(u, v)_x \quad (f^*g = \lambda \cdot g) \quad (2.16)$$

2. O Grupo Conforme de (Ω, g) é o conjunto

$$\mathcal{C}_g(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid f \in Dif(\Omega), \lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+, f^*g = \lambda \cdot g\} \quad (2.17)$$

Exemplo 2.7. .

1. Sejam $\lambda > 0$ e $b \in \mathbb{R}^2$. A transformação $f_{\lambda,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \lambda \cdot x + b$ é conforme.
2. A projeção estereográfica $\pi_e : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\pi_e^N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \quad (2.18)$$

é conforme.

3. Qualquer função holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme. As anti-holomorfas também são conformes, porém, elas mudam a orientação.

2.3 Ações de Grupos

Sejam Ω um subconjunto de \mathbb{R}^n e G um grupo.

Definição 2.20. Uma ação à esquerda de G sobre Ω é uma aplicação diferenciável $\alpha : G \times \Omega \rightarrow \Omega$, satisfazendo as seguintes condições;

1. $\alpha(e, x) = x$ para todo $x \in X$;
2. $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ para todos $g, h \in G$ e $x \in X$

Analogamente, podemos definir uma ação à direita $\alpha : \Omega \times G \rightarrow \Omega$. A ação $\alpha : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ induz as aplicações

$$\alpha_g : \Omega \rightarrow \Omega, \quad \alpha_g(x) = \alpha(g, x) \quad (2.1)$$

$$\alpha_x : G \rightarrow \Omega, \quad \alpha_x(g) = \alpha(g, x) \quad (2.2)$$

Decorre da definição que, para cada $g \in G$, a aplicação α_g é um difeomorfismo; caso contrário, se existem $x, y \in \Omega$ tais que $\alpha(g, x) = \alpha(g, y)$, então

$$\begin{aligned} \alpha(g^{-1}, \alpha(g, x)) &= \alpha(g^{-1}, \alpha(g, y)) \Rightarrow \\ \alpha(g^{-1}g, x) &= \alpha(g^{-1}g, y) \Rightarrow \\ \alpha(e, x) &= \alpha(e, y) \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Notação. Por simplicidade, utilizaremos a notação $g.x = \alpha(g, x)$.

Exemplo 2.8. Os itens a seguir são exemplos de ações;

1. Ação Linear de $GL_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R}^2 .

Esta é a ação fundamental, pois quase todas os outros exemplos que apresentaremos decorrem deste exemplo. Considere $\alpha : GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(A, v) = A.v \quad (\text{multiplicação de vetor por matriz}).$$

É imediato verificar que;

- (a) $\alpha(I, v) = v$;
- (b) $\alpha(B, \alpha(A, v)) = B.(A.v) = (BA).V = \alpha(BA, v)$.

Todo subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ age sobre \mathbb{R}^2 tomando simplesmente a restrição.

2. Ação de SO_2 sobre \mathbb{R}^2 .

Considere $\alpha : SO_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(R_\theta, v) = R_\theta.v$ (multiplicação de vetor por matriz).

3. Ação de U_1 sobre S^1 .

Considere $\alpha : U_1 \times S^1 \rightarrow S^1$ definida por $\alpha(e^{i\theta}, z) = e^{i\theta}.z$ (multiplicação de números complexos).

4. Ação do grupo dihedral D_3 sobre um triângulo equilátero.

Um triângulo com vértices nos pontos P_1, P_2 e P_3 é definido por

$$\Delta = \{a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 1\}. \quad (2.3)$$

Se $g \in D_3$, vimos que podemos representá-lo por uma matriz obtida pelo produto de matrizes ortogonais com matrizes de reflexão. Assim, a ação é definida pelo produto matricial sobre vetores em \mathbb{R}^2 . Uma vez que $g(P_i) = P_j$, segue que $g(\Delta) = \Delta$.

5. Ação de SO_2 sobre S^2 .

Considere $\alpha : SO_2 \times S^2 \rightarrow S^2$ definida por

$$\alpha(R_\theta, v) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad (\text{multiplicação de vetor por matriz})$$

6. Ação de D_3 sobre S^2 .

Seja $g \in D_3 \subset M_2(\mathbb{R})$ e considere a matriz $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

7. Ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R}^2 .

Seja $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(n, (x, y)) = n \cdot (x, y) = (x + n, y)$. Claramente, seguem as identidades $0 \cdot (x, y) = (x, y)$ e $n \cdot (m \cdot (x, y)) = (n + m) \cdot (x, y)$

8. Neste exemplo, uma EDO em \mathbb{R}^2 gera uma ação do grupo \mathbb{R} sobre o \mathbb{R}^2 . Chamamos a atenção para o fato do grupo \mathbb{R} ser não compacto. Considere o sistema linear de EDO

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Obter uma solução para o sistema 2.4 sujeito a condição inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ é equivalente a resolver o sistema 2.5 abaixo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Assim, obtemos a ação $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t, (x_0, y_0)) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

9. Agora, veremos o caso geral de uma ação de \mathbb{R} sobre \mathbb{R}^2 definida por um Sistema Dinâmico. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial C^∞ e considere a equação

$$Y' = f(Y).$$

Uma solução para a equação acima, com condição inicial em $x_0 \in \mathbb{R}^2$, é uma aplicação $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe uma única solução $\gamma(t)$ com $\gamma(0) = x$ definida sobre um intervalo maximal $J(x) \subset \mathbb{R}$. Para indicarmos a dependência de $\gamma(t)$ sobre x , escrevemos $\gamma(t) = \gamma(x, t)$, da onde $\gamma(x, 0) = x_0$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ o seguinte conjunto

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid t \in J(x)\}$$

Desta forma, a aplicação $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\gamma_t(x) = \gamma(x, t)$, satisfaz a seguinte propriedade;

$$\gamma_{s+t}(x) = \gamma_s(\gamma_t(x)).$$

Isto caracteriza a ação induzida de \mathbb{R} sobre \mathbb{R}^2 . Para demonstrarmos a identidade acima, vejamos o seguinte; suponhamos que t, s são positivos e $\gamma_s(\gamma_t(x))$ está definido. Isto significa que $t \in J(x)$ e $s \in J(\gamma_t(x))$. Suponhamos que $J(x) = (a, b)$ e $a < t < b$, vamos mostrar que $s + t < b$. Defina $\delta : (a, s + t) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\delta(r) = \begin{cases} \gamma(x, r), & \text{se } a < r \leq t, \\ \gamma(\gamma_t(x), r - t), & \text{se } t \leq r \leq t + s. \end{cases}$$

Então δ é uma solução e $\delta(0) = x$. Consequentemente, $s + t \in J(x)$ e, devido a unicidade da solução,

$$\delta_{s+t}(x) = \delta(s + t) = \delta_s(\delta_t(x))$$

O caso quando a e b são negativos é tratado de maneira análoga.

10. Seja X um espaço topológico compacto e \tilde{X} o recobrimento universal de X . Há uma ação do grupo fundamental $\pi_1(X)$ sobre o recobrimento \tilde{X} (consultar [?], Cap 5).

De uma forma geral, uma ação é um objeto bastante complicado para ser estudado, por isto, consideraremos apenas algumas classes especiais de ações.

Definição 2.21. . Seja G um grupo, Ω um espaço topológico e $\alpha : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ uma ação;

1. A ação α é livre se $g.x \neq x$ para quaisquer $g \neq e \in G$ e $x \in \Omega$.
2. A ação é transitiva se, para quaisquer $x, y \in \Omega$, existe $g \in G$ tal que $y = g.x$

No estudo de ações alguns conjuntos são fundamentais;

Definição 2.22. .

1. A órbita de um elemento $x \in \Omega$ é o conjunto

$$\mathcal{O}_x = \{g.x \mid g \in G\} \quad (2.6)$$

2. Em Ω , consideramos a relação de equivalência

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } y = g.x,$$

ou seja, $y \in \mathcal{O}_x$. Assim como no caso de grupo, podemos considerar o espaço quociente Ω/G (ou espaço das órbitas)

$$\Omega/G = \{\mathcal{O}_x \mid x \in \Omega\} \quad (2.7)$$

Definimos sobre Ω/G a topologia quociente, de tal forma que a projeção $\pi : X \rightarrow X/G$, definida por $\pi(x) = \mathcal{O}_x$, seja contínua.

A órbita de $x \in \Omega$ depende da dinâmica do ponto x quando deslocado pela ação. Quando a ação é livre x desloca-se para todo $g \in G$, porém, isto não ocorre quando a ação não é livre, motivando a definição dos seguintes conjuntos;

1. O conjunto dos pontos fixos da aplicação $\alpha_g : X \rightarrow X$, induzida pela ação $\alpha : G \times X \rightarrow X$, é

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}, \quad (2.8)$$

e o conjunto dos pontos fixos da ação é

$$Fix_\alpha(X) = \bigcup_{g \in G} Fix(g) \quad (2.9)$$

2. O subgrupo de isotropia de um elemento $x \in X$ é o grupo

$$G_x = \{g \in G \mid g.x = x\} \quad (2.10)$$

Exemplo 2.9. Nos itens a seguir apresentamos algumas ações e descrevemos os conjuntos fundamentais;

1. Ação de $\mathbb{Z}_n = \{I, R_{\frac{2\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$ sobre \mathbb{R}^2 .

Neste caso, temos que

$$Fix(g) = \{0\}, \quad Fix_\alpha(\mathbb{R}^2) = \{0\}.$$

Os grupos de isotropia são $G_x = \{0\}$, se $x \neq 0$, e $G_x = \mathbb{Z}_n$, se $x = 0$.

2. Ação de SO_3 sobre S^2 .

Uma vez que todo elemento $g \in SO_3$ fixa uma reta l passando pela origem em \mathbb{R}^3 , segue que $Fix(g) = \{N_g, S_g\} = l \cap S^2$. Desta forma, $Fix_\alpha(S^2) = S^2$ e para todo $g \in SO_3$ segue que G_x é isomorfo à $O_2 < SO_3$.

3. Ação de D_3 sobre um triângulo equilátero; $\alpha : D_3 \times \Delta \rightarrow \Delta$.

Neste caso, se os vértices são P_1, P_2, P_3 e os pontos médios dos lados são M, N, Q , é fácil verificar que $Fix_\alpha(\Delta) = \{P_1, P_2, P_3, M, N, Q\}$. Além disto, se $x \in \{P_1, P_2, P_3, M, N, Q\}$, então G_x é isomorfo à \mathbb{Z}_2 , enquanto se $x \notin \{P_1, P_2, P_3, M, N, Q\}$ então $G_x = \{I\}$.

Assim, temos que;

1. A ação é livre \Leftrightarrow para todo $x \in X$ temos que $G_x = \{e\}$.
2. A ação é transitiva \Leftrightarrow se existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_x = X$.

Os grupos de isotropia apresentam dificuldades para o estudo de uma ação. Há exemplos de ações onde os subgrupos de isotropia são todos isomorfos, caso da ação de SO_3 sobre S^2 . Quando os grupos de isotropia tem estrutura de grupo distintas, as órbitas são espaços topológicos distintos (não-homeomorfos) e, por conseguinte, o espaço quociente torna-se um espaço de difícil descrição por não herdar algumas das estruturas sobre Ω .

Exemplo 2.10. Determinar \mathcal{O}_x , G_x e $Fix_\alpha(\Omega)$ e Ω/G para cada uma das ações abaixo:

1. Ação de SO_2 sobre \mathbb{R}^2
2. Ação de \mathbb{Z}_n sobre S^1
3. Ação de SO_2 sobre S^2
4. Ação de D_3 sobre um triângulo equilátero.
5. Ação de D_3 sobre S^2
6. Ação de SO_3 sobre S^2
7. Considere a ação $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzida pelo sistema linear de EDO

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Agora, vamos definir a categoria de ações que são importantes para a demonstração do teorema ??.

Definição 2.23. A ação de G sobre Ω é propriamente descontínua se para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\{g \in G \mid g.K \cap K \neq \emptyset\} \text{ é finito.}$$

Proposição 2.6. *Suponha que G age descontinuamente sobre Ω , então*

1. *Todo subgrupo de G age descontinuamente sobre Ω .*
2. *Se $\phi : \Omega \rightarrow Y$ é um difeomorfismo, então $\phi G \phi^{-1}$ age descontinuamente sobre Y .*
3. *Se Y é um subconjunto G -invariante de Ω , então G age descontinuamente sobre Y .*
4. *Se $x \in \Omega$ e se g_1, g_2, \dots são elementos distintos de G , então a sequência $\{g_1(x), g_2(x), \dots\}$ não é convergente.*
5. *Se $\Omega \in \Omega$, então o subgrupo de isotropia G_x é finito.*
6. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então G é enumerável.*
7. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então $Fix_\alpha(\Omega)$ é enumerável.*

Demonstração. Todo os itens 1-5 são imediatos.

6. Se Ω é compacto, então é imediato que G é finito. Consideremos o caso quando Ω não é compacto, e suponha que o conjunto $\{g.x \mid g \in G\}$ é não enumerável. Segue do fato que todo subconjunto limitado e não-enumerável do \mathbb{R}^n possui um ponto de acumulação que, neste caso, o conjunto $\{g.x \mid g \in G\}$ possui uma subsequência com ponto de acumulação em Ω (Ω é fechado), o que contradiz o item 4.

7. Suponha que $Fix_\alpha(\Omega)$ seja não enumerável. Então, existe uma sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que acumula-se em $p \in \Omega$. Seja $K \subset \Omega$ um compacto contendo p tal que, para $n \geq n_0$, tenhamos que $x_n \in K$. Desta forma, se há um número infinito de elementos $x_i \in \Omega$ cujo grupo de isotropia é distinto, segue que

$$\cup_{i=n_0}^{\infty} G_{x_i} \subset \{g \in G \mid g.K \cap K \neq \emptyset\}$$

da onde a ação não é descontínua. □

Seja $Dif(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid f \text{ difeomorfismo}\}$ o grupo dos difeomorfismos de Ω munido com a operação de composição. Como observado anteriormente, a ação $\alpha : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ define o subgrupo $\alpha_G = \{\alpha_g \mid g \in G\} \subset Dif(\Omega)$ isomorfo a G . O teorema seguinte caracteriza uma ação descontínua.

Definição 2.24. Sejam \mathcal{T} um espaço topológico e \mathcal{D} um subconjunto de \mathcal{T} . Dizemos que \mathcal{D} é um subconjunto discreto de \mathcal{T} se para todo elemento $f \in \mathcal{D}$ existir um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} = \{f\}$.

Proposição 2.7. *Se a ação de um grupo G sobre um espaço topológico Ω é propriamente descontínua, então o subgrupo $\alpha_G \subset \text{Dif}(\Omega)$ é discreto na topologia compacta-aberta definida em $\text{Dif}(\Omega)$ (também denomina-se ação discreta de G sobre Ω).*

Demonstração. Ver em [?]. □

Observação. A recíproca é falsa em geral, mas é verdadeira quando Ω é munido com uma métrica completa e G é um grupo de isometrias de Ω . Ao longo do texto, sempre consideraremos Ω munido com uma métrica completa, portanto, a recíproca é verdadeira e, por isto, muitas vezes diremos que a ação é discreta em vez de descontínua.

Definição 2.25. Se G é um grupo agindo discontinuamente sobre Ω , a região fundamental associada a ação de G é o conjunto fechado $\mathcal{P} \subset \Omega$ tal que

1. $\Omega = \bigcup_{g \in G} g \cdot \mathcal{P}$,
2. $\text{int}(\mathcal{P}) \cap g \cdot \text{int}(\mathcal{P}) = \emptyset$.

Definição 2.26. O orbital associado a uma ação de G em Ω é o espaço das órbitas $\mathcal{O}_G = \Omega/G = \mathcal{P}/G$, onde \mathcal{P} é a região fundamental da ação.

Exercício 2.6. Resolva os seguintes itens;

1. Mostre que os grupos de isotropia de elementos pertencentes a uma mesma órbita são conjugados.
2. Mostre que existe uma relação biunívoca $\mathcal{O}_x \xrightarrow{1-1} G/G_x$
3. Seja G um grupo agindo discretamente sobre um espaço topológico Hausdorff Ω .
 - (a) Defina uma topologia sobre Ω/G e mostre que também é um espaço de Hausdorff.
 - (b) Defina uma topologia sobre \mathcal{P}/\sim e mostre que é um espaço de Hausdorff.
 - (c) Mostre que existe uma região fundamental $\mathcal{P} \subset \Omega$ associada a ação de G .
 - (d) Mostre que a ação induz uma relação de equivalência \sim sobre $\partial\mathcal{P}$ de forma que \mathcal{P}/\sim é homeomorfo a Ω/G .
 - (e) Se G age livremente sobre Ω , então Ω é recobrimento de Ω/G . Se o recobrimento for regular, então

$$G \simeq \frac{\pi_1(\Omega/G)}{p_*\pi_1(\Omega)}, \quad (2.11)$$

onde $p : X \rightarrow \Omega/G$ é a projeção.

- (f) Dê um exemplo de uma ação de \mathbb{R} sobre \mathbb{R}^2 tal que o quociente \mathbb{R}^2/G não é um espaço de Hausdorff. (dica: procure um sistema dinâmico cujas linhas integrais “aproximem-se” quando $t \rightarrow \infty$)

No Capítulo 3 está demonstrado que Ω/G é uma superfície sempre que a ação for livre. Lá também analisamos o caso quando a ação possui pontos com grupo de isotropia não-trivial.

Capítulo 3

Geometria Euclideana

Na sua obra *Os Elementos*, Euclides apresentou de maneira formal os conhecimentos da geometria da época. A importância da sua obra foi a introdução do tratamento lógico-dedutivo dada ao assunto, o que significa que os resultados foram demonstrados a partir de premissas. Para descrever a geometria de maneira lógica, Euclides assumiu que *ponto, reta e plano* não poderiam ser definidos, sua existência deveria ser simplesmente assumida. Por isto eles são os elementos primitivos da geometria. Na sequência, Euclides descreveu um conjunto de axiomas [?], dentre os quais citamos os seguintes:

Axioma 3.1. *Por dois pontos passa uma única reta.*

Axioma 3.2. *(Axioma das Paralelas) Por um ponto P não pertencente a uma reta l passa uma única reta paralela a l .*

Uma consequência imediata do axioma das paralelas é que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a π .

O axioma das paralelas tornou-se um dos maiores mistérios da matemática ao longo de 2.000 anos, muitos acreditavam que deveria haver uma demonstração a partir dos outros axiomas. A estrutura que Euclides criou para descrever a Geometria acabou por ser extremamente rígida e limitada para atacar o problema.

Neste capítulo, o objetivo é estudarmos a Geometria Euclideana a partir de outros elementos primitivos: o espaço topológico \mathbb{R}^2 , a estrutura diferenciável e a métrica euclidiana $g = \langle, \rangle$.

Definição 3.1. O espaço euclidiano \mathbb{E}^2 é o espaço \mathbb{R}^2 munido com a métrica euclidiana;

$$\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

No Capítulo I mencionamos que o conceito de reta é substituído pelo conceito de geodésica. Portanto, em \mathbb{E}^2 retas são geodésicas.

3.1 Geodésicas em \mathbb{E}^2

Um dos axiomas de Euclides afirma que a distância entre os pontos p e q em \mathbb{R}^2 é dada pelo comprimento da única reta que une estes pontos. Se $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$, a distância é

$$|q - p| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}. \quad (3.1)$$

A expressão acima é consequência do Teorema de Pitágoras. Seja

$$\Omega(p, q) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \gamma \in C^0, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

o espaço das curvas contínuas ligando p à q em \mathbb{E}^2 . A integral do comprimento de uma curva define a função

$$L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| ds.$$

Portanto, a distância entre os pontos p e q em \mathbb{E}^2 é por definição

$$d_{\mathbb{E}^2}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p, q)} L(\gamma).$$

A estrutura de espaço vetorial presente no espaço \mathbb{E}^2 é uma propriedade fundamental para que a geometria de \mathbb{E}^2 seja simples, permitindo o uso das técnicas da Álgebra Linear. Uma reta $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$, ligando p à q , é parametrizada por $r(t) = p + t(q - p)$ e $L(r) = |q - p|$.

Proposição 3.1. *Sejam p e q pontos em \mathbb{E}^2 . A geodésica ligando p a q descreve uma reta. Além disto,*

$$d_{\mathbb{E}^2}(p, q) = |q - p|. \quad (3.2)$$

Demonstração. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma curva ligando $p = \alpha(0)$ à $q = \alpha(1)$. Assim,

$$q - p = \int_0^1 \alpha'(t) dt.$$

Seja $u \in \mathbb{E}^2$ um vetor unitário qualquer. Desta forma,

$$\langle q - p, u \rangle = \int_0^1 \langle \alpha'(t), u \rangle dt \leq \int_0^1 |\alpha'(t)| dt$$

Ao tomarmos $u = \frac{q-p}{|q-p|}$, concluímos que $|q-p| \leq L(\alpha)$ e $|q-p| \leq d_{\mathbb{E}^2}(p, q)$. Portanto, o comprimento da reta ligando p à q é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva ligando estes pontos, da onde concluímos que a geodésica ligando p à q é uma reta. \square

Corolário 3.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{E}^2$. Existe uma única geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que liga p à q .*

Demonstração. Seja $\alpha(t) = p + t(q - p)$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$, a parametrização da reta que minimiza a distância de p à q . Neste caso, o comprimento de arco de α no instante t é dado por $s = t |q - p|$. Tomando $t = \frac{s}{|q-p|}$, a curva parametrizada pelo comprimento de arco é $\beta(s) = \alpha(\frac{s}{|q-p|})$. A unicidade segue do fato que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = \frac{q-p}{|q-p|}$. \square

3.2 Isometrias de \mathbb{E}^2

Com o intuito de descrevermos o grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$, primeiramente estudaremos as isometrias mais simples de \mathbb{E}^2 .

Definição 3.2. Uma rotação de ângulo θ com centro na origem é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ que satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer $\theta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{E}^2$

$$\langle R_\theta.u, R_\theta.v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \det(R_\theta) = 1$$

Observação. Decorrem da definição as seguintes propriedades de uma rotação:

1. $R_\theta(0) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $R_\theta.R_\theta^t = R_\theta^t.R_\theta = I$,
3. decorre do lema 3.1 que a matriz que representa R_θ na base canônica $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é

$$[R_\theta]_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Não havendo possibilidade de mal entendido, denotaremos $R_\theta = [R_\theta]_\beta$. Desta forma, é imediato verificarmos que, para quaisquer $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, valem as identidades

$$R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}. \quad (3.1)$$

Seja $SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ o conjunto das rotações em \mathbb{E}^2 . Decorre das identidades acima que SO_2 é um grupo abeliano.

Proposição 3.2. *Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a rotação R_θ é uma isometria de \mathbb{E}^2 .*

Demonstração.

$$R_\theta(x, y) = (\cos\theta.x + \text{sen}\theta.y, -\text{sen}\theta.x + \cos\theta.y).$$

Portanto, $(dR_\theta)_{(x,y)} : T_{(x,y)}\mathbb{E}^2 \rightarrow T_{R_\theta(x,y)}$ é dada por

$$(dR_\theta)_{(x,y)} \cdot v = R_\theta \cdot v,$$

da onde

$$\langle (dR_\theta)_{(x,y)} \cdot v, (dR_\theta)_{(x,y)} \cdot v \rangle = \langle R_\theta \cdot v, R_\theta \cdot v \rangle = \langle v, v \rangle.$$

□

Para introduzirmos as transformações de reflexão sobre uma reta, inicialmente vamos considerar a reflexão sobre o eixo-x definida por

$$r_x(x, y) = (x, -y)$$

Desta forma, $r_x : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma transformação linear tal que $r_x^2 = id_{\mathbb{E}^2}$ e cuja matriz, em relação a base canônica, é

$$[r_x]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta r_x = r_x R_{-\theta}. \quad (3.2)$$

Definição 3.3. Seja $l \subset \mathbb{E}^2$ uma reta passando pela origem cuja inclinação (medida em relação ao eixo-x, no sentido anti-horário) mede θ . Uma reflexão em relação a l é a transformação linear $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida por

$$r_l = R_\theta \circ r_x \circ R_\theta^{-1}.$$

Segue da identidade 3.2 que

$$r_l = R_\theta \cdot r_x \cdot R_{-\theta} = R_{2\theta} \cdot r_x. \quad (3.3)$$

Exemplo 3.1. :

1. Reflexão sobre o eixo y.

$r_y(x, y) = (-x, y)$. Na base canônica temos

$$[r_y]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Reflexão em relação a reta $l = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y = tg(\theta)x\}$.
 Se θ é a inclinação de l com respeito ao eixo- x , então decorre da definição $r_l = R_\theta \circ r_x \circ R_\theta^{-1} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ que a matriz de r_l na base canônica é

$$[r_l]_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen} 2\theta \\ \text{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

FIGURA 3.1

3. Em função do coeficiente angular de $y = ax$ a reflexão do item anterior é

$$r_l = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -1+a^2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Observação. Seja l uma reta passando pela origem em \mathbb{E}^2 . Então;

1. Se $p \in l$, então $r_l(p) = p$.
2. $r_l^2 = id_{\mathbb{E}^2}$
3. $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ satisfaz $r_l^t \cdot r_l = r_l \cdot r_l^t = I$, ou equivalentemente;

$$\langle r_l \cdot u, r_l \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{E}^2$$

Portanto, $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma isometria.

Proposição 3.3. *Sejam l, r retas em \mathbb{E}^2 passando pela origem que formam ângulos α, β com o eixo- x , respectivamente. Então,*

$$r_l \circ r_s = R_{2(\alpha-\beta)}, \quad r_s \circ r_l = R_{-2(\alpha-\beta)}.$$

Demonstração. De acordo com 3.4,

$$r_l = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \text{sen}(2\alpha) \\ \text{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r_s = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \text{sen}(2\beta) \\ \text{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$r_l \circ r_s = \begin{pmatrix} \cos[2(\alpha-\beta)] & -\text{sen}[2(\alpha-\beta)] \\ \text{sen}[2(\alpha-\beta)] & \cos[2(\alpha-\beta)] \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r_s \circ r_l = \begin{pmatrix} \cos[2(\beta-\alpha)] & -\text{sen}[2(\beta-\alpha)] \\ \text{sen}[2(\beta-\alpha)] & \cos[2(\beta-\alpha)] \end{pmatrix}.$$

□

Definição 3.4. O grupo ortogonal é o conjunto

$$O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.A^t = A^t.A = I\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes.

O grupo O_2 age sobre \mathbb{E}^2 tendo a origem como o único ponto fixo da a.

Exercício 3.1. :

1. Mostre que O_2 é um grupo e que SO_2 é um subgrupo de O_2 (subgrupo das rotações).
2. Seja D_n o grupo diedral do polígono regular de n lados. Mostre que se as retas l e s passam pela origem e formam um ângulo $\frac{\pi}{n}$ entre si, então

$$D_n \simeq \langle r_l, r_s \rangle. \quad (3.6)$$

Lema 3.1. *Seja $A \in O_2$. Então, há duas possibilidades: ou (i) $A = R_\theta$, caso $A \in SO_2$, ou (ii) $A = R_\theta \circ r_x$, caso $A \notin SO_2$.*

Demonstração. Seja $A \in O_2$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Segue da identidade $A^t.A = I$ que

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (3.7)$$

$$ac + bd = 0, \quad (3.8)$$

$$c^2 + d^2 = 1. \quad (3.9)$$

A equação 3.8 implica em $ac = -bd$. Consideramos os seguintes casos;

1. $c=0$

Neste caso, $d=1$ ou $d=-1$, em ambas as situações temos $b=0$, da onde $a = 1$ ou $a = -1$. Portanto, a matriz A é igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $d=0$

Neste caso, $c=1$ ou $c=-1$; em ambos os casos $a=0$, da onde $b=1$ ou $b=-1$. Portanto, a matriz A será igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $a=0$ ou $b=0$

Estes casos resultam, de maneira análoga, nas mesmas matrizes obtidas nos itens anteriores.

4. $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Neste caso, $c = -\frac{bd}{a}$. Ao substituirmos na equação 3.9 resulta em $|d| = |a|$. Consequentemente, há duas possibilidades

$$d = a \Rightarrow c = -b, \quad d = -a \Rightarrow c = b.$$

Assim, neste caso, temos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$ e $b = -\sin\theta$, então as equações 3.7, 3.8 e 3.9 são satisfeitas. O ângulo θ sempre existe porque as funções *coseno* e *seno* são contínuas. Assim,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, ou A é uma matriz de rotação R_θ ou A é o produto de uma rotação seguida por uma reflexão. \square

Corolário 3.2. *O grupo O_2 é gerado por reflexões.*

Demonstração. Na proposição 3.3 vimos que as rotações são produtos de reflexões, da onde concluímos que O_2 é gerado por reflexões. \square

Exercício 3.2. :

1. Sejam R_ϕ uma rotação e r_l uma reflexão sobre uma reta l passando pela origem. Suponha que l forma um ângulo ϕ com o eixo- x . Mostre que $R_\phi \circ r_l$ é uma reflexão ao longo de uma reta t e determine t .
2. Mostre que O_2 tem duas componentes conexas sendo uma, a da identidade, igual a SO_2 .
3. Mostre que SO_2 é um subgrupo normal de O_2 e $[O_2 : SO_2] = 2$.
4. Conclua que O_2 não é um grupo abeliano.
5. Nos casos tratados na demonstração do teorema acima, diga qual o significado geométrico para as transformações que surgem nos casos $c = 0$ e $d = 0$.
6. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $T^2 = I$ e estude os casos onde ela representa uma transformação ortogonal.

Definição 3.5. Seja $b \in \mathbb{R}^2$. Uma translação é uma transformação $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida pela expressão

$$T_b(x) = x + b, \quad b = T(0). \quad (3.10)$$

Proposição 3.4. *As translações satisfazem as seguintes propriedades;*

1. Se $b \neq 0$ então as transformações $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ não são lineares.
2. Se $b \neq 0$, então para todo $x \in \mathbb{E}^2$ $T_b(x) \neq x$.
3. Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{E}^2$, então

$$T_{b_1} \circ T_{b_2} = T_{b_2} \circ T_{b_1} = T_{b_1+b_2}.$$

4. Para todo $b \in \mathbb{E}^2$, $T_b^{-1} = T_{-b}$.
5. o conjunto

$$\mathcal{T} = \{T_b \mid b \in \mathbb{E}^2\}$$

munido com a operação de composição é um grupo abeliano isomorfo a \mathbb{R}^2 .

6. \mathcal{T} age em \mathbb{E}^2 sem pontos fixos.
7. Para todo $b \in \mathbb{E}^2$, $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma isometria.

Demonstração. .

1. Veja que $T_b(x + y) = x + y + b$ enquanto $T_b(x) + T_b(y) = x + y + 2b$.

2. Se $T_b(x) = x$, então $x + b = x$ e $b = 0$.
3. $T_{b_1} \circ T_{b_2}(x) = T_{b_1}(x + b_2) = x + b_2 + b_1 = T_{b_1+b_2}(x)$.
4. $T_b \circ T_{-b}(x) = T_{b-b}(x) = T_0(x) = x$, ou seja $T_b \circ T_{-b} = id_{\mathbb{E}^2}$.
5. Pelos itens anteriores, segue que \mathcal{T} é um grupo abeliano. A aplicação $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(T_b) = b$ define um isomorfismo entre grupos. Além disto, segue que \mathcal{T} age sobre \mathbb{E}^2 através da ação $\mathcal{T} \times \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida por $(T_b, x) \rightarrow T_b(x)$.
6. Seja $T_b \in \mathcal{T}$, então $T_b(x) = x + b$ e $dT_b|_x \cdot v = v$, da onde T_b é uma isometria de \mathbb{E}^2 .

□

Uma vez que a composição de isometrias é uma isometria, vamos considerar para todo $A \in O_2$ e $b \in \mathbb{E}^2$ a isometria

$$T_{A,b} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad T_{A,b}(u) = Au + b. \quad (3.11)$$

Exercício 3.3. :

1. Reflexão sobre uma reta $l \subset \mathbb{E}^2$.
Seja $l \subset \mathbb{E}^2$ uma reta definida pela equação $y = ax + b$. Mostre que a reflexão em relação a l é dada pela transformação $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$r_l(x, y) = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -1+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2b}{1+a^2} (-a, 1). \quad (3.12)$$

2. Se $l = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y = tg(\theta)x - x_0tg(\theta)\}$ é a reta com inclinação θ passando pelo ponto $(x_0, 0)$, mostre que

$$r_l(u) = r_x R_{-2\theta}(u) - \frac{2x_0 \cdot tg(\theta)}{1+tg^2(\theta)} (-tg(\theta), 1) \Rightarrow r_l = T_{r_x R_{-2\theta}, b(\theta, x_0)}, \quad (3.13)$$

3. Considere $l_b \subset \mathbb{E}^2$ a reta definida pela equação $y = ax + b$. Sejam $e = \frac{(1, a)}{\sqrt{1+a^2}}$ e $e_b = (0, b)$ vetores definidos pela parametrização $r(t) = te + e_b$ de l_b . Mostre que, para qualquer vetor u ,

$$r_{l_b}(u) = -u + 2 \langle u, e \rangle e + 2v_b, \quad (3.14)$$

onde $v_b = e_b - \langle e_b, e \rangle e$ é ortogonal a e ($v_b \perp e$). Mostre que as expressões 3.14 e 3.12 são iguais.

4. Considere as reflexões r_{l_b} e r_l sobre as retas $l_b = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$ e $l = \{(x, y) \mid y = ax\}$, respectivamente. Mostre que

$$r_{l_b} = T_{2v_b} r_l, \text{ onde } v_b = e_b - e, e > e. \quad (3.15)$$

5. Obtenha a expressão para a reflexão ao longo dos eixos e das reta $y = \alpha$, onde α é constante. (no caso do eixo-y, considere o caso $a \rightarrow \infty$).
6. Rotação com centro em P
Sejam $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{E}^2$ e $R_\theta^{P_0} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma rotação de centro em P_0 e ângulo θ . Considere $v_0 = \overline{OP_0}$ e mostre que

$$R_\theta^{P_0}(u) = R_\theta(u) + v_0 - R_\theta(v_0) \Rightarrow R_\theta^{P_0} = T_{R_\theta(v_0) - v_0} \circ R_\theta. \quad (3.16)$$

7. Seja l uma reta qualquer em \mathbb{E}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Mostre que existe uma isometria $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que a imagem de l é a reta $t = \{(\alpha, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
8. Considere as isometrias r_l , R_θ^P e T_v . Mostre que os comutadores $[r_l, T_v]$ e $[R_\theta, T_v]$ são translações e descreva quando as direções destas translações são paralelas a v .

Proposição 3.5. *Sejam l, s retas em \mathbb{E}^2 e r_l, r_s as respectivas reflexões. Então,*

1. *Se $l \parallel s$, então $r_l \circ r_s = T_b$ e $r_s \circ r_l = T_{-b}$, onde $b \in \mathbb{E}^2$ é um vetor ortogonal as retas l, s e $|b| = 2 \text{dist}(l, s)$*
2. *Se l, s são concorrentes em P , então $r_s \circ r_l = R_{2\theta}^P$ e $r_l \circ r_s = R_{-2\theta}^P$ são rotações com centro em P e $\theta \in \mathbb{R}$ é o ângulo formado por l e s .*

Demonstração. .

1. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$l = \{(\alpha, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad s = \{(\beta, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

onde α, β são constantes. Assim, sejam $u_0 = (\alpha, 0)$ e $v_0 = (\beta, 0)$. Segue que as reflexões $r_l, r_s : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ são dadas por

$$r_l(u) = r_y(u) + 2u_0, \quad r_s(u) = r_y(u) + 2v_0. \quad (3.17)$$

Portanto, uma vez que $r_y(u_0) = -u_0$ e $r_y(v_0) = -v_0$, a composição é

$$r_l \circ r_s(u) = u + 2(u_0 - v_0) \quad (3.18)$$

$$r_s \circ r_l(u) = u + 2(v_0 - u_0) \quad (3.19)$$

2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que l e s são concorrentes na origem. Suponhamos que l forma um ângulo α com o eixo-x e s forma um ângulo β com o eixo-x. Assim, $\theta = \alpha - \beta$ e a afirmação decorre da proposição 3.3.

□

Teorema 3.1. *Se $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma isometria, então, existem $A \in O_2$ e $b \in \mathbb{E}^2$ tais que, para todo $x \in \mathbb{E}^2$,*

$$T(x) = Ax + b \quad (T = T_{A,b})$$

Demonstração. Seja $p = (x, y) \in \mathbb{E}^2$. Por definição, $\langle dT_p \cdot u, dT_p \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, por isto dT_p é ortogonal. Em relação a base canônica do \mathbb{R}^2 , em cada ponto $p = (x, y)$, existe uma matrix ortogonal $R_{\theta(x,y)}$ tal que $[dT_p]_{\beta} = R_{\theta(x,y)}$ ou $[dT_p]_{\beta} = R_{\theta(x,y)} \circ r_x$. Vamos tratar do 1º-caso, uma vez que o 2º segue de forma análoga. Suponhamos que $\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é não constante e que existem funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tais que $T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Assim,

$$dT_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Da igualdade $dT_{(x,y)} = R_{\theta(x,y)}$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \cos(\theta(x, y))$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} = -\text{sen}(\theta(x, y)).$$

A identidade $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ implica em

$$-\frac{\partial \theta}{\partial y} \text{sen}(\theta(x, y)) = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta(x, y)).$$

Analogamente, segue de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$, que

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos(\theta(x, y)) = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \text{sen}(\theta(x, y)).$$

Ao assumirmos que θ não é constante podemos dividir as expressões acima;

$$\frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{-\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}} \Rightarrow |\nabla \theta|^2 = 0 \Rightarrow \nabla \theta = 0.$$

Ou seja, concluímos que θ é constante. Neste caso, ao integrarmos $dT_p = R_\theta$ obtemos

$$T(x) = R_\theta.x + b, \quad b = T(0).$$

Ao aplicarmos os mesmos procedimentos para o caso $A = R_\theta \circ r_x$, concluímos que

$$T(x) = (R_\theta \circ r_x).x + b, \quad b = T(0).$$

□

Corolário 3.3. *O grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$ goza das seguintes propriedades: Ao fixarmos a origem em \mathbb{E}^2 ;*

1. *O grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$ é gerado pelas reflexões.*
2. *$Isom(\mathbb{E}^2) = \mathcal{T} \rtimes O_2$.*
3. *Ao considerarmos os homomorfismos $\iota: \mathcal{T} \rightarrow Isom(\mathbb{E}^2)$ ($\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}^2$) e $j: Isom(\mathbb{E}^2) \rightarrow O_2$ definidos por $\iota(b) = T_{I,b}$ e $j(T_{A,b}) = A$, obtemos a sequência exata*

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\iota} Isom(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{j} O_2 \longrightarrow 1. \quad (3.20)$$

A aplicação j é um epimorfismo cujo núcleo é $Nuc(j) \simeq \iota(\mathcal{T})$, enquanto ι é um monomorfismo.

Demonstração. .

1. Uma vez que as translações e as rotações podem ser escritas como o produto de reflexões, segue do teorema anterior que todas as isometrias de \mathbb{E}^2 são obtidas a partir do produto de reflexões.
2. A demonstração decorre da definição de *produto semi-direto* [?]. Restrito ao presente caso, o produto semi-direto $\mathcal{T} \rtimes O_2$ é definido da seguinte maneira; considere sobre $\mathbb{E}^2 \times O_2$ o seguinte produto (semi-direto)

$$(a, A).(b, B) = (a + Ab, AB)$$

(a) o produto é associativo,

$$\begin{aligned} (a, A).[(b, B).(c, C)] &= (a, A).(b + Bc, BC) = (a + Ab + ABc, ABC), \\ [(a, A).(b, B)].(c, C) &= (a + Ab, AB).(c, C) = (a + Ab + ABc, ABC). \end{aligned}$$

(b) o elemento neutro do produto é $(0, I)$.

(c) o elemento inverso de um elemento (a, A) é $(-A^{-1}a, A^{-1})$.

Desta maneira, o produto $\mathcal{T} \times O_2$ munido com o produto semi-direto é um grupo, o qual denotamos por $\mathcal{T} \rtimes O_2$. Desta forma, a aplicação $h : \mathcal{T} \times O_2 \rightarrow Isom(\mathbb{E}^2)$ definida por $h(a, A) = T_{A,a}$ é um homomorfismo de grupo, já que

$$h(a, A).h(b, B) = T_{A,a} \circ T_{B,b} = T_{AB, Ab+a} = T_{(a,A).(b,B)} = h((a, A).(b, B)).$$

Além disto, h é uma bijeção e portanto é um isomorfismo de grupos, da onde segue que $Isom(\mathbb{E}^2) = \mathcal{T} \rtimes O_2$.

3. Ao definirmos os homomorfismos $\iota(b) = (b, I)$ e $j(T_{A,b}) = A$ ($j \circ \iota = I$) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\iota} Isom(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{j} O_2 \longrightarrow 1.$$

□

Definição 3.6. A isometria $T_{A,b}$

1. preserva orientação se $\det(A) = 1$.
2. inverte orientação se $\det(A) = -1$.

Lema 3.2. *Sejam l uma reta e $T_{A,b} \in Isom(\mathbb{E}^2)$. Então, $T_{A,b}(l)$ é uma reta.*

Demonstração. Sejam $p, q \in l$. Desde que l minimiza a distância entre p e q , vamos considerá-la parametrizada por comprimento de arco, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$\gamma(s) = s \frac{q - p}{|q - p|} + p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_{A,b}(\gamma(s)) &= s \frac{1}{|q - p|} A(q - p) + Ap + b = s \frac{1}{|q - p|} [(Aq + b) - (Ap + b)] + (Ap + b) = \\ &= s \frac{T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)}{|q - p|} + T_{A,b}(p). \end{aligned}$$

Uma vez que $|T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)| = |q - p|$, temos

$$T_{A,b}(\gamma(s)) = s \frac{T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)}{|T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)|} + T_{A,b}(p).$$

Portanto, $T_{A,b}(\gamma)$ é a parametrização por comprimento de arco da reta que minimiza a distância de $T_{A,b}(q)$ à $T_{A,b}(p)$.

□

Lema 3.3. *Seja $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma isometria tal que no ponto p satisfaz $f(p) = p$ e $df_p = I$. Então, $f = id_{\mathbb{E}^2}$.*

Demonstração. Decorre do lema anterior que a imagem da reta $\gamma(s) = s \frac{q-p}{|q-p|} + p$ é

$$f(\gamma(s)) = s \frac{f(q) - f(p)}{|f(q) - f(p)|} + f(p).$$

Pela hipótese,

$$\frac{d(f(\gamma))}{ds} \Big|_{s=0} = df_p \cdot \frac{q-p}{|q-p|} = \frac{q-p}{|q-p|}.$$

Portanto,

$$\frac{f(q) - f(p)}{|f(q) - f(p)|} = \frac{q-p}{|q-p|}.$$

Como $f(p) = p$ e $|f(q) - f(p)| = |q - p|$, segue que $f(q) = q$ para todo $q \in \mathbb{E}^2$. □

Observação. O lema acima, decorre do fato para cada ponto $p \in \mathbb{E}^2$ e $v \in T_p \mathbb{E}^2$, existe uma única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_p \mathbb{E}^2$. Como as geodésicas ligando os pares de pontos p, q e $f(p) = p, f(q)$ tem as mesmas condições iniciais e levam os mesmo “tempo” para percorrermos os trajetos de p à q e de $f(p)$ à $f(q)$, segue que $f(q) = q$.

Definição 3.7. Sejam A, B e C pontos não colineares em \mathbb{E}^2 . Um triângulo euclidiano $\triangle(A, B, C)$ é formado pelas 3 retas definidas pelos pontos A, B e C .

O seguinte axiomas de Euclides apresenta as condições suficientes para que 2 triângulos sejam congruentes;

Axioma 3.3. Congruência (LLL) *Dois triângulos quaisquer são congruentes se tiverem os 3 lados congruentes [?].*

Na presente formulação da geometria euclidiana o conceito de isometria substitui o de congruência. O seguinte resultado é equivalente ao axioma citado acima;

Proposição 3.6. *Sejam A, B e C pontos não colineares em \mathbb{E}^2 . Qualquer isometria $f \in Isom(\mathbb{E}^2)$ é determinada pelas imagens $f(A), f(B)$ e $f(C)$.*

Demonstração. Considere em \mathbb{E}^2 a estrutura de espaço vetorial induzida pelo \mathbb{R}^2 de tal forma que a origem esta em A e o eixo-x esta definido pela reta ligando A a B . O eixo-y é determinado pela única reta perpendicular ao eixo-x. Sejam $P_B = (x_B, y_B)$ e $P_C = (x_C, y_C)$ as coordenadas de B e C em \mathbb{R}^2 . Decorre da hipótese que os vetores $v_B = \overrightarrow{OP_B}$ e $v_C = \overrightarrow{OP_C}$ são linearmente independentes. Por isto, para qualquer ponto $P \in \mathbb{E}^2$, representado pelo vetor $v = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^2$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_B + \beta v_C$. Seja $f = T_{A,b}$, onde $A \in O_2$ e $b = f(0)$. Então, $f(0) = b$ e

$$f(v) = Av + b = \alpha f(v_B) + \beta f(v_C) + f(0)$$

Portanto, f é determinada pela imagem dos vetores 0 , v_B e v_C . □

Exercício 3.4. :

1. Enuncie e prove o caso (LAL) de congruência de triângulos.
2. Enuncie e prove o caso (ALA) de congruência de triângulos.
3. Sejam $A, B \in \mathbb{E}^2$ dois pontos quaisquer e l a reta definida por eles. Mostre que o conjunto dos pontos equidistantes de A e B é uma reta ortogonal a l .

Proposição 3.7. *Uma isometria $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ é o produto de no máximo 3 reflexões.*

Demonstração. Sejam A, B e C pontos em \mathbb{E}^2 e $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ as respectivas imagens.

1. Suponhamos que $f(A) = A$ e $f(B) = B$. Então ocorrem os seguintes casos;

(a) $f(C) = C$. Neste caso, $f = id_{\mathbb{E}^2}$.

(b) $f(C) \neq C$.

Consideramos a reta l passando por A e B e seja $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ a reflexão sobre l . Segue que $r_l(C) = C$; como $r_l(A) = A$ e $r_l(B) = B$, concluímos que $r_l \circ f = id_{\mathbb{E}^2}$, ou seja $f = r_l$.

2. Suponhamos que $f(A) = A$.

Consideramos l_1 a reta equidistante de B e $f(B)$ e seja $r_1 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ a reflexão sobre l_1 . Assim, $r_1(B) = f(B)$ e $r_1(A) = A$ uma vez que $A \in l_1$. Os seguintes casos ocorrem;

(a) $r_1(C) = f(C)$.

Como $r_1(A) = A = f(A)$ e $r_1(B) = f(B)$, considere $r_1 \circ f$; então,

$$r_1 \circ f(A) = A, \quad r_1 \circ f(B) = B \quad \text{e} \quad r_1 \circ f(C) = C,$$

da onde $f = r_1$

(b) $r_1(C) \neq f(C)$.

Consideramos a reta l_2 passando por $f(A)$ e $f(B)$ e seja $r_2 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ a reflexão sobre l_2 . Assim,

$$r_2 \circ r_1(A) = f(A) \quad \text{e} \quad r_2 \circ r_1(B) = f(B).$$

No entanto, do fato que

$$\begin{aligned} |f(A) - r_1(C)| &= |A - r_1(C)| = |r_1(A) - r_1(C)| = \\ &= |A - C| = |f(A) - f(C)|. \end{aligned}$$

e

$$|f(B) - r_1(C)| = |r_1(B) - r_1(C)| = |B - C| = |f(B) - f(C)|.$$

segue que $r_1(C)$ e $f(C)$ equidistam de $f(A)$ e de $f(B)$, respectivamente. Isto é, ou $r_2(r_1(C)) = f(C)$ ou $r_1(C) = f(C)$. Portanto,

$$r_2 \circ r_1(A) = f(A), \quad r_2 \circ r_1(B) = f(B) \quad \text{e} \quad r_2 \circ r_1(C) = f(C).$$

Consequentemente, $f = r_2 \circ r_1$.

3. Suponhamos que $f(A) \neq A$, $f(B) \neq B$ e $f(C) \neq C$.

Neste caso, consideramos a reflexão $r_3 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ sobre a reta equidistante de A e de $f(A)$. Por construção, temos que $r_3 \circ f(A) = A$. Ao aplicarmos o item anterior à isometria $r_3 \circ f$, concluímos que f é o produto de no máximo 3 reflexões.

□

3.3 Subgrupos Discretos de $Isom(\mathbb{E}^2)$

Nesta seção, vamos explorar o fato da estrutura do grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$ ser isomorfa a do grupo $\mathbb{R}^2 \rtimes O_2$ para descrevermos os subgrupos que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 . Como vimos, esta estrutura se decompõem de acordo com a sequência exata 3.20;

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{i} Isom(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{j} O_2 \longrightarrow 1,$$

Inicialmente, descreveremos os subgrupos discretos de O_2 e os de \mathcal{T} . Se $G < Isom(\mathbb{E}^2)$ é um subgrupo, consideramos $\mathcal{T}_G = i(\mathcal{T} \cap G)$ e $O_G = j(G)$. Analogamente, a estrutura de G se decompõem de acordo com a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_G \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} O_G \longrightarrow 1.$$

Os pontos $p \in \mathbb{E}^2$ cujo grupo de isotropia G_p é não trivial são centros de rotações da ação de G ; neste caso, ao fixarmos a origem em p temos $O_G \simeq G_p$.

Começaremos por descrever os subgrupos finitos de O_2 , em seguida descreveremos os grupos discretos de \mathcal{T} . A seguir, veremos que alguns subgrupos são simplesmente excluídos da lista dos que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 ;

Proposição 3.8. *Se $\theta \in 2\pi(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então $G = \langle R_\theta \rangle$ é infinito.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que G é finito. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_\theta^k = I$. Isto implica na existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \cdot \theta = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \theta = 2\pi \frac{n}{k} \quad \Rightarrow \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Q},$$

da onde temos uma contradição. Consequentemente, G tem que ser infinito. □

Proposição 3.9. *Se $\theta \in 2\pi(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então;*

1. $G = \langle R_\theta \rangle$ é denso em SO_2 .
2. A órbita de um elemento $x \in S^1$ é densa em S^1 .

Demonstração. O grupo SO_2 age invariantemente e transitivamente sobre o espaço $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Fixamos $x_0 \in S^1$; a órbita de x_0 pela ação de $G = \langle R_\theta \rangle$ é

$$\mathcal{O}_{x_0} = \{R_{n\theta}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Uma vez que \mathcal{O}_{x_0} tem cardinalidade infinita, segue da compacidade de S^1 que existe uma subsequência $\{R_{n_k\theta}(x_0)\} \subset \mathcal{O}_{x_0}$ convergente em S^1 . Suponhamos que $\lim_{n_k \rightarrow \infty} R_{n_k\theta}(x_0) = y_0$. Isto quer dizer que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_k > n_0$

$$|R_{n_k\theta}(x_0) - y_0| < \epsilon.$$

Como toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy, segue que existe um número infinito de $m, n \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ e $m > n_0$ então

$$|R_{n\theta}(x_0) - R_{m\theta}(x_0)| < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$|R_{(n-m)\theta}(x_0) - x_0| < \epsilon.$$

(significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(n - m) \sim 2\pi N$). Para obtermos a densidade da órbita de x_0 , seja $y = R_\beta(x_0)$, onde $0 < \beta < 2\pi$, um ponto qualquer de S^1 . Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\delta = \frac{\beta}{k}$ tais que

$$|R_{(n-m)\theta}(x_0) - x_0| < |R_\delta(x_0) - x_0| < \epsilon.$$

Consideramos $l \in \mathbb{N}$ de maneira que $(k - 1)\delta < l(n - m)\theta < k\delta$. Portanto,

$$|R_\beta(x_0) - R_{l(n-m)\theta}(x_0)| = |R_{k\delta}(x_0) - R_{l(n-m)\theta}(x_0)| = |R_{k\delta - l(n-m)\theta}(x_0) - x_0|.$$

No entanto,

$$|R_{k\delta-l(n-m)\theta}(x_0) - x_0| < |R_{k\delta-(k-1)\delta}(x_0) - x_0| = |R_\delta(x_0) - x_0| < \epsilon$$

Consequentemente, $|y - R_{(n-m)\theta}^l(x_0)| < \epsilon$.

□

Corolário 3.4. *Se G é um subgrupo de SO_2 que age descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 , então G é finito.*

Queremos classificar os subgrupos finitos de SO_2 , mas antes estudaremos os subgrupos de SO_2 da forma \mathbb{Z}_n .

Proposição 3.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_n = \langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$. Os subgrupos de \mathbb{Z}_n são da forma \mathbb{Z}_m , onde $m \in \mathbb{N}$ é um divisor de n .*

Demonstração. A demonstração será realizada em duas partes;

1. Se $n = km$, então $\mathbb{Z}_m < \mathbb{Z}_n$.

Consideramos a classe $[k] \in \mathbb{Z}_n$ e o subconjunto $\langle [k] \rangle = \{0, [k], 2[k], \dots, (m-1)[k]\}$. A seguir, verificaremos que $\langle [k] \rangle$ é um subgrupo de \mathbb{Z}_n .

- (a) a operação definida em $\langle [k] \rangle$ é a induzida pela operação em \mathbb{Z}_n , por isto é associativa.
- (b) $0 \in \langle [k] \rangle$;
pois $m[k] = [m \cdot k] = [n] = 0$.
- (c) Se $1 \leq p \leq m-1$, então $(p[k])^{-1} \in \langle [k] \rangle$;
observamos que $pk + (m-p)k = n$ e, por isto, $p[k] + [m-p][k] = 0$ em \mathbb{Z}_n .
Portanto, $(p[k])^{-1} = [m-p] \cdot [k] \in \langle [k] \rangle$.

2. suponhamos que $G < \mathbb{Z}_n$ e $o(G) = m$. Pelo teorema de Lagrange, $o(G) = m$ divide $o(\mathbb{Z}_n) = n$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot m$. Pelo item anterior, $\langle [k] \rangle = \{0, [k], \dots, (m-1)[k]\}$ é um subgrupo de G . Como a ordem de $\langle [k] \rangle$ é igual a $o(G) = m$, concluímos que $G = \mathbb{Z}_m$.

□

Observação. A proposição acima é simples do ponto de vista geométrico (figura ??). Seja P_n um polígono regular de n -lados e $m \in \mathbb{N}$ um divisor de n . Construa um polígono regular P_m de m -lados da seguinte forma:

- 1. fixe um vértice $v_0 \in P_n$ e, no sentido anti-horário nomeie os vértices por v_1, v_2, \dots, v_{n-1} .
- 2. Se $n = l \cdot m$, considere os vértices $\hat{v}_0 = v_0, \hat{v}_2 = v_l, \hat{v}_i = v_{il}, \dots, v_n = \hat{v}_{(n-1)l}$.
- 3. Ligando os vértices $\hat{v}_i, i = l, 2l, \dots, (n-1)l$, obtemos um polígono regular de m -lados.

Desta maneira, as transformações que preservam P_m preservam P_n .

Agora, investigaremos a estrutura de um subgrupo finito $G < SO_2$ a partir de alguns dos elementos de $G < SO_2$. Para isto, utilizamos o fato de que G é composto por rotações racionais.

Proposição 3.11. *Seja G um subgrupo finito de SO_2 . Se $R_{\frac{2\pi n}{k}} \in G$ e $d = \text{mdc}(k, n)$, então $\mathbb{Z}_{k'} = \langle R_{\frac{2\pi}{k'}} \rangle \subset G$, onde $k'd = k$.*

Demonstração. Existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $ak + bn = d$; por isto, segue que

$$R_{2\pi \frac{n}{k}}^b = R_{2\pi(\frac{d}{k}-a)} = R_{2\pi \frac{d}{k}} = R_{\frac{2\pi}{k'}} \in G.$$

Consequentemente, $\mathbb{Z}_{k'} = \langle R_{\frac{2\pi}{k'}} \rangle$ é subgrupo de G . □

Exercício 3.5. Verifique geometricamente, que $R_{\frac{2\pi 8}{6}} \in G \Rightarrow \mathbb{Z}_3 < G$.

Proposição 3.12. *Sejam G um grupo finito de SO_2 , $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{N}$ e $M = \text{mmc}(p_1, \dots, p_n)$. Se, para todo $1 \leq i \leq n$, $R_{\frac{2\pi}{p_i}} \in G$, então $\mathbb{Z}_M < G$. Em particular, se P é o maior conjunto formado por elementos da forma $R_{\frac{2\pi}{p_i}} \in G$, então $G = \mathbb{Z}_M$.*

Demonstração. Mostraremos por indução. Sejam $p_i, p_j \in P$ tais que $p_i = k\hat{p}_i$, $p_j = k\hat{p}_j$ onde $k, \hat{p}_i, \hat{p}_j \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(\hat{p}_i, \hat{p}_j) = 1$. Assim,

$$R_{\frac{2\pi}{p_i}} R_{\frac{2\pi}{p_j}} = R_{\frac{2\pi(\hat{p}_i + \hat{p}_j)}{k\hat{p}_i\hat{p}_j}} \in G.$$

Como $\text{mmc}(p_i, p_j) = k\hat{p}_i\hat{p}_j$ e $\text{mdc}(\hat{p}_i + \hat{p}_j, k\hat{p}_i\hat{p}_j) = 1$, segue da proposição anterior que $\mathbb{Z}_{k\hat{p}_i\hat{p}_j}$ é subgrupo de G . Agora, suponhamos que o resultado vale para $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$. Seja $M_1 = \text{mmc}(p_1, \dots, p_{n-1})$, então

$$R_{\frac{2\pi}{M_1}} R_{\frac{2\pi}{p_n}} = R_{\frac{2\pi M_1 + p_n}{M_1 p_n}} \in G.$$

Sejam $M_1 = k.M_2$ e $p_n = k\hat{p}_n$, onde $\text{mdc}(M_2, \hat{p}_n) = 1$. Desta forma,

$$R_{\frac{2\pi}{M_1}} R_{\frac{2\pi}{p_n}} = R_{\frac{2\pi(M_2 + \hat{p}_n)}{kM_2\hat{p}_n}} \in G.$$

Uma vez que $M = \text{mmc}(p_1, \dots, p_n) = \text{mmc}(M_1, p_n) = kM_2\hat{p}_n$, decorre de maneira análoga que $\mathbb{Z}_M < G$. Uma vez que G é finito, podemos encontrar o maior subconjunto de G com as propriedades de P . Se $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{N}$ for o maior subconjunto com a propriedade que $R_{\frac{2\pi}{p_i}} \in G$, para todo $1 \leq i \leq n$, então $G = \mathbb{Z}_M$. □

Corolário 3.5. *Seja $G \subset SO_2$ um subgrupo finito, então G é isomorfo a um dos seguintes grupos:*

1. $G \simeq \{e\}$.
2. $G \simeq \mathbb{Z}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G = \langle R_{\frac{2\pi}{k}} \rangle$.

Ao juntarmos os resultados acima, temos a seguinte classificação;

Teorema 3.2. *Se $G < O_2$ age descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 , então G é isomorfo a \mathbb{Z}_k ou à D_k .*

Demonstração. Como G finito, podemos considerá-lo como gerado pelo conjunto de reflexões $\{r_1, \dots, r_n\}$, onde r_i é uma reflexão sobre uma reta l_i passando pela origem. Assim, o conjunto de retas $\{l_1, \dots, l_n\}$ é concorrente na origem. Sejam $\theta_{ij} = \angle(l_i, l_j)$, o ângulo entre l_i e l_j . Decorre da racionalidade do ângulo das rotações $R_{\theta_{ij}} = r_i r_j$ que $\theta_{ij} = \frac{2\pi}{p_{ij}}$ e $p_{ij} \in \mathbb{N}$. Assim, há duas possibilidades para G ;

$$G = \langle r_1, \dots, r_n \rangle \quad \text{ou} \quad G = \langle r_i r_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \rangle.$$

No primeiro caso podemos reduzir o número de geradores, pois $r_i = R_{\frac{2\pi}{p_{1i}}} . r_1$. Portanto, segue que $G = \langle r_1, R_{\frac{2\pi}{k}} \rangle = D_k$. No segundo caso, decorre da proposição 3.12 que existe $k \in \mathbb{Z}$ e $G = \mathbb{Z}_k$. □

O próximo passo será descrevermos os subgrupos discretos de \mathcal{T} . Antes, vejamos a seguinte definição;

Definição 3.8. Sejam $u, v \in \mathbb{E}^2$ vetores linearmente independentes e $G = \langle T_u, T_v \rangle$ o grupo gerado pelas respectivas translações. O reticulado associado a G em \mathbb{E}^2 é a órbita da origem $0 \in \mathbb{E}^2$, ou seja

$$\mathcal{O}_0 = \{nu + mv \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposição 3.13. *Seja $G < \mathcal{T}$ um subgrupo discreto agindo sobre \mathbb{E}^2 . Então, ocorre uma das possibilidades abaixo;*

1. $G \simeq \mathbb{Z}$ e existe $v \in \mathbb{E}^2$ tal que $G = \langle T_v \rangle$.
2. $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e existem $u, v \in \mathbb{E}^2$ tal que $G = \langle T_u, T_v \rangle$.

Demonstração. Consideramos as seguintes situações;

1. Todas as direções das translações presentes no grupo G são paralelas.
Fixamos uma reta $l \subset \mathbb{E}^2$ paralela a direção de translação e consideramos um ponto $x \in l$. Uma vez que a ação é descontínua, deve existir um ponto $x_1 \in \mathcal{O}_x \subset l$ tal que

$$\text{dist}(x_1, x) = \inf_{g \in G} \text{dist}(g.x, x) > 0;$$

Seja $u = x_1 - x$, a seguir verificaremos que $G = \langle T_u \rangle$. Suponhamos que $G \neq \langle T_u \rangle$, então existe uma translação $T_v \in G$, na direção do vetor u , onde $v = au$ e $a \notin \mathbb{Z}$. Consideramos $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função

$$[x] = \text{maior inteiro } \leq x$$

e $\hat{x} = x - [x]$, $0 \leq \hat{x} < 1$. Assim, $v = \hat{a}u + [a]u$ e

$$T_v x = x + [a]u + \hat{a}u \quad \Rightarrow \quad T_{v-[a]u}(x) = T_{\hat{a}u}(x).$$

Como $T_u^{-[a]} \circ T_v = T_{\hat{a}u} \in G$, concluímos que $T_{\hat{a}u}x \in \mathcal{O}_x$. Porém,

$$|T_{\hat{a}u}(x) - T_u(x)| = |\hat{a} - 1| \cdot |u| < |u|.$$

Desta forma, obtemos uma contradição devido à construção do vetor v . Consequentemente, $\hat{a} = 0$.

2. Existem várias direções de translação.

Fixamos a origem sobre o ponto $x \in \mathbb{E}^2$. Seja l a reta paralela a uma das direção de translação. Pelo item anterior existe $x_1 \in \mathbb{E}^2$ tal que a translação $T_u \in G$, onde $u = \overline{xx_1}$ e $|u| = \text{dist}(x, x_1)$, gera todas as translações na direção de l . Seja s uma reta passando por x que seja paralela a uma outra direção de translação. Analogamente, existe $x_2 \in \mathbb{E}^2$ de forma que as translações paralelas à s são geradas por T_v , onde $v = \overline{xx_2}$ e $|v| = \text{dist}(x, x_2)$. A órbita de x pela ação do grupo $\langle T_u, T_v \rangle$ é $\{nu + mv \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$. Suponhamos que existe uma terceira direção de translação gerada por T_w , onde w é um vetor obtido de forma análoga a u e v . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $w = au + bv$. Como no item anterior,

$$w - [a]u - [b]v = \hat{a}u + \hat{b}v \quad \Rightarrow \quad T_{\hat{a}u + \hat{b}v} \in G$$

e, por isto, $T_{\hat{a}u + \hat{b}v}(x) \in \mathcal{O}_x$. Decorre da densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} que, dado $\epsilon > 0$, existem $k, m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$|k\hat{a} - m| < \epsilon/2, \quad |k\hat{b} - n| < \epsilon/2.$$

Consequentemente, $|T_{\hat{a}u + \hat{b}v}^k \circ T_{mu + nv}^{-1}(x) - x| < \epsilon$.

Sendo assim, há elementos na órbita de x cujo módulo esta aproximando-se de zero. Como isto não é admissível para uma ação descontínua, concluímos que não é possível existir uma terceira direção gerada por um vetor que não pertença ao reticulado gerado por u e v .

□

Após termos classificado os subgrupos de SO_2 e de \mathcal{T} que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 , passamos ao estudo dos subgrupos de $Isom(\mathbb{E}^2) = \mathcal{T} \rtimes O_2$ que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 . Ao fixarmos a origem em \mathbb{E}^2 obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow G \longrightarrow O_G \longrightarrow 1,$$

onde O_G é o subgrupo de SO_2 isomorfo ao grupo de isotropia da origem e \mathcal{T}_G é o subgrupo de translações puras de G .

Para efeitos da classificação, consideramos as seguintes classes de grupos discretos:

- Tipo I: Se $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z}$
 1. $O_G = \{e\}$,
 2. $O_G \simeq \mathbb{Z}_n$
 3. $O_G \simeq D_n$
- Tipo II: Se $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 1. $O_G = \{e\}$
 2. $O_G \simeq \mathbb{Z}_n$
 3. $O_G \simeq D_n$

As seguintes três proposições são fundamentais para a identificação dos grupos do Tipo II que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 ;

Proposição 3.14. *Se r_l e $T_v \in G$, então existem um vetor $w \in \mathbb{E}^2$ tal que $[r_l, T_v] = T_{2w}$. Se $r_l(u) = -u + 2\langle u, e \rangle + 2v$, como na equação 3.14, então*

$$w = v - \langle v, e \rangle e. \quad (3.1)$$

Demonstração. Basta aplicar as fórmulas e observar que $\langle v, e \rangle = 0$. □

Corolário 3.6. *No resultado anterior, se $r_l, T_v \in G$ e $\langle v, e \rangle \neq 0$ (não forem ortogonais), então G é do tipo II.*

Proposição 3.15. *Seja $P \in \mathbb{E}^2$ um ponto qualquer e suponhamos que a rotação $R_\theta^P : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, de centro em P e ângulo θ , pertence a G . Se Q é um ponto na órbita de P , então a rotação $R_\theta^Q : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ com centro em Q e ângulo θ também pertence a G .*

Demonstração. Suponhamos que $Q = g.P$, onde $g \in G$. Definimos a isometria

$$R = g.R_\theta^P.g^{-1}, \quad R(Q) = Q.$$

Sem perda de generalidade, podemos fixar a origem em P e considerar $v_0 = \overrightarrow{OQ}$. Seja $g = T_{A,v_0}$, então segue da expressão 3.16 que

$$g.R_\theta^P.g^{-1}(v) = g(R_\theta(A^{-1}v - A^{-1}v_0)) = AR_\theta A^{-1}v - AR_\theta A^{-1}v_0 + v_0.$$

Há duas possibilidades a serem consideradas:

1. $A \in SO_2$. Neste caso temos que $AR_\theta = R_\theta A$ e

$$g.R_\theta^P.g^{-1}v = R_\theta v - R_\theta v_0 + v_0 = R_\theta^Q v.$$

2. $A \in O_2 - SO_2$. Neste caso, de acordo com a expressão 3.3, existe um ângulo β tal que $A = R_{2\beta}.r_x$ e

$$AR_\theta A^{-1} = R_{2\beta}.r_x.R_\theta.r_x.R_{-2\beta} = R_{-2\beta}.R_{-\theta}.R_{2\beta} = R_{-\theta}.$$

Consequentemente,

$$gR_\theta^P.g^{-1}v = R_{-\theta}v - R_{-\theta}v_0 + v_0 = R_{-\theta}^Q v.$$

□

Proposição 3.16. Se $R_\theta^P \in G$ e $T_v \in G$, então G contém a translação T_w , onde $w = v - R_\theta^P(v)$.

Demonstração. Sejam $v_0 = \overrightarrow{OP}$ e $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ a translação definida por $T = R_\theta^P.T_{-v}.(R_\theta^P)^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} T(u) &= R_\theta^P.T_v(R_\theta^{-1}u + R_\theta^{-1}v_0 - v_0) = R_\theta^P(R_\theta^{-1}u - R_\theta^{-1}v_0 + v_0 - v) = \\ &= R_\theta(R_\theta^{-1}u - R_\theta^{-1}v_0 + v_0 - v) + v_0 - R_\theta v_0 = u - R_\theta v. \end{aligned}$$

Desta forma, $[T_v, R_\theta^P] = T_w$, onde $w = v - R_\theta v$. □

Corolário 3.7. Se o grupo G contém as isometrias R_θ^P e T_v , onde $\theta \neq \pi$, então G é um grupo do tipo II.

Proposição 3.17. Sejam $u_0 = \overrightarrow{OP}$ e $v_0 = \overrightarrow{OQ}$. Se $R_\theta^P, R_\phi^Q \in G$, então G é um grupo do tipo II, pois $[R_\theta^P, R_\phi^Q] : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é igual à translação T_{w_0} , onde

$$w_0 = (R_\theta + R_\phi - R_{\theta+\phi} - I)(v_0 - u_0). \quad (3.2)$$

Demonstração. O resultado decorre da aplicação da expressão $R_\theta^P = T_{R_\theta, u_0 - R_\theta(u_0)}$; assim, o comutador $[R_\theta^P, R_\phi^Q] = R_\theta^P \cdot R_\phi^Q \cdot (R_\theta^P)^{-1} \cdot (R_\phi^Q)^{-1}$ é dado por

$$R_\theta^P \cdot R_\phi^Q \cdot (R_\theta^P)^{-1} \cdot (R_\phi^Q)^{-1}(u) = u + (R_\theta + R_\phi - R_{\theta+\phi} - I)(v_0 - u_0).$$

Portanto, $T_{w_0} \in G$, $T_{R_\theta^P(w_0)}$ e $T_{R_\phi^Q(w_0)}$ pertencem à G . \square

Exercício 3.6. :

1. Mostre que um grupo discreto G contendo uma rotação e uma translação é do tipo I se e somente se a rotação for de ângulo π .
2. Mostre que um grupo contendo dois centros de rotações cujos ângulos são diferentes de π é do tipo II.
3. Sejam l_α e l_β retas passando pela origem e que formam, respectivamente, ângulos α e β com o eixo-x. Sejam
 - (a) $r(\alpha)$ e $r(\beta)$ as respectivas reflexões sobre l_α e l_β .
 - (b) R_θ e R_ϕ rotações de ângulo θ e ϕ no sentido anti-horário.
 - (c) T_u translação de $u \in \mathbb{E}^2$.

Mostre que,

$$R_\theta \cdot R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad r(\alpha) \cdot r(\beta) = R_{2(\alpha-\beta)},$$

$$r(\alpha) \cdot R_\theta = r\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right), \quad R_\theta \cdot r(\beta) = r\left(\beta + \frac{\theta}{2}\right),$$

onde $r(\alpha - \frac{\theta}{2})$ é a reflexão sobre a reta passando pela origem e que forma um ângulo $\alpha - \frac{\theta}{2}$ com o eixo-x.

4. Seja $\triangle(A, B, C)$ um triângulo com vértices A, B, C e com ângulos internos $\hat{A} = \theta_1, \hat{B} = \theta_2, \hat{C} = \theta_3$. Determine a expressão para as reflexões r_1, r_2, r_3 sobre cada um dos lados e a expressão para as composições $r_1 r_2, r_2 r_3$ e $r_3 r_1$.

Uma vez que o grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$ é gerado por reflexões, é natural classificarmos os subgrupos que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 a partir dos subgrupos gerado por reflexões.

Proposição 3.18. *Seja $G < Isom(\mathbb{E}^2)$ um subgrupo de $Isom(\mathbb{E}^2)$ do tipo I, agindo descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 , gerado por reflexões;*

1. *Se $O_G = \{e\}$, então existem retas paralelas l_1, l_2 tais que $G = \langle r_1, r_2 \rangle$; r_1 e r_2 são as respectivas reflexões sobre as retas.*

2. Se $O_G \neq \{e\}$, então existem retas l_1, l_2 e l_3 , onde $l_1 \parallel l_2$ e $l_1 \perp l_3$, tais que $G = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$; r_1, r_2 e r_3 são as respectivas reflexões sobre as retas.

Demonstração. Se $G = \langle r_1, r_2 \rangle$, então as retas l_1 e l_2 tem que serem paralelas, caso contrário G é um subgrupo de O_2 . Suponhamos que $G = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$, neste caso há duas situações a serem analisadas:

1. $l_3 \parallel l_1$ e $l_3 \parallel l_2$,

Sem perda de generalidade, podemos supor que $l_1 = \{(0, y) \in \mathbb{E}^2\}$, $l_2 = \{(n, y) \in \mathbb{E}^2\}$ e $l_3 = \{(r, y) \in \mathbb{E}^2\}$. Seja $u = 2(n, 0)$ o vetor tal que $r_2 r_1 = T_u$ e $v = 2(r, 0)$ o vetor tal que $r_3 r_1 = T_v$. Devemos provar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $v = k.u$, da onde $r_3 = T_u^k \circ r_1$. Suponhamos que não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $v = k.u$, então podemos escrever $r = \hat{r} + [r]$, ou seja,

$$v = \hat{r}.u + [r].u.$$

Decorre que $T_v = T_u^{[r]} \circ T_{\hat{r}.u}$, da onde $T_{\hat{r}.u} \in G$ e

$$|T_v(x) - T_{\hat{r}.u}(x)| = |v - [r].u| = |\hat{r}.u| < |u|,$$

contradizendo a hipótese que $|u| = \inf_{g \in G} |g.x - x|$.

2. Suponhamos que $l_1 \parallel l_2$ e $p = l_1 \cap l_3$. Se o ângulo formado por l_3 e l_1 é $\theta > 0$, então $r_3 r_1 = R_{2\theta}^p \in G$ é uma rotação de ângulo θ e centro em p e $r_2 r_1 = T_u$, como no item anterior. Segue da proposição 3.16 que a translação $T_{R_{2\theta}(u)} \in G$. Se G é um grupo do tipo I, então é necessário que $R_{\theta}(u)$ seja colinear com u , o que implica em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$.

□

Exercício 3.7. :

1. Sejam l_1, l_2 retas em \mathbb{E}^2 , $\theta = \pi/n$ o ângulo formado por l_1 e l_2 , e $G = \langle r_1, r_2 \rangle$ o grupo gerado pelas reflexões sobre l_1 e l_2 . Considere l_{1n} e l_{2n} as retas obtidas pela ação de G sobre as retas l_1 e l_2 respectivamente. Mostre que as reflexões sobre as retas l_{1n} e l_{2n} pertencem a G e determine-as em função de r_1 e de r_2 .

3.3.1 Grupos Triangulares

Para classificarmos os grupos do tipo II que agem descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 introduziremos os grupos triangulares.

Três retas distintas l_1, l_2 e l_3 , mutuamente concorrentes mas não simultaneamente, definem um triângulo em \mathbb{E}^2 . Seja $\Delta(A, B, C)$ um triângulo com vértices em $A = l_1 \cap l_3$, $B = l_1 \cap l_2$ e $C = l_2 \cap l_3$, e α, β e γ a medida dos ângulos internos correspondendo aos vértices A, B e C , respectivamente. Para darmos ênfase aos ângulos internos, denotamos

o triângulo por $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ e chamamos a atenção que $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ corresponde à uma classe de triângulos semelhantes.

Sejam r_1 , r_2 e r_3 as reflexões sobre os lados do triângulo e $G = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$. Analisaremos a ação de G sobre \mathbb{E}^2 . Os vértices do triângulo são centros de rotação com ângulo igual ao dobro do ângulo interno do triângulo no mesmo vértice. De acordo com a proposição 3.2, para que a ação do grupo sobre \mathbb{E}^2 seja descontínua os ângulos internos do triângulo devem ser da forma $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ e $\frac{\pi}{p}$, onde $m, n, p \in \mathbb{N}$. Além disto, como a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é π , temos a seguinte equação;

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1. \quad (3.3)$$

Proposição 3.19. *As únicas soluções $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da equação*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 \quad (3.4)$$

são $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ e $(3, 3, 3)$.

Uma abordagem geométrica do resultado da proposição acima é indagarmos sobre o número de lados que um polígono regular deve ter para que o ângulo formado no vértice do polígono, que mede $\pi \frac{n-2}{n}$, seja um divisor inteiro de 2π . Isto porque os vértices do polígono são centros de rotação e ao aplicarmos uma destas rotações um número k de vezes o ângulo formado no vértice deverá medir 2π figura ???. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem que haver uma solução $k \in \mathbb{N}$ para a equação

$$k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 2.$$

No entanto, a equação só admite solução inteira quando $n = 3$ (triângulo equilátero), $n = 4$ (quadrado) e $n = 6$ (hexágono).

Ao considerarmos as retas que contém o centro do círculo circunscrito e os vértices do polígono regular, obtemos uma decomposição do interior do polígono em triângulos congruentes. No caso do triângulo equilátero, o triângulo obtido é o $\Delta(2, 3, 6)$; no quadrado é o triângulo $\Delta(4, 4, 2)$; e no hexágono é o triângulo $\Delta(3, 3, 3)$. Reciprocamente, se refletirmos cada um dos triângulos sobre seus lados, obteremos os respectivos polígonos.

Definição 3.9. Os grupos triangulares euclidianos são os grupos da forma $G(m, n, p) = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$, onde a tripla (m, n, p) é uma solução da equação 3.5.

Portanto, existem apenas três grupos triangulares euclidianos: $G(2, 4, 4)$, $G(2, 3, 6)$ e $G(3, 3, 3)$.

Exercício 3.8. :

1. Prove a proposição 3.19.
2. Mostre que $G_0 = \langle r_1 r_2, r_1 r_3, r_2 r_3 \rangle$ é um subgrupo de índice 2 de $G = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$.

3. Seja G um grupo do tipo II agindo descontinuamente sobre \mathbb{E}^2 . Mostre que G é um subgrupo de um grupo triangular.
4. Considere o triângulo $\Delta(2, 3, 6)$. Mostre que se fixarmos a origem no vértice cujo ângulo interno é $\pi/2$, então a sequência exata escreve-se como

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Escreva a sequência exata fixando a origem em cada um dos outros vértices do triângulo.

5. Seja $\Delta(m, n, p)$ um triângulo onde $m \leq n \leq p$ e $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Considere a matriz

$$M(m, n) = R_{\frac{2\pi}{m}} + R_{\frac{2\pi}{n}} - R_{\frac{2\pi(m+n)}{mn}} - I \tag{3.5}$$

Usando as identidades trigonométricas, prove que

$$M(m, n) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{m}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) R_{\frac{\pi(p-1)}{p}}. \tag{3.6}$$

Utilizando a expressão 3.6, obtida no exercício acima, podemos descrever explicitamente quem são os vetores que geram as translações decorrentes dos comutadores das rotações centradas nos vértices do triângulo $\Delta(M, n, p)$. Para este fim, consideramos a tabela 3.1 abaixo;

	m	n	$M(m, n)$
	2	3	$2\sqrt{3} \cdot R_{\frac{5\pi}{6}}$
	2	6	$2 \cdot R_{\frac{2\pi}{3}}$
	3	6	$\sqrt{3} \cdot R_{\frac{\pi}{2}}$
	2	4	$\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot R_{\frac{3\pi}{4}}$
	4	4	$2 \cdot R_{\frac{\pi}{2}}$
	3	3	$3 \cdot R_{\frac{2\pi}{3}}$

Tabela 3.1: $R(m, n)$

Também vamos fixar os seguintes elementos: Sejam A , B e C os vértices do triângulo $\Delta(m, n, p)$, assim como mostra a figura ???. Consideramos os seguintes vetores

$$u_0 = \overline{OA}, \quad v_0 = \overline{OB}, \quad w_0 = \overline{OC},$$

$$e_{AB} = v_0 - u_0, \quad e_{BC} = w_0 - v_0, \quad e_{CA} = u_0 - w_0.$$

1 - $\Delta(2, 3, 6)$: Sejam

$$\nu_1 = 2\sqrt{3}.R_{\frac{5\pi}{6}}(e_{AB}), \quad \nu_2 = 2.R_{\frac{2\pi}{3}}(e_{AC}), \quad \nu_3 = \sqrt{3}.R_{\frac{\pi}{2}}(e_{BC})$$

Ao aplicarmos os dados na tabela 3.1, segue que

$$[R_{\pi}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] = T_{\nu_1}, \quad [R_{\pi}^A, R_{\frac{\pi}{3}}^C] = T_{\nu_2}, \quad [R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{\pi}{3}}^C] = T_{\nu_3}. \quad (3.7)$$

Se os vértices de $\Delta(2, 3, 6)$ são $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, \sqrt{3})$, então

$$\nu_1 = (-3, \sqrt{3}), \quad \nu_2 = (3, \sqrt{3}), \quad \nu_3 = -\nu_2.$$

2 - $\Delta(2, 4, 4)$: Da mesma maneira,

$$\nu_1 = \frac{4}{\sqrt{2}}.R_{\frac{3\pi}{4}}(e_{AB}), \quad \nu_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}.R_{\frac{3\pi}{4}}(e_{AC}), \quad \nu_3 = 2.R_{\frac{\pi}{2}}(e_{BC}),$$

da onde,

$$[R_{\pi}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^B] = T_{\nu_1}, \quad [R_{\pi}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^C] = T_{\nu_2}, \quad [R_{\frac{\pi}{2}}^B, R_{\frac{\pi}{2}}^C] = T_{\nu_3}. \quad (3.8)$$

Se os vértices de $\Delta(2, 4, 4)$ são $A = (1/2, 1/2)$, $B = (0, 0)$ e $C = (1, 0)$, então

$$\nu_1 = (2, 0), \quad \nu_2 = (0, -2), \quad \nu_3 = -\nu_2.$$

3 - $\Delta(3, 3, 3)$: Analogamente,

$$\nu_1 = 3.R_{\frac{2\pi}{3}}(e_{AB}), \quad \nu_2 = 3.R_{\frac{2\pi}{3}}(e_{AC}), \quad \nu_3 = 3.R_{\frac{2\pi}{3}}(e_{BC})$$

obtemos

$$[R_{\frac{2\pi}{3}}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] = T_{\nu_1}, \quad [R_{\frac{2\pi}{3}}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^C] = T_{\nu_2}, \quad [R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{2\pi}{3}}^C] = T_{\nu_3}. \quad (3.9)$$

Se os vértices de $\Delta(3, 3, 3)$ são $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$, então

$$\nu_1 = 3.\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \nu_2 = 3.\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \nu_3 = -\nu_2.$$

3.3.2 Classificação dos Subgrupos Discretos de $Isom(\mathbb{E}^2)$

Agora, aplicaremos os resultados obtidos para classificarmos os subgrupos discretos de $Isom(\mathbb{E}^2)$. Vamos considerar os seguintes casos: (1) $\mathcal{T}_G = \{0\}$, (2) $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z}$ e (3) $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Seja \mathcal{P}_G a região fundamental associada a G .

1. $\mathcal{T}_G = \{0\}$. Sejam l_1 e l_2 retas que formam um ângulo θ entre si e sejam $r_1, r_2 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ as respectivas reflexões. Segue que $r_1 r_2 = R_{2\theta}$;

(a) $G^o = \langle r_1, r_2 \rangle = \langle r_1, R_{2\theta} \rangle \simeq D_k$

(b) $G^o = \langle r_1 r_2 \rangle = \langle R_{2\theta} \rangle \simeq \mathbb{Z}_k$

Os grupos acima são subgrupos de O_2 e tem ordem finita.

2. $\mathcal{T}_G = \mathbb{Z}$, G é do tipo I.

Todos os grupos nesta categoria tem ordem infinita. Sejam l_1, l_2 e l_3 retas distintas tais que $l_1 \parallel l_2$ e $l_1 \perp l_3$ (considere l_3 como sendo o eixo-x). Sejam $r_i : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, $i \in \{1, 2, 3\}$ as respectivas reflexões. Se $l_1 \cap l_3 = \{P\}$ e $l_2 \cap l_3 = \{Q\}$, segue que

$$r_1 r_3 = R_\pi^P, \quad r_2 r_3 = R_\pi^Q, \quad r_1 r_2 = T_{2u}.$$

A transformação $M_{2u,3} = r_3 T_{2u}$ é denominada *reflexão-deslizamento*. Decorre de $r_3(u) = u$ que $r_3 T_{2u} = T_{2u} r_3$ e $M_{2u,3}^2 = T_{4u}$. Consideramos as seguintes possibilidades;

(a) $G_1^I = \langle r_1, r_2 \rangle = \langle r_1, T_{2u} \rangle$,

(b) $G_2^I = \langle r_1 r_2 \rangle = \langle T_{2u} \rangle \simeq \mathbb{Z}$, (age livremente)

(c) $G_3^I = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$,

Abaixo esta a tabela produto dos geradores de G_3^I :

	I	r_1	r_2	r_3
I	I	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	I	T_{2u}	R_π^P
r_2	r_2	T_{-2u}	I	R_π^Q
r_3	r_3	R_π^P	R_π^Q	I

Tabela 3.2: tabela dos geradores de G_3^I

(d) $G_4^I = \langle r_1 r_2, r_3 \rangle = \langle T_{2u}, r_3 \rangle$;

(e) $G_5^I = \langle r_1 r_2 r_3 \rangle = \langle M_{2u,3} \rangle$ (reflexão-deslizamento). Este grupo age livremente sobre \mathbb{E}^2 ;

	I	T_{2u}	r_3
I	I	T_{2u}	r_3
T_{2u}	T_{2u}	T_{4u}	$G_{2u;3}$
r_3	r_3	$G_{2u;3}$	I

Tabela 3.3: tabela dos geradores de G_4^I

	I	$M_{2u;3}$
I	I	$M_{2u;3}$
$M_{2u;3}$	$M_{2u;3}$	T_{4u}

Tabela 3.4: tabela dos geradores de G_5^I

- (f) $G_6^I = \langle r_1 r_3, r_2 r_3 \rangle = \langle R_\pi^P, R_\pi^Q \rangle$;
De acordo com a proposição 3.17, G_6^I é do tipo I;

$$[R_\pi^P, R_\pi^Q] = T_{4v_0}, \quad \text{onde } v_0 = \overline{PQ}.$$

	I	R_π^P	R_π^Q
I	I	R_π^P	R_π^Q
R_π^P	R_π^P	I	$R_\pi^P \cdot R_\pi^Q$
R_π^Q	R_π^Q	$R_\pi^Q \cdot R_\pi^P$	I

Tabela 3.5: tabela dos geradores de G_6^I

- (g) $G_7^I = \langle R_\pi^P, T_u \rangle$;

Por exaustão, temos o seguinte resultado;

Teorema 3.3. *Os grupos G_i^I , $i = 1, \dots, 7$ são, a menos de isomorfismos, os únicos grupos do tipo I.*

3. $\mathcal{T}_G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, G é do tipo II.

- (a) Grupos gerados pelas reflexões sobre os lados do triângulo $\Delta(2, 3, 6)$ (figura ??).

Sejam l_1, l_2, l_3 os lados de $\Delta(2, 3, 6)$ e r_1, r_2, r_3 as respectivas reflexões. Considere que os vértices de $\Delta(2, 3, 6)$ sejam

$$A = l_1 \cap l_3, \quad B = l_1 \cap l_2, \quad C = l_2 \cap l_3,$$

cujos ângulos internos medem

	I	R_π^P	T_u
I	I	R_π^P	T_u
R_π^P	R_π^P	I	$R_\pi^P \cdot T_u$
T_u	T_u	$T_u \cdot R_\pi^P$	T_{2u}

Tabela 3.6: tabela dos geradores de G_7^I

$$\hat{A} = \angle(l_1, l_3) = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{B} = \angle(l_1, l_2) = \frac{\pi}{6}, \quad \hat{C} = \angle(l_2, l_3) = \frac{\pi}{3}.$$

Desta maneira, as seguintes rotações resultam da composição das reflexões r_1, r_2, r_3 ;

$$r_3 r_1 = R_\pi^A, \quad r_1 r_2 = R_{\frac{\pi}{3}}^B, \quad r_1 r_3 = R_{\frac{2\pi}{3}}^C.$$

Como visto na equação 3.7,

$$[R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] = T_{\nu_1}, \quad [R_\pi^A, R_{\frac{\pi}{3}}^C] = T_{\nu_2}, \quad [R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{\pi}{3}}^C] = T_{\nu_3}.$$

Além disto, também temos as reflexões por deslizamento $K_{i,\nu_j} = r_i T_{\nu_j}$, onde $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$.

(a.1) $G_1^{II} = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$

A tabela 3.7 corresponde ao produto dos geradores de G_1^{II} ;

	I	r_1	r_2	r_3
I	I	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	I	R_π^A	$R_{\frac{2\pi}{3}}^C$
r_2	r_2	R_π^A	I	$R_{\frac{5\pi}{3}}^B$
r_3	r_3	$R_{\frac{4\pi}{3}}^C$	$R_{\frac{\pi}{3}}^B$	I

Tabela 3.7: tabela dos geradores de G_1^{II}

(a.2) $G_2^{II} = \langle R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{\pi}{3}}^C \rangle$;

A tabela 3.8 corresponde ao produto dos geradores de G_2^{II} ;

(a.3) $G_3^{II} = \langle [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B], [R_\pi^A, R_{\frac{\pi}{3}}^C] \rangle = \langle T_{\nu_1}, T_{\nu_2} \rangle$;

a classe de isomorfismo deste grupo depende apenas da existência de 2 translações linearmente independentes gerando-o.

	I	R_π^A	$R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C$
I	I	R_π^A	$R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C$
R_π^A	R_π^A	I	$R_\pi^A R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_\pi^A R_{\frac{\pi}{3}}^C$
$R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{2\pi}{3}}^B R_\pi^A$	$R_{\frac{4\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{2\pi}{3}}^B R_{\frac{\pi}{3}}^C$
$R_{\frac{\pi}{3}}^C$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C R_\pi^A$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C R_{\frac{2\pi}{3}}^B$	$R_{\frac{\pi}{3}}^C$

Tabela 3.8: tabela dos geradores de G_2^{II}

(a.4) $G_4^{II} = \langle r_1, [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] \rangle = \langle r_1, T_{\nu_1} \rangle$; a classe de isomorfismo independe da reflexão r_i , $i = 1, 2, 3$, utilizada e também da translação escolhida dentre ν_1, ν_2 ou ν_3 . Observamos que o lado l_1 e a direção de ν_1 não são perpendiculares.

(a.5) $G_5^{II} = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^B, [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] \rangle = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^B, T_{\nu_1} \rangle$;
a classe de isomorfismo depende da existência de uma translação qualquer que seja ela dentre as geradas por ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.6) $G_6^{II} = \langle R_{\frac{\pi}{3}}^C, [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] \rangle = \langle R_{\frac{\pi}{3}}^C, T_{\nu_1} \rangle$;
a classe de isomorfismo depende da existência de uma translação qualquer que seja ela dentre as geradas por ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.7) $G_7^{II} = \langle [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B], K_{i;\nu_j} \rangle = \langle T_{\nu_1}, K_{i;\nu_j} \rangle$;
a classe de isomorfismo deste grupo independe da escolha dos vetores ν_1 e ν_j dentre os vetores ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.8) $G_8^{II} = \langle R_\pi^A, K_{i;\nu_j} \rangle$;
a classe de isomorfismo deste grupo independe da escolha dos vetores dentre ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.9) $G_9^{II} = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^B, K_{i;\nu_j} \rangle$;
a classe de isomorfismo deste grupo independe da escolha dos vetores dentre ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.10) $G_{10}^{II} = \langle R_{\frac{\pi}{3}}^C, K_{i;\nu_j} \rangle$;
a classe de isomorfismo deste grupo independe da escolha dos vetores dentre ν_1, ν_2 ou ν_3 .

(a.11) $G_{11}^{II} = \langle K_{i;\nu_j}, K_{k;\nu_l} \rangle$;
a classe de isomorfismo deste grupo independe da escolha das transformações de deslizamento e reflexão usadas, desde que sejam distintas.

Nos casos acima, havendo um centro de rotação, a classe de isomorfismo depende do ângulo de rotação.

(b) Grupos obtidos pela reflexão sobre os lados do triângulo $\triangle(3, 3, 3)$ (figura ??).

Sejam l_1, l_2, l_3 os lados de $\Delta(3, 3, 3)$ e r_1, r_2, r_3 as respectivas reflexões. Consideramos

$$\hat{A} = \angle(l_3, l_1) = \frac{\pi}{3}, \quad \hat{B} = \angle(l_1, l_2) = \frac{\pi}{3} \quad \hat{C} = \angle(l_2, l_3) = \frac{\pi}{3}.$$

De maneira análoga ao caso do triângulo $\Delta((2, 3, 6))$, as seguintes isometrias são obtidas pela composição das reflexões r_1, r_2, r_3 ;

$$\text{rotações: } r_1 r_2 = R_{\frac{\pi}{3}}^A, \quad r_3 r_2 = R_{\frac{\pi}{3}}^B, \quad r_1 r_3 = R_{\frac{\pi}{3}}^C.$$

$$\text{translações: } T_{\nu_1} = [R_{\frac{\pi}{3}}^A, R_{\frac{\pi}{3}}^B], \quad T_{\nu_2} = [R_{\frac{\pi}{3}}^A, R_{\frac{\pi}{3}}^C].$$

$$\text{reflexões-deslizamento: } K_{i, \nu_j} = r_i T_{\nu_j}, \quad i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2.$$

Tendo em vista as observações feitas no caso anterior, dentre todos os grupos discretos obtidos a partir do grupo triangular $\Delta(3, 3, 3)$, somente os grupos abaixo acrescentam novas classes de isomorfismo a lista grupos;

$$(b.1) \quad G_{12}^{II} = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{2\pi}{3}}^C \rangle;$$

$$(b.2) \quad G_{13}^{II} = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^A, [R_{\frac{2\pi}{3}}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B] \rangle = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^B, T_{\nu_1} \rangle;$$

$$(b.3) \quad G_{14}^{II} = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}^A, K_{i, \nu_j} \rangle.$$

(c) Grupos obtidos pela reflexão sobre os lados do triângulo $\Delta(2, 4, 4)$. (figura ??)

Sejam l_1, l_2, l_3 os lados de $\Delta(2, 4, 4)$ e r_1, r_2, r_3 as respectivas reflexões. Considere que os ângulos internos medem

$$\hat{A} = \angle(l_1, l_2) = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{B} = \angle(l_2, l_3) = \frac{\pi}{4} \quad \hat{C} = \angle(l_3, l_1) = \frac{\pi}{4}.$$

Como anteriormente, temos as seguintes isometrias:

$$\text{rotações: } r_1 r_3 = R_{\frac{\pi}{2}}^A, \quad r_2 r_3 = R_{\frac{\pi}{2}}^B \text{ e } r_3 r_1 = R_{\frac{\pi}{2}}^C,$$

$$\text{translações: } T_{\nu_1} = [R_{\frac{\pi}{2}}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^B] \text{ e } T_{\nu_2} = [R_{\frac{\pi}{2}}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^C],$$

$$\text{reflexões-deslizamento: } K_{1, \nu_j} = r_1 T_{\nu_j}, \text{ onde } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2.$$

Os grupos abaixo somam-se as listas dos grupos (a.1)-(a.11) e (b.1)-(b.3);

$$(c.1) \quad G_{15}^{II} = \langle R_{\frac{\pi}{2}}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^B, R_{\frac{\pi}{2}}^C \rangle;$$

$$(c.2) \quad G_{16}^{II} = \langle R_{\frac{\pi}{2}}^B, [R_{\frac{\pi}{2}}^A, R_{\frac{\pi}{2}}^B] \rangle = \langle R_{\frac{\pi}{2}}^B, T_{\nu_1} \rangle;$$

$$(c.3) \quad G_{17}^{II} = \langle R_{\frac{\pi}{2}}^B, K_{i, \nu_j} \rangle;$$

Teorema 3.4. *Os grupos G_i^{II} , $i = 1, \dots, 17$ são, a menos de isomorfismos, os únicos grupos do tipo II.*

3.3.3 Superfícies e Orbitais Euclidianos

Fazer uma tabela

GRUPO	GERADORES	Figura do Espaço Quociente	$\chi(X/G)$.
FAZER AS FIGURAS			

3.4 2º-método para obter as geodésicas de \mathbb{E}^2

Nesta seção, apresentamos um 2º método para demonstrarmos que as geodésicas em \mathbb{E}^2 descrevem uma reta. Este 2º-método é realizado através da variação do funcional comprimento de arco. Os procedimentos serão meramente formais pois não é nosso objetivo estudarmos os aspectos analíticos que justificam os cálculos a seguir; Consideramos

$$\Omega(p, q) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \gamma \in C^0, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

o espaço das curvas contínuas ligando p à q em \mathbb{E}^2 . A integral do comprimento de uma curva define a função

$$L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'| ds$$

As geodésicas são os pontos de mínimo desta função. Uma condição necessária para isto é $\nabla L(\gamma) = 0$. Algumas considerações sobre $\Omega(p, q)$ são necessárias antes de definirmos o gradiente da função L . Observamos que $\Omega(p, q)$ é um espaço afim, no entanto, ao fixarmos a origem no elemento $\gamma \in \Omega(p, q)$ obtemos o espaço vetorial

$$\mathcal{V}(p, q) = \{\Lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \Lambda(0) = \Lambda(1) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$\langle\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle\rangle = \int_0^1 \langle \Lambda_1(s), \Lambda_2(s) \rangle ds.$$

Qualquer elemento $\eta \in \Omega(p, q)$ pode ser escrito na forma

$$\eta(s) = \gamma(s) + \Lambda(s), \quad \Lambda \in \mathcal{V}(p, q).$$

Além disto, uma curva $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega(p, q)$, tal que $\Gamma(0) = \gamma$, é escrita na forma

$$\Gamma(s, t) = \gamma(s) + t\Lambda(s), \quad \Lambda \in \mathcal{V}.$$

Por simplicidade de notação, indicamos $\Gamma(s, t) = \gamma_t(s)$. Desta forma, se $\gamma \in \Omega(p, q)$ e $\Lambda \in \mathcal{V}(p, q)$, então

$$\gamma_0(s) = \gamma(s), \quad \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Lambda(s).$$

Definição 3.10. Seja $\gamma \in \Omega(p, q)$ uma curva;

1. γ é regular no ponto $t \in [0, 1]$ se for diferenciável em t e se $\gamma'(t) \neq 0$. γ é regular se for diferenciável e regular em todos os pontos $t \in [0, 1]$.

2. O vetor normal de γ é o vetor

$$N = \frac{\gamma'' - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^2} \gamma'}{|\gamma'' - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^2} \gamma'|}.$$

3. A curvatura de γ é a função $k_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k_\gamma = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

Proposição 3.20. *Seja $\gamma \in \Omega(p, q)$ uma curva regular, e sejam k_γ a curvatura de γ e N o vetor normal de γ . Então,*

$$\nabla L(\gamma) = -k_\gamma \cdot N$$

Demonstração. Consideramos uma curva $\gamma_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega(p, q)$, tal que $\gamma_0 = \gamma$. Portanto,

$$\gamma_t = \gamma(s) + t\Lambda(s), \quad \Lambda \in \mathcal{V}.$$

Definimos a função $L : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(t) = L(\gamma_t) = \int_0^1 |\gamma'_t| ds.$$

(no caso de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente é definido por $df_p \cdot V = \langle \nabla f(p), V \rangle$)
Assim,

$$L(t) = \int_0^1 |\gamma' + t\Lambda'| ds = \int_0^1 \sqrt{|\gamma'|^2 + 2t \langle \gamma', \Lambda' \rangle + t^2 |\Lambda'|^2} ds.$$

A derivada de $L(t)$, em relação à t , é

$$\frac{dL}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L(\Delta t) - L(0)}{\Delta t} = dL_\gamma \cdot \Lambda.$$

Ao efetuarmos o cálculo obtemos

$$\frac{dL}{dt} = \int_0^1 \frac{\langle \gamma', \Lambda' \rangle + t |\Lambda'|^2}{\sqrt{|\gamma'|^2 + 2t \langle \gamma', \Lambda' \rangle + t^2 |\Lambda'|^2}} ds.$$

Então,

$$\frac{dL}{dt} \Big|_{t=0} = \int_0^1 \left\langle \frac{\gamma'}{|\gamma'|}, \Lambda' \right\rangle ds. \quad (3.1)$$

Ao aplicarmos à expressão 3.1 as identidades

$$\frac{d \langle \gamma, \Lambda \rangle}{dt} = \left\langle \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right)', \Lambda \right\rangle + \left\langle \frac{\gamma'}{|\gamma'|}, \Lambda' \right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right) = \frac{1}{|\gamma'|} \left[\gamma'' - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^2} \gamma' \right],$$

as definições do vetor normal e do vetor curvatura e a identidade

$$\left| \gamma'' - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^2} \gamma' \right|^2 = |\gamma''|^2 - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{|\gamma'|^2} = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|^2}{|\gamma'|^2},$$

então obtemos

$$\frac{dL}{dt} = \langle \gamma'(1), \Lambda(1) \rangle - \langle \gamma'(0), \Lambda(0) \rangle + \int_0^1 \left\langle -\frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3} N, \Lambda \right\rangle ds.$$

Ao considerarmos que $\Lambda(1) = \Lambda(0) = 0$ a expressão finalmente torna-se

$$\frac{dL}{dt} \Big|_{t=0} = \int_0^1 \langle -k_\gamma N, \Lambda \rangle ds = \langle \langle -k_\gamma N, \Lambda \rangle \rangle.$$

Portanto, $dL_\gamma \cdot \Lambda = \langle \langle -k_\gamma N, \Lambda \rangle \rangle$, da onde concluímos que

$$\nabla L(\gamma) = -k_\gamma N.$$

□

Corolário 3.8. *Sejam $p, q \in \mathbb{E}^2$. Os pontos críticos da função $L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ são as curvas $\gamma \in \Omega(p, q)$ que descrevem uma reta.*

Demonstração. Suponhamos que $\gamma \in \Omega(p, q)$ seja um ponto crítico. Então, para todo $\Lambda \in \mathcal{V}(p, q)$ temos $dL_\gamma \cdot \Lambda = 0$. Isto é equivalente a

$$\langle \nabla L(\gamma), \Lambda \rangle = 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{V}(p, q).$$

Em particular, se considerarmos $\Lambda = \nabla L(\gamma)$, segue que

$$|\nabla L(\gamma)|^2 = |k_\gamma \cdot N|^2 = 0.$$

Como $N \neq 0$, concluímos que $k_\gamma = 0$. Consequentemente, $\gamma' \wedge \gamma'' = 0$, da onde uma das seguintes situações ocorre;

1. $\gamma'' = 0$.

Neste caso, segue que $\gamma' = t(q - p) + p$,

2. existe uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $s \in [0, 1]$ temos que $\gamma''(s) = f(s) \cdot \gamma'(s)$. Segue que a solução da equação

$$\gamma'' - f\gamma' = 0, \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$$

é

$$\gamma(s) = \frac{\int_0^s e^{\int_0^\sigma f(\tau) d\tau} d\sigma}{\int_0^1 e^{\int_0^\sigma f(\tau) d\tau} d\sigma} (q - p) + p,$$

cuja imagem descreve uma reta em \mathbb{E}^2 .

□

Exercício 3.9. :

1. Seja γ uma curva regular dada em coordenadas por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Mostre que a curvatura k_γ é dada por

$$k_\gamma = \frac{x'y' - y'x''}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

- (a) Verifique através da fórmula acima que a curvatura é invariante por mudança de parâmetro.
 (b) Conclua, utilizando as coordenadas que quando $k_\gamma = 0$ a curva γ descreve uma reta.
2. Suponha que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma'' = c\gamma'$. Mostre que

$$\gamma(s) = \frac{e^{cs}}{1 - e^c} (p - q) + \frac{1}{1 - e^c} (q - e^c p)$$

3. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-nula. Determine os pontos em $[0, 1]$ onde a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\gamma(s) = \frac{\int_0^s e^{\int_0^\sigma f(\tau) d\tau} d\sigma}{\int_0^1 e^{\int_0^\sigma f(\tau) d\tau} d\sigma} (q - p) + p,$$

é regular. Calcule a função comprimento de arco de γ .

4. Sejam $p, q \in \mathbb{E}^2$. Defina a função energia $E : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\gamma'|^2 dt.$$

Mostre que;

- (a) A função comprimento $L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por mudança de coordenadas.
- (b) A função energia não é invariante por mudança de coordenadas.
- (c) Mostre que $(L(\gamma))^2 \leq c.E(\gamma)$, onde c =constante.
- (d) Mostre que $\nabla E(\gamma) = -\gamma''$
- (e) Mostre que os pontos críticos da energia são as retas descritas por um parâmetro proporcional ao comprimento de arco.

Capítulo 4

Geometria Esférica

4.1 A Esfera S^2 . Coordenadas

Seja $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o espaço euclidiano de dimensão 3, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno euclidiano: $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

A esfera de raio R_0 com centro na origem de \mathbb{E}^3 é o conjunto

$$S_{R_0}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; |v| = R_0\}. \quad (4.1)$$

Decorre que $S_{R_0}^2$ é um subconjunto compacto de \mathbb{E}^3 e, conseqüentemente, $S_{R_0}^2$ não é difeomorfo à \mathbb{R}^2 . Ao longo do texto denotaremos $S^2 = S_1^2$. Ao considerarmos a função $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, concluímos que $S_{R_0}^2 = h^{-1}(R_0)$ é uma superfície de nível e o plano tangente no ponto $p \in S_{R_0}^2$ é

$$T_p S_{R_0}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, \vec{op} \rangle = 0\}. \quad (4.2)$$

4.1.1 Coordenadas Esféricas

Os procedimentos analíticos na geometria euclidiana \mathbb{E}^2 são realizados com a utilização de coordenadas no plano \mathbb{R}^2 ; estas podem ser as coordenadas cartesianas (x, y) , ou as coordenadas polares (θ, r) ou um outro sistema de coordenadas qualquer. O importante é que a todo ponto p no plano associamos um par de números reais (x, y) que denominamos coordenadas de p . Na esfera, por ela ser um subconjunto de \mathbb{R}^3 , procedemos da mesma forma associando a cada ponto $p \in S_{R_0}^2$ uma tripla de números reais que também denominamos de coordenadas de p . Quaisquer que sejam as coordenadas sobre $S_{R_0}^2$, iremos induzi-las a partir de coordenadas em \mathbb{R}^3 . Para descrevermos os pontos do espaço é habitual associarmos a cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ uma tripla (x, y, z) , onde x, y, z correspondem à projeção ortogonal sobre os eixos ortogonais que denominamos de *eixo* - x , *eixo* - y e *eixo* - z ; a este tipo de coordenadas denominamos de coordenadas cartesianas

de p . No entanto, nem sempre este é o melhor sistema de coordenadas para estudarmos um problema. No estudo de questões sobre a esfera $S_{R_0}^2$ é mais conveniente associarmos a cada ponto $p = (x, y, z)$ do espaço uma tripla (ρ, θ, ψ) definida assim:

ρ mede a distância de p à origem,
 θ é o ângulo, medido em radianos, entre a projeção do vetor \vec{op} sobre o plano-xy e o eixo-x,
 ψ é o ângulo, medido em radianos, entre o vetor \vec{op} e o eixo-z.

(4.3)

O ângulo θ é denominada a longitude de p , enquanto o ângulo ψ a latitude de p . Desta maneira, temos figura ??

$$x = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\psi), \quad y = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi) \quad \text{e} \quad z = \rho \cdot \cos(\psi). \quad (4.4)$$

Isto define a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(\rho, \theta, \psi) = (\rho \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\psi), \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi), \rho \cdot \cos(\psi)), \quad (4.5)$$

Observamos que F não é bijetora, pois

$$\begin{aligned} F(0, \theta, \psi) &= 0, \quad \forall (\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi], \\ F(\rho, 0, \psi) &= F(\rho, 2\pi, \psi), \quad \forall (\rho, \psi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi], \\ F(\rho, \theta, 0) &= (0, 0, \rho), \quad F(\rho, \theta, \pi) = (0, 0, -\rho), \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Ao restringirmos à $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtemos um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}$. Desta forma, F atribui a cada ponto de $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}$ uma única tripla (ρ, θ, ψ) .

Definição 4.1. Um sistema de coordenadas esféricas local em \mathbb{R}^3 é dado por um sistema ortogonal de coordenadas $(\rho, \theta, \psi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ e uma aplicação $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

1. F é diferenciável,
2. $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo,
3. para qualquer $R_0 \in \mathbb{R}$, a esfera $S_{R_0}^2$ é descrita por

$$S_{R_0}^2 = \{F(R_0, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\}.$$

Se $p = F(R_0, \theta, \psi) \in S_{R_0}^2$ dizemos que as coordenadas esféricas de p induzidas por F são (θ, ψ) .

A descrição da esfera $S_{R_0}^2$ em coordenadas esféricas é mais simples uma vez que $\rho = R_0$ é constante. Sendo assim, para descrevermos um ponto $p \in S_{R_0}^2$ basta o par (θ, ψ) . Chamamos a atenção para o fato que F , definida em 4.5, depende da maneira como medimos o ângulo θ em relação aos eixos ortogonais no plano xy e também da maneira como medimos o ângulo ψ em relação ao eixo- z . Sejam $F_1 = F$, $\theta = \theta_1$ e $\psi = \psi_1$. Desta maneira, ao tomarmos $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $L_1 = \{(R_0 \text{sen}(\psi_1), 0, R_0 \text{cos}(\psi_1)) \mid 0 \leq \psi_1 \leq \pi\}$, segue que $F_1 : U \rightarrow (S_{R_0}^2 - L_1)$ é um difeomorfismo. No entanto, F_1 não é suficiente para atribuímos coordenadas à $S_{R_0}^2$, pois $F_1(U_1)$ não cobre os pontos pertencentes à curva L_1 . De fato, F_1 é apenas uma carta local. Para resolvermos este problema temos que construir um outro sistema de coordenadas (carta local) sobre $S_{R_0}^2$. Seja $F_2 : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F_2(\theta_2, \psi_2) = (-R_0 \cdot \text{cos}(\theta_2) \text{sen}(\psi_2), R_0 \cdot \text{cos}(\psi_2), R_0 \cdot \text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\psi_2)),$$

onde θ_2 e ψ_2 são os ângulos conforme mostra a figura ??.

Seja $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, então a imagem de $F_2(U) = S_{R_0}^2 - L_2$, onde $L_2 = \{(R_0 \text{sen}(\psi_2), R_0 \text{cos}(\psi_2), 0) \mid 0 \leq \psi_2 \leq \pi\}$. Ao observarmos que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, concluímos que

$$F_1(U) \cup F_2(U) = S_{R_0}^2.$$

Além disto, $L_1 = F_2(\theta_2, \pi/2)$, $\pi/2 \leq \theta_2 \leq 3\pi/2$, e $L_2 = F_1(\theta_1, \pi/2)$, $\pi/2 \leq \theta_1 \leq 3\pi/2$. Portanto, através de F_1 e F_2 associamos coordenadas a todos os pontos de $S_{R_0}^2$. Porém, os pontos que pertencem a $F_1(U) \cap F_2(U)$ possuem duas coordenadas, exemplo: ao ponto $(\frac{R_0}{\sqrt{2}}, \frac{R_0}{\sqrt{2}}, 0)$ associamos as coordenadas $(\pi/4, 0)_1$ e $(5\pi/4, 0)_2$ porque

$$F_1(\pi/4, 0) = F_2(5\pi/4, 0) = \left(\frac{R_0}{\sqrt{2}}, \frac{R_0}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Esta aparente ambigüidade é resolvida com a aplicação de transição entre as coordenadas (θ_1, ψ_1) e (θ_2, ψ_2) dada pelo difeomorfismo $f_{21} = F_2 \circ (F_1)^{-1} : (U - A) \rightarrow (U - A)$, onde $A = \{(\theta, \pi/2) \in U \mid \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\}$.

Para verificarmos que $S_{R_0}^2$ é uma superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 basta verificarmos os seguinte itens;

1. $F_1(U) \cup F_2(U) = S_{R_0}^2$,
2. $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ são bijetoras.
3. $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ são difeomorfismo.
 F_1 é uma imersão, pois

$$d(F_1)_{(\theta_1, \psi_1)} = R_0 \cdot \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\psi_1) & \text{cos}(\theta_1) \text{cos}(\psi_1) \\ \text{cos}(\theta_1) \text{sen}(\psi_1) & \text{sen}(\theta_1) \text{cos}(\psi_1) \\ 0 & -\text{sen}(\psi_1) \end{pmatrix},$$

e, para todo $(\theta_1, \psi_1) \in U$, $\text{posto}(d(F_1)_{(\theta_1, \psi_1)}) = 2$. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões F_1 é um difeomorfismo de U sobre $F_1(U) \subset S_{R_0}^2$. Analogamente, concluímos que F_2 também é um difeomorfismo de U sobre $F_2(U) \subset S_{R_0}^2$. Segue da compacidade de $S_{R_0}^2$ que ela esta mergulhada. Uma base para o plano tangente $T_p S_{R_0}^2$, $p = F_1(\theta_1, \psi_1)$, é $\beta = \{e_1, e_2\}$, onde

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\psi_1), \cos(\theta_1)\text{sen}(\psi_1), 0), \\ e_2 &= (\cos(\theta_1)\cos(\psi_1), \text{sen}(\theta_1)\cos(\psi_1), -\text{sen}(\psi_1)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Consequentemente, $\mathcal{A}_{S_{R_0}^2} = \{(U, F_1), (U, F_2)\}$ é um atlas para $S_{R_0}^2$. O fato da aplicação de transição $f_{21} = F_2 \circ (F_1)^{-1} : U - A \rightarrow U - A$ ser um difeomorfismo decorre do Teorema da Forma Local das Imersões.

Definição 4.2. Um grande círculo em $S_{R_0}^2$ é um círculo $C = S_{R_0}^2 \cap \pi$, onde π é um plano passando pela origem. As curvas coordenadas associadas a um sistema de coordenada esférica sobre $S_{R_0}^2$ são assim denominadas;

1. o paralelo P_{ψ_0} em $S_{R_0}^2$ é a curva $P_{\psi_0} = \{F(R_0, \theta, \psi_0) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$. O paralelo $P_{\pi/2}$ é denominado de Equador.
2. o meridiano M_{θ_0} é a curva $M_{\theta_0} = \{F(R_0, \theta_0, \psi) \mid \psi \in [0, \pi]\}$.

Um grande círculo divide a esfera $S_{R_0}^2$ em dois hemisférios $H_1 = \{F(R_0, \theta, \psi) \mid \psi \in [0, \pi/2]\}$ e $H_2 = \{F(R_0, \theta, \psi) \mid \psi \in [\pi/2, \pi]\}$. Assim,

$$S_{R_0}^2 = H_1 \cup H_2, \quad H_1 \cap H_2 = P_{\pi/2}.$$

4.1.2 Outras Coordenadas sobre S^2

Por simplicidade, vamos agora nos restringir à S^2 .

Coordenadas Cartesianas

Sejam $B_1 = \{w \in \mathbb{R}^2; |w| < 1\}$ a bola aberta e (B_1, ϕ_i) , $i = 1, \dots, 6$, sistemas de coordenadas locais (cartas) definidas assim: figura ??

$$\begin{aligned} \phi_1 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \\ \phi_2 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}), \\ \phi_3 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_3(y, z) &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), \\ \phi_4 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_4(y, z) &= (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), \\ \phi_5 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_5(x, z) &= (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), \\ \phi_6 : B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_6(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Segue que,

1. $\mathbb{S}^2 = \bigcup_{i=1}^6 \phi_i(B_1)$;
2. ϕ_i é bijetora para todo i ;
3. ϕ_1 é um difeomorfismo entre B_1 e a sua imagem $\phi_{21}(B_1)$. Isto porque

$$d\phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{posto}(d\phi_1(x, y)) = 2,$$

para todo $(x, y) \in B_1$. Portanto, ϕ_1 é uma imersão bijetora para todo $(x, y) \in B_1$. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, ϕ_1 é um difeomorfismo. Analogamente, as outras aplicações ϕ_i também são difeomorfismos.

4. Decorre do item anterior que as aplicações de transição $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : B_1 \rightarrow B_1$ são difeomorfismos;

$$\begin{aligned} \phi_{21}(x, y) &= (x, y), & \phi_{43}(y, z) &= (y, z), & \phi_{65}(x, z) &= (x, z), \\ \phi_{31}(x, y) &= (\sqrt{1-x^2-y^2}, y), & \phi_{41}(x, y) &= (-\sqrt{1-x^2-y^2}, x), \\ \phi_{51}(x, y) &= (x, \sqrt{1-x^2-y^2}), & \phi_{61}(x, y) &= (x, -\sqrt{1-x^2-y^2}), \\ \phi_{32}(x, y) &= (y, -\sqrt{1-y^2-x^2}), & \phi_{42}(x, y) &= (y, \sqrt{1-y^2-x^2}), \\ \phi_{52}(x, y) &= (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}), & \phi_{62}(x, y) &= (x, \sqrt{1-x^2-z^2}), \\ \phi_{53}(y, z) &= (\sqrt{1-y^2-z^2}, z), & \phi_{63}(y, z) &= (-\sqrt{1-y^2-x^2}, z), \\ \phi_{54}(y, z) &= (-\sqrt{1-y^2-x^2}, z), & \phi_{64}(y, z) &= (\sqrt{1-y^2-x^2}, z). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Desta maneira, segue dos itens acima que $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2} = \{(\phi_i(B_1), \phi_i^{-1}) \mid i = 1, \dots, 6\}$ é um atlas diferenciável de \mathbb{S}^2 . Ao supormos que $p = (x, y, z) \in \phi_1(B_1)$, uma base para o plano tangente à \mathbb{S}^2 , em p , é $\beta = \{e_1, e_2\}$ onde

$$e_1 = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \quad e_2 = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \quad (4.9)$$

Coordenadas Estereográficas

Um outro atlas de \mathbb{S}^2 é construído através da projeção estereográfica;

Definição 4.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto, π um plano e $p \in \mathbb{R}^3$ um ponto denominado foco. A projeção estereográfica de Ω sobre π com foco em p é a imagem da aplicação $\pi_e : \Omega \rightarrow \pi$ definida assim: Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\vec{v} = p\vec{x}$ e $r(t) = \vec{op} + t\vec{v}$ a reta passando por p e por x . Se para cada $x \in \Omega$ a interseção $\pi \cap r(t)$ consiste de um

único ponto, então definimos $\pi_e(x) = \pi \cap r(t)$, caso contrário $\pi_e(x)$ não esta definida; conforme indica a figura ??

Exemplo 4.1. Considere $\Omega = \mathbb{S}^2$, $\pi = \{z = 0\}$ e $N = (0, 0, 1)$ o foco (no caso o pólo norte). A projeção estereográfica sobre o plano $\{z = 0\}$, com foco em N , define a aplicação $\pi_e : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$;

$$\pi_e^N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) = (u, v). \quad (4.10)$$

A inversa $(\pi_e)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$ é dada por

$$(\pi_e^N)^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right). \quad (4.11)$$

Assim, $\pi_e : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo. Ao considerarmos o foco no ponto $S = (0, 0, -1)$, temos

$$\pi_e^S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) = (u', v'). \quad (4.12)$$

e

$$(\pi_e^S)^{-1}(u', v') = \left(\frac{2u'}{1+u'^2+v'^2}, \frac{2v'}{1+u'^2+v'^2}, \frac{1-u'^2-v'^2}{1+u'^2+v'^2} \right). \quad (4.13)$$

A transição $\pi_e^S \circ (\pi_e^N)^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é o difeomorfismo, uma vez que

$$\pi_e^S \circ (\pi_e^N)^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right) \quad (4.14)$$

e a inversa é

$$\pi_e^N \circ (\pi_e^S)^{-1}(u', v') = \left(\frac{u'}{u'^2+v'^2}, \frac{v'}{u'^2+v'^2} \right).$$

Desta maneira, $\mathcal{A}_{S^2} = \{(\pi_e^N, S^2 - \{N\}), (\pi_e^S, S^2 - \{S\})\}$ também é um atlas de \mathbb{S}^2 . Observe que o determinante da derivada da aplicação $(u, v) \rightarrow \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right)$ é $\frac{-1}{(u^2+v^2)^2}$.

4.2 Métrica Esférica

Definição 4.4. Seja $p \in \mathbb{S}^2$ e $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$. A métrica esférica é a aplicação que a cada ponto $p \in \mathbb{S}^2$ associa o produto interno $g_p : T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle .$$

A métrica esférica sobre \mathbb{S}^2 é induzida pela métrica euclideana de \mathbb{E}^3 através do mergulho de \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^3 . Localmente, g é descrita assim;

1. (Coordenadas Esféricas) Seja (U, F_1) o sistema de coordenadas definido em 4.5. Sejam $p = F_1(\theta, \psi)$, $\beta = \{e_1, e_2\}$ a base 4.6 e $w_1, w_2 \in T_p\mathbb{S}^2$, onde $w_i = a_i e_1 + b_i e_2$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$. Assim,

$$g(w_1, w_2) = a_1 a_2 g_{11} + a_1 b_2 g_{12} + b_1 a_2 g_{21} + b_1 b_2 g_{22},$$

onde

$$\begin{cases} g_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle = \text{sen}^2(\psi), \\ g_{12} = g_{21} = \langle e_1, e_2 \rangle = 0 \\ g_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle = 1 \end{cases} \Rightarrow g_p = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Chamamos a atenção para o fato da base ser ortogonal e $\det(g_p) = \text{sen}^2(\psi)$.

2. (Coordenadas Cartesianas) Sejam (U, ϕ_1) o sistema de coordenadas 4.7. Seja $p = \phi_1(x, y)$, $\beta = \{e_1, e_2\}$ a base 4.9 e $w_1, w_2 \in T_p\mathbb{S}^2$, onde $w_i = a_i e_1 + b_i e_2$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$. Assim como no caso anterior,

$$g(w_1, w_2) = a_1 a_2 g_{11} + a_1 b_2 g_{12} + b_1 a_2 g_{21} + b_1 b_2 g_{22},$$

onde

$$\begin{cases} g_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle = \frac{1-y^2}{1-x^2-y^2}, \\ g_{12} = g_{21} = \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{xy}{1-x^2-y^2}, \\ g_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1-x^2}{1-x^2-y^2}. \end{cases} \Rightarrow g_s = \begin{pmatrix} \frac{1-y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & \frac{1-x^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Neste caso, a base não é ortogonal e $\det(g_p) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$.

Definição 4.5. O Espaço Esférico é o par $\mathbb{S}^2 = (S_1^2, g)$, onde g é a métrica esférica.

A expressão da métrica depende da carta utilizada, sendo assim a relação entre métricas obtidas através de cartas distintas se dá de maneira análoga a relação entre as matrizes que representam uma forma bilinear em bases distintas. Para melhor descrever considere $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e β, β' bases distintas de V ; assim sejam $A = (b_{ij})$ e $A' = (b'_{ij})$ as matrizes representando B nas bases β, β' , respectivamente. Desta forma, considere a relação de equivalência: $A' \sim A$ se, e somente se, existe P invertível tal que $A' = P^t A P$. É tedioso verificar, mas as matrizes representando a métrica s ao

equivalentes quando restringimos a interseção das cartas. Este é mais um bom motivo para usarmos cartas que sejam "ortogonais".

A geometria esférica estuda as propriedades métricas sobre a superfície $\mathbb{S}^2 = (S_1^2, g)$. Devido as coordenadas esféricas fornecerem uma base ortogonal elas tornam-se mais úteis para estudarmos a geometria esférica.

Considerando uma carta definida por coordenadas esféricas $F : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2$ e uma curva $C^\infty r : [a, b] \rightarrow (0, \pi) \times (0, \pi)$, $r(t) = (\theta(t), \psi(t))$, uma curva diferenciável sobre \mathbb{S}^2 é uma aplicação diferenciável $\alpha = F \circ r : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida por

$$\alpha(t) = F(r(t)) = (\cos(\theta(t))\text{sen}(\psi(t)), \text{sen}(\theta(t))\text{sen}(\psi(t)), \cos(\psi(t))), \quad (4.3)$$

Uma vez que $\alpha'(t) = dF_{r(t)} \cdot r'(t) = (\theta')^2 e_1 + (\psi')^2 e_2$, segue que

$$g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \text{sen}^2(\psi)(\theta')^2 + (\psi')^2$$

e, portanto, o comprimento de α é

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\text{sen}^2(\psi)(\theta')^2 + (\psi')^2} dt, \quad (4.4)$$

A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ é

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} \text{sen}(\psi) d\theta d\psi \quad (4.5)$$

Exercício 4.1. .

1. Utilizando a métrica 4.1 sobre \mathbb{S}^2 , determine;
 - (a) O comprimento do equador $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 0)$.
 - (b) A área do hemisfério $H^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$.
2. Mostre que o comprimento de um vetor independe do sistema de coordenadas usado.
3. Mostre que o comprimento de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, calculado em coordenadas esféricas, é

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \text{sen}^2(\psi)(\theta')^2 + \rho^2 (\psi')^2} dt. \quad (4.6)$$

4. Mostre que a área de uma região $\Omega \subset S_{R_0}^2$, descrito em coordenadas esféricas, é dada por

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} R_0^2 \text{sen}(\psi) d\theta d\psi, \quad (4.7)$$

5. Mostre que o volume de uma região $\Theta \subset \mathbb{R}^3$, descrito em coordenadas esféricas, é

$$V(\Theta) = \int_{\Theta} \rho^2 \operatorname{sen}(\psi) d\rho d\theta d\psi. \quad (4.8)$$

4.3 Transformações Ortogonais em \mathbb{E}^3

Seja $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o espaço euclidiano tridimensional. As transformações lineares $T : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ que preservam o comprimento satisfazem a identidade

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{E}^3.$$

Consequentemente, se $A = [T]_{\beta}$ é a matriz representando T numa base ortonormal β , então $A^t A = A A^t = I$.

Definição 4.6. O grupo ortogonal é o conjunto das matrizes

$$O_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I\}. \quad (4.1)$$

Para todo $A \in O_3$, a transformação $A : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $A(x) = A \cdot x$, induz um difeomorfismo $A : S^2 \rightarrow S^2$, pois, para todo $p \in S^2$

$$|A(\vec{op})| = |\vec{op}| = 1 \quad \Rightarrow \quad A(\vec{op}) \in S^2.$$

De fato, o difeomorfismo $A : S^2 \rightarrow S^2$ é uma isometria de S^2 uma vez que $dA_p \cdot u = A(u)$, para todo $p \in S^2$ e $u \in T_p S^2$; da onde

$$g(dA_p \cdot u, dA_p \cdot v) = \langle dA_p \cdot u, dA_p \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle = g(u, v).$$

Sendo assim, O_3 é um subgrupo de $Isom(S^2)$.

Em decorrência do observado, as isometrias mais simples de S^2 são as rotações em torno de um eixo fixo e as reflexões sobre planos que passam pela origem.

Definição 4.7. Sejam π um plano em \mathbb{R}^3 e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base de π ;

(i) A rotação de ângulo θ sobre o plano π é a transformação linear $R_{\theta}^{\pi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que fixa a direção ortogonal à π e realiza uma rotação de ângulo θ sobre o plano π . Desta maneira, a matriz de R_{θ}^{π} na base β é

$$[R_{\theta}^{\pi}]_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

- (ii) A reflexão induzida pelo plano π é uma transformação linear $r_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que restrito a π age como identidade e restrito ao subespaço ortogonal a π age como uma reflexão. Desta forma, a reflexão induzida por π é representada na base β pela matriz

$$[r_\pi]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_\pi^2 = I \quad (4.3)$$

Para qualquer $A \in O_3$, observamos que $\det(A^t \cdot A) = 1$ implica em $|\det(A)| = 1$, ou seja, $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$. As transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^3 com determinante igual a 1 preservam a orientação e formam o grupo ortogonal especial

$$SO_3 = \{A \in O_3 \mid \det(A) = 1\}. \quad (4.4)$$

Os autovalores de uma transformação ortogonal são ou 1 ou -1 , pois, se $u \neq 0$ e $Tu = \lambda \cdot u$, então

$$\langle Tu, Tu \rangle = \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda^2 - 1) |u|^2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = 1.$$

Proposição 4.1. *Com respeito a transformações ortogonais $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, seguem as seguintes afirmações;*

- (i) *Toda transformação $T \in O_3$ fixa uma direção em \mathbb{R}^3 .*
- (ii) *Para todo $T \in O_3$ existe uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, um plano π e um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que a matriz A de T na base β é dada ou por $A = [R_\theta^\pi]$ se $\det(T) = 1$, e $A = [r_\pi]$ se $\det(T) = -1$.*

Demonstração. O polinômio característico de T é da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad c = \pm 1$$

e as suas raízes reais são 1 ou -1 . Um polinômio de grau 3 com coeficientes reais sempre tem uma raiz real, da onde concluímos que T fixa uma direção.

1. Suponhamos que $p_T(\lambda)$ possui uma raiz igual a 1; neste caso

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a'\lambda + b').$$

Sejam e_3 o autovetor unitário correspondente ao auto-valor $\lambda = 1$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço ortogonal a reta l_3 gerada por e_3 ; portanto

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus \langle e_3 \rangle.$$

Se $v \in V$, então $0 = \langle u, e_3 \rangle = \langle T(u), T(e_3) \rangle = \langle T(u), e_3 \rangle$, ou seja, V é invariante por T . Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de V e $R = T|_V: V \rightarrow V$. Assim, a matriz de T em relação a base $\{e_1, e_2, e_3\}$ é da forma

$$A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } R: V \rightarrow V \text{ satisfaz } R^t R = R.R^t = I.$$

Sendo $V \simeq \mathbb{R}^2$, segue da proposição 3.1 a existência de $\theta \in \mathbb{R}$ tal que ou $R = R_\theta$ ou $R = R_\theta.r_x$. No primeiro caso, a matriz de T torna-se

$$A = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, $A = R_\theta^\pi$. No segundo caso, R é uma reflexão sobre uma reta $l \subset V$ que forma um ângulo $\theta/2$ com o vetor e_1 . Seja u o vetor unitário que gera l e $u^\perp \in V$ o vetor unitário ortogonal a u . Portanto, $T(u) = u$ e $T(u^\perp) = -u^\perp$, da onde a representação matricial de T na base $\{u, u^\perp, e_3\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja π o plano gerado pelos vetores u, e_3 , então $T|_\pi = I$. Neste caso, $A = r_\pi$.

2. Os argumentos são análogos para o caso quando

$$p_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

□

Definição 4.8. Sejam π_1 e π_2 planos em \mathbb{R}^3 e considere os vetores $v_1 \perp \pi_1$ e $v_2 \perp \pi_2$. O ângulo θ formado pelos planos π_1 e π_2 em \mathbb{R}^3 é o menor ângulo formado pelas direções definidas pelos vetores v_1 e v_2 ;

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta = \arccos \left(\left| \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|} \right| \right). \quad (4.5)$$

Proposição 4.2. Sejam π, π' planos em \mathbb{R}^3 e $r_\pi, r_{\pi'}$ as reflexões em relação a cada plano respectivamente. Então,

1. Se π, π' são plano transversais passando pela origem e o ângulo entre eles mede θ , então existe uma base de \mathbb{R}^3 tal que

$$r_{\pi} \circ r_{\pi'} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) & 0 \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sejam π e π' planos paralelos, então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonal aos planos tal que

$$r_{\pi} \circ r_{\pi'} = T_v, \quad \text{onde } |v| = 2 \cdot \text{dist}(\pi, \pi')$$

Como consequência da proposição acima, toda matriz ortogonal é o produto de reflexões em \mathbb{E}^3 .

Teorema 4.1. *O grupo O_3 é gerado pelas reflexões sobre os planos que passam pela origem. O subgrupo SO_3 é o subgrupo de ordem 2 em O_3 gerado pelo produto de um número par de reflexões.*

Se $\pi \subset \mathbb{R}^3$ é um plano passando pela origem, denotamos por l_{π} a reta definida pela direção invariante de R_{θ}^{π} ($l_{\pi} \perp \pi$).

Exercício 4.2. .

- Mostre que dados 2 planos π_1 e π_2 passando pela origem em \mathbb{R}^3 , existe uma transformação ortogonal $A \in SO_3$ tal que $A(\pi_1) = \pi_2$.
- Demonstre a proposição 4.2 acima.
- Mostre que R_{θ} não é diagonalizável sobre \mathbb{R} se $\theta \notin \{0, \pi\}$, e que $R_{\theta} \circ r_x$ possui dois autovalores distintos. No último caso descreva os subespaços invariantes.
- Descreva as matrizes ortogonais diagonalizáveis e descreva geometricamente ação que cada uma realiza em \mathbb{E}^3 .
- Descreva os polinômios característicos possíveis para uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 .
- Mostre que os subespaços invariantes de uma transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são ortogonais. Dica: siga o roteiro abaixo;
 - Mostre que existe $a \in [-1, 1]$ tal que o polinômio característico de T é igual a um dos seguintes polinômios

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2a\lambda + 1), \quad (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2a\lambda + 1).$$

(b) Se $a \neq 1$, mostre que $\text{Nuc}(T - I) \perp \text{Nucl}(T^2 - 2aT + 1)$. O que ocorre se $a = 1$?

(c) Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{Nucl}(T - I) \oplus \text{Nucl}(T^2 - 2aT + 1)$.

7. Mostre que a ação de O_3 sobre \mathbb{S}^2 é transitiva.

4.4 Geodésicas de \mathbb{S}^2

Como vimos em 4.4, o comprimento de uma curva $\gamma \subset \mathbb{S}^2$ parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos(\theta(t))\text{sen}(\psi(t)), \text{sen}(\theta(t))\text{sen}(\psi(t)), \cos(\psi(t))), \quad (4.1)$$

onde $\theta, \psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, é

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{(\psi')^2 + (\theta')^2 \text{sen}^2(\psi)} dt \quad (4.2)$$

Seja $\gamma(t) = (\text{sen}(\psi(t)), 0, \cos(\psi(t)))$, $0 \leq t \leq b \leq \pi$, a curva parametrizada que descreve o segmento do meridiano $M_0 = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ ligando o ponto $p = (0, 0, 1)$ à $q = (\text{sen}(\psi(b)), 0, \cos(\psi(b)))$. Neste caso, o comprimento de γ é

$$L(\gamma) = \int_0^b |\psi'| dt = \psi(b). \quad (4.3)$$

Lema 4.1. *Sejam $p, q \in M_0 = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$. A geodésica ligando p à q descreve um segmento de M_0 .*

Demonstração. Seja $\beta : [0, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva diferenciável qualquer tal que $\beta(0) = p$ e $\beta(b) = q$, então

$$L(\beta) = \int_0^b \sqrt{(\theta')^2 \text{sen}^2(\psi) + (\psi')^2} dt \geq \int_0^b |\psi'| dt = L(\gamma),$$

onde $\gamma \subset M_0$ é o segmento do meridiano que liga p a q . Consequentemente, γ minimiza a distância entre p e q . \square

Consideramos $p, q \in \mathbb{S}^2$ e π_{pq} o plano gerado pelos vetores \vec{op}, \vec{oq} . Desta forma, p, q determinam um único grande círculo $\mathfrak{c}_{pq} = \pi_{pq} \cap \mathbb{S}^2$ e o dividem em dois segmentos $\mathfrak{c}_{pq}^1, \mathfrak{c}_{pq}^2$ tais como na figura ??

$$\mathfrak{c}_{pq}^1 \cup \mathfrak{c}_{pq}^2 = \mathfrak{c}_{pq}, \quad \mathfrak{c}_{pq}^1 \cap \mathfrak{c}_{pq}^2 = \{p, q\}.$$

Dizemos que os pontos p e q são antípodas se $q = -p$.

Teorema 4.2. *Sejam $p, q \in \mathbb{S}^2$ não são antípodas, então existe uma única geodésica em \mathbb{S}^2 ligando p à q correspondendo ao segmento que minimiza o comprimento dentre os segmentos c_{pq}^1, c_{pq}^2 . Caso $q = -p$, então existem duas geodésicas.*

Demonstração. Sejam $p, q \in \mathbb{S}^2$ dois pontos quaisquer. Seja $T : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma transformação ortogonal tal que $T(p) = (0, 0, 1)$ e $T(q) = (\text{sen}(\psi(b)), 0, \text{cos}(\psi(b)))$. Ao aplicarmos o lema anterior concluímos que um segmento de M_0 realiza a distância de $T(p)$ a $T(q)$. Portanto, a distância de p à q é realizada por um segmento sobre a curva $T^{-1}(M_0)$, que também é um segmento de um grande círculo. É claro, se $q \neq -p$ só há uma geodésica, caso contrário há duas. \square

Observação. .

1. Toda geodésica de \mathbb{S}^2 é uma curva plana.
2. Não existem geodésicas paralelas em \mathbb{S}^2 . Este fato difere com o que ocorre na geometria euclidiana \mathbb{E}^2 .
3. Um segmento de grande círculo nem sempre minimiza a distância entre dois pontos em \mathbb{S}^2 . Vejamos o seguinte caso: seja $p = (1, 0, 0)$ e $q = \gamma(t)$ um outro ponto qualquer sobre o equador $\gamma(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t), 0)$. Se considerarmos $q = \gamma(\pi + \epsilon)$, temos que γ não realiza a distância $d_{\mathbb{S}^2}(p, q) = \pi - \epsilon$, pois

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi+\epsilon} |\gamma'(t)| dt = \pi + \epsilon.$$

De fato, a distância entre p e q é realizada pela geodésica $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi - t)$.

4.5 Isometrias de \mathbb{S}^2

A seguir, vamos classificar as isometrias de \mathbb{S}^2 ;

Teorema 4.3.

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O_3$$

Demonstração. Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e $T_0 \in \text{Isom}(\mathbb{S}^2)$. Uma vez que $e_i \in \mathbb{S}^2$, segue da equação 4.3 que

$$\langle T_0(e_i), T_0(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \text{cos}(\theta_{ij}),$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$. Consideramos a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(u) = \begin{cases} |u| \cdot T_0\left(\frac{u}{|u|}\right), & \text{se } |u| \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Se $u \in \mathbb{S}^2$, então $T(u) = T_0(u)$. Tendo em vista que a base $\beta' = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ é ortonormal, então para todo $u \in \mathbb{R}^3$

$$T(u) = \sum_1^3 \langle T(u), T(e_i) \rangle T(e_i) = \sum_i \langle u, e_i \rangle T(e_i).$$

Além disto, se $u \neq 0$, temos que $u = |u| \cdot u_0$, onde $u_0 = \frac{u}{|u|} \in \mathbb{S}^2$. Desta forma, segue da definição que

$$\begin{aligned} T(u) &= |u| \cdot T(u_0) = |u| \cdot \sum_i \langle u_0, e_i \rangle T(e_i) = \\ &= \sum_i \langle |u| \cdot u_0, e_i \rangle T(e_i) = \sum_i \langle u, T(e_i) \rangle T(e_i). \end{aligned}$$

Consequentemente, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear e, para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \sum_{i,j} u^i v^j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \sum_{i,j} u^i v^j \langle e_i, e_j \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Portanto, a matriz de T na base β pertence a O_3 , ou seja, a cada $T_0 \in Isom(\mathbb{S}^2)$ corresponde uma única transformação ortogonal em O_3 . Consequentemente, $Isom(\mathbb{S}^2) \subset O_3$, da onde concluímos que $Isom(\mathbb{S}^2) = O_3$. □

Uma vez que o grupo $Isom(\mathbb{S}^2)$ e as geodésicas de \mathbb{S}^2 foram completamente determinados, podemos descrever as isometrias de \mathbb{S}^2 de maneira intrínseca, ou seja, sem utilizar propriedades geométricas do espaço \mathbb{E}^3 .

Definição 4.9. Seja $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma geodésica, π um plano tal que $\gamma = \pi \cap \mathbb{S}^2$ e $r_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a reflexão sobre π . A reflexão sobre a geodésica γ é a isometria

$$r_\gamma = r_\pi |_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

Proposição 4.3. *Propriedades de $Isom(\mathbb{S}^2)$.*

1. O grupo $Isom(\mathbb{S}^2)$ é gerado pelas reflexões sobre curvas geodésicas.
2. O subgrupo $Isom^0(\mathbb{S}^2) = SO_3$ de $Isom(\mathbb{S}^2)$ tem índice 2 e é gerado pelo produto de um número par de reflexões ao longo de geodésicas (por isto preservam a orientação).
3. Todo elemento de SO_3 fixa dois pontos sobre \mathbb{S}^2 .
4. Toda isometria de \mathbb{S}^2 é determinada pela imagem de 3 pontos.

4.6 Relações Métricas em \mathbb{S}^2

A determinação da distância entre dois pontos sobre \mathbb{S}^2 era uma questão fundamental para os navegadores e cartógrafos antigos. Com a utilização de coordenadas esféricas sobre \mathbb{S}^2 esta questão torna-se um tanto simples.

Nesta seção, todos os ângulos e arcos são medidos em radianos. Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= (\cos(\theta_1)\text{sen}(\psi_1), \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\psi_1), \cos(\psi_1)) \\ p_2 &= (\cos(\theta_2)\text{sen}(\psi_2), \text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\psi_2), \cos(\psi_2)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

pontos pertencentes a \mathbb{S}^2 e seja α a medida do ângulo formado pelos vetores $u_1 = \vec{op}_1$ e $u_2 = \vec{op}_2$. A distância esférica entre p_1 e p_2 é dada pelo comprimento de arco da geodésica que liga os pontos, o qual é igual a α ;

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \alpha.$$

A determinação de α é uma tarefa fácil, basta ver que,

$$\cos(\alpha) = \langle u_1, u_2 \rangle = \cos(\theta_1 - \theta_2)\text{sen}(\psi_1)\text{sen}(\psi_2) + \cos(\psi_1)\cos(\psi_2).$$

Considerando $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ e $1 - \cos(\Delta\theta) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$, obtemos a expressão

$$\cos(\alpha) = \cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi) + 2\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos(\psi_1).\cos(\psi_2).$$

Consequentemente,

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \arccos\left(\cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi) + 2\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos(\psi_1).\cos(\psi_2)\right). \quad (4.2)$$

Sem perda de generalidade, poderíamos ter suposto que o ponto p_1 esta sobre o plano-xy; neste caso $\psi_1 = \pi/2$ e

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \arccos(\cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi)).$$

Ao tomarmos 3 pontos $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ existem duas possibilidades;

1. A, B e C estão sobre o mesmo grande círculo;
2. A, B e C não estão sobre o mesmo grande círculo e definem uma região convexa em \mathbb{S}^2 que denominamos de triângulo esférico com vértices A, B e C . Neste caso, o triângulo é a região limitada pelas geodésicas γ_{AB} (ligando A à B), γ_{BC} (ligando B à C), γ_{CA} (ligando C à A).

Teorema 4.4. *Teorema de Pitágoras Esférico - Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre \mathbb{S}^2 com ângulo retângulo no vértice A e hipotenusa medindo a . Se os comprimentos dos lados opostos aos vértices B e C medem b e c , respectivamente, então*

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c). \quad (4.3)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar o lado AB sobre o equador $\psi = \pi/2$, conforme indica a figura ??;

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (\cos(c), 0, \sin(c)) \quad \text{e} \quad C = (\cos(b), \sin(b), 0).$$

Portanto,

$$\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c).$$

□

Proposição 4.4. *Lei dos Cossenos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico em \mathbb{S}^2 com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}, & \cos(\beta) &= \frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\sin(a)\sin(c)}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que (figura ??)

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0), & B &= (\cos(\theta_B)\sin(\psi_B), \sin(\theta_B)\sin(\psi_B), \cos(\psi_B)) \\ C &= (\cos(\theta_C), \sin(\theta_C), 0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim,

$$\cos(a) = \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C - \theta_B)\sin(\psi_B), \quad (4.6)$$

$$\cos(b) = \langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C), \quad (4.7)$$

$$\cos(c) = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \cos(\theta_B)\sin(\psi_B); \quad (4.8)$$

da onde segue que,

$$\text{sen}(a) = \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_C - \theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)} \quad (4.9)$$

$$\text{sen}(c) = \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}. \quad (4.10)$$

Os vetores

$$\begin{aligned} n_{AB} &= \frac{\vec{OA} \times \vec{OB}}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = \left(\frac{(0, -\cos(\psi_B), \text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B))}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}} \right) \\ n_{BC} &= \frac{\vec{OB} \times \vec{OC}}{|\vec{OB} \times \vec{OC}|} = \frac{(-\cos(\psi_B)\text{sen}(\theta_C), \cos(\psi_B)\cos(\theta_C), \text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}(\psi_B))}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_C - \theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}} \\ n_{CA} &= \frac{\vec{OC} \times \vec{OA}}{|\vec{OC} \times \vec{OA}|} = (0, 0, -1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

determinam os planos π_{AC} , π_{AB} e π_{BC} , respectivamente. Considere $\{n_{AB}, n_{BC}, n_{CA}\}$ uma base orientada de \mathbb{R}^3 . Uma vez que,

$$\cos(\alpha) = -\langle n_{CA}, n_{AB} \rangle, \quad \cos(\beta) = -\langle n_{AB}, n_{BC} \rangle, \quad \cos(\gamma) = -\langle n_{AC}, n_{BC} \rangle,$$

(o sinal “-” porque os ângulos são obtusos) temos

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}} = \frac{\text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B)}{\text{sen}(c)} \quad (4.12)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\cos^2(\psi_B)\cos(\theta_C) - \text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)\text{sen}(\theta_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_C - \theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}} \quad (4.13)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \text{sen}^2(\theta_C - \theta_B)\text{sen}^2(\psi_B)}} = \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}(\psi_B)}{\text{sen}(a)}. \quad (4.14)$$

Decorre das relações 4.6 e 4.7 que

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(a)\cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B) \\ \text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}(\psi_B) &= \text{sen}(b)\cos(c) - \cos(b)\text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\text{sen}(b)} \\ \text{sen}(\theta_C - \theta_B)\text{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\text{sen}(b)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ao aplicarmos as expressões em 4.16 as expressões 4.12 e 4.14, resultam as seguintes identidades:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\text{sen}(b).\text{sen}(c)}, \quad \cos(\gamma) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\text{sen}(a).\text{sen}(b)}. \quad (4.17)$$

Analogamente, a identidade para o $\cos(\beta)$ é obtida a partir da situação na qual os vértices do $\triangle ABC$ são

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0), & B &= (\cos(\theta_B), \text{sen}(\theta_B), 0) \\ C &= (\cos(\theta_C)\text{sen}(\psi_C), \text{sen}(\theta_C)\text{sen}(\psi_C), \cos(\psi_C)). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Neste caso, obtemos

$$\cos(\beta) = \frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\text{sen}(a).\text{sen}(c)}.$$

□

Lema 4.2. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 < 1$, $y^2 < 1$ e $z^2 < 1$ e sejam*

$$a = \frac{x - yz}{(1 - y^2)^{1/2}(1 - z^2)^{1/2}}, \quad b = \frac{y - zx}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - z^2)^{1/2}}, \quad (4.19)$$

$$c = \frac{z - xy}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}}. \quad (4.20)$$

Então,

$$x = \frac{a + bc}{(1 - b^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}}, \quad y = \frac{b + ac}{(1 - a^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}}, \quad (4.21)$$

$$z = \frac{c + ab}{(1 - a^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}} \quad (4.22)$$

Demonstração. Ao fazermos $M = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 - a^2 &= \frac{(x - yz)^2 - (1 - y^2)(1 - z^2)}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \\ &= \frac{M}{(1 - y^2)(1 - z^2)}. \end{aligned}$$

Analogamente, segue que

$$1 - b^2 = \frac{M}{(1 - x^2)(1 - z^2)}, \quad 1 - c^2 = \frac{M}{(1 - x^2)(1 - y^2)}.$$

Portanto,

$$\frac{a + bc}{(1 - b^2)(1 - c^2)} = \frac{Mx}{M} = x$$

De maneira análoga, obtemos as outras expressões em 4.21. \square

Teorema 4.5. (Caso AAA) *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 tem ângulos internos congruentes, então eles são congruentes.*

Demonstração. Aplicando o lema 4.2, segue que

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\text{sen}(\beta)\text{sen}(\gamma)}, \quad \cos(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\gamma)}, \quad (4.23)$$

$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)} \quad (4.24)$$

\square

Teorema 4.6. *Lei dos Senos Esférica - Seja ΔABC um triângulo esférico sobre \mathbb{S}^2 . Sejam a , b e c o comprimento dos lados, e sejam α , β e γ as medida dos ângulos internos opostos a cada lado, respectivamente. Então,*

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(c)}. \quad (4.25)$$

Demonstração. Segue da identidade 4.4 que

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\alpha) &= \frac{\text{sen}^2(b)\text{sen}^2(c) - \cos^2(a) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c) + \cos^2(b)\cos^2(c)}{\text{sen}^2(b)\text{sen}^2(c)} = \\ &= \frac{[1 - \cos^2(b)][1 - \cos^2(c)] - \cos^2(a) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c) + \cos^2(b)\cos^2(c)}{\text{sen}^2(b)\text{sen}^2(c)} = \\ &= \frac{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\text{sen}^2(b)\text{sen}^2(c)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\text{sen}^2(a)} = S(a, b, c),$$

Analogamente, temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)}{\operatorname{sen}^2(b)} = \frac{\operatorname{sen}^2(\gamma)}{\operatorname{sen}^2(c)} = S(a, b, c).$$

□

Exercício 4.3.

1. Sejam $A = (1, 0, 0)$ e $C(A, r_0) = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid d_{\mathbb{S}^2}(A, p) = r_0\} \subset \mathbb{S}^2$ o círculo esférico com centro em $A = (1, 0, 0)$ e raio r_0 ;

- (a) Parametrize $C(A, r_0)$.
 (b) Calcule o comprimento de $C(A, r_0)$.
 (c) Resolva os itens acima para o caso da esfera \mathbb{S}_R^2 e verifique os resultados quando $R \rightarrow \infty$.

2. Teorema de Pitágoras Esférico

- (a) Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico em \mathbb{S}^2 , cujo ângulo retângulo encontra-se no vértice A e a hipotenusa mede a . Seja b o comprimento do lado oposto à B e c à C . Mostre que no limite $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow 0$, vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

conhecida como Teorema de Pitágoras Euclideano. (dica: use a série de Taylor $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^4)$, onde $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\theta^4)}{\theta^2} = 0$).

- (b) Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre a esfera \mathbb{S}_R^2 cujo ângulo retângulo encontra-se no vértice A e a hipotenusa mede a . Sejam b o comprimento do lado oposto à B e c o comprimento do lado oposto à C . Mostre que,

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{R}\right). \quad (4.26)$$

- (c) No item anterior, considere $a \ll R$, $b \ll R$ e $c \ll R$ (o comprimento dos lados são desprezíveis em relação ao raio R) e prove o teorema de Pitágoras euclideano. Interprete o resultado obtido. (dica: use a série de Taylor $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^4)$, onde $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\theta^4)}{\theta^2} = 0$).
- (d) Repita a análise do item anterior para o caso $R \rightarrow \infty$ e interprete-o geometricamente.

3. Lei dos Cossenos

(a) Prove que em S_R^2 , valem as identidades

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, & \cos(\beta) &= \frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

(b) Mostre que no limite $\frac{a}{R} \rightarrow 0$ obtemos as leis dos cossenos da geometria euclidiana abaixo

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha), \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma), \end{aligned} \quad (4.28)$$

e interprete o limite geometricamente.

- (c) Mostre que um triângulo é equilátero se, e somente se, os ângulos internos tem a mesma medida.
- (d) Obtenha condições para que um triângulo seja isósceles.
- (e) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados medindo a, b, c e ângulos internos medindo α, β, γ . Suponhamos que a, b, c correspondem aos lados opostos aos ângulos α, β, γ , respectivamente. Mostre que $a < b < c$ se, e somente se, $\alpha < \beta < \gamma$.
- (f) Mostre que na demonstração da Lei dos Cossenos,

$$\cos^2(\psi_B) = \frac{[\cos(c) - \cos(a)\cos(b)] \cdot [\cos(a) - \cos(b)\cos(c)]}{\cos(b)\operatorname{sen}^2(b)} - \frac{\cos(a)\cos(c) - \cos(b)}{\cos(b)}.$$

4. Lei dos Senos

(a) Mostre que sobre a esfera S_R^2 a lei dos senos é

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}$$

e mostre que se $a \ll R$, $b \ll R$ e $c \ll R$, então vale a Lei dos Senos euclidiana

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}.$$

4.6.1 Área de um Triângulo Esférico

Um gomo esférico em \mathbb{S}^2 é uma região limitada por duas geodésicas η e ρ que ligam pontos antípodos $p = (x, y, z)$ e $q = (-x, -y, -z)$ sobre \mathbb{S}^2 ; isto é, $\eta(0) = \rho(0) = p$ e $\eta(1) = \rho(1) = q$. Em cada um dos vértices, as geodésicas formam um ângulo α que denominamos o ângulo do gomo. Um gomo com ângulo α , conforme mostra a figura ??, é equivalente por uma isometria de \mathbb{S}^2 à

$$G_\alpha = \{(\cos(\theta)\text{sen}(\psi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), \cos(\psi)) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \psi \leq \pi\}. \quad (4.29)$$

Lema 4.3. *A área de um gomo com ângulo interno α é igual a 2α .*

Demonstração. Utilizando coordenadas, esférica nós temos que

$$A = \int_0^\alpha \int_0^\pi \text{sen}(\phi) d\phi d\theta = 2\alpha$$

Em particular, quando $\alpha = 2\pi$ obtemos 4π para a área da esfera \mathbb{S}^2 . □

Teorema 4.7. *A área de um triângulo $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ em \mathbb{S}^2 , com ângulos internos medindo α, β e γ , é*

$$A = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi. \quad (4.30)$$

Demonstração. Seja A a área do triângulo. Pelo lema anterior a área do gomo G_α é

$$A + A_\alpha = 2\alpha,$$

onde A_α é a área da região complementar ao triângulo no gomo. Uma vez que a área de \mathbb{S}^2 é 4π e que $H = \Delta \cup G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma$ é um hemisfério, como mostra a figura ??, segue que

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi.$$

Consequentemente,

$$A + (2\alpha - A) + (2\beta - A) + (2\gamma - A) = 2\pi,$$

da onde obtemos

$$A = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi. \quad \square$$

Exercício 4.4.

1. Mostre que;
 - (a) A área de um gomo com ângulo interno α , em S_R^2 , é igual a $2\alpha R^2$.
 - (b) A área de um triângulo esférico $\triangle ABC \subset S_R^2$, cujos ângulos internos medem α , β e γ , é

$$A = R^2 \cdot [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi].$$

2. Determine a área de um triângulo esférico em função do comprimento dos lados.
3. Estude o caso quando $A \approx 0$

4.7 Subgrupos Discretos de $Isom(\mathbb{S}^2)$

Tendo em vista que $Isom(\mathbb{S}^2) = O_3$ e $Isom^0(\mathbb{S}^2) = SO_3$, o estudo dos subgrupos de isometrias agindo descontinuamente sobre \mathbb{S}^2 é mais simples quando comparado com o caso euclidiano \mathbb{E}^2 . Uma grande diferença é a ausência das translações. Além disto, a compacidade da esfera simplifica enormemente as possibilidades como mostra a proposição a seguir;

Proposição 4.5. *Seja $G \subset Isom(\mathbb{S}^2)$ um grupo agindo descontinuamente sobre \mathbb{S}^2 , então G é finito.*

Demonstração. Segue da definição 2.23 de ação descontínua. □

Um grupo que age descontinuamente sobre \mathbb{S}^2 é discreto em $Isom(\mathbb{S}^2)$.

Proposição 4.6. *Seja $G \subset Isom(\mathbb{S}^2)$ um grupo agindo livremente sobre \mathbb{S}^2 , então $G \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. A hipótese da ação ser livre implica em $G \cap Isom^0(\mathbb{S}^2) = \{I\}$. Suponhamos que $g \in G$ e $g \neq I$; neste caso, para evitar a existência de pontos fixos por g , temos $\det(g) = -1$. Porém, como $g^2 \in G$ e $\det(g^2) = 1$, segue que $g^2 = I$. Consequentemente, $G = \{I, g\} \simeq \mathbb{Z}_2$. □

Pela proposição anterior, um grupo G agindo livremente sobre \mathbb{S}^2 é da forma

$$G = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

O difeomorfismo $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dado pela expressão

$$g.(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

é conhecido como aplicação antípoda da esfera \mathbb{S}^2 e $g.x$ e x são denominados pontos antípodas .

Exercício 4.5. .

1. Determine uma região fundamental da ação livre de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{S}^2 .
2. Mostre que o espaço quociente pela ação livre de \mathbb{Z}_2 é $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{R}P^2$.

Teorema 4.8. *O recobrimento universal de $\mathbb{R}P^2$ é \mathbb{S}^2 . Além disto, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Pelo exercício acima $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{R}P^2$. Como $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$ ([?]), segue que \mathbb{S}^2 é o recobrimento universal de $\mathbb{R}P^2$. \square

4.7.1 Ações de \mathbb{Z}_n e D_n sobre \mathbb{S}^2

Alguns grupos que agem descontinuamente sobre \mathbb{S}^2 são elementares no sentido que decorrem de ações descontínuas sobre \mathbb{E}^2 , pois, $O_2 \subset Isom^0(\mathbb{S}^2) = SO_3$.

1. Ação de \mathbb{Z}_n sobre \mathbb{S}^2 .

Seja $R_{\frac{2\pi}{n}}$ a rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$ realizada no plano $z = 0$. O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$ é representado como um subgrupo de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$ da seguinte forma;

$$R_{\frac{2\pi}{n}} \mapsto \begin{pmatrix} R_{\frac{2\pi}{n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A ação de \mathbb{Z}_n fixa os pontos $(0, 0, \pm 1)$ (pólos norte e sul).

2. Ação de D_n sobre \mathbb{S}^2 .

O grupo Diedral D_n é gerado por uma reflexão r_x e por uma rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$. Para representarmos $D_n \subset Isom^0(\mathbb{S}^2)$, consideramos a inclusão $\rho : D_n \rightarrow Isom^0(\mathbb{S}^2)$ estendida a partir da imagem dos geradores;

$$r_x \mapsto \rho(r_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_{\frac{2\pi}{n}} \mapsto \rho(R_{\frac{2\pi}{n}}) = \begin{pmatrix} R_{\frac{2\pi}{n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, D_n tem 3 órbitas com grupo de isotropia não-triviais. Sejam A , B e C os pontos indicados na figura ???. Os grupos de isotropia de A e B são $G_A = \mathbb{Z}_2$ e $G_B = \mathbb{Z}_2$, já $G_C = \mathbb{Z}_n$. Chamamos a atenção para a relação entre a ordem do grupo D_n ($o(D_n) = 2n$), a ordem do grupo de isotropia de um elemento em \mathbb{S}^2 e a cardinalidade da órbita deste elemento ($\#O_A = n$, $\#O_b = n$, $\#O_C = 2$).

Exercício 4.6. .

1. Mostre que existe uma representação $\rho : O_2 \rightarrow SO_3$. Classifique os grupos de isotropia para esta ação de O_2 sobre \mathbb{S}^2 .
2. Descreva uma região fundamental para a ação de \mathbb{Z}_n gerada por $R_{\frac{2\pi}{n}}$ e obtenha o espaço $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_n$ (faça uma figura).
3. Descreva a região fundamental para a ação de D_n e obtenha o espaço \mathbb{S}^2/D_n (faça uma figura).

4.7.2 Grupos Triangulares

Seja $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ um triângulo esférico com vértices A , B e C , e ângulos internos medindo α , β e γ , respectivamente. A área do triângulo esférico $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, obtida no teorema 4.7, é

$$A(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi. \quad (4.1)$$

As reflexões r_1 , r_2 e r_3 sobre os lados do triângulo geram o grupo $\tilde{G}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$. $\tilde{G}(\alpha, \beta, \gamma)$ contém o subgrupo $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_\alpha r_\beta, r_\beta r_\gamma, r_\gamma r_\alpha \rangle$ de ordem 2, cujos elementos g preservam a orientação ($\det(g) = 1$). Desta forma, os geradores de $G(\alpha, \beta, \gamma)$ são rotações;

$$r_2 r_3(A) = A, \quad r_3 r_1(B) = B, \quad r_1 r_2(C) = C.$$

Devido as relações elementares

$$(r_i r_j)^{-1} = r_j r_i, \quad r_2 r_3 = (r_1 r_2)^{-1} (r_1 r_3)^{-1},$$

segue que $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_1 r_2, r_1 r_3 \rangle$.

De acordo com o corolário 3.5, se $G(\alpha, \beta, \gamma)$ age descontinuamente, então existem $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\alpha = \frac{\pi}{n_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{n_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{n_3}.$$

Porém, a fórmula da área 4.1 impõem a condição

$$\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \right) - 1 > 0 \quad (4.2)$$

aos valores assumidos por n_1 , n_2 e n_3 . As únicas soluções $\{n_1, n_2, n_3\}$ da desigualdade acima são as seguintes;

$$(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} (2, 2, n), \\ (2, 3, 3), \\ (2, 3, 4), \\ (2, 3, 5) \end{cases} \quad (4.3)$$

No que segue, sejam

$$G(n_1, n_2, n_3) = G\left(\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}\right), \quad \Delta(n_1, n_2, n_3) = \Delta\left(\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}\right) \quad (4.4)$$

Definição 4.10. Um grupo triangular esférico é um grupo do tipo $G(p, q, r)$, onde a tripla (n_1, n_2, n_3) é uma das triplas descritas na expressão 4.3.

A existência de alguns dos subgrupos triangulares de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$ é relacionada à existência dos sólidos de Platão (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), como veremos a seguir;

1. Grupo do Tetraedro $\mathfrak{T} = G(2, 3, 3)$

Consideramos em \mathbb{R}^3 um conjunto de pontos $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ formando um tetraedro T com arestas l_{ij} ligando o vértice v_i a v_j e faces f_i opostas ao vértice v_i . Também seja $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ o conjunto formado pelos pontos médios dos lados l_{ij} e o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ formado pelos baricentros das faces f_i , conforme indica a figura ??.

Seja \mathfrak{T} o grupo de simetrias do tetraedro formado por transformações $g : T \rightarrow T$ que preservam a distância e a orientação. Se considerarmos T centrado na origem, as simetrias de T estendem-se a transformações ortogonais $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou seja $g \in SO_3$. Vamos descrever estas transformações acompanhando as figuras ?? e ??;

- (a) Por cada um dos vértices v_i passa uma reta que é a altura relativa a face oposta. Seja b_i o baricentro da face oposta ao vértice v_i .

Usaremos os índices i, j, k, l para indicarmos os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, sendo que eles são sempre considerados disjuntos dois a dois.

A rotação de ângulo $\frac{2\pi}{3}$, realizada no plano da face definida pelos vértices v_j, v_k, v_l , fixa os pontos v_i e b_i enquanto a face oposta a v_i é rotacionada sobre o seu próprio plano. Portanto, os vértices formam uma órbita e os baricentros formam uma outra órbita, ambas as órbitas possuem grupo de isotropia isomorfo à \mathbb{Z}_3 .

- (b) De acordo com a figura, os pontos

$$\begin{aligned} \{m_1, m_3, m_5, m_6\}, & \text{ formam o plano } \pi_{1,3,5,6}, \\ \{m_2, m_3, m_4, m_5\}, & \text{ formam o plano } \pi_{2,3,4,5}, \\ \{m_1, m_2, m_4, m_6\}, & \text{ formam o plano } \pi_{1,2,4,6}. \end{aligned}$$

Cada um destes planos possui uma reta ortogonal que intersecta o conjunto dos pontos médios naqueles pontos que não estão contidos no plano, vejamos um exemplo: a reta ortogonal ao plano $\pi_{1,3,5,6}$ passa pelos pontos médios m_2 e m_4 . De fato, os pontos $\{m_1, m_3, m_5, m_6\}$ definem um quadrado. A rotação R_π , no plano do quadrado, deixa o tetraedro invariante. Portanto, os pontos médios formam uma órbita cujo grupo de isotropia é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

Assim, concluímos que o grupo do tetraedro tem ordem $o(\mathfrak{T}) = 12$ e possui 3 órbitas com grupo de isotropia não trivial;

Tabela 4.1: Órbitas Singulares de \mathfrak{T}

<i>órbita</i>	<i>ordem</i>	<i>Isotropia</i>
vértices $\{v_i\}$	4	\mathbb{Z}_3
baricentros $\{b_i\}$	4	\mathbb{Z}_3
ptos médios $\{m_i\}$	6	\mathbb{Z}_2

Observamos que os vértice, os baricentros e os pontos médios são vértices de uma triangulação do tetraedro. Isto quer dizer que o tetraedro esta subdividido em triângulos, cujos vértices são os pontos mencionados e cuja interseção de dois triângulos da triangulação é ou um vértice ou uma aresta. Suponhamos que a esfera circunscrita ao nosso tetraedro é \mathbb{S}^2 . Para obtermos um subgrupo de $Isom(\mathbb{S}^2)$ a partir do grupo \mathfrak{T} nós projetamos o tetraedro sobre \mathbb{S}^2 . Desta maneira, obtemos uma triangulação de \mathbb{S}^2 onde o ângulo em cada um dos vértices é dado pela tabela abaixo;

Tabela 4.2: Ângulos dos vértices

<i>vértice</i>	<i>ângulo</i>
v_i	$\pi/3$
b_i	$\pi/3$
m_i	$\pi/4$

Desta forma, o triângulo formado pelos vértices v_i, b_j, m_k tem ângulos $\pi/2, \pi/3, \pi/3$. Concluimos que o grupo triangular $G(2, 3, 3)$ é exatamente o grupo de simetrias do tetraedro.

2. Grupo do Cubo $\mathfrak{C} = G(2, 3, 4)$

O procedimento para descrevermos o grupo \mathfrak{C} de simetrias do cubo é o mesmo. Considere v_i como os vértice do cubo, b_i como o centro de uma face e m_i como o ponto médio de uma aresta. Ao ligarmos estes pontos obtemos uma triangulação para o cubo. A ordem de \mathfrak{C} é 24 e a tabela relativa as órbitas singulares é a seguinte;

Tabela 4.3: Órbitas Singulares de \mathfrak{C}

<i>órbita</i>	<i>ordem</i>	<i>Isotropia</i>
vértices $\{v_i\}$	8	\mathbb{Z}_4
baricentros $\{b_i\}$	6	\mathbb{Z}_4
ptos médios $\{m_i\}$	12	\mathbb{Z}_2

Analogamente, ao projetarmos sobre \mathbb{S}^2 , obtemos um subgrupo triangular de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$. De acordo com a tabela abaixo, o grupo triangular correspondente é o $G(2, 3, 4)$.

Tabela 4.4: Ângulos dos vértices

<i>vértice</i>	<i>ângulo</i>
v_i	$\pi/3$
b_i	$\pi/4$
m_i	$\pi/2$

Exercício 4.7. .

1. Descreva o grupo \mathfrak{D} de simetrias do dodecaedro. Determine a sua ordem e qual é o subgrupo triangular de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$ correspondente à \mathfrak{D} .
2. Seja \mathfrak{D} o grupo de simetrias do octaedro. Mostre que $\mathfrak{D} \stackrel{iso}{\cong} \mathfrak{C}$.
3. Seja \mathfrak{I} o grupo de simetrias do icosaedro. Mostre que $\mathfrak{I} \stackrel{iso}{\cong} \mathfrak{D}$.

Teorema 4.9. *Seja G um grupo finito de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$. Então, G é isomorfo a um dos grupos descritos na tabela abaixo, onde N é o número de órbitas singulares e \mathfrak{o} é a ordem dos respectivos grupos de isotropia.*

Tabela 4.5: Grupos finitos de SO_3

G	$ G $	N	\mathfrak{o}
\mathbb{Z}_n	n	2	(n,n)
D_n	$2n$	3	$(2,2,n)$
\mathfrak{I}	12	3	$(2,3,3)$
\mathfrak{C}	24	3	$(2,3,4)$
\mathfrak{D}	60	3	$(2,3,5)$

Demonstração. A configuração da ação de G é dada pela tripla $(|G|, N, \mathfrak{o})$. Como anteriormente, G_v denota o grupo de isotropia de $v \in \mathbb{S}^2$. Começamos definindo os seguintes conjuntos;

$$\begin{aligned} V &= \{v \in \mathbb{S}^2 \mid G_v \neq \{I\}\}, \quad (\text{vértices da triangulação}) \\ E &= \{(v, g) \in V \times G \mid g.v = v, g \neq I\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Uma vez que G é finito, o conjunto V é decomposto em s órbitas ($s < \infty$), digamos,

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_s.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, seja v_i um representante da órbita V_i , $G_i = G_{v_i}$ e $n_i = |G_i| \geq 2$. A relação biunívoca $V_i \leftrightarrow G/G_i$ implica em

$$|V_i| = \frac{|G|}{|G_i|} = \frac{|G|}{n_i}. \quad (4.6)$$

Todo elemento $g \in G$, $g \neq I$, tem 2 pontos fixos sobre \mathbb{S}^2 , portanto,

$$|E| = 2(|G| - 1). \quad (4.7)$$

Além disto,

$$\begin{aligned} |E| &= \sum_{v \in V} (|G_v| - 1) = \sum_{i=1}^s \sum_{v \in V_i} (|G_i| - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^s |V_i| (n_i - 1) = \sum_{i=1}^s |G| \left(1 - \frac{1}{n_i}\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Decorre das equações 4.7 e 4.8 a igualdade

$$2(|G| - 1) = \sum_{i=1}^s |G| \left(1 - \frac{1}{n_i}\right),$$

ou seja,

$$2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j}\right). \quad (4.9)$$

Como $|G| \geq 2$ e $n_i \geq 2$, o lado esquerdo de 4.9 satisfaz

$$1 \leq 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) \leq 2, \quad (4.10)$$

enquanto o lado direito satisfaz

$$\frac{s}{2} \leq \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq s. \quad (4.11)$$

Consequentemente, as únicas possibilidades são ou $s = 2$ ou $s = 3$. Analisaremos cada uma destas possibilidades;

1. $s = 2$.

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) &= 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \\ |G| \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) &= 2 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2 = |G|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Neste caso, a configuração da ação de G é $(n, 2, (n, n))$.

2. $s = 3$.

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) &= 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} \\ 1 + \frac{2}{|G|} &= \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Vamos estabelecer a ordem $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ para concluirmos que $n_1 = 2$. Ao substituírmos $n_1 = 3$ em 4.13 obtemos

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq 1.$$

Portanto, $n_1 = 2$ e

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \quad (4.14)$$

Se assumirmos que $n_2 \geq 4$ em 4.14, segue que

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{|G|} \leq \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad n_2 < 4$$

(a) $n_2 = 2$,

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_3} \Rightarrow |G| = 2n_3.$$

Neste caso, segue que a configuração da ação é $(2n, 3, (2, 2, n))$.

(b) $n_2 = 3$.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|},$$

ou seja, $2 < n_3 < 6$. Ao analisarmos os valores 3, 4 e 5 para n_3 obtemos a seguinte tabela para as possíveis configurações;

Tabela 4.6: $n_3 = 3, 4$ e 5

n_3	$o(G)$	N	σ
3	12	3	(2,3,3)
4	24	3	(2,3,4)
5	60	3	(2,3,5)

□

Exercício 4.8. Um poliedro em \mathbb{R}^3 é um conjunto conexo formado pela união de polígonos cuja interseção ou é um vértice ou é uma única aresta (lado).

1. Um poliedro é regular se todas as suas faces são polígonos regulares. Prove que existem 5 poliedros regulares em \mathbb{R}^3 , denominados poliedros de Platão.
2. Seja P um dos poliedros de Platão e \mathcal{T} uma triangulação de P . Isto quer dizer que existe uma coleção de triângulos

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \subset P,$$

satisfazendo as seguintes condições;

(a) $P = \cup_{i=1}^n T_i$.

(b) Se $i \neq j$, então ou

$$T_i \cap T_j = \{v\}, \quad \text{ou} \quad T_i \cap T_j = \{a\},$$

onde v =vértice e a é uma aresta (não pode ser uma parte da aresta). Consideremos os seguintes números; V = número de vértice de \mathcal{T} , A = número de arestas de \mathcal{T} e F = número de faces de \mathcal{T} . A característica de Euler de P é definida por

$$\chi(P, \mathcal{T}) = V - A + F.$$

Mostre que para qualquer triangulação \mathcal{T} de P temos $\chi(P, \mathcal{T}) = 2$.

- (c) Construa uma triangulação \mathcal{T} sobre o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ e mostre $\chi(\mathbb{R}P^2, \mathcal{T}) = 1$.
- (d) Construa uma triangulação \mathcal{T} sobre o toro T^2 e mostre que $\chi(P, \mathcal{T}) = 0$.

4.8 Superfícies e Orbitais Esféricos

Como vimos, as únicas superfícies obtidas na geometria esférica, são \mathbb{S}^2 e $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$. Os outros subgrupos discretos de $Isom(\mathbb{S}^2)$ não agem livremente sobre \mathbb{S}^2 , conforme mostra a tabela 4.5. Desta maneira, os espaços quocientes obtidos são orbitais do tipo apresentado na figura ??.

1. Regiões Fundamentais e Espaços Quocientes.

- (a) $X_{\mathbb{Z}_n} = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_n$.
- (b) $X_{D_n} = \mathbb{S}^2/D_n$.
- (c) $X_{\mathfrak{I}} = \mathbb{S}^2/\mathfrak{I}$.
- (d) $X_{\mathfrak{C}} = \mathbb{S}^2/\mathfrak{C}$.
- (e) $X_{\mathfrak{D}} = \mathbb{S}^2/\mathfrak{D}$.

Conforme a fórmula ??, dada na definição ?? no capítulo 4, a característica de Euler destes orbitais são dadas pela fórmula

$$\chi(X/G, \mathcal{T}) = 2 - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

Desta forma, temos a seguinte tabela;

	$\mathbb{R}P^2$	$X_{\mathbb{Z}_n}$	X_{D_n}	$X_{\mathfrak{I}}$	$X_{\mathfrak{C}}$	$X_{\mathfrak{D}}$
χ	1	$\frac{2}{n}$	*	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$

Capítulo 5

Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica foi descoberta devido aos inúmeros insucessos em demonstrar o axioma das paralelas 3.2. Então, Janós Bolya e Lobachvesky observaram que alterando o axioma das paralelas não surgiam contradições com os outros axiomas e nem com as suas consequências. Assim, o enunciado do axioma das paralelas foi alterado;

Axioma 5.1. *Sejam l uma reta e P um ponto não pertencente a l . Por P passam infinitas retas paralelas a l .*

No formalismo moderno, leia-se geodésica no lugar de retas. A geometria que satisfaz o axioma acima foi denominada de geometria hiperbólica.

Neste capítulo, faremos uso de alguns recursos básicos da teoria de funções de uma variável complexa.

5.1 Espaço Hiperbólico

Seja $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ o semi-plano superior de \mathbb{R}^2 .

Definição 5.1. A métrica hiperbólica $(g_h)_p : T_p\mathbb{R}_+^2 \times T_p\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela seguinte expressão: sejam $p = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ pertencentes à $T_{(x,y)}\mathbb{R}_+^2$, então

$$(g_h)_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2}(v_1w_1 + v_2w_2); \quad (5.1)$$

Em termos do produto interno euclidiano, temos

$$(g_h)_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle. \quad (5.2)$$

Definição 5.2. O Espaço Hiperbólico é a superfície riemanniana

$$\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h).$$

O comprimento de uma curva $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \quad (5.3)$$

Exemplo 5.1. Em cada um dos itens abaixo, o objetivo será determinar o comprimento $L(\gamma)$ de $\gamma \subset \mathbb{H}^2$.

1. $\gamma(t) = (a, t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta vertical).

$$\gamma'(t) = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right). \quad (5.4)$$

2. $\gamma(t) = (t, at + b)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta).

Sejam $y_0 = \gamma(t_0)$ e $y_1 = \gamma(t_1)$. Sendo assim, $\gamma'(t) = (1, a)$ e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1+a^2}{(at+b)^2}} dt = \\ &= \sqrt{1+a^2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{at+b} = \sqrt{1+a^2} \cdot \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{y_0 \rightarrow 0} L(\gamma) = \infty$.

3. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\gamma(\theta) = (R\cos(\theta) + a, R\sin(\theta) + b)$, onde $R < b$ (círculo de raio R e centro em (a, b)).

$$\gamma'(t) = R(-\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{Rd\theta}{b + R\sin(\theta)}$$

Substituindo $t = tg(\theta/2)$, temos que $d\theta = \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$ e

$$L(\gamma) = \frac{2R}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{R}{b}\right)^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2}}.$$

Substituindo novamente por $u = t + \frac{R}{b}$, temos $du = dt$ e

$$L(\gamma) = \frac{2R}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2}} = \quad (5.5)$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{b^2 - R^2}} \cdot \arctg\left(\frac{bt + R}{\sqrt{b^2 - R^2}}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi R}{\sqrt{b^2 - R^2}}. \quad (5.6)$$

Segue que $\lim_{R \rightarrow b} L(\gamma) = \infty$, uma vez que o círculo aproxima-se do eixo-x.

5.1.1 Reflexões no Espaço Hiperbólico

A distância entre dois pontos p e q em \mathbb{H}^2 é definida por

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p, q)} L(\gamma).$$

Para determinar $d(p, q)$, em função de p e q , precisamos descrever as geodésicas de \mathbb{H}^2 . Para este fim, vamos estudar a geometria das transformações de inversão sobre círculos, também denominadas de reflexões. Dentre as isometria de \mathbb{E}^2 , as únicas que são isometrias de \mathbb{H}^2 são as reflexões sobre retas verticais e as suas composições, como mostra a proposição a seguir;

Proposição 5.1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $l = \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}_+\}$ reta vertical em \mathbb{R}_+^2 . A transformação $r_l : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, induzida pela reflexão euclideana sobre l , é uma isometria de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. A reflexão sobre l é dada por

$$r_l(x, y) = (-x + 2a, y), \quad dr_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$g_{r_l(x, y)}(dr_l.v, dr_l.w) = \frac{1}{y^2} \langle dr_l.v, dr_l.w \rangle = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle = g_{(x, y)}(v, w).$$

□

A seguir, introduziremos a transformação de inversão sobre um círculo no plano com o intuito de obter mais isometrias de \mathbb{H}^2 . Para isto, consideraremos o círculo de raio R e centro em $P = (a, b)$ como o conjunto

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}, \quad S_R = S_R(O).$$

Definição 5.3. A transformação de inversão sobre S_R é a aplicação $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$r_{S_R}(x, y) = R^2 \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (5.7)$$

Observe que a inversão r_{S_R} satisfaz a identidade

$$|r_{S_R}(v)| \cdot |v| = R^2, \quad \text{onde } v = (v_1, v_2), \quad |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \quad (5.8)$$

Observação. Ao considerarmos o espaço \mathbb{R}^2 como sendo o espaço complexo \mathbb{C} , isto é, ao identificarmos $(x, y) \rightsquigarrow z = x + iy$, a transformação r_{S_R} pode ser escrita na forma

$$r_{S_R}(z) = R^2 \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{R^2}{\bar{z}}. \quad (5.9)$$

Assim, $r_{S_R} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é anti-holomorfa, ou seja, preserva ângulo e inverte a orientação.

Proposição 5.2. *A transformação de inversão $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem as seguintes propriedades:*

1. Se $l \subset \mathbb{R}^2$ é uma reta, então $r_{S_R}(l)$ é ou uma reta ou um círculo.
2. Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é um círculo, então $r_{S_R}(C)$ é ou uma reta ou um círculo.

Demonstração. Observamos que, da expressão $r_{S_R}(x, y) = (u, v)$ e de 5.7,

$$\begin{cases} u = R^2 \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = R^2 \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = \frac{x}{y} \\ u^2 + v^2 = \frac{R^4}{x^2+y^2} \end{cases},$$

ou seja,

$$x = R^2 \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = R^2 \frac{v}{u^2 + v^2}$$

1. Suponha que $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$. Se substituirmos as expressões acima, obtemos

$$R^2 \cdot \frac{au + bv}{u^2 + v^2} + c = 0. \quad (5.10)$$

Portanto, há duas possibilidades a serem consideradas;

- (a) $c = 0$. Neste caso,

$$au + bv = 0. \quad (5.11)$$

- (b) $c \neq 0$. Neste caso,

$$R^2 au + R^2 bv + c(u^2 + v^2) = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\left(u + \frac{aR^2}{2c}\right)^2 + \left(v + \frac{bR^2}{2c}\right)^2 = R^4 \cdot \frac{a^2 + b^2}{4c^2}. \quad (5.12)$$

2. Suponha que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$. Ao substituirmos x e y em função de u e v na relação que define o círculo C , obtemos a relação

$$[R^4 - 2R^2(au + bv)] + (a^2 + b^2 - r^2)(u^2 + v^2) = 0 \quad (5.13)$$

Assim, temos os seguintes casos;

- (a) $a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Neste caso,

$$au + bv = \frac{R^2}{2}. \quad (5.14)$$

- (b) $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$. Neste caso,

$$\left(u - \frac{aR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(v - \frac{bR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \frac{r^2 R^4}{(a^2 + b^2 - r^2)^2}. \quad (5.15)$$

□

Exercício 5.1. .

1. Seja $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$. Determine a inversão sobre o círculo S_2 .
2. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = r^2\}$. Determine a inversão sobre o círculo S_2 e analise o que ocorre quando variamos o parâmetro r .
3. Seja

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\},$$

o círculo de raio R e centro em $P = (a, b)$. Mostre que a inversão sobre $S_R(P)$ define a aplicação $r_{S_R(P)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2}(x - a, y - b) + (a, b). \quad (5.16)$$

4. Sejam $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ e $r_{S_R} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ a inversão sobre $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$. Se $r_{S_R}(C_1) = C_2$, onde $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2\}$, então:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^2, \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\frac{\alpha}{a}(a^2 + b^2 - r^2)}. \quad (5.17)$$

5. Mostre que a inversão dada por 5.16 transforma retas e círculos em retas ou círculos.
6. Estude as relações análogas à 5.17 quando S_R tem centro sobre o eixo-x.

Proposição 5.3. *Seja $S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 = R^2\}$ um círculo cujo centro encontra-se em $p = (a, 0)$ (sobre o eixo-x). Então, a inversão $r_{S_R(P)}$ é uma isometria de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Consideremos o caso geral ($b \neq 0$)

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (x-a, y-b) + (a, b) = (u, v).$$

Segue que $dr_{S_R(P)} : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ aplicada ao vetor $w = (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ é dado por

$$dr_{S_R(P)}.w = \frac{R^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} \begin{pmatrix} (y-b)^2 - (x-a)^2 & -2(x-a)(y-b) \\ -2(x-a)(y-b) & (x-a)^2 - (y-b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = R^4 \cdot \frac{w_1^2 + w_2^2}{\{R^2(y-b) + b[(x-a)^2 + (y-b)^2]\}^2}.$$

Se $b = 0$, a expressão acima torna-se

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^2} = g_{(x,y)}(w, w).$$

Desta maneira, a transformação

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x-a)^2 + y^2} (x-a, y) + (a, 0) \quad (5.18)$$

induz um difeomorfismo $r_{S_R(P)} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ que preserva a métrica hiperbólica. Consequentemente, $r_{S_R(P)}$ é uma isometria. \square

O termo reflexão será utilizado para designarmos as inversões sobre os círculos centrados sobre o eixo-x, assim como também será usado para designar as reflexões sobre retas verticais.

Observação. Se interpretadas como funções de uma variável complexa, as reflexões correspondem as funções anti-holomorfas.

$$r_l(z) = -\bar{z} + 2\alpha, \quad r_{S_R(P)} = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0. \quad (5.19)$$

Exercício 5.2. Sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{H}^2$. Mostre que:

1. Se P_1 e P_2 encontram-se sobre uma reta, então, a imagem do segmento de reta definido por P_1 e P_2 , por uma reflexão em \mathbb{H}^2 , é um segmento sobre uma reta vertical ou um arco sobre um círculo centrado no eixo-x.
2. Se P_1 e P_2 não encontram-se sobre uma reta vertical, então existe uma isometria de \mathbb{H}^2 tal que ambos são levados sobre uma mesma reta vertical.
3. Sejam α uma reta vertical e β um círculo centrado sobre o eixo-x tais que, na interseção $\{p\} = \alpha \cap \beta$, α seja ortogonal à β . Considerando que r_α e r_β são as reflexões sobre α e β , respectivamente, mostre que $r_\alpha(\beta) = \beta$ e $r_\beta(\alpha) = \alpha$.
4. Sejam α e β dois círculos centrados sobre o eixo-x tais que na interseção $\{p\} = \alpha \cap \beta$ eles são ortogonais. Como no item anterior, mostre que $r_\alpha(\beta) = \beta$ e $r_\beta(\alpha) = \alpha$.

5.2 Geodésicas de \mathbb{H}^2

Nesta seção, vamos determinar a geodésica que liga dois pontos em \mathbb{H}^2 .

Proposição 5.4. Para todo $a \in \mathbb{R}$, a geodésica ligando os pontos $p = (a, t_0)$ e $q = (a, t_1)$ é o segmento de reta pertencente a semi-reta $l = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

Demonstração. Seja $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ a parametrização $\gamma(t) = (a, t)$ de l e sejam $p_0 = \gamma(t_0)$ e $p_1 = \gamma(t_1)$. O comprimento de γ em \mathbb{H}^2 , de acordo com a expressão 5.4, é

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right).$$

Seja $\beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\beta(t) = (x(t), y(t))$, uma outra curva ligando os pontos p_0 e p_1 . Suponhamos que $\beta(t_0) = p_0$ e $\beta(t_1) = p_1$. Desta maneira,

$$L(\beta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{((x')^2 + (y')^2)} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right).$$

Uma vez que $L(\beta) \geq L(\gamma)$, $\forall \beta$, então γ minimiza a distância e, por isto, é uma geodésica de \mathbb{H}^2 . \square

Corolário 5.1. Os círculos cujo centro encontram-se sobre o eixo-x são geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Seja $C = \{(x, y) \mid (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2\} \cap \mathbb{H}^2$ um semi-círculo com centro sobre o eixo-x. É suficiente mostrarmos que existe uma isometria de \mathbb{H}^2 cuja imagem de C é uma semi-reta vertical. Para esta fim, consideramos a isometria obtida pela reflexão sobre o círculo

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}.$$

Conforme a expressão 5.13, a imagem de C é conjunto dos pontos $(u, v) \in \mathbb{H}^2$ satisfazendo a relação

$$R^4 + 2R^2(a - \alpha)(u - a) = [r^2 - (a - \alpha)^2][(u - a)^2 + v^2].$$

Portanto, se $a = \alpha + r$ ou $a = \alpha - r$ a imagem de C é a semi-reta

$$l = \left\{ \left(a - \frac{R^2}{2(a - \alpha)}, y \mid y > 0 \right) \right\}.$$

Consequentemente, a reflexão sobre o círculo com centro em $(a, 0)$, onde $a = \alpha + r$ ou $a = \alpha - r$, leva C sobre l . A conclusão segue da proposição 5.4. \square

Teorema 5.1. *Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 , então são as seguintes as possibilidades;*

1. γ descreve um segmento sobre a reta vertical.
2. γ descreve uma curva sobre um semi-círculo centrado no eixo- x .

Demonstração. Sejam p e q dois pontos quaisquer em \mathbb{H}^2 e $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma geodésica minimizando a distância entre eles. Há dois casos a serem considerados;

1. p e q encontram-se sobre uma reta vertical l .
Conforme vimos, β é o segmento de reta vertical pertencente à l com extremidades p e q .
2. p e q não encontram-se sobre uma mesma reta vertical.
Consideremos o círculo C centrado no eixo- x e passando por p e q . Neste caso, existe uma isometria $r : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que a imagem $r(C)$ é uma reta vertical. De acordo com o item anterior, a única possibilidade é que a imagem $r(\beta)$ esteja sobre a reta vertical $r(C)$ que, por sua vez, é a imagem do arco contido em C que liga p à q .

\square

Corolário 5.2. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$. Existe uma única geodésica minimizante ligando p à q .*

Desta forma, concluímos que o axioma 5.1 é válido no espaço hiperbólico. Dizemos que duas geodésicas em \mathbb{H}^2 são concorrentes quando as curvas intersectam-se, são paralelas quando forem um par de retas verticais distintas (encontram-se em ∞) e são ultra-paralelas quando são um par de círculos disjuntos centrados na origem.

Exercício 5.3. .

1. Sejam $p = (a, y_0)$ e $q = (a, y_1)$, onde $y_0 \leq y_1$. Assim, segue de 5.4 que $d(p, q) = \ln(\frac{y_1}{y_0})$. Mostre que

$$d(p, q) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) \Leftrightarrow \cosh(d(p, q)) = 1 + \frac{|y_1 - y_0|^2}{2y_0y_1}. \quad (5.1)$$

2. No item acima mostre que

$$\sinh\left(\frac{d(p, q)}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{|y_1 - y_0|}{\sqrt{y_0y_1}}. \quad (5.2)$$

3. Calcule $\tanh\left(\frac{d(p, q)}{2}\right)$.
4. Sejam $\gamma_1 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e γ_2 geodésicas que na interseção formam um ângulo θ . Se α é o raio de γ_2 , mostre que $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha \cdot \cos(\theta)| = \alpha\}$.

5.2.1 Produto Angular entre Geodésicas

Apresentaremos um invariante geométrico associado a posição relativa entre duas geodésicas em \mathbb{H}^2 . A circunferência com centro em $a = (a_1, a_2)$ e raio r é o conjunto

$$C_r(a) = \{v = (x, y) \in \mathbb{H}^2; |v|^2 - 2 \langle v, a \rangle + |a|^2 - r^2 = 0\},$$

onde $| \cdot |^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$; a reta ortogonal ao vetor $b = (b_1, b_2)$, passando pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^2$, é o conjunto

$$L_t(b) = \{v = (x, y) \in \mathbb{H}^2 | \langle v, b \rangle = t\}, \quad \text{onde } b = (b_1, b_2), \quad t = b_1x_0 + b_2y_0.$$

Observamos que tanto a reta quanto a circunferência podem ser descritas por uma equação na forma

$$\alpha |v|^2 - 2 \langle v, a \rangle + \beta = 0, \quad (5.3)$$

onde $v, a \in \mathbb{H}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. No caso da circunferência $C_r(a)$, $\alpha = 1$ e $\beta = |a|^2 - r^2$, enquanto para a reta $L_t(b)$ $\alpha = 0$ e $\beta = 2t$. Desta maneira, associamos a cada geodésica uma 4-upla $(\alpha, a_1, a_2, \beta)$.

Definição 5.4. Sejam Σ e Σ' duas curvas geodésicas em \mathbb{H}^2 e cujas 4-uplas sejam $(\alpha, a_1, a_2, \beta)$ e $(\alpha', a'_1, a'_2, \beta')$, respectivamente. O produto angular entre Σ e Σ' é

$$(\Sigma, \Sigma') = \left| \frac{2 \langle a, a' \rangle - \alpha\beta' - \beta\alpha'}{2(|a|^2 - \alpha\beta)^{1/2} (|a'|^2 - \alpha'\beta')^{1/2}} \right| \quad (5.4)$$

A interpretação para o produto angular depende da posição relativa entre as geodésicas, como mostram os exemplos a seguir;

Exemplo 5.2. .

1. $\Sigma = C_r(a)$, $\Sigma' = C_t(b)$.

As 4-uplas correspondentes são

$$C_r(a) \rightsquigarrow (1, a_1, a_2, |a|^2 - r^2), \quad C_t(b) \rightsquigarrow (1, b_1, b_2, |b|^2 - t^2),$$

da onde temos que

$$(C_a(r), C_b(t)) = \left| \frac{2 \langle a, b \rangle - (|a|^2 - r^2) - (|b|^2 - t^2)}{2rt} \right| \quad (5.5)$$

$$= \frac{|r^2 + t^2 - |b - a|^2|}{2rt}. \quad (5.6)$$

Há dois casos a serem considerados;

(a) $C_r(a) \cap C_t(b) \neq \emptyset$.

Na figura ??, sejam θ o ângulo formado pelas curvas no ponto $P = C_a(r) \cap C_t(b)$ e α e β os ângulos complementares à θ ($\alpha = \beta$); por isto

$$\alpha + \beta + 2\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha + \beta + \theta) = -\cos(\theta)$$

Desta forma, aplicando a lei dos cossenos ao $\triangle ABP$ temos

$$|\cos(\theta)| = |\cos(\alpha + \beta + \theta)| = \left| \frac{|r^2 + t^2 - |b - a|^2|}{2rt} \right|. \quad (5.7)$$

Consequentemente, $(\Sigma, \Sigma') = |\cos(\theta)|$.

(b) Se Σ, Σ' são circunferências centradas na origem, então $a = b = 0$. Suponhamos que $C_r(0) \cap C_t(0) = \emptyset$, então

$$(C_r(a), C_t(0)) = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{t} + \frac{t}{r} \right) = \frac{e^d + e^{-d}}{2} = \cosh(d), \quad (5.8)$$

onde $d = \ln(r/t)$ é a distância entre as geodésicas $C_r(0)$ e $C_t(0)$. Mais tarde veremos que, aplicando uma isometria, duas circunferências que não se intersectam podem ser colocadas de forma concêntrica.

2. $\Sigma = C_r(a)$ e $\Sigma' = L_t(b)$.

As 4-uplas correspondentes são

$$C_r(a) \rightsquigarrow (1, a_1, a_2, |a|^2 - r^2), \quad L_t(b) \rightsquigarrow (0, b_1, b_2, 2t),$$

da onde

$$(C_r(a), L_t(b)) = \frac{|\langle a, b \rangle - t|}{r |b|}.$$

Como a distância do ponto a à $L_t(b)$ é dada por $d = \frac{|\langle a, b \rangle - t|}{|b|}$, segue que

$$(C_r(a), L_t(b)) = \frac{d(a, L)}{r}.$$

(a) $C_r(a) \cap L_t(b) \neq \emptyset$. Na figura ??, se o ângulo formado na interseção é θ , temos que $\cos(\theta) = \frac{d}{r}$. Consequentemente, $(C_r(a), L_t(b)) = |\cos(\theta)|$.

(b) $C_r(a) \cap L_t(b) = \emptyset$. Neste caso, $d(a, L) > r$ e, por isto, $(C_r(a), L_t(b)) > 1$.

3. $\Sigma = L_t(a)$ e $\Sigma' = L_s(b)$.

As 4-uplas correspondentes são

$$L_t(a) \rightsquigarrow (0, a_1, a_2, 2t), \quad L_s(b) \rightsquigarrow (0, b_1, b_2, 2s).$$

Portanto,

$$(L_t(a), L_s(b)) = \frac{|\langle a, b \rangle|}{|a| \cdot |b|}.$$

(a) $L_t(a) \cap L_s(b) \neq \emptyset$. Sendo θ o ângulo formado no ponto de interseção das retas, temos

$$(L_t(a), L_s(b)) = |\cos(\theta)|. \tag{5.9}$$

(b) $L_t(a) \cap L_s(b) = \emptyset$. Neste caso, as retas são paralelas, então $(L_t(a), L_s(b)) = 1$.

Nos exemplos mostrados acima, chamamos a atenção para o fato de que as curvas não precisam serem geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Exercício 5.4. .

1. Mostre que o produto angular entre duas geodésicas é maior do que 1 se, e somente se, elas são disjuntas.
2. Utilizando a expressão 5.4, prove que o produto angular é invariante por reflexões em \mathbb{H}^2 .

5.3 Isometrias de \mathbb{H}^2

Nesta seção, vamos descrever as isometrias de \mathbb{H}^2 . Para isto, utilizaremos o fato que as reflexões sobre as geodésicas de \mathbb{H}^2 pertencem a $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Visando descrever o grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$, vamos estudar as isometrias obtidas a partir da composição de reflexões. Para isto, vamos utilizar a estrutura complexa do \mathbb{R}^2 . Para efeitos de notação, sejam

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\} \\ \widehat{\mathbb{C}} &= \mathbb{C} \cup \{\infty\}\end{aligned}$$

As reflexões sobre retas ou sobre os círculos definem as seguintes funções de uma variável complexa: considere a, b e $c \in \mathbb{R}$,

$$r_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad r_l(z) = -\bar{z} + 2a \quad (5.1)$$

$$r_{b,c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad r_{b,c}(z) = \frac{b}{\bar{z} - c} + c \quad (5.2)$$

Compondo estas isometrias obtemos as seguintes funções complexas;

$$(i) \quad r_{a_2} \circ r_{a_1}(z) = z + 2(a_2 - a_1), \quad (5.3)$$

$$(ii) \quad r_a \circ r_{b,c}(z) = -\frac{c}{z - b} - b + 2a, \quad (5.4)$$

$$(iii) \quad r_{b,c} \circ r_a(z) = \frac{c}{-z + (2a - b)} + b, \quad (5.5)$$

$$(iv) \quad r_{b_2,c_2} \circ r_{b_1,c_1}(z) = \frac{c_2 z - c_2 b_1}{(c_1 - c_2)z + c_1 - b_1(b_1 - c_2)} + b_2. \quad (5.6)$$

Ao compormos um número par de funções complexas, dentre as descritas acima, obtemos o conjunto

$$Isom^0(\mathbb{H}^2) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Ao excluirmos as funções constantes, torna-se um grupo com a operação de composição.

Proposição 5.5. *Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in Isom^0(\mathbb{H}^2)$. Assim, $f(z)$ é constante se, e somente se, $ad - bc = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $k \neq 0 \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que $f(z) = k$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{cases} a = kc, \\ b = kd. \end{cases} \Rightarrow ad - bc = 0.$$

(\Leftarrow) Suponha que $ad - bc = 0$.

1. Se $a = 0$, então $b = 0$ ou $c = 0$. Se $b = 0$, temos que $f(z) = 0$; se $c = 0$, temos que $f(z) = b/d$ é constante.
2. Se $d = 0$, então $b = 0$ ou $c = 0$. Se $b = 0$, temos que $f(z) = a/c$; se $c = 0$, temos que $f(z)$ não está definida.
3. Se $a \neq 0$ e $d \neq 0$, então $d = \frac{bc}{a}$. Neste caso, temos que $f(z) = 1/c$ é constante.

□

Se $f(z)$ não é constante, então ela é invertível e

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Portanto, a condição $ad - bc \neq 0$ é necessária e suficiente para que $f(z)$ seja invertível. Desta forma, o grupo de isometrias reduz-se para é

$$Isom^0(\mathbb{H}^2) = \{f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0\}. \quad (5.7)$$

As reflexões 5.1 e 5.2 geram um grupo de funções que preservam ou revertem a orientação. Vamos trabalhar exclusivamente com o grupo das isometrias que preservam a orientação, no caso as funções holomorfas pertencentes ao grupo G definido em 5.7. A natureza de G nos leva a considerarmos a ação das matrizes invertíveis $Gl_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H}^2 , definida assim:

$$\Phi : Gl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \quad (5.8)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.9)$$

A ação define um homomorfismo $\Phi : Gl_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$, $\Phi(g)(z) = g.z$. É imediato verificar que $\Phi(g_1) = \Phi(g_0)$ se, e somente se, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que $g_1 = \lambda g_0$. Isto é, a ação da matriz g é igual a da matriz $\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}}g$, com a vantagem que $\det(\tilde{g}) = \pm 1$. Portanto, a ação de Φ pode ser restringida a ação do grupo das matrizes com determinante igual a 1.

Definição 5.5. O grupo linear especial de matrizes 2×2 é

$$SL_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}. \quad (5.10)$$

Concluimos que Φ induz o homomorfismo sobrejetivo

$$\Phi : Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow G \quad (5.11)$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.12)$$

O núcleo de Φ é

$$Nuc(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definição 5.6. .

1. $PSl_2(\mathbb{R}) = Sl_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.
2. O grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 que preservam a orientação é

$$Isom(\mathbb{H}^2) = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Consequentemente,

$$Isom(\mathbb{H}^2) \simeq PSl_2(\mathbb{R}). \quad (5.13)$$

Teorema 5.2. Toda transformação $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$ é determinada pela imagem de 3 pontos.

Demonstração. Suponha que $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$ é dada por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Sejam

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2) \quad \text{e} \quad w_3 = f(z_3).$$

Desta forma, para qualquer $k = 1, 2, 3$,

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)}.$$

Segue que,

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (5.14)$$

Portanto, os coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de f são todos determinados pelas condições $w_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, 3$. □

Corolário 5.3. *A ação de $Isom(\mathbb{H}^2)$ sobre \mathbb{H}^2 é transitiva.*

Demonstração. Segue imediatamente da demonstração do teorema 5.2. □

Definição 5.7. Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 pontos em $\widehat{\mathbb{C}}$. A razão de Moebius é

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}$$

Quando $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$, decorre da demonstração de 5.2 que

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Corolário 5.4. *O subgrupo de isotropia de um elemento $p \in \mathbb{H}^2$, definido pela ação de $Isom(\mathbb{H}^2)$, é isomorfo a SO_2 .*

Demonstração. Seja $p = (0, 1)$, o grupo de isotropia de $(0, 1)$ é formado pelas transformações $T \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tais que $T(0, 1) = (0, 1)$. A representação complexa de $(0, 1)$ é i ; por isto,

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i \quad \Leftrightarrow \quad a = d, \quad e \quad c = -b.$$

Ao juntarmos esta informação com a relação $ad - bc = 1$, segue que $a^2 + b^2 = 1$. Como a transformação preserva a orientação, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos(\theta)$ e $b = -\sin(\theta)$. Portanto, $G_{(0,1)} = SO_2$. Decorre da transitividade da ação de $Isom(\mathbb{H}^2)$ que para qualquer ponto $p \in \mathbb{H}^2$ $G_p \simeq SO_2$. □

Algumas análises geométricas tornam-se mais simples se observarmos a expressão 5.15 abaixo, obtida para a transformação $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, quando $c \neq 0$;

$$g(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}, \quad (5.15)$$

1. O círculo isométrico de g é o círculo

$$\{z \in \mathbb{H}^2; |cz + d| = |ad - bc|^{1/2}\}.$$

Desta maneira, se z e w pertencem ao círculo isométrico, segue da expressão 5.15 que

$$|g(z) - g(w)| = |z - w|,$$

ou seja, a distância *euclidiana* de z à w é preservada por g .

2. Também segue de 5.15 que

$$\left|g(z) - \frac{a}{c}\right| = \frac{|ad - bc|}{|c|} \cdot \frac{1}{|cz + d|}.$$

Portanto, a ação de g sobre o círculo $C = \{z \in \mathbb{H}^2; |cz + d| = \frac{|ad - bc|^{1/2}}{c^{1/2}}\}$ leva-o sobre o círculo $g(C) = \{z \in \mathbb{H}^2; |g(z) - \frac{a}{c}| = \frac{|ad - bc|^{1/2}}{c^{1/2}}\}$. Um círculo C ortogonal ao eixo-x divide \mathbb{H}^2 em duas componentes conexas, uma limitada por C e o eixo-x, denominada de componente interior, e a outra ilimitada, denominada de componente exterior. Desta forma, a região interior limitada por C e pelo eixo-x é levada sobre a região exterior limitada por $g(C)$ e a região exterior limitada por C é levada na região interior limitada por $g(C)$ e o eixo-x, conforme ilustra o exemplo a seguir;

Exemplo 5.3. . Considere a transformação $g(z) = \frac{z+1}{z+2}$. Neste caso, o círculo isométrico de g é $|z + 2| = 1$, $C = \{z \in \mathbb{H}^2; |z + 2| = 1\}$ e $g(C) = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 1| = 1\}$, como mostra a figura ??

Exercício 5.5. .

1. Determine a transformação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(i) = 0$, $f(0) = -1$ e $f(\infty) = 1$.
2. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação dada pela expressão

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Mostre que $f(\mathbb{R}_+^2) = \mathbb{R}_+^2$ se, e somente se, a, b, c e d são números reais.

3. No exercício anterior, descreva o conjunto $f(i\mathbb{R})$, onde $i\mathbb{R}$ é o eixo-y.

4. Mostre que $\Phi : Gl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ definido por

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

é uma ação.

5. Conclua, do problema anterior, que Φ induz um homomorfismo sobrejetor de $Gl_2(\mathbb{R})$ sobre $Isom(\mathbb{H}^2)$ e mostre que $Nuc(\Phi) \simeq \mathbb{Z}_2$.

6. Sejam $\gamma_1 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}_+\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha \cdot \cos(\theta)| = \alpha\}$ geodésicas que interceptam-se, onde α é o raio de γ_2 e θ é o ângulo formado na interseção. Se r_1 e r_2 são as reflexões sobre γ_1 e γ_2 , respectivamente, mostre que

$$r_2 r_1(z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\alpha \cdot \text{sen}^2(\theta) \\ 1/\alpha & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

7. Mostre que qualquer isometria $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$ pode ser escrita como a composição de duas reflexões.

Determine a composição $r_2 r_1$ quando $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{i\}$.

8. Considere a transformação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (5.16)$$

Mostre que, $f(\mathbb{R}_+^2) = D^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. Em particular, $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = S^1$, $f(0) = -1$, $f(i) = 0$ e $f(\infty) = 1$.

9. Prove que $\mathbb{R}_+^2 \simeq PSl_2(\mathbb{R})/SO_2$.

10. Sejam $\{z_i \in \widehat{\mathbb{C}} \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ e $\{w_i \in \widehat{\mathbb{C}} \mid i = 1, 2, 3, 4\}$. Suponha que $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Mostre que existe $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ tal que $f(z_i) = w_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

11. Considere os círculos $C_\alpha = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha| = r_\alpha\}$ e $C_\beta = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \beta| = r_\beta\}$. Mostre que a transformação

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} & -\sqrt{r_\alpha r_\beta} \left(1 + \frac{\alpha\beta}{r_\alpha r_\beta}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} \end{pmatrix}.$$

é uma isometria que leva a região interior limitada por C_α e o eixo-x sobre a região exterior limitada por C_β , e leva a região exterior de C_α sobre a região interior limitada por C_β e o eixo-x.

12. Prove que a posição relativa entre duas geodésicas γ_1, γ_2 em \mathbb{H}^2 , a menos de isometria, enquadram-se numa das seguintes situações:
- (a) $\gamma_1 = \{y \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{x_0 + iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ (paralelas)
 - (b) $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R_1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R_2\}$ (ultra-paralelas)
 - (c) $\gamma_1 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - R\cos(\theta)| = R\}$ (concorrentes)
13. Conclua do exercício anterior que o produto angular de duas geodésicas é, de acordo com a posição relativa entre as curvas, $\cosh(d(\gamma_1, \gamma_2))$ se forem ultra-paralelas, 1 se forem paralelas, e $\cos(\theta)$ quando forem concorrentes.

5.4 Modelos para o Espaço Hiperbólico

5.4.1 \mathbb{H}_P^2 : O Modelo de Poincaré

Considere a transformação $\mathcal{P} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\mathcal{P}(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Nas coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\mathcal{P}(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}, -\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2} \right) = (u, v). \quad (5.1)$$

A inversa de \mathcal{P} é $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(w) = i\frac{1+w}{1-w}$, quando escrita nas coordenadas (u, v) , é a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi(u, v) = \left(-\frac{2v}{(1-u)^2 + v^2}, \frac{1 - (u^2 + v^2)}{(1-u)^2 + v^2} \right). \quad (5.2)$$

Pelo exercício 5.5.5 temos $\phi(D^2) = \mathbb{R}_+^2$. Por isto, podemos induzir sobre D^2 uma métrica hiperbólica da seguinte maneira: sejam $(x, y) = \phi(u, v)$, $w \in T_{(u,v)}D^2$ e $d\phi_{(u,v)}.w \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$;

$$g_{\phi(u,v)}(d\phi_{(u,v)}.w, d\phi_{(u,v)}.w) = \left(\frac{(1-u)^2 + v^2}{1 - (u^2 + v^2)} \right)^2 w^t \cdot (d\phi)^t \cdot d\phi.w,$$

onde

$$d\phi = \frac{1}{[(1-u)^2 + v^2]^2} \begin{pmatrix} -4v(1-u) & 2[v^2 - (1-u)^2] \\ 2[v^2 - (1-u)^2] & 4v(1-u) \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$(d\phi)^t d\phi = \frac{4}{[(1-u)^2 + v^2]^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a métrica torna-se

$$g_{\phi(u,v)}(d\phi_{(u,v)}.w, d\phi_{(u,v)}.w) = \frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} \langle w, w \rangle. \quad (5.3)$$

Definição 5.8. O plano hiperbólico de Poincaré é

$$\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2 = (D^2, g), \quad \text{onde} \quad g_{(u,v)}(\cdot, \cdot) = \frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

O comprimento de uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é dado por

$$L(\gamma) = 2 \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{1 - [x^2 + y^2]} dt.$$

Ao tomarmos o fecho de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ obtemos o espaço $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathcal{P}}^2 = \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2 \cup S^\infty$, onde S^∞ é a circunferência $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (linha no horizonte).

Exercício 5.6. .

1. Calcule os seguintes comprimentos utilizando a métrica hiperbólica de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$;
 - (a) da reta $\gamma : [0, a] \rightarrow D^2$, onde $a < 1$, definida por $\gamma(t) = (0, t)$.
 - (b) do círculo $S_a = \{(x, y) \in D^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$, onde $a^2 + b^2 < 1$ e $R^2 < 1 - (a^2 + b^2)$.
2. Seja $d = d(O, z)$ a distância em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ da origem ao ponto $z \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$. Mostre que $|z| = \tanh(\frac{d}{2})$.
3. Descreva as geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ descrevendo aquelas que são imagens de geodésicas verticais em \mathbb{H}^2 e as que são imagens de círculos centrados sobre o eixo-x.
4. Mostre que as isometrias do Plano Hiperbólico de Poincaré formam o conjunto

$$\left\{ \frac{[(a+d) + i(b-c)]z + [(a-d) - i(b+c)]}{[(a-d) + i(b+c)]z + [(a+d) - i(b-c)]} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

5. Mostre que a isometria $f(z) = \frac{\cos(\theta)z - \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$ em \mathbb{H}^2 corresponde a isometria $R_{2\theta}(z) = e^{i2\theta} \cdot z$ em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ (f é uma rotação).
6. Seja γ uma geodésica de \mathbb{H}^2 passando por $(0, 1)$. Mostre que $\mathcal{P}(\gamma)$ é uma reta passando pela origem de D^2 . (isto explica porque o grupo de isotropia da origem é SO_2)
7. Mostre que $D^2 \simeq PSl_2(\mathbb{R})/SO_2$.

O modelo de Poincaré apresenta a vantagem de ser uma versão limitada de \mathbb{H}^2 , pois ao tomarmos o fecho de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ obtemos a bola fechada de raio 1. Isto torna mais simples a visualização dos fenômenos globais. Por exemplo, todas as geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ são semi-círculos ortogonais à S^∞ , o que nos permite classificá-las assim: *geodésicas concorrentes* são aquelas que interceptam-se em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, *geodésicas paralelas* são as que interceptam-se sobre S^∞ e *geodésicas ultra-paralelas* são as geodésicas que nunca interceptam-se.

Decorre da expressão 2.11 que a área da região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é

$$A(\Omega) = \int \int_{\Omega} \frac{4}{[1 - (u^2 + v^2)]^2} dudv. \quad (5.4)$$

5.4.2 $\mathbb{H}_{\mathcal{M}}^2$: Modelo de Minkowski

A Teoria da Relatividade Restrita motivou a definição dos espaços de Minkowski (\mathbb{R}^n, Q) , onde $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática equivalente à forma $L(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Consideramos o \mathbb{R}^3 munido com a forma bilinear $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow L(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

Observamos que L não é um produto interno. A forma quadrática associada à L é $Q_L(u) = x_1^2 + y_1^2 - z_1^2$, e a matriz de Q_L na base canônica é

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Definição 5.9. Seja $\mathbb{M}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ e $\mathbb{M}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{M}^2 \mid z > 0\}$.

\mathbb{M}^2 é um hiperbolóide de 2 folhas em \mathbb{R}^3 e \mathbb{M}_+^2 é uma componente conexa de \mathbb{M}^2 . Para verificarmos que \mathbb{M}^2 é uma superfície, consideramos a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, e observamos que $\mathbb{M}^2 = f^{-1}(-1)$. Como -1 é um valor regular de f , segue que $\mathbb{M}^2 = f^{-1}(-1)$ e \mathbb{M}_+^2 são superfícies. Fixando $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, uma parametrização para \mathbb{M}_+^2 , obtida através de projeção estereográfica, é dada por $\zeta : B_1 \rightarrow \mathbb{M}_+^2$,

$$\zeta(x, y) = \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right). \quad (5.6)$$

A aplicação ζ é bijetora e a derivada $d\zeta_{(x,y)} : T_{B_1} \rightarrow T_{\zeta(x,y)}\mathbb{M}_+^2$,

$$d\zeta_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 \frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} \\ \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} & 2 \frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix},$$

tem posto igual a 2 para todo $(x, y) \in B_1$; portanto, pelo teorema da função inversa, ζ é um difeomorfismo. Desta forma, para cada $p = (x, y) \in \mathbb{M}_+^2$, podemos induzir sobre o plano tangente $T_p\mathbb{M}_+^2$, a forma bilinear simétrica

$$g_p^{\mathbb{M}^2}(u, v) = L(d\zeta_{(x,y)} \cdot u, d\zeta_{(x,y)} \cdot v) = u^t(d\zeta^t \cdot L \cdot d\zeta) \cdot v. \quad (5.7)$$

Como

$$d\zeta^t \cdot L \cdot d\zeta = \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

segue que \mathbb{M}_+^2 é isométrico à $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$.

Definição 5.10. $(\mathbb{M}_+^2, g^{\mathbb{M}^2})$ é o modelo de Minkowski para o espaço hiperbólico.

O modelo de Minkowski é útil porque o estudo do plano hiperbólico pode ser realizado de forma análoga ao estudo da geometria sobre a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$. Deixaremos a exploração desta similaridade para os exercícios. Porém, antes vejamos o seguinte;

Definição 5.11. Seja $O(2, 1) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot L \cdot A = L\}$ o grupo das matrizes que preservam L e $SO(2, 1)$ o subgrupo de $O(2, 1)$ que preserva a orientação.

Decorre das estruturas estudadas que $Isom(\mathbb{H}^2)$ é isomorfo ao grupo $SO(2, 1)$.

5.4.3 $\mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2$: Modelo de Klein

A expressão 5.16, obtida na seção 1 para a reflexão sobre um círculo $S_R(P) \subset \mathbb{R}^2$, estende-se naturalmente para uma reflexão sobre a esfera $S_R(P) \subset \mathbb{R}^3$ ao acrescentarmos a terceira componente. Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, desta forma, a reflexão sobre a esfera $S_{\sqrt{2}}(e_3)$ é

$$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(x) = e_3 + 2 \frac{(x - e_3)}{|x - e_3|^2}. \quad (5.8)$$

Decorre da expressão acima que

$$|r(x)|^2 = 1 + 4 \frac{x_3}{|x - e_3|^2}.$$

Observe que $r(\mathbb{R}_-^3) = B_1^3$, onde temos $\mathbb{R}_-^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 < 0\}$ e $B_1^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$. A aplicação r , quando restrita ao plano $x_3 = 0$, é exatamente uma projeção estereográfica π_e , pois

$$\langle x, e_3 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) = \pi_e(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \frac{2x_2}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

Ao considerarmos a decomposição em hemisférios $\mathbb{S}^2 = H^+ \cup H^-$, onde $H_{\pm} = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}_{\pm}^3$, temos $r(D^2) = H^-$. Para preservarmos a orientação, consideramos a reflexão $r_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre o plano $x_3 = 0$ e definimos a aplicação $k = r_3 \circ \pi_e : D^2 \rightarrow H^+$. Agora, seja $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$, da qual decorre que $\pi(H^+) = D^2$; seja $\pi_0 = \pi|_{H^+}$.

Definição 5.12. A aplicação de Klein é $\mathcal{K} : D^2 \rightarrow D^2$, $\mathcal{K} = \pi_0 \circ k$;

$$\mathcal{K}(x) = 2 \frac{x}{1 + |x|^2}.$$

Proposição 5.6. A aplicação de Klein leva arcos de círculos ortogonais à S^1 e contidos em D^2 sobre segmentos de retas contidos em D^2 .

Demonstração. Seja C um círculo com centro em (a, b) e raio R e que seja ortogonal à S^1 ; por isto, os pontos $(x, y) \in C$ satisfazem a equação cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 1 = 0 \quad (5.9)$$

A transformação inversa da aplicação de Klein $\mathcal{K}^{-1} : D^2 \rightarrow D^2$ é dada pela expressão

$$\mathcal{K}^{-1}(u, v) = \frac{1}{[1 + \sqrt{1 - u^2 - v^2}]}(u, v) \quad (5.10)$$

Devido a equação 5.9, o conjunto dos pontos $L = \{(u, v) \in D^2 \mid (u, v) \in \mathcal{K}(C)\}$ satisfazem a equação

$$\frac{u^2 + v^2}{[1 + \sqrt{1 - u^2 - v^2}]^2} - \frac{2au + 2bv}{[1 + \sqrt{1 - u^2 - v^2}]} + 1 = 0;$$

a qual, após expandirmos, implica em

$$au + bv = 1, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{K}(C).$$

□

Agora, consideramos a estrutura hiperbólica $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ sobre o disco D^2 no domínio de $\mathcal{K} : D^2 \rightarrow D^2$ e induzimos, pelo difeomorfismo \mathcal{K} , uma métrica hiperbólica $g_{\mathcal{K}}$ sobre o disco D^2 na imagem;

Definição 5.13. O modelo de Klein para o espaço hiperbólico é $\mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2 = (\mathcal{K}(\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2), g_{\mathcal{K}})$.

O modelo de Klein é particularmente útil para analisar questões relativas à convedência ou de incidência, tendo em vista que as geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ são transformadas em retas por \mathcal{K} ; as extremidades são fixas por \mathcal{K} .

Exercício 5.7. .

1. Modelo de Minkowski.

Projeto: Explore as similaridades com a geometria esférica seguindo os seguinte itens;

- Obtenha a parametrização 5.6 de \mathbb{M}_+^2 projetando \mathbb{M}_+^2 estereograficamente (4.3) sobre o plano $z = 0$ com foco em $(0, 0, -1)$.
- Mostre que $Isom^+(\mathbb{H}^2) \stackrel{iso}{\simeq} SO(2, 1)$.
- Mostre que as geodésicas de \mathbb{M}_+^2 são planares e conclua que elas são obtidas tomando a interseção de \mathbb{M}_+^2 com um plano passando pela origem. (dica: observe que $(T_p\mathbb{M}_+^2)^\perp$ é gerado por $n = (x, y, z)$).
- Considere o par (\mathbb{C}^3, Q) , onde $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$. Verifique que $(\mathbb{R}^3, Q) = \mathbb{E}^3$ e $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (i\mathbb{R}), Q) = (\mathbb{R}^3, L)$.
- Explique a similaridade entre as relações métrica ?? e ?? parametrizando \mathbb{M}_+^2 por

$$\eta : (0, 2\pi) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (5.11)$$

$$\eta(\theta, \psi) = (\cos(\theta)\sinh(\psi), \sin(\theta)\sinh(\psi), \cosh(\psi)), \quad (5.12)$$

e levando em conta que $\cosh(x) = \cos(ix)$ e $\sinh(x) = \sin(ix)$.

2. Modelo de Klein.

- Obtenha a expressão 5.10 para a transformação inversa da aplicação de Klein.
- Calcule $g_{\mathcal{K}}$.
- Determine o comprimento de uma curva em $\mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2$.
- Determine a área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2$.
- Determine a equação da reta ligando os pontos na interseção $S^1 \cap C$, onde C é um círculo ortogonal à S^1 .

5.5 Relações Métricas Hiperbólicas

Primeiramente, vamos obter a expressão para a distância hiperbólica, a seguir estudaremos as relações métricas em triângulos hiperbólicos. É importante observarmos que para efeito de cálculos o modelo \mathbb{H}^2 será o mais utilizado, no entanto, para descrever a situação recorreremos com frequência ao modelo $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$.

5.5.1 Distância Hiperbólica

Em \mathbb{H}^2 , dois pontos são ligados por uma única curva geodésica. Assim, vamos obter a expressão para a distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Primeiramente, vamos apresentar um lema fundamental para simplificarmos os cálculos e para representarmos as fórmulas.

Lema 5.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w , respectivamente. Considerando que $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria e $I(z)$ é a parte imaginária de z , então,*

$$\frac{|g(z) - g(w)|}{[I(g(z)).I(g(w))]^{1/2}} = \frac{|z - w|}{(I(z).I(w))^{1/2}}. \quad (5.1)$$

Demonstração. Podemos verificar diretamente que,

$$g(z) - g(w) = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}$$

Também temos que,

$$I(g(z)) = \frac{I(z)}{|cz + d|^2},$$

da onde observamos que

$$\frac{|g(z) - g(w)|}{[I(g(z)).I(g(w))]^{1/2}} = \frac{|z - w|}{[I(z).I(w)]^{1/2}}$$

□

Proposição 5.7. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w , respectivamente. A distância entre os pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$ é*

$$d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right). \quad (5.2)$$

Demonstração. Quando $p = (0, a) = ia$ e $q = (0, b) = ib$, sendo $a < b$, segue da equação 5.4 que $d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = \ln(b/a)$. Assim, $d = d(p, q)$ implica em $e^d = b/a$ e $e^{-d} = a/b$; consequentemente,

$$\cosh(d) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|z - w|^2}{I(z).I(w)}. \quad (5.3)$$

Agora, sejam p e q dois pontos quaisquer em \mathbb{H}^2 representados por $z, w \in \mathbb{C}$, respectivamente, e $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ de tal forma que $g(z)$ e $g(w)$ pertencem a uma reta vertical. Ao aplicarmos o lema 5.1 à fórmula 5.3, concluímos que

$$\cosh(d(p, q)) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|z - w|^2}{I(z) \cdot I(w)}. \quad (5.4)$$

Segue da identidade $\cosh(d) = 1 + 2\sinh^2(d/2)$ que

$$\sinh\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{|z - w|}{[I(z) \cdot I(w)]^{1/2}} \quad (5.5)$$

e de $\cosh(d) = 2\cosh^2(d/2) - 1$ que

$$\cosh^2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(I(z) \cdot I(w))^{1/2}}, \quad |z - \bar{w}| = |\bar{z} - w|.$$

Portanto,

$$\tanh\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

Decorre de $\tanh(d/2) = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$ que

$$e^d = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|},$$

ou seja,

$$d = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

□

Definição 5.14. O círculo hiperbólico de centro em p e raio R é o conjunto

$$S_R(p) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(p, z) = R\}. \quad (5.6)$$

De acordo com a demonstração anterior,

$$\tanh\left(\frac{d(z, w)}{2}\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}. \quad (5.7)$$

Ao assumirmos que $d(z, w) = R$ é constante, temos

$$|z - w| = \tanh(R/2) \cdot |z - \bar{w}|. \quad (5.8)$$

Sejam $c = \tanh(R/2)$ ($0 \leq c < 1$), $z = a + ib$ e $w = x + iy$, ao substituirmos na equação 5.8 segue que

$$(1 - c^2)(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2(y + b)^2 = 0.$$

Após expandirmos e completarmos os quadrados a expressão acima torna-se

$$(x - a)^2 + \left(y - b \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right)^2 = \left(\frac{2bc}{1 - c^2} \right)^2. \quad (5.9)$$

Desta maneira, concluímos que o círculo hiperbólico com centro em $p = (a, b)$ e raio R é um círculo euclideano com centro em $\tilde{p} = (a, b')$ e raio $\rho = \frac{2bc}{1 - c^2}$, onde

$$b' = b \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \in \mathbb{H}^2. \quad (5.10)$$

As fórmulas acima, quando escritas em função de R , ficam assim;

$$\tilde{p} = (a, b \cdot \cosh(R)), \quad \rho(R) = b \cdot \sinh(R); \quad (5.11)$$

da onde é imediato verificar que $b' = b \cdot \cosh(R) \geq b$, $\lim_{R \rightarrow 0} \rho(R) = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} \rho(R) = \infty$.

Ao parametrizarmos o círculo hiperbólico $S_R(p)$ por

$$\gamma(\theta) = (\rho \cos(\theta) + a, \rho \sin(\theta) + b') \Rightarrow |\gamma'(\theta)|_{\mathbb{H}^2} = \frac{\rho}{b' + \rho \sin(\theta)}, \quad (5.12)$$

e aplicarmos a fórmula 5.4, obtemos que o comprimento do círculo hiperbólico de raio R é

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{b' + \rho \sin(\theta)} = 2\pi \cdot \sinh(R). \quad (5.13)$$

Exercício 5.8. Resolva os seguintes itens;

1. Prove a fórmula 5.13.
2. Se $R \simeq 0$, conclua que o comprimento do círculo é $L(\gamma) \simeq 2\pi R$.
3. Mostre que $\rho = b \cdot \sinh(R)$. Suponha b fixo e compare o comprimento hiperbólico com o comprimento euclideano do círculo. Varie b e chegue a uma conclusão a respeito dos comprimentos quando b é muito grande ou muito pequeno.
4. Prove que em \mathbb{H}_p^2 , dados dois pontos quaisquer z e w , a quantidade

$$J(z, w) = 2 \frac{|z - w|}{(1 - |z|^2)^{1/2} \cdot (1 - |w|^2)^{1/2}} \quad (5.14)$$

é invariante por isometrias. Conclua que

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + J(z, w), \quad \sinh\left(\frac{d(z, w)}{2}\right) = \frac{1}{2}J(z, w). \quad (5.15)$$

(dica: aplique o lema 5.1)

5. Calcule a área de um círculo hiperbólico de raio R .

5.5.2 Convexidade e Ângulos em \mathbb{H}^2

Definição 5.15. Uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é convexa se para quaisquer pontos $p, q \in \Omega$ a geodésica ligando p à q esta contida em Ω .

Uma geodésica $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ divide \mathbb{H}^2 em duas regiões denominadas de semi-planos. Decorre do modelo de Klein $\mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2$ que ambos os semi-planos são convexos. Sejam α e β geodésicas distintas e concorrentes em \mathbb{H}^2 , digamos que $\alpha \cap \beta = \{p\}$, e $\Sigma_\alpha^1, \Sigma_\alpha^2$ os semi-planos determinados por α e $\Sigma_\beta^1, \Sigma_\beta^2$ os determinados por β . Ao fixarmos o semi-plano Σ_α^1 , obtemos as regiões convexas $\Sigma_{\alpha\beta}^{11} = \Sigma_\alpha^1 \cap \Sigma_\beta^1$ e $\Sigma_{\alpha\beta}^{12} = \Sigma_\alpha^1 \cap \Sigma_\beta^2$.

O ângulo formado por α e β é a região $\Sigma_{\alpha\beta}^{1i}$ que, no vértice $p = \alpha(0) = \beta(0)$, mede

$$\theta = \arccos\left(\frac{g_p(\alpha'(0), \beta'(0))}{|\alpha'(0)|_h \cdot |\beta'(0)|_h}\right) = \arccos\left(\frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|}\right). \quad (5.16)$$

Segue que o ângulo hiperbólicos é igual ao ângulo euclideano.

5.5.3 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos

Ao prolongarmos indefinidamente a única geodésica que liga os pontos A e B obtemos um raio geodésico. Em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, por exemplo, um raio geodésico é um arco de círculo ortogonal à S^∞ . Dizemos que 3 pontos são não colineares em \mathbb{H}^2 se os 3 pontos não pertencem a um mesmo raio geodésico.

Sejam A, B e C três pontos não-colineares no plano hiperbólico e γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} as geodésicas determinadas pelos pares $(A, B), (B, C)$ e (A, C) respectivamente. Considerando que os pontos A, B e C são os únicos pontos de interseção possíveis para as geodésicas, segue que a união $l = \gamma_{AB} \cup \gamma_{BC} \cup \gamma_{CA}$ forma uma curva fechada homeomorfa à S^1 . Pelo teorema da Curva de Jordan-Schönflies ([?]), l borda uma região homeomorfa a $B_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ que denominamos de região limitada por γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} .

Definição 5.16. O triângulo hiperbólico definido pelos pontos não-colineares A, B e C é a região limitada $\triangle ABC$ definida pelas geodésicas γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} . Os vértices de $\triangle ABC$ são os pontos A, B, C enquanto os lados são as geodésicas γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} .

Decorre das propriedades de convexidade que um triângulo é convexo. Os ângulos internos de $\triangle ABC$ são os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} formados pelos seus lados, nos respectivos vértices. Para efeitos de notação, a medida do lado oposto ao vértice A será denotada por a e a medida do ângulo \hat{A} será denotada por α ; análogamente, denotamos (b, \hat{B}, β) e (c, \hat{C}, γ) , onde as letras latinas minúsculas são empregadas para as medidas de lados e letras gregas minúsculas para as medidas de ângulos.

Em \mathbb{H}_p^2 , existem 4 posições para um triângulo de acordo com a posição dos seus vértices; juntamente, descreveremos as situações correspondentes em \mathbb{H}^2 (notação: $\infty = (a, \infty)$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$ fixo)

1. $A, B, C \in \mathbb{H}_p^2 \Rightarrow \triangle ABC \subset \mathbb{H}_p^2$.
2. $A \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_p^2$. Neste caso, $\alpha = 0$ e $b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
 - (a) $A = \infty$,
 - (b) $A \in \text{eixo-x}$.
3. $A, B \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_p^2$. Neste caso, $\alpha = \beta = 0$ e $a = b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
 - (a) $A = \infty$ e B esta sobre o eixo-x,
 - (b) $A, B \in \text{eixo-x}$.
4. $A, B, C \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_p^2$. Neste caso, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e $a = b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
 - (a) $A = \infty$ e $B, C \in \text{eixo-x}$,
 - (b) $A, B, C \in \text{eixo-x}$.

Por simplicidade, observamos que qualquer triângulo hiperbólico em \mathbb{H}^2 é isométrico a um triângulo com um dos lados sobre uma reta vertical e o outro sobre a circunferência S^1 . O ingrediente básico para deduzirmos as relações métricas é a expressão 5.4.

Teorema 5.3. *Teorema de Pitágoras Hiperbólico - Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo onde ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\cosh(a) = \cosh(b).\cosh(c) \quad (5.17)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos que

$$\gamma_{AB} \subset \{0\} \times i\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \gamma_{CB} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, s^2 + t^2 = 1\}.$$

Desta maneira, assumiremos que os vértice do $\triangle ABC$ são os seguintes;

$$A = i, \quad B = ir, \quad C = s + it;$$

onde $r > 1$, $t > 0$ e $s^2 + t^2 = 1$. Segue da expressão 5.4 que

$$\cosh(a) = \frac{1+r^2}{2rt}, \quad \cosh(b) = \frac{1}{t}, \quad \cosh(c) = \frac{1+r^2}{2r}, \quad (5.18)$$

e, conseqüentemente, a relação 5.17. \square

Ao aplicarmos as expressões 5.18 a identidade fundamental $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que;

$$\sinh(a) = \frac{\sqrt{(r^2+1)^2 - 4r^2t^2}}{2rt} = \frac{\sqrt{(r^2-1)^2 - 4s^2t^2}}{2rt} \quad (5.19)$$

$$\sinh(b) = \frac{s}{t}, \quad \sinh(c) = \frac{r^2-1}{2r} \quad (5.20)$$

Proposição 5.8. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\tanh(b) = \operatorname{tg}(\beta) \cdot \sinh(c), \quad \sinh(b) = \operatorname{sen}(\beta) \cdot \sinh(a) \quad (5.21)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos que o $\triangle ABC$ seja o mesmo da demonstração do teorema 5.3. Seja $(x_0, 0)$ o centro do raio geodésico (círculo) obtido ao estendermos o lado γ_{BC} . Decorre de $\operatorname{dist}(q, B) = \operatorname{dist}(q, C)$ que,

$$\sqrt{x_0^2 + r^2} = \sqrt{(s-x_0)^2 + t^2} \Rightarrow x_0 = \frac{1-r^2}{2s}.$$

De acordo com a figura ??

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{r}{|x_0|} = \frac{2sr}{r^2-1}. \quad (5.22)$$

Para mostrarmos a primeira identidade em 5.21, é suficiente observarmos que $\tanh(b) = 1/s$ e compararmos com a fórmula do $\sinh(c)$ na equação 5.20. Também temos as relações

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{2sr}{\sqrt{(r^2-1)^2 + r^2}}, \quad \operatorname{cos}(\beta) = \frac{r^2-1}{2s} \frac{1}{\sqrt{(r^2+1)^2 - 4r^2t^2}}, \quad (5.23)$$

da onde verificamos a segunda relação dentre as expressões 5.21. \square

Um triângulo hiperbólico retângulo é determinado, a menos de isometria, pelos seus ângulos internos, como mostra o próximo resultado;

Corolário 5.5. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\gamma)}{\sen(\beta)}, \quad \cosh(b) = \frac{\cos(\beta)}{\sen(\gamma)} \quad (5.24)$$

$$\cosh(a) = \cotg(\beta) \cdot \cotg(\gamma). \quad (5.25)$$

Demonstração. Seguem da demonstração da proposição 5.8 as relações:

$$\tanh(b) = tg(\beta) \cdot \sinh(c), \quad \tanh(c) = tg(\gamma) \cdot \sinh(b) \quad (5.26)$$

A segunda relação segue por analogia. Ao substituírmos as expressões

$$\sinh(b) = \frac{\tanh(c)}{tg(\gamma)}, \quad \cosh(b) = \sqrt{\frac{tg^2(\gamma) + \tanh^2(c)}{tg^2(\gamma)}}, \quad (5.27)$$

em $\tanh(b) = tg(\beta) \cdot \sinh(c)$, temos

$$\sinh^2(c) \cdot tg^2(\beta) = \frac{\tanh^2(c)}{tg^2(\gamma) + \tanh^2(c)}. \quad (5.28)$$

Ao substituírmos $\tanh^2(c) = \frac{\cosh^2(c)-1}{\cosh^2(c)}$, e efetuarmos os cálculos obtemos a relação à esquerda em 5.24; a expressão à direita segue por analogia. A expressão 5.25 é consequência imediata das relações obtidas e do teorema de Pitágoras hiperbólico 5.3. \square

Exercício 5.9. .

1. Analise a expressão 5.17 quando $a \sim 0$, $b \sim 0$ e $c \sim 0$ e obtenha o Teorema de Pitágoras Euclideano quando $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow 0$.
2. Justifique os argumentos de analogia utilizados no Corolário 5.5.

Proposição 5.9. *Lei dos Cossenos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico em \mathbb{H}_P^2 com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(a)}{\sinh(b)\sinh(c)} & \cos(\beta) &= \frac{\cosh(a)\cosh(c) - \cosh(a)}{\sinh(a)\sinh(c)} \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a)\sinh(b)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Demonstração. $\triangle ABC \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$. Vamos assumir que o vértice A esta sobre a origem e o lado γ_{AC} , com comprimento b , esta sobre o eixo- x . Desta forma, sendo $C = (x_C, 0)$, a geodésica ligando A a C é $\gamma_{AC}(t) = (t, 0)$ e o seu comprimento é

$$b = 2 \int_0^{x_C} \frac{dt}{1-t^2} = \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \Rightarrow x_C = \tanh\left(\frac{b}{2}\right)$$

Portanto,

$$z_A = 0, \quad z_B = e^{i\alpha} \cdot \tanh\left(\frac{c}{2}\right), \quad z_C = \tanh\left(\frac{b}{2}\right).$$

De acordo com o exercício 5.8.4, segue que

$$\cosh(a) = 1 + 2 \frac{|z_B|^2 + |z_C|^2 - 2|z_B||z_C|\cos(\alpha)}{(1-|z_B|^2)(1-|z_C|^2)}.$$

Ao substituírmos os valores de z_B e z_C e aplicarmos a fórmula $\sinh^2(x/2) = \frac{\cosh(x)+1}{2}$, obtemos a expressão

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha),$$

da qual decorre a expressão para $\cos(\alpha)$ em 5.29. As outras expressões seguem analogamente. □

Corolário 5.6. *Lei dos Senos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)} \tag{5.30}$$

Demonstração. Segue da proposição 5.9 que

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\sinh^2(b)\sinh^2(c) - (\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(c))^2}{\sinh^2(b)\sinh^2(c)} = \tag{5.31}$$

$$= \frac{2\cosh(a)\cosh(b)\cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 1}{\sinh^2(b)\sinh^2(c)}. \tag{5.32}$$

Ao dividirmos ambos os lados da expressão acima por $\sinh^2(a)$, o lado direito torna-se invariante por uma permutação do conjunto $\{a, b, c\}$. Da mesma maneira, obtemos a mesma expressão para $\frac{\sinh(b)}{\sin(b)}$ e para $\frac{\sinh(c)}{\sin(c)}$. □

Teorema 5.4. (Caso AAA) Se os triângulos hiperbólicos Δ_1 e Δ_2 tem ângulos internos congruentes, então eles são congruentes.

Demonstração. Aplicando uma versão modificada do lema 4.2, segue que

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma)}, & \cosh(b) &= \frac{\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\gamma)} \\ \cosh(c) &= \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto, os ângulos internos determinam os lados e o triângulo. □

Exercício 5.10. .

1. Prove a versão hiperbólica do lema 4.2.

5.5.4 Área de uma região em \mathbb{H}^2

A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é dada por

$$A(\Omega) = \int \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy. \quad (5.34)$$

Para efeitos de notação, vamos considerar a seguinte definição;

Definição 5.17. Um gomo hiperbólico em \mathbb{H}^2 é um triângulo hiperbólico com um lado sobre um arco de um círculo com centro sobre o eixo-x (base) e os outros dois lados são retas verticais. Desta maneira, um vértice é $\infty = (x, \infty)$.

Em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, um gomo hiperbólico s é um triângulo com um dos vértices em $(1, 0) \in S^{\infty}$.

Lema 5.2. Seja C a base de um gomo hiperbólico Ω e l_1 e l_2 os lados. Se o ângulo formado na interseção de l_1 com C é α e o ângulo formado na interseção de l_2 com C é β , então a área de Ω é

$$A(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta). \quad (5.35)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que l_1 encontra-se a esquerda da origem enquanto l_2 esta á direita. Sejam $p_1 = l_1 \cap C$ e $p_2 = l_2 \cap C$ os pontos de interseção. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}$. Desta forma, a ordenada de p_1 é $R\cos(\pi - \alpha)$ e a de p_2 é $R\cos(\beta)$. Consequentemente,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid R\cos(\pi - \alpha) \leq x \leq R\cos(\beta), \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}} \leq y \leq \infty\},$$

e a área de Ω vale

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_{R\cos(\pi-\alpha)}^{R\cos(\beta)} \int_{\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \\ &= \int_{R\cos(\pi-\alpha)}^{R\cos(\beta)} \frac{1}{\sqrt{R^2-(x-a)^2}} dx = \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

□

Teorema 5.5. *A área de um triângulo hiperbólico Δ , cujos ângulos internos são α , β e γ , é dada por*

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (5.36)$$

Demonstração. Sejam A , B e C os vértices de Δ e C_{AB} , C_{BC} e C_{CA} os círculos definidos pelas geodésicas que formam Δ . Agora, seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria tal que $f(C_{BC}) = l_1$, onde l_1 é uma reta vertical. Seja l_2 a reta vertical passando por $f(A)$.

Portanto, surgem dois gomos hiperbólicos:

1. Ω_1 limitado por l_1 , l_2 e C_{AB} . Os ângulos internos de Ω_1 são α_1 e $\pi - \beta$.
2. Ω_2 limitado por l_1 , l_2 e C_{AC} . Os ângulos internos de Ω_2 são α_2 e γ .

$$\begin{aligned} A(\Delta) &= A_2 - A_1 = [\pi - (\alpha_1 + \pi - \beta)] - [\pi - (\alpha_2 + \gamma)] = \\ &= \pi - [(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta + \gamma] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

□

5.6 Identidades Métricas

5.6.1 Distância de um Ponto à uma Geodésica

Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e γ uma geodésica de \mathbb{H}^2 . A distância de z_0 à γ é

$$d(z_0, \gamma) = \inf\{d(z, w) \mid w \in \gamma\}.$$

Para determinarmos uma expressão para $d(z_0, \gamma)$ será suficiente considerarmos cada um dos seguintes casos (1) $\gamma = \{iy \mid y \in \mathbb{R}_+\}$ e (2) $\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = a\}$.

1. 1º caso: $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\gamma = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Seja $w = it \in \gamma$ um ponto qualquer de γ ;

Proposição 5.10. *Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\gamma = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$. Então,*

$$d(z_0, \gamma) = d(z_0, i |z_0|).$$

Demonstração. Segue da expressão 5.4 que ($z_0 = x + iy$)

$$\cosh(d(z_0, it)) = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z_0|}{y} \cdot \cosh\left(\frac{|z_0|}{t}\right) \geq \frac{|z_0|}{y}. \quad (5.1)$$

A igualdade $\cosh(d(z_0, it)) = \frac{|z_0|}{y}$ ocorre se, e somente se, $t = |z_0|$. \square

Corolário 5.7. *A geodésica que realiza a distância $d(z_0, \gamma)$ é ortogonal à γ .*

Seja L a reta passando pela origem e z_0 , e seja θ a medida do ângulo formado por L e o eixo-y; desta maneira,

$$\cosh(d(z_0, \gamma)) = \frac{|z_0|}{y} = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \text{e} \quad \sinh(d(z_0, \gamma)) = tg(\theta). \quad (5.2)$$

Chamamos a atenção para a generalidade deste caso, uma vez que toda geodésica de \mathbb{H}^2 é a imagem de uma reta vertical por uma isometria de \mathbb{H}^2 .

2. 2º caso: $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = a\}$.

Ao aplicarmos a isometria $f(z) = 2a \frac{z-a}{z+a}$ sobre γ , segue de $f(ae^{i\theta}) = \frac{i}{2} tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ que a imagem $f(\gamma)$ é o eixo-y e $w_0 = f(z_0)$ é

$$w_0 = 2a \frac{1}{|z_0|^2 + a^2 + 2ax_0} (|z_0|^2 - a^2 + i2ay_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Considerando $w_0 = u_0 + iv_0$, pela fórmula 5.2, temos $\cosh(d(z_0, \gamma)) = \frac{|w_0|}{v_0}$, da onde

$$\cosh(d(z_0, \gamma)) = \frac{\sqrt{(|z_0|^2 - a^2)^2 + 4a^2y_0^2}}{2ay_0}, \quad \sinh(d(z_0, \gamma)) = \frac{||z_0|^2 - a^2|}{2ay_0} \quad (5.3)$$

Exercício 5.11. .

1. Considere a isometria $f(z) = 2a \frac{z-a}{z+a}$;

(a) Seja $\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = a\}$. Mostre que $f(\gamma)$ é o eixo-y.

- (b) Seja L uma reta passando pela origem e formando um ângulo θ com o eixo-y. Mostre que $f(L)$ é o círculo

$$|z + ia \cdot \text{tg}(\theta)| = \frac{a}{\cos(\theta)}.$$

2. Mostre que o conjunto dos pontos que distam d da geodésica $\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = r\}$ é uma reta que forma um ângulo fixo θ com o eixo-y.
3. Calcule a distância entre o ponto $z_0 = 1+i$ e a geodésica $\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z-2| = 2\}$.
4. Mostre que se $L \in \mathbb{H}_P^2$ é a geodésica $(-1, 1)$, então para todo $z \in \mathbb{H}_P^2$

$$\text{senh}(d(z, L)) = \frac{2I(z)}{1 - |z|^2} \tag{5.4}$$

5.6.2 A Mediatriz de um Segmento

Dados dois pontos distintos z_1 e z_2 , seja γ a geodésica que realiza a distância $d(z_1, z_2)$;

Definição 5.18. Dados dois pontos distintos z_1 e z_2 , a mediatriz da geodésica γ , ligando z_1 a z_2 , é o conjunto

$$M = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z_1, M) = d(z_2, M)\}.$$

Proposição 5.11. *Dados os pontos z_1 e z_2 , a mediatriz de γ é a única geodésica ortogonal a γ .*

Demonstração. Segue da definição que $\text{cosh}(d(z_1, z)) = \text{cosh}(d(z_2, z))$ para todo $z \in M$. Sem perda de generalidade, ao considerarmos $z_1 = i$ e $z_2 = ir^2$ obtemos $\gamma = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ e, de acordo com (5.4),

$$\frac{|z - z_1|^2}{y} = \frac{|z - z_2|^2}{iy}.$$

Consequentemente, a mediatriz de γ é $M = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = r\}$, que é ortogonal à γ . □

5.6.3 A Distância entre Geodésicas

Ao considerarmos γ_1 e γ_2 duas geodésicas disjuntas de \mathbb{H}^2 , decorre que existe uma única geodésica ortogonal à γ_1 e γ_2 . Para provar isto, podemos assumir que $\gamma_1 = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ e que $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z-a| = r^2\}$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a > r^2$. Suponha que a geodésica ortogonal a γ_1 e γ_2 seja $\beta = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = t\}$. Conforme mostra a figura ??, decorre da ortogonalidade na interseção que a tangente à γ_2 passa pelo centro de β , que é a origem, e, por isto, $t^2 = a^2 - r^2$.

Definição 5.19. A distância $d(\gamma_1, \gamma_2)$ entre as geodésicas γ_1 e γ_2 é igual ao comprimento da geodésica β , ortogonal à γ_1 e à γ_2 , medido entre os pontos $\beta \cap \gamma_1$ e $\beta \cap \gamma_2$.

Exercício 5.12. .

1. Calcule a distância entre as geodésicas $\gamma_1 = \{yi \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - a| = r\}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

5.6.4 A Bissetriz de duas Geodésicas

Sejam γ_1 e γ_2 duas geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Definição 5.20. A bissetriz de γ_1 e γ_2 é o conjunto B equidistante de γ_1 e γ_2 , isto é,

$$B = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, \gamma_1) = d(z, \gamma_2)\}.$$

Vamos considerar três casos;

1. γ_1 e γ_2 são paralelas.
Suponhamos que γ_1 é a reta $z = -a$ e γ_2 é $z = a$, onde $a \in \mathbb{R}$. Sejam $P = \gamma_1 \cap \{y = 0\}$ e r_1 a reta passando por P e $z = x + iy$. Assim, pela identidade 5.2,

$$\sinh(d(z, \gamma_1)) = tg(\theta_1) = \frac{|x + a|}{y}.$$

Analogamente, conforme mostra a figura ??, se $Q = \gamma_2 \cap \{y = 0\}$ temos

$$\sinh(d(z, \gamma_2)) = tg(\theta_2) = \frac{|x - a|}{y}.$$

Portanto, se $z \in B$, então $\theta_1 = \theta_2$ e $x = 0$.

2. γ_1 e γ_2 são ultra paralelas.
Suponha que $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R^2\}$. Então, de acordo com as identidades 5.2,

$$\sinh(d(z, \gamma_1)) = \frac{||z|^2 - 1|}{2y}, \quad \sinh(d(z, \gamma_2)) = \frac{||z|^2 - R^4|}{2yR^2}.$$

Segue que $B = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R\}$.

3. γ_1 e γ_2 intersectam-se em \mathbb{H}^2 .
Sejam $\gamma_1 = \{z = iy; y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - a| = \alpha\}$, $a \in \mathbb{R}$. Se o ângulo formado na interseção $\{iu\} = \gamma_1 \cap \gamma_2$ é θ , então temos que

$$\alpha = \frac{|u|}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad a = \alpha \cdot \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad a = |u| \cdot \operatorname{cotg}(\theta). \quad (5.5)$$

Desta forma, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - |u| \cdot \operatorname{cotg}(\theta)| = |u| \cdot \operatorname{cosec}(\theta)\}$.

A distância de $z = x + iy$ à γ_1 satisfaz a identidade $\operatorname{senh}(d(z, \gamma_1)) = \frac{x}{y}$, enquanto segue da identidade 5.3 que a distância à γ_2 satisfaz

$$\operatorname{senh}(d(z, \gamma_2)) = \frac{||z - \alpha \cdot \cos(\theta)|^2 - \alpha^2|}{2y\alpha}.$$

Decorre da igualdade $\operatorname{senh}(d(z, \gamma_1)) = \operatorname{senh}(d(z, \gamma_2))$ que

$$B = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 2\alpha \cdot \cos^2(\theta/2)|^2 = \alpha^2 \cdot \cos^2(\theta/2)\}. \quad (5.6)$$

Exercício 5.13. .

1. Se o ângulo entre duas geodésicas é θ , mostre que a bissetriz forma, com cada uma das geodésicas, um ângulo medindo $\theta/2$.
2. Uma geodésica γ é θ -transversal as duas geodésicas disjuntas γ_1 e γ_2 se γ forma um ângulo θ nos pontos de interseção $p = \gamma \cap \gamma_1$ e $q = \gamma \cap \gamma_2$. Mostre que quando $\theta = \pi/2$ existe uma única geodésica transversal a γ_1 e γ_2 , enquanto se $\theta \neq \pi/2$ existem 4.
3. Obtenha relações métricas num triângulo equilátero. Prove que o ângulo interno é $\alpha = 0$ se, e somente se, o comprimento do lado é $a = \infty$.
4. Num triângulo isósceles, mostre que a mediatriz e a altura, ambas relativas ao ângulo oposto à base, coincidem.

5.6.5 Relações Métricas em Polígonos

Nesta seção, obteremos algumas relações em polígonos que serão úteis para a sequência do texto e que são interessantes por si mesmas.

Teorema 5.6. *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ uma n -upla tal que $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então, existe um polígono com ângulos interiores medindo $\theta_1, \dots, \theta_n$ se, e somente se,*

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi$$

Demonstração. .

1. (\Rightarrow) Se existe um polígono P com ângulos internos medindo $\theta_1, \dots, \theta_n$, segue da fórmula 5.36 que a área de P é

$$A(P_n) = (n-2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \quad (5.7)$$

Consequentemente, a inequação 5.6 é satisfeita.

2. (\Leftarrow) Dados os ângulos $\theta_1, \dots, \theta_n$, onde $0 \leq \theta_i \leq \pi$ para todo $1 \leq i \leq n$, construímos o quadriláteros Q_1, \dots, Q_n com vértice na origem, em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, conforme mostra a figura ???. O comprimento d indicado na figura será determinado para atender a equação

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi.$$

Observamos que os valores de α_i e Q_i dependem continuamente dos valores de d . Segue da identidade 5.24 que

$$\text{sen}(\alpha_i) = \frac{\cos(\theta_i/2)}{\cosh(d)}.$$

Assim, vamos investigar os valores assumidos pela função

$$g(t) = \sum_{i=1}^n \arcsen\left(\frac{\cos(\theta_i/2)}{\cosh(t)}\right).$$

Além de ser contínua, g é decrescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi - \theta_i}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}[n\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)] > 2\pi \end{aligned}$$

A continuidade de g garante que existe um valor $d_0 \in [0, \infty)$ tal que $g(d_0) = \pi$.

□

Após o triângulo, o polígono seguinte a ser tratado é o quadrilátero. Na Geometria Hiperbólica, o quadrilátero mais simples é quadrilátero de Lambert (1728-1777), mostrado na figura ??, cujos ângulos internos medem $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \phi$, sendo que $0 \leq \phi < \pi/2$. Este quadrilátero é interessante porque ignora o postulado euclidiano das

paralelas. A partir do quadrilátero de Lambert podemos construir dois outros polígonos; o quadrilátero de Saccheri (1667-1733) e um pentágono, conforme as figuras ?? e ?. Daí, temos as seguintes relações;

Proposição 5.12. *No quadrilátero de Lambert (figura ??) temos as seguintes relações;*

$$(i) \quad \sinh(a_1).\sinh(a_2) = \cos(\phi) \tag{5.8}$$

$$(ii) \quad \cosh(a_1) = \cosh(b_1)\sen(\phi), \quad \cosh(a_2) = \cosh(b_2)\sen(\phi). \tag{5.9}$$

Demonstração. .

1. Suponhamos que o vértice definido pelos lados a_1 e a_2 esta na origem e que a_1 encontram-se sobre o eixo-x positivo e a_2 sobre o eixo-y positivo. Desta forma, o centro do lado b_1 encontra-se sobre o eixo-y, digamos em $i\alpha$, enquanto o centro de b_2 encontra-se em β , sobre o eixo-x; conforme mostra a figura ?. Aos lados b_1 e b_2 encontram-se sobre as geodésicas γ_1 e γ_2 , respectivamente, onde

$$b_1 \rightsquigarrow \gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - i\alpha| = r_1\}, \quad b_2 \rightsquigarrow \gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \beta| = r_2\}$$

Se w_1 é o ponto sobre γ_1 mais próximo da origem, segue da expressão 5.15 que

$$\sinh(d(0, w_1)) = \frac{2 |w_1|}{1 - |w_1|^2}. \tag{5.10}$$

Considerando que $\alpha = |w_1| + r_1$ e $\alpha^2 = 1 + r_1^2$, obtemos

$$\sinh(a_2) = \sinh(d(0, w_1)) = \frac{1}{r_1}, \quad \cosh(d(0, w_1)) = \frac{\alpha}{r_1}. \tag{5.11}$$

Uma vez que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, o produto angular entre as geodésicas γ_1 e γ_2 é $(\gamma_1, \gamma_2) = \cos(\phi)$; além disto, segue de 5.5,

$$\cos(\phi) = (\gamma_1, \gamma_2) = \left| \frac{r_1^2 + r_2^2 - |\alpha - i\beta|}{2r_1r_2} \right| = \left| \frac{r_1^2 + r_2^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2r_1r_2} \right|.$$

Como $\gamma_i \perp S^\infty$, $i = 1, 2$, verificam-se as identidades $\alpha^2 = 1 + r_1^2$ e $\beta^2 = 1 + r_2^2$. Portanto, $(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{r_1r_2}$. Ao compararmos com a expressão 5.11, verificamos a expressão 5.8.

2. Agora, conforme a figura ??, consideramos que o vértice formado pelos lados medindo b_1 e b_2 encontra-se na origem, b_2 encontra-se sobre o eixo-x positivo e b_1 encontra-se sobre uma reta inclinada de ϕ em relação ao eixo-x. Seja γ a geodésica contendo o lado a_2 e γ' a reflexão de γ sobre o eixo-x. Segue da expressão 5.8 que $\cosh(2a_1) = (\gamma, \gamma')$. Se o centro de γ é em $z_0 = de^{i\phi}$, então o centro de γ' é em $z_1 = de^{-i\phi}$ e $|z_0 - z_1| > 2r$; desta maneira, supondo que o raio de γ é r , temos

$$\cosh(2a_1) = (\gamma, \gamma') = \left| \frac{2r^2 - |de^{i\phi} - de^{-i\phi}|^2}{2r^2} \right| = \frac{2d^2 \operatorname{sen}^2(\phi) - r^2}{r^2}$$

Decorre da expressão 5.11 que $\cosh(b_1) = \cosh(d(0, \gamma)) = \frac{d}{r}$; portanto,

$$\cosh(2a_1) = 2\cosh^2(b_1) \cdot \operatorname{sen}^2(\phi) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh(a_1) = \cosh(b_1) \cdot \operatorname{sen}(\phi)$$

(note que $\cosh(2a_1) = 2\cosh^2(a_1) - 1$).

□

Em decorrência da relação 5.6, para um polígono ter todos os ângulos internos medindo $\pi/2$ é necessário que o número de lados seja $n \geq 5$. Vamos analisar os pentágonos mais simples;

Proposição 5.13. *Num pentágono cujos lados medem a_i , $1 \leq i \leq 5$, e cujos ângulos internos medem $\alpha_i = \pi/2$, $1 \leq i \leq 4$, e $\alpha_5 = \phi$, conforme ilustrado na figura ??, valem as seguintes relações;*

1. Se $0 \leq \phi < \pi$,

$$\cosh(a_1) \cdot \cosh(a_3) + \cos(\phi) = \operatorname{senh}(a_1) \cosh(a_2) \operatorname{senh}(a_3) \quad (5.12)$$

2. Se $\phi = \pi/2$, então;

$$(i) \quad \tanh(a_i) \cdot \cosh(a_j) \cdot \tanh(a_k) = 1, \quad (a_i, a_j, a_k) \text{ são lados consecutivos} \quad (5.13)$$

$$(ii) \quad \operatorname{senh}(a_i) \cdot \operatorname{senh}(a_j) = \cosh(a_k). \quad (5.14)$$

A identidade no item (ii) vale para todas as tríades (a_i, a_j, a_k) , onde $a_i \cap a_j = \{v_{ij}\}$ é um vértice do polígono e a_k é o lado oposto à $\{v_{ij}\}$.

Demonstração. .

1. Sejam h a altura relativa ao lado a_2 , ϕ_1, ϕ_2 ângulos tais que $\phi_1 + \phi_2 = \phi$ e b_1, b_2 lados tais que $b_1 + b_2 = a_2$, conforme indica a figura ???. De acordo com as expressões 5.8 e 5.9, temos as seguintes relações no pentágono;

$$\cosh(a_1) = \cosh(h)\operatorname{sen}(\phi_1), \quad \cosh(a_3) = \cosh(h)\operatorname{sen}(\phi_2) \quad (5.15)$$

$$\operatorname{senh}(a_1)\operatorname{senh}(b_1) = \cos(\phi_1), \quad \operatorname{senh}(a_3)\operatorname{senh}(b_2) = \cos(\phi_2) \quad (5.16)$$

Decorre que $\cosh(a_1)\operatorname{sen}(\phi_2) - \cosh(a_3)\operatorname{sen}(\phi_1) = 0$ e, por isto,

$$[\cosh(a_1)\cosh(a_3) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2)]^2 = [\cosh(a_1)\cosh(a_3) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2)]^2 - \\ - [\cosh(a_1)\operatorname{sen}(\phi_2) - \cosh(a_3)\operatorname{sen}(\phi_1)]^2 = \operatorname{senh}^2(a_1)\cosh^2(b_1)\operatorname{senh}^2(a_3)\cosh^2(b_2);$$

Portanto,

$$\cosh(a_1)\cosh(a_3) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) = \operatorname{senh}(a_1)\cosh(b_1)\operatorname{senh}(a_3)\cosh(b_2) \quad (5.17)$$

Desta forma, ao aplicarmos a expressão acima, juntamente com 5.16, obtemos

$$\cosh(a_1)\cosh(a_3) + \cos(\phi) = \cosh(a_1)\cosh(a_3) - \operatorname{sen}(\phi_1)\operatorname{sen}(\phi_2) + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) = \\ = \operatorname{senh}(a_1)\cosh(a_2)\operatorname{senh}(a_3).$$

2. Ao substituírmos $\phi = \pi/2$ na expressão 5.12 obtemos

$$(a_1, a_2, a_3) \rightsquigarrow \cosh(a_1)\cosh(a_3) = \operatorname{senh}(a_1)\cosh(a_2)\operatorname{senh}(a_3) \quad (5.18)$$

$$(a_2, a_3, a_4) \rightsquigarrow \cosh(a_2)\cosh(a_4) = \operatorname{senh}(a_2)\cosh(a_3)\operatorname{senh}(a_4) \quad (5.19)$$

A expressão 5.19 fornece a identidade $\cosh(a_3) = \frac{1}{\operatorname{tanh}(a_2)\operatorname{tanh}(a_4)}$, que ao substituírmos em 5.18 resulta no seguinte:

$$\cosh^2(a_1) = \operatorname{senh}^2(a_1)\cosh^2(a_2) - \operatorname{senh}^2(a_1)\operatorname{senh}^2(a_2)\operatorname{tanh}^2(a_4) = \\ = \operatorname{senh}^2(a_1)\cosh^2(a_2) - \operatorname{senh}^2(a_1)\operatorname{senh}^2(a_2)\left(1 - \frac{1}{\cosh^2(a_4)}\right) = \\ = \operatorname{senh}^2(a_1) + \frac{\operatorname{senh}^2(a_1)\operatorname{senh}^2(a_2)}{\cosh^2(a_4)},$$

da onde segue 5.14.

□

O próximo polígono é o hexágono com os ângulos internos medindo $\pi/2$;

Proposição 5.14. *Considere um hexágono com lados $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, onde a_i e b_i são lados opostos, conforme ilustrado na figura ??, e todos os ângulos internos medem $\pi/2$. Então, valem as seguintes relações;*

1.

$$\frac{\sinh(a_1)}{\sinh(b_1)} = \frac{\sinh(a_2)}{\sinh(b_2)} = \frac{\sinh(a_3)}{\sinh(b_3)}.$$

2.

$$\cosh(b_1) \cdot \sinh(a_2) \cdot \sinh(a_3) = \cosh(a_1) + \cosh(a_2) \cdot \cosh(a_3). \quad (5.20)$$

Demonstração. .

1. Seja t o comprimento do segmento geodésico ortogonal aos lados a_1 e b_1 . Decorre de 5.14 que

$$\sinh(b_3) \sinh(a_2) = \cosh(t) = \sinh(b_2) \sinh(a_3) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sinh(a_2)}{\sinh(b_2)} = \frac{\sinh(a_3)}{\sinh(b_3)}$$

Ao procedermos analogamente, traçando a geodésica ortogonal aos outros pares de lados opostos, obtemos as outras identidades.

2. Na mesma figura do item anterior, consideramos que os lados a_1, b_1 estão divididos, pela geodésica ortogonal à a_1 e b_1 , em segmentos de comprimento u, v e x, y , respectivamente. Decorrem de 5.14, as seguintes relações:

$$\sinh(x) \sinh(a_2) = \cosh(u), \quad \sinh(y) \sinh(a_3) = \cosh(v) \quad (5.21)$$

$$\sinh(u) \sinh(t) = \cosh(a_2), \quad \sinh(v) \sinh(t) = \cosh(a_3) \quad (5.22)$$

As relações 5.22 implica em

$$\cosh(a_3) \sinh(u) = \cosh(a_2) \sinh(v) \quad (5.23)$$

Desta maneira, valem as seguintes identidades;

$$[\cosh^2(a_2) + \sinh^2(u)][\cosh^2(a_3) + \sinh^2(v)] = [\cosh(a_2)\cosh(a_3) + \sinh(u)\sinh(v)]^2 \quad (5.24)$$

$$\sinh^2(a_2) + \cosh^2(u) = \sinh^2(a_2) + \sinh^2(x)\sinh^2(a_2) = \sinh^2(a_2)\cosh^2(x) \quad (5.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cosh(b_1)\sinh(a_2)\sinh(a_3) &= [\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)]\sinh(a_2)\sinh(a_3) = \\ &= (\cosh(x)\sinh(a_2))(\cosh(y)\sinh(a_3)) + \cosh(u)\cosh(v) = \\ &= [\sinh^2(a_2) + \cosh^2(u)]^{1/2}[\sinh^2(a_3) + \cosh^2(v)]^{1/2} + \cosh(u)\cosh(v) = \\ &= \cosh(a_2)\cosh(a_3) + \sinh(u)\sinh(v) + \cosh(u)\cosh(v) = \cosh(a_2)\cosh(a_3) + \cosh(a_1) \end{aligned}$$

□

Exercício 5.14. .

1. Mostre que a área de um polígono P_n , de n -lados, com ângulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$ é

$$A(P_n) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \quad (5.26)$$

2. Obtenha relações métricas num pentágono regular.
3. Calcule o lado do hexágono cujos ângulos internos medem $\pi/2$. Obtenha relações métricas num hexágono regular.

5.7 Geometria das Isometrias de \mathbb{H}^2

5.7.1 Classificação das Isometrias

Ao compararmos os grupos de isometrias $Isom(\mathbb{E}^2)$, $Isom(\mathbb{S}^2)$ e $Isom(\mathbb{H}^2)$, observamos que a geometria hiperbólica é a geometria mais rica em simetrias. Com o objetivo de compreender a geometria das isometrias de \mathbb{H}^2 , utilizaremos os modelos \mathbb{H}^2 e $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$; o primeiro porque os cálculos são mais simples e o segundo por ser o mais adequado para a visualização e desenho dos fenômenos geométricos.

Como todo elemento $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ é o produto de no máximo duas reflexões, vamos assumir que $f = r_2 \circ r_1$, onde r_1 e r_2 são reflexões sobre as geodésicas γ_1 e γ_2 , respectivamente. As possibilidades são as seguintes:

1. $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{p\}$. Então $r_2 \circ r_1(p) = p \in \mathbb{H}^2$.
2. γ_1 e γ_2 são paralelas. Então, $r_2 \circ r_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ possui um ponto fixo $p \in \infty$.
3. γ_1 e γ_2 são ultra-paralelas. Então $r_2 \circ r_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ possui dois pontos fixos $p, q \in S^\infty$. Além disto, a geodésica ρ é ortogonal à γ_1 e à γ_2 .

Definição 5.21. Seja $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ e $Fix_f = \{x \in \widehat{\mathbb{H}^2} \mid f(x) = x\}$. Dizemos que:

1. f é elíptica se possui 1 ponto fixo em \mathbb{H}^2 .
2. f é parabólica se possui 1 único ponto fixo $z_0 \in S^\infty$.
3. f é hiperbólica se possui 2 pontos fixos, ambos pertencentes à S^∞ .

Através do isomorfismo 5.11, entre $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $PSl_2(\mathbb{R})$, definimos o traço da isometria $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ por

$$tr(f) = |tr(A)|, \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R}).$$

Proposição 5.15. Seja $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$;

1. f é elíptica se, e somente se, $tr(f) < 2$.
2. f é parabólica se, e somente se, $tr(f) = 2$.
3. f é hiperbólica se, e somente se, $tr(f) > 2$.

Demonstração. Suponhamos que $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$ e que $z_0 \in \mathbb{H}^2$ é um ponto fixo de f . Então,

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + c} = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad cz_0^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (5.1)$$

Decorre da equação do 2º-grau que f possui no máximo 2 pontos fixos. Consideramos f como uma transformação de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Neste caso, f tem 2 pontos fixos. O discriminante da equação 5.1 é

$$\Delta = (d-a)^2 - 4bc = (d-a)^2 - 4(1-ad) = [tr(A)]^2 - 4.$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

1. Se $|tr(A)| < 2$, então a equação possui 2 raízes complexas, sendo que apenas uma das raízes encontra-se em \mathbb{H}^2 . Neste caso, f é elíptica.
2. Se $|tr(A)| = 2$, então f possui 1 ponto fixo em S^∞ que é $z_0 = \frac{a-1}{c} \in \mathbb{R}$. Portanto, f é parabólica.

3. Se $|tr(A)| > 2$, então f possui 2 pontos fixos em S^∞ , uma vez que ambas as raízes da equação são reais. Consequentemente, f é hiperbólica.

□

Desta maneira, as isometrias são classificadas em elípticas, parabólicas ou hiperbólicas e o conjunto invariante pode ser descrito a partir da sua natureza.

Veremos que as transformações elípticas são uma espécie de rotação no plano hiperbólico, as parabólicas são as rotações com centro pertencendo à S^∞ e as hiperbólicas são novidade, se compararmos com as geometrias euclidiana e esférica.

Definição 5.22. Seja Γ um conjunto de geodésicas de \mathbb{H}^2 . Um feixe de geodésica é um conjunto de geodésicas atendendo à um dos seguintes itens:

1. Γ é um feixe elíptico se todas as geodésicas forem disjuntas e concorrentes no ponto $p \in \mathbb{H}^2$.
2. Γ é um feixe parabólico se todas as geodésicas forem disjuntas e concorrentes no ponto $p \in S^\infty$.
3. Γ é um feixe hiperbólico se todas as geodésicas forem disjuntas e ortogonais a uma mesma geodésica $l \subset \mathbb{H}^2$.

As isometrias tem entre suas características próprias os subconjuntos que deixam invariantes; vejamos os seguintes exemplos, nos quais observamos o comportamento das isometrias em geral;

1. $g(z) = z + 1$ (parabólica).
Para todo $a \in \mathbb{R}$, as retas $y = a$ são invariantes por g , assim como os semi-planos $H_a^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{H}^2 \mid y > a\}$ e $H_a^- = \{z = x + iy \in \mathbb{H}^2 \mid y < a\}$. Os semi-planos H_a^\pm são denominados horobolas e o bordo $y = a$ é o horocírculo.
2. $g(z) = k^2z$ (hiperbólica).
Para todo $a \in \mathbb{R}$, as retas $y = ax$ são invariantes por g . Os círculos $|z| = R$, ortogonais as retas invariantes, são levados em $|z| = k^2R$, respectivamente.
3. $g_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z + \operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}$ (elíptica).

A família dos círculos passando por $z = i$ é invariante por g_θ , sendo que cada círculo é levado à outro círculo da família. Já os círculos ortogonais a família mencionada são, cada um deles, invariantes por g_θ .

Exercício 5.15. . Determine os pontos fixos das seguintes transformações;

1. $f(z) = \frac{z-2}{z-1}$,
2. Mostre que $Fix_f = Fix_g \Leftrightarrow fg = gf$.

3. Mostre que se f e g são hiperbólicas e possuem um ponto fixo em comum, então $Fix_f = Fix_g$.
4. Considere as geodésicas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - a| = \alpha\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - b| = \beta\}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Se

$$r_1(z) = \frac{\alpha^2}{\bar{z} - a} + a, \quad r_2(z) = \frac{\beta^2}{\bar{z} - b} + b,$$

são as respectivas reflexões sobre as geodésicas, mostre que $g = r_1 r_2$ é parabólica se, e somente se, ou $|\alpha - \beta| = |a - b|$ ou $|\alpha + \beta| = |a - b|$. Interprete geométricamente e obtenha condições para que g seja elíptica ou hiperbólica.

5. Considere os círculos $C_\alpha = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha| = r_\alpha\}$ e $C_\beta = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \beta| = r_\beta\}$. Mostre que a transformação

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} & -\sqrt{r_\alpha r_\beta} \left(1 + \frac{\alpha\beta}{r_\alpha r_\beta}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{r_\alpha r_\beta}} \end{pmatrix}.$$

é uma isometria que leva a região interior limitada por C_α e o eixo-x sobre a região exterior limitada por C_β e a região exterior de C_α sobre a região interior limitada por C_β e o eixo-x. Além disto, temos que $tr(g) \geq 2$. A isometria g é hiperbólica sempre que $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$ e é parabólica se $|\beta - \alpha| = 2\sqrt{r_\alpha r_\beta}$.

6. No exercício anterior, considere $\alpha + r_\alpha = \beta - r_\beta$. Mostre que g é parabólica se, e somente se, $r_\alpha = r_\beta$. Estude o caso dado por $C_\alpha = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 1| = 1\}$ e $C_\beta = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 5| = 3\}$.

5.7.2 Classes de Conjugação e Centralizadores

Nesta seção classificaremos as classes de conjugação de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e descreveremos o subgrupo centralizador de uma isometria. Para isto, é importante a invariância do traço por conjugação, isto é,

$$tr(t^{-1}ft) = tr(f), \quad \forall f, t \in Isom(\mathbb{H}^2).$$

Sejam $f, g \in Isom(\mathbb{H}^2)$, $\Phi(f) = A$ e $\Phi(g) = B$, então $\Phi([f, g]) = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ e, por conseguinte,

$$|tr([f, g])| = |tr([A, B])|.$$

Definição 5.23. Sejam $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r > 1$. As isometrias n_1 , n_r e n_θ de \mathbb{H}^2 , definidas por

$$n_1(z) = z + 1, \quad n_r(z) = rz, \quad n_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z - \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}, \quad (5.2)$$

são denominadas isometrias normalizadas de \mathbb{H}^2 .

Observação. .

1. n_1 , n_r e n_θ representam classes de conjugação distintas.
2. Na definição, é suficiente considerarmos $r > 1$ porque n_r e $n_{1/r}$ são conjugadas. Seja $h(z) = 1/z$, então

$$h \circ n_r \circ h^{-1}(z) = n_{1/r}(z).$$

Proposição 5.16. *Seja $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Então f é conjugada a uma isometria normalizada.*

Demonstração. Como f possui no máximo 2 pontos fixos em $\widehat{\mathbb{H}^2}$, a análise reduz-se aos seguintes casos;

1. f é hiperbólico.
Suponha que $z_1, z_2 \in S^\infty$ sejam os pontos fixos de f . Considere uma isometria $h \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tal que $h(z_1) = \infty$ e $h(z_2) = 0$. Portanto, $hfh^{-1}(\infty) = \infty$ e $hfh^{-1}(0) = 0$. Desta forma, temos que $\operatorname{Fix}_{hfh^{-1}} = \{0, \infty\}$; conseqüentemente, existe um número real positivo r tal que $hfh^{-1}(z) = rz$.
2. f é parabólico.
Seja $z_1 \in S^\infty$ o único ponto fixo de f . Considere uma isometria $h \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tal que $h(z_1) = \infty$. Analogamente, $\infty \in \operatorname{Fix}_{hfh^{-1}}$ implica na existência de $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = z + k$. Ao impormos sobre h as condições $h(1) = 0$ e $h(f(1)) = 1$, obtemos $hfh^{-1}(z) = z + 1$.
3. f é elíptico.
Seja $z_1 \in \mathbb{H}^2$ o ponto fixo de f . Considere uma isometria $h \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tal que $h(z_1) = i$ e $i \in \operatorname{Fix}_{hfh^{-1}}$. Uma vez que o grupo de isotropia de $z = i$ é $G_i = SO_2$, segue que

$$hfh^{-1}(z) = \frac{\cos(\theta)z - \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)}.$$

□

Corolário 5.8. *Um elemento $g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tem ordem finita se, e somente se, g é elíptico.*

Demonstração. Analisando cada um dos casos, segue da proposição anterior que;

1. se g é elíptico, então $\Phi(g^n)$ é conjugado à $R_{n\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Neste caso, a ordem de g é finita se, e somente se, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. se g é parabólico, então $\Phi(g^n)$ é conjugado à $f(z) = z + n \neq id_{\mathbb{H}^2}$.
3. se g é hiperbólico, então $\Phi(g^n)$ é conjugado à $f(z) = r^n z^n \neq id_{\mathbb{H}^2}$.

□

Vamos analisar o comutador de uma isometria para determinarmos o centralizador de um elemento.

Exercício 5.16. .

1. Utilizando o resultado da proposição acima, mostre que:
 - (a) $tr(f) \in (2, \infty) \Rightarrow f$ é hiperbólica.
 - (b) $tr(f) = 2 \Rightarrow f$ é parabólica.
 - (c) $tr(f) \in (0, 2) \Rightarrow f$ é elíptica.
 - (d) Determine a forma normalizada das isometrias $\frac{z-6}{z-4}$, $\frac{z+3}{z-2}$.
 - (e) Mostre que se $f, g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ são parabólicas, então elas são conjugadas.
2. Conclua que as isometrias elípticas correspondem as rotações euclidianas, as parabólicas as translações euclidianas paralelas ao eixo-x e a hiperbólicas não possuem análogo euclidiano.

Corolário 5.9. *Sejam $f, g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ distintas de $I, -I$, e de tal forma que ambas não sejam simultaneamente elípticas. Então, f é conjugada à g se, e somente se, $tr^2(f) = tr^2(g)$.*

Demonstração. .

1. (\Rightarrow) Esta direção da demonstração é imediata.
2. (\Leftarrow)
Uma vez que f é conjugada a uma das formas normalizadas, $tr^2(f)$ é igual a um dos casos abaixo;

$$tr^2(f) = 2 + r + \frac{1}{r}, \quad tr^2(f) = 4, \quad \text{ou} \quad tr^2(f) = 4\cos^2(\theta).$$

Analogamente,

$$tr^2(g) = 2 + s + \frac{1}{s}, \quad tr^2(g) = 4, \quad \text{ou} \quad tr^2(g) = 4\cos^2(\phi).$$

Se $tr^2(f) = tr^2(g)$, a questão reduz-se a analisarmos um dos casos abaixo;

- (a) f e g hiperbólicas $\Rightarrow r + \frac{1}{r} = s + \frac{1}{s}$.
Isto implica em que ou $r = s$ ou $r = \frac{1}{s}$. Em ambos os casos, segue da observação acima que f e g são conjugados.
- (b) f e g são parabólicas $\Rightarrow tr^2(f) = tr^2(g) = 4$.
Neste caso, ambas são conjugados a $n_1(z) = z + 1$.
- (c) f é hiperbólica e g é parabólica $\Rightarrow 2 + r + \frac{1}{r} = 4 \Rightarrow r = 1$
- (d) f parabólica e g elíptica, então $\theta = k\pi$ e $f = g = \pm I$.

□

Observação. .

1. No corolário acima, o caso elíptico não foi incluído porque a equação $\cos^2(\phi) = \cos^2(\theta)$ implica em $\phi = \theta \pm k\pi$.
2. Uma isometria hiperbólica f não é conjugada a uma elíptica, caso contrário existiriam $\theta, r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} = 2\cos(\theta);$$

o que ocorre se, e somente se, $\theta = 0$ e $r = 1$ ($f = g = I$).

3. A conjugação preserva a natureza elíptica, parabólica ou hiperbólica de uma isometria.

Em decorrência da proposição 5.16, para toda isometria g que não seja elíptica, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) \in \text{Fix}_g$, vejamos a demonstração;

Proposição 5.17. *Seja $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ e considere o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z)$ na norma do sup (convergência uniforme);*

1. *Suponha que g seja parabólico e $\text{Fix}_g = \{\alpha\}$. Então, para todo $z \in \mathbb{H}^2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$.*
2. *Suponha que g é hiperbólico e $\text{Fix}_g = \{\alpha, \beta\}$. Então, para todo $z \in \mathbb{C} - \{\beta\}$, a menos de conjugação pela isometria $1/z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \alpha$.*

Demonstração. .

1. Pela proposição 5.16, existe $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tal que $h(\alpha) = \infty$ e $hgh^{-1}(z) = z + 1$. Segue que $hg^n h^{-1}(z) = z + n$ e $g^n(z) = h^{-1}(h(z) + n)$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-1}(h(z) + n) = h^{-1}(h(z) + \lim_{n \rightarrow \infty} n) = h^{-1}(\infty) = \alpha.$$

2. De maneira análoga ao item anterior, existe $h \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que $h(\alpha) = \infty$, $h(\beta) = 0$ e $hgh^{-1}(z) = kz$, onde $k > 1$. Assim, $hg^n h^{-1}(z) = k^n z$ e se $z \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(h^{-1}(z)) = h^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} k^n \cdot z\right) = h^{-1}(\infty) = \alpha.$$

Ao considerarmos $w = h^{-1}(z) \in \mathbb{C} - \{\beta\}$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(w) = \alpha$. É claro, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(\beta) = \beta$.

□

Agora, investigaremos as relações entre o conjunto dos pontos fixos das isometrias f, g com o comutador $[f, g]$. Seja $\overline{Fix}_f = \{x \in \widehat{\mathbb{H}}^2 \mid f(x) = x\}$. O objetivo é descrevermos o centralizador de uma isometria f , por isto vejamos uma simples consequência de $[f, g] = I$.

Lema 5.3. *Sejam $f, g \in Isom(\mathbb{H}^2)$, ambas distintas da identidade. Se $[f, g] = I$, então $f(\overline{Fix}_g) = \overline{Fix}_g$ e $g(\overline{Fix}_f) = \overline{Fix}_f$.*

Demonstração. Seja $w \in \overline{Fix}_g$, então $g(f(w)) = f(g(w)) = f(w) \Rightarrow f(w) \in \overline{Fix}_g$. Considerando que $1 \leq \#\overline{Fix}_g \leq 2$, segue que $f(\overline{Fix}_g) = \overline{Fix}_g$. Analogamente, $g(\overline{Fix}_f) = \overline{Fix}_f$. □

Portanto, se $[f, g] = I$, então as isometrias f e g são da mesma natureza elíptica, parabólica ou hiperbólica.

Proposição 5.18. *Sejam $f, g \in Isom(\mathbb{H}^2)$, ambas distintas da identidade, e $z_0 \in \widehat{\mathbb{H}}^2$. Então $\overline{Fix}_f \cap \overline{Fix}_g = \{z_0\} \subset \widehat{\mathbb{H}}^2$ se, e somente se, $[f, g]$ é parabólico.*

Demonstração. .

1. (\Rightarrow)

De acordo com a classificação das isometrias e a classe de conjugação de cada tipo, as únicas situações possíveis são as seguintes;

- (a) $z_0 \in \mathbb{H}^2$, da onde f, g são elípticas;
este caso é simples, pois se fixam o mesmo ponto então existe $t \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ tal que $\Phi(tft^{-1})$ e $\Phi(tgt^{-1})$ pertencem a SO_2 e, por isto, comutam. Segue que $[f, g] = I$ e $tr[f, g] = 2$.
- (b) $z_0 \in S^\infty$ e f, g são parabólicas;
suponha que o ponto fixo em comum seja ∞ , então assumiremos que $f(z) = z + 1$ e $g(z) = z + k$. Portanto, $[f, g] = I$ e $tr[f, g] = 2$.
- (c) $z_0 \in S^\infty$ e f, g são hiperbólicas
Suponha que $\overline{Fix}_f = \{0, \infty\}$ e $\overline{Fix}_g \cap \overline{Fix}_f = \{\infty\}$, então $f(z) = rz$ e $g(z) = \alpha z + \beta$. Portanto,

$$[f, g] = z + \alpha\beta(r - 1) \quad \text{e} \quad tr[f, g] = 2.$$

- (d) $z_0 \in S^\infty$, f é parabólica e g é hiperbólica;
suponhamos que o ponto fixo em comum é ∞ . A menos de uma conjugação,
temos $f(z) = rz$ e $g(z) = z + k$. Desta maneira,

$$tr[f, g] = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \sqrt{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k(r-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, $tr[f, g] = 2$.

2. (\Leftarrow)

Suponha que $tr[f, g] = 2$. Vejamos os seguintes casos

- (a) Suponha que f é elíptica;

$$\Phi(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$tr[f, g] = [2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)] \cos^2(\theta) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

e $tr[f, g] = 2$ se, e se somente se, $\theta = 0$ ou $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$. Suponhamos
que $\theta \neq 2\pi k$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 = 0$ e $tr(\Phi(f)) = a + d \geq 2$;

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ (a + d)^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 + d^2 \geq 2 - 2bc;$$

$$\Rightarrow 0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \geq (b - c)^2, \Rightarrow c = b.$$

$$\begin{cases} d \geq 2 - a \\ c = b \end{cases} \Rightarrow 0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \geq 2(a - 1)^2 + 2b^2 \Rightarrow a = d = 1, b = c = 0.$$

Portanto, g é elíptica e $\overline{Fix}_f \cap \overline{Fix}_g = \{i\}$.

Agora, analisaremos os casos quando f não é elíptica. Podemos assumir

$$\Phi(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \Phi(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

da onde,

$$tr[f, g] = 2 + b^2\gamma^2 + b\gamma(a - d)(\alpha - \delta) - \gamma\beta(a - d)^2$$

(b) se f é parabólica, suponhamos que $f(\infty) = \infty$ e $a = d = 1$. Assim,

$$\text{tr}[f, g] = 2 \Leftrightarrow \gamma = 0.$$

Decorre que $g(\infty) = \infty$ (γ é parabólica ou hiperbólica).

(c) se f é hiperbólica, suponhamos que $f(0) = 0$ e $f(\infty) = \infty$, ou seja, $b = 0$ e $ad = 1$, onde $a \neq d$. Portanto, $\beta\gamma = 0$ e, por isto, g fixa 0 ou ∞ (g é hiperbólica ou parabólica).

□

Corolário 5.10. *Sejam $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$, ambas distintas da identidade. Se $[f, g] = I$, então, $\overline{\text{Fix}}_f = \overline{\text{Fix}}_g$.*

Demonstração. .

1. Se f e g são da mesma natureza elíptica, parabólica ou hiperbólica, segue da proposição anterior que $\overline{\text{Fix}}_f = \overline{\text{Fix}}_g$.
2. Suponhamos que $\overline{\text{Fix}}_f \neq \overline{\text{Fix}}_g$ e que existe $z_0 \in (\overline{\text{Fix}}_g - \overline{\text{Fix}}_f)$ tal que $f(z_0) \neq z_0$; conseqüentemente, $\{z_0, f(z_0), f^2(z_0)\} \subset \text{Fix}_g$. Portanto, há duas possibilidades (a) $f^2(z_0) = f(z_0)$ e (b) $f^2(z_0) = z_0$.
 - (a) $f^2(z_0) = f(z_0)$ é impossível, pois $f(z_0) \neq z_0 \Leftrightarrow f(f(z_0)) \neq f(z_0)$.
 - (b) $f^2(z_0) = z_0$; neste caso, temos que $f(f(z_0)) \neq f(z_0)$, ou seja, $\text{Fix}_f \cap \text{Fix}_g = \emptyset$. Segue que $\#\text{Fix}_g = 2$. Suponhamos que $g(z) = rz$ e $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, por isto, $\overline{\text{Fix}}_g = \{0, \infty\}$. Uma vez que $f(0) = \infty$, segue que $a = 0$. Desta maneira, a menos de uma conjugação, podemos assumir que $f(z) = \frac{k}{z}$ e $\overline{\text{Fix}}_f = \{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\}$. Como $g(\overline{\text{Fix}}_f) = \overline{\text{Fix}}_f$ e $\text{Fix}_f \cap \text{Fix}_g = \emptyset$, segue que $r = -1$ e $g(z) = -z$. Neste caso, chegamos a uma contradição, pois $g \notin \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Conseqüentemente, $\overline{\text{Fix}}_f = \overline{\text{Fix}}_g$.

□

Corolário 5.11. *Sejam $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Se f e g possuem um ponto fixo em comum, então uma das seguintes situações ocorre;*

1. $[f, g] = I$, $\text{Fix}_f = \text{Fix}_g$ e ambas são da mesma natureza.
2. $[f, g]$ é parabólico e $\text{Fix}_f \cap \text{Fix}_g = \{z_0\}$.

Os resultados desta seção tem como conseqüência a classificação do centralizador de uma isometria;

Teorema 5.7. *Sejam $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ e $Z_f = \{g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \mid [f, g] = I\}$ o centralizador de f . Então,*

1. Se $Z_f \simeq SO_2$ se, e somente se, f é elíptica.
2. Se $Z_f \simeq \mathbb{R}$, então f é ou parabólica ou hiperbólica.

Exercício 5.17. Mostre que;

1. Se f é parabólico, então $Z_f \simeq \mathbb{R}$.
2. Se f é hiperbólico, então $Z_g \simeq \mathbb{R}$.
3. Se $[f, g] = I$ e $Fix_f \neq Fix_g$, mostre que $f^2 = g^2 = (fg)^2 = I$.

Corolário 5.12. Não existe um subgrupo de $Isom(\mathbb{H}^2)$ que seja isomorfo à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em particular, o toro T^2 não admite uma estrutura geométrica hiperbólica.

Demonstração. Caso existisse $G < isom(\mathbb{H}^2)$, $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o centralizador de qualquer elemento de G teria um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o que é impossível pelo teorema 5.7. \square

5.7.3 A Função Deslocamento

Para cada $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ temos a função deslocamento $\mathcal{D}_g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{D}_g(z) = d(z, gz) = d(z, g^{-1}z).$$

Assim como em algumas seções anteriores, faremos uso da função $z \rightarrow \sinh(\frac{1}{2}d(z, gz))$. Porém, antes de estudarmos a função deslocamento, temos o seguinte;

Definição 5.24. Seja $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ um elemento hiperbólico. O comprimento da isometria, ou comprimento de translação, induzida por g é

$$T_g = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(z, gz).$$

Proposição 5.19. Seja $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ um elemento hiperbólico. Então,

$$\cosh(\frac{1}{2}T_g) = \frac{1}{2} |tr(g)|. \tag{5.3}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos $g(z) = kz$, $k \in \mathbb{R}$. Além disto, também consideramos $g = \sigma_1\sigma_2$ como o produto das reflexões σ_1, σ_2 , onde σ_1 é a reflexão sobre a geodésica $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = r_1\}$ e σ_2 é a reflexão sobre a geodésica $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = r_2\}$. Desta forma, a geodésica invariante por g é $\gamma_0 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$. Seja $z = x + iy$, decorre da expressão 5.5 que

$$\sinh(\frac{1}{2}d(z, gz)) = \frac{|z - gz|}{2[Im(z).Im(gz)]^{1/2}} = \frac{|z| \cdot |1 - k|}{2 \cdot |y| \cdot \sqrt{k}}.$$

Portanto, a distância será mínima quando $x = 0$, ou seja, quando $z \in \gamma_0$; neste caso, uma vez que $tr(g) = \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, temos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) = \frac{|1-k|}{2\sqrt{k}} \Rightarrow \cosh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) = \frac{1}{4}tr^2(g).$$

□

Agora, analisaremos a função deslocamento;

Proposição 5.20. *Seja $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$.*

1. *se g é hiperbólico com eixo L e comprimento de translação T_g , então*

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) = \cosh(d(z, L)) \cdot \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right). \quad (5.4)$$

2. *se g é elíptico com ponto fixo z_0 e ângulo de rotação θ , então*

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) = \sinh(d(z, z_0)) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.5)$$

3. *se g é parabólico com ponto fixo z_0 , então*

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) \cdot P(z, z_0) = k, \quad (5.6)$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é constante e $P(z, z_0)$ é o núcleo de Poisson do plano hiperbólico.

Demonstração. .

1. Por conjugação, vamos considerar que $g(z) = kz$, $k > 1$. O eixo de g é $L = \{iy \in \mathbb{H}^2; y > 0\}$ e $\sinh(T_g/2) = |\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}|$. Além disto, de ?? temos $\cosh(d(z, L)) = \frac{|z|}{y}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) &= \frac{|z - gz|}{2[Im(z) \cdot Im(gz)]^{1/2}} = \left(\frac{|z|}{y}\right) \cdot \frac{1}{2} \left|\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right| \\ &= \cosh(d(z, L)) \cdot \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \end{aligned}$$

2. A menos de conjugação, podemos supor que $z_0 = i$ e $g(z) = e^{i\theta}.z$, $0 < \theta < \pi$. Seja $\Delta izg(z)$ o triângulo hiperbólico isósceles com vértices em i , z e $g(z)$ e ângulos internos θ , ϕ e ϕ . Conforme mostra a figura, ao traçarmos a bissetriz partindo do vértice i obtemos o triângulo Δiz_Bz cujos lados medem $\frac{1}{2}d(z, gz)$, $d(i, z)$ e $d(i, z_B)$, os respectivos ângulos opostos aos lados, medem $\theta/2$, $\pi/2$ e ϕ . Portanto, segue de 5.21 que

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) = \sinh(d(z, z_0)) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

3. g sendo parabólico podemos assumir que $g(z) = z + 1$ e $z_0 = \infty$. Neste caso,

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) = \frac{1}{2y}.$$

Como o Núcleo de Poisson de \mathbb{H}^2 é $P(z, \infty) = y$ [?], segue o resultado.

□

5.7.4 A Geometria do Produto de Isometrias

Uma vez que toda isometria $g \in Isom^0(\mathbb{H}^2)$ é uma composição de duas reflexões, vamos estudar a natureza do produto $g = g_1g_2$, $g_1, g_2 \in Isom(\mathbb{H}^2)$, conhecendo a natureza das isometrias g_1, g_2 . Além disto, veremos como a posição relativa entre γ_1 e γ_2 determina os parâmetros geométricos de g .

Vamos começar fazendo uma análise, caso a caso, das possíveis situações: a letra e denota uma isometria elíptica, p uma parabólica e h uma hiperbólica. Antes, façamos a seguinte observação; se existem reflexões r_1 , r e r_2 , realizadas sobre as geodésicas $\gamma_1, \gamma, \gamma_2$, respectivamente, tais que $g_1 = r_1r$ e $g_2 = rr_2$, então, a natureza do produto $g_1g_2 = r_1r_2$ é determinada pela posição relativa entre as geodésicas γ_1 e γ_2 . (notação: e =elíptica, p =parabólica e h =hiperbólica)

1. e_1e_2 , conforme a figura ?? e ??
Sejam z_1 e z_2 os pontos fixos de e_1 e e_2 , respectivamente.
 - (a) $z_1 \neq z_2$. Neste caso, seja γ a geodésica que liga z_1 à z_2 . Assim, sendo $g_1 = r_1r$ e $g_2 = rr_2$, temos que $g_1g_2 = r_1r_2$. Portanto, se $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{z_{12}\} \in \widehat{\mathbb{H}}^2$, então g será elíptica ou parabólica, enquanto que, se $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ ela será hiperbólica.
 - (b) $z_1 = z_2$. Neste caso, seja γ uma geodésica passando por z_1 e sejam $g_1 = r_1r$ e $g_2 = rr_2$. Então, obviamente $g = r_1r_2$ é elíptica.
2. pe ,
Sejam z_p e z_e os pontos fixos de p e e , respectivamente.

- (a) seja γ a geodésica que liga z_p à z_e . Analogamente, temos que $g_1g_2 = r_1r_2$ e a natureza do produto será determinada pela posição relativa das geodésicas γ_1 e γ_2 , podendo ser elíptica, parabólica ou hiperbólica.

3. he ,

Sejam ρ_h a geodésica invariante por h e z_e o ponto fixo de e .

- (a) $z_e \notin \rho_h$. Seja $h = r_1r$, onde r é a reflexão sobre a geodésica γ contendo z_e , e $e = rr_2$, onde $r \cap r_2 = \{z_e\}$. Portanto, $he = r_1r_2$ é determinada pela posição relativa entre γ_1 e γ_2 .
- (b) $z_e \in \rho_h$. Análogo ao caso anterior.

4. p_1p_2

Sejam z_1 e z_2 os pontos fixos de p_1 e p_2 , respectivamente

- (a) Se $z_1 = z_2$, então p_1p_2 é parabólica.
- (b) Se $z_1 \neq z_2$, então seja γ a geodésica que liga z_1 à z_2 . Portanto, $p_1p_2 = r_1r_2$ e a sua natureza depende da posição relativa entre as geodésicas γ_1 e γ_2 .

5. hp ,

Sejam ρ_h a geodésica invariante por h e z_p o ponto fixo de p .

- (a) $z_p \notin \rho_h$. Seja $h = r_1r$, onde r é a reflexão sobre a geodésica γ contendo z_p e ortogonal à geodésica ρ_h , invariante por h . Assim, ao escrevermos $p = rr_2$ temos que $hp = r_1r_2$ e a natureza da isometria hp é determinada pela posição relativa entre γ_1 e γ_2 .
- (b) $z_p \in \rho_h$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $\rho_h = \{iy \in \mathbb{H}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Desta maneira, temos

$$h(z) = k^2z, \quad p(z) = \frac{z}{-\frac{z}{a} + 1},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o centro da geodésica $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - a| = |a|\}$. Portanto,

$$hp(z) = \frac{k^2z}{-\frac{z}{a} + 1} \Rightarrow hp \text{ é hiperbólica.}$$

6. h_1h_2 ,

Neste caso, o método dos itens anteriores não pode ser usado, pois não há uma geodésica γ de tal forma que $h_1 = r_1r$ e $h_2 = rr_2$. Porém, através de exemplos podemos verificar que h_1h_2 pode ser uma isometria elíptica, ou parabólica ou hiperbólica. Veremos adiante os critérios para avaliarmos a natureza de h_1h_2 .

Proposição 5.21. *Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas distintas e r_1 e r_2 as respectivas reflexões. Se $g = r_1 r_2$, então o produto angular entre as geodésicas é*

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g) |. \quad (5.7)$$

Demonstração. Vamos proceder a demonstração considerando os casos quando γ_1 e γ_2 são ultra-paralelas, paralelas ou coincidentes. De forma geral, o resultado segue dos resultados na seção 5.2.1

1. γ_1 e γ_2 são ultra-paralelas $\Rightarrow g$ é hiperbólica.
 $\frac{T_g}{2} = d(\gamma_1, \gamma_2)$. Da proposição 5.19, segue que $\cosh(\frac{T_g}{2}) = \frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g) |$. Assim, para concluirmos basta aplicarmos a identidade 5.8.
2. γ_1 e γ_2 são paralelas $\Rightarrow g$ é parabólica.
 Este caso é trivial, pois $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ e $| \operatorname{tr}(g) | = 2$.
3. γ_1 e γ_2 são coincidentes e formam um ângulo θ , $0 < \theta < \pi/2$. Portanto, g é elíptica e a conclusão segue da identidade 5.7 ao observarmos que $| \operatorname{tr}(g) | = 2\cos(\theta)$.

□

Proposição 5.22. *Sejam g_1 e g_2 isometrias elípticas onde g_1 tem centro em z_1 e ângulo θ_1 , enquanto g_2 tem centro em z_2 e ângulo θ_2 . Se $z_1 \neq z_2$ e $\theta_i \in (0, \pi)$, $i = 1, 2$, então, supondo que as isometrias rotacionam no sentido anti-horário,*

$$\frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g_1 g_2) | = \cosh(d(z_1, z_2)) \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (5.8)$$

Demonstração. Seja $\gamma_0 = \{z \in \mathbb{H}^2; z = iy, y \in \mathbb{R}\}$ a geodésica ligando z_1 à z_2 . Sejam γ_1 uma geodésica tal que $z_1 = \gamma_0 \cap \gamma_1$ e forme um ângulo θ_1 com γ_0 em z_1 . Analogamente, consideramos γ_2 tal que $z_2 = \gamma_0 \cap \gamma_2$ e cujo ângulo com γ_0 mede θ_2 . Desta maneira, conforme mostra a figura (xxx), para cada $k = 1, 2$,

$$\gamma_k = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - z_k| \cotg(\theta_k) = |z_k|^2 \operatorname{cosec}^2(\theta_k)\}.$$

Assim, $g_1 = r_1 r_0$ e $g_2 = r_0 r_2$ implicam em $g_1 g_2 = r_1 r_2$ e $\frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g_1 g_2) | = (\gamma_1, \gamma_2)$. Portanto, segue da expressão 5.4,

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cosh(d(z_1, z_2)) \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2).$$

□

Observação. Na proposição anterior, ao considerarmos o triângulo hiperbólico formado pelos vértices z_1 , z_2 e $\gamma_1 \cap \gamma_2$, observamos que a identidade 5.8 corresponde à expressão obtida na Lei dos Cossenos em 5.29 (os ângulos internos são θ_1 , $\pi - \theta_2$ e (γ_1, γ_2)).

Proposição 5.23. *Sejam g_1 e g_2 isometrias hiperbólicas cujos comprimentos de translação são T_1 e T_2 e os respectivos eixos são L_1 e L_2 . Se L_1 e L_2 são disjuntos, então*

$$\frac{1}{2} | \operatorname{tr}((g_1 g_2)) | = | \cosh(d(L_1, L_2)) \cdot \sinh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_2}{2}\right) + \epsilon \cdot \cosh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) |; \quad (5.9)$$

onde $\epsilon = \begin{cases} 1, \\ -1 \end{cases}$, de acordo se as orientações de g_1 e g_2 coincidem (+1) ou são invertidas (-1), conforme mostra a figura (xxx).

Demonstração. Sejam $g_1 = r_a r_b$, $g_2 = r_c r_d$ e γ_i as respectivas geodésicas associadas a r_i , $i = a, b, c, d$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\gamma_b = \gamma_c$ de tal forma que $g_1 = r_a r_b$ e $g_2 = r_b r_d$, ou seja, $g_1 g_2 = r_a r_d$. Assim, $\frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g_1 g_2) | = (\gamma_a, \gamma_d)$. Assumiremos que $\gamma_b = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e

$$L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R_1\}, \quad L_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| = R_2\}.$$

Desta forma, $\cosh(d(L_1, L_2)) = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right)$.

Sejam $z_a = \gamma_a \cap L_1$ e $z_d = \gamma_d \cap L_2$; além disto, sejam θ_a e θ_d os argumentos de z_a, z_d , respectivamente. De acordo com 5.2,

$$\cosh\left(\frac{T_1}{2}\right) = \cosh(d(z_a, \gamma_b)) = \frac{1}{\cos(\theta_a)}, \quad \cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) = \cosh(d(z_d, \gamma_b)) = \frac{1}{\cos(\theta_d)}. \quad (5.10)$$

Quando $\epsilon = +1$, conforme mostra a figura (xxx),

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \{z \in \mathbb{H}^2; |z - R_1 \cdot \operatorname{cosec}(\theta_a)| = R_1 \cotg(\theta_a)\}, \\ \gamma_b &= \{z \in \mathbb{H}^2; |z - R_2 \cdot \operatorname{cosec}(\theta_b)| = R_2 \cotg(\theta_b)\}. \end{aligned}$$

Desta forma, ao aplicarmos a fórmula 5.4 e as relações 5.10, segue que

$$\begin{aligned} (\gamma_a, \gamma_d) &= \left| -\frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} \operatorname{tg}(\theta_a) \cdot \operatorname{tg}(\theta_d) + \frac{1}{\cos(\theta_a)} \frac{1}{\cos(\theta_d)} \right| \\ &= \left| \cosh(d(L_1, L_2)) \cdot \sinh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_2}{2}\right) - \cosh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

No caso $\epsilon = -1$, basta considerarmos o centro de γ_d em $(-R_2 \cotg(\theta_d), 0)$, então

$$\frac{1}{2} | \operatorname{tr}((g_1 g_2)) | = \left| \cosh(d(L_1, L_2)) \cdot \sinh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) \right|. \quad (5.11)$$

□

Corolário 5.13. *Se na proposição anterior $\epsilon = +1$, então g_1g_2 é hiperbólica.*

Corolário 5.14. *Sejam g_1 e g_2 são isometrias hiperbólicas com eixos L_1 e L_2 disjuntos e tendo o mesmo comprimento de translação T , então*

$$\sinh\left(\frac{d(L_1, L_2)}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T}{2}\right) \geq 1. \quad (5.12)$$

Demonstração. Decorre da proposição anterior que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g_1g_2) | &= | \cosh(d(L_1, L_2))\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) + \epsilon \cdot \cosh^2\left(\frac{T}{2}\right) | \geq \\ &\geq | \sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) + \epsilon \cdot \cosh^2\left(\frac{T}{2}\right) | \geq | \sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{T}{2}\right) | = 1 \end{aligned}$$

No entanto, concluímos ao observarmos que;

$$\begin{aligned} \cosh(d(L_1, L_2))\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{T}{2}\right) &= \\ [1 + 2\sinh^2\left(\frac{d(L_1, L_2)}{2}\right)]\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) - [1 + \sinh^2\left(\frac{T}{2}\right)] &= \\ 2\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

□

Agora, vejamos a situação quando $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$;

Proposição 5.24. *Sejam g_1 e g_2 isometrias hiperbólicas. Suponha que os respectivos eixos são concorrentes em $z_0 = L_1 \cap L_2$. Sejam T_i , $i = 1, 2$, os comprimentos de translação e $\theta \in (0, \pi/2]$ o ângulo formado na interseção z_0 . Então, g_1g_2 é hiperbólica e*

$$\frac{1}{2} | \operatorname{tr}(g_1g_2) | = \cosh\left(\frac{T_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) + \sinh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_2}{2}\right) \cdot \cos(\theta). \quad (5.13)$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que uma isometria hiperbólica g pode ser escrita como a composição $g = \sigma_1\sigma_2$ de duas isometrias elípticas (rotação) de ordem 2. É claro, os centros de rotação são distintos. Para vermos isto, suponhamos que $g = r_1r_2$ é obtido pela reflexão sobre as geodésicas γ_1 e γ_2 . Sejam L o eixo de g e τ a reflexão sobre L . Assim, $\sigma_1 = r_1\tau$ e $\sigma_2 = \tau r_2$ são rotações de ordem 2 com centros em $z_1 = L \cap \gamma_1$ e $z_2 = L \cap \gamma_2$, respectivamente. Consequentemente, $g = r_1r_2 = \sigma_1\sigma_2$. Agora, suponhamos que $g_1 = \sigma_{11}\sigma_{12}$ e $g_2 = \sigma_{21}\sigma_{22}$. Assim, temos 4 centros de rotações $\{z_{i1}, z_{i2}\} = L_i \cap \gamma_i$, onde $i = 1, 2$. Ao considerarmos o triângulo hiperbólico com vértices em z_0, z_{11} e z_{12} , conforme mostra a figura (xxx), os comprimentos de translação de g_1 e g_2 são dados por $T_1 = 2.d(z_0, z_{11})$ e $T_2 = 2.d(z_0, z_{22})$. Decorre da Lei dos Cossenos em 5.9 que

$$\frac{1}{2} |tr(g_1 g_2)| = \cosh(d(z_{11}, z_{22})) = \cosh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{T_2}{2}\right) - \sinh\left(\frac{T_1}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_2}{2}\right) \cdot \cos(\theta).$$

□

5.7.5 A Geometria dos Comutadores

Nesta seção, investigaremos a natureza da isometria $[g, h]$ em função da natureza de g e de h . A estratégia é analisarmos o comutador observando produto $[g, h] = g \cdot (hg^{-1}h^{-1})$; de imediato temos que se $z_0 \in \text{Fix}_g$ então $h(z_0) \in \text{Fix}_{hg^{-1}h^{-1}}$; além disto, $hg^{-1}h^{-1}$ age em sentido oposto à g e $T_{hg^{-1}h^{-1}} = T_g$.

Proposição 5.25. *Se $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é parabólica e $\text{Fix}_g \cap \text{Fix}_h = \emptyset$, então $[g, h]$ é hiperbólico.*

Demonstração. Vamos apelar para uma demonstração de caráter geométrico procurando elucidar a questão. Seja z_g o ponto fixo de g e $h(z_g)$ o de $hg^{-1}h^{-1}$. Se γ denota a geodésica ligando z_g à $h(z_g)$ e r a reflexão sobre γ , podemos escrever $g = r_1 r$ e $hg^{-1}h^{-1} = r r_2$, onde r_1 e r_2 são reflexões sobre as geodésicas γ_1 e γ_2 . Assim, $[g, h] = r_1 r_2$. Como $\text{Fix}_g \cap \text{Fix}_h = \emptyset$ e as orientações de g e $hg^{-1}h^{-1}$ são opostas, segue que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, o que implica que $[g, h]$ é hiperbólica. □

Proposição 5.26. *Seja $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ elíptica com ponto fixo z_0 e ângulo de rotação θ . Se $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ e $z_0 \notin \text{Fix}_h$, então $[g, h]$ é hiperbólica com comprimento de translação T e*

$$\sinh\left(\frac{T}{4}\right) = \sinh\left(\frac{d(z_0, h(z_0))}{2}\right) \cdot \sin(\theta). \quad (5.14)$$

Demonstração. Seja $g = r_1 r_2$ a composição das reflexões sobre as geodésicas γ_1 e γ_2 . Analogamente, $hg^{-1}h^{-1} = r_2 r_3$, onde r_3 é a reflexão sobre a geodésica γ_3 . Uma vez que $z_0 \notin \text{Fix}_{hg^{-1}h^{-1}}$, temos que γ_1 é disjunta de γ_3 . Seja γ a geodésica ortogonal a $\gamma_i, i = 1, 3$; consideramos o triângulo com vértices em i, z_0 e $w_0 = \gamma_1 \cap \gamma$. Os lados de $\Delta i z_0 w_0$ medem $\frac{d(\gamma_1, \gamma_3)}{2}, \frac{d(z_0, h(z_0))}{2}$ e t , enquanto os respectivos ângulos opostos medem $\theta, \pi/2$ e ϕ . Decorre da Lei dos Senos 5.30 que

$$\sinh\left(\frac{d(\gamma_1, \gamma_3)}{2}\right) = \sinh\left(\frac{d(z_0, h(z_0))}{2}\right) \cdot \sin(\theta). \quad (5.15)$$

Portanto, o resultado segue uma vez que $T = 2d(\gamma_1, \gamma_3)$. □

Agora, consideraremos o caso quando g é hiperbólica. Se h for elíptica ou parabólica o caso reduz-se aos casos tratados nas proposições anteriores. Por isto, consideraremos g e h isometrias hiperbólicas. Se L_g é o eixo de g e T_g o seu comprimento de translação, então o eixo de $hg^{-1}h^{-1}$ é hL_g enquanto o seu comprimento de translação também é T_g .

Proposição 5.27. *Sejam g e h isometrias hiperbólicas e suponhamos que os eixos ρ_g e ρ_h intersectam-se formando um ângulo θ . Então, $[g, h]$ é hiperbólica com comprimento de translação T dado por*

$$\cosh\left(\frac{T}{2}\right) = 1 + 2 \cdot \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.16)$$

Demonstração. Seja T_g o comprimento de translação de g e de $hg^{-1}h^{-1}$. O resultado é imediato, basta aplicarmos a identidade 5.13 ao produto $g(hg^{-1}h^{-1})$;

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{1}{2} | \operatorname{tr}([g, h]) | = \cosh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \cos(\theta) = \\ &= 1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right)(1 + \cos(\theta)) = 1 + 2 \cdot \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Consequentemente, $\operatorname{tr}([g, h]) > 1$. □

Proposição 5.28. *Sejam g e h elementos hiperbólicos de $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ com eixos ρ_g e ρ_h formando na interseção um ângulo θ , $0 < \theta < \pi$. Se $[g, h]$ não é elíptico, então*

$$\operatorname{senh}\left(\frac{T_g}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{T_h}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta) \geq 1 \quad (5.17)$$

Demonstração. Como vimos, se ρ_g é o eixo de g , então $h(\rho_g)$ é o eixo de $hg^{-1}h^{-1}$. Ao aplicarmos a identidade 5.9 ao produto $g.(hg^{-1}h^{-1})$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{1}{2} \operatorname{tr}[g, h] &= | \cosh(d(\rho_g, h(\rho_g))) \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) | = \\ &= | \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \left[1 + 2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{d(\rho_g, h(\rho_g))}{2}\right) \right] - \left[1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{d(\rho_g, h(\rho_g))}{2}\right) \right] | = \\ &= | 2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{d(\rho_g, h(\rho_g))}{2}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{T_g}{2}\right) - 1 |, \end{aligned}$$

Por isto, $\operatorname{senh}\left(\frac{d(\rho_g, h(\rho_g))}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{T_g}{2}\right) \geq 1$. A não elipticidade de $[g, h]$ implica que $\rho_g \cap h(\rho_g) = \emptyset$. Observamos que o ângulo formado por $h(\rho_g)$ e ρ_h também mede θ . Assim, ao considerarmos o raio geodésico γ como o raio que realiza a distância $d(\rho_g, h(\rho_g))$, segue que os raios geodésicos $h(\rho_g), \rho_h, \gamma$ definem o triângulo $\triangle ABC$, conforme mostrado na figura (xxx), onde \overline{AB} mede $d(\rho_g, h(\rho_g))$, com ângulo oposto medindo θ , e \overline{AC} mede $\frac{T_h}{2}$, com ângulo oposto medindo $\pi/2$. Ao aplicarmos a Lei dos Senos 5.6, temos

$$\operatorname{senh}(d(\rho_g, h(\rho_g))) = \operatorname{senh}\left(\frac{T_h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\theta).$$

Consequentemente, vale a identidade 5.17. □

Exercício 5.18. .

1. Seja h uma isometria hiperbólica e ρ_H seu eixo. Mostre que se $z \in \rho_h$, então $d(z, h(z)) = T_h$.
2. Sejam $g, h \in Isom(\mathbb{H}^2)$, ambas hiperbólicas com eixos ρ_g e ρ_h e comprimento de translação T_g e T_h , respectivamente. Estude a natureza da isometria $[g, h]$ quando os eixos formam um ângulo θ .
3. Sejam g e h isometrias hiperbólicas com eixos ρ_g e ρ_h formando um ângulo θ , $0 < \theta < \pi$. Se $[g, h]$ não é elíptica, mostre que

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \cdot \sin(\theta) \geq 1. \quad (5.18)$$

4. Sejam g_1, \dots, g_n isometrias hiperbólicas pertencentes a uma mesma classe de conjugação com nenhum elemento elíptico. Seja T o comprimento de translação comum a classe e suponha que os eixos ρ_i , $i = 1, \dots, n$, são concorrentes, então

$$\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 1. \quad (5.19)$$

5.8 Grupos Discretos de $Isom(\mathbb{H}^2)$ **5.8.1 Grupos Fuchsianos**

Definição 5.25. $G < Isom(\mathbb{H}^2)$ é um grupo Fuchsiano se é um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Poincaré introduziu o termo grupo Fuchsiano em homenagem ao trabalho de Lazarus Fuchs (1833-1902) .

Devido a transitividade da ação de $Isom(\mathbb{H}^2)$ sobre \mathbb{H}^2 , segue do corolário ?? o seguinte fato;

Proposição 5.29. *Seja G um grupo fuchsiano. Então, o estabilizador de todo elemento $z \in \mathbb{H}^2$ é cíclico e isomorfo a $\mathbb{Z}_{2\pi/m}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.*

Definição 5.26. Um subgrupo G de $Isom(\mathbb{H}^2)$ é elementar se a ação de G sobre \mathbb{H}^2 contém uma órbita finita.

Exemplo 5.4. Os grupos abaixo são elementares;

1. $G = \langle g \rangle$, onde g é elíptico.

2. $G = \langle g \rangle$, onde g é hiperbólica. Por exemplo $g(z) = kz$, cuja geodésica invariante é o eixo- y . Neste caso, as órbita finitas são $\{0\}$ e ∞ .
3. $G = \langle g \rangle$, onde g é parabólica. Por exemplo, se $g(z) = z + 1$ temos que $\{\infty\}$ é a única órbita finita.

Proposição 5.30. *Seja G um subgrupo elementar de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $\{z_1, \dots, z_n\}$ uma órbita finita de G ;*

1. *se $n = 1$, então G é conjugado a um subgrupo de $Isom(\mathbb{H}^2)$ onde todo elemento fixa ∞ . Portanto, todo $g \in G$ é conjugado a um elemento da forma $g(z) = az + b$.*
2. *se $n = 2$, então G é conjugado a um subgrupo de $Isom(\mathbb{H}^2)$ onde todo elemento deixa invariante o conjunto $\{0, \infty\}$. Portanto, todo $g \in G$ é conjugado a um elemento da forma $g(z) = az$ ou $g(z) = \frac{a}{z}$.*
3. *se $n \geq 3$, então G contém apenas elementos elípticos.*

Demonstração. .

1. $n = 1$. Seja z_1 o ponto fixo e $h \in Isom(\mathbb{H}^2)$ uma isometria tal que $h(z_1) = \infty$. Decorre que, para todo $g \in G$, $hgh^{-1}(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $n = 2$. Seja $\{z_1, z_2\}$ um conjunto invariante e h uma isometria tal que $h(z_1) = 0$ e $h(z_2) = \infty$. Segue que ou $hgh^{-1}(z) = az$, quando $g(z_1) = z_1$ e $g(z_2) = z_2$, ou $hgh^{-1}(z) = \frac{a}{z}$, quando $g(z_1) = z_2$ e $g(z_2) = z_1$.
3. $n \geq 3$. Seja $\{z_1, \dots, z_n\}$, um conjunto invariante de G . Assim, para todo $g \in G$, existe uma potência k_j tal que $g^{k_j}(z_j) = z_j$ e, portanto, ao tomarmos o produto $k = k_1 \dots k_n$, temos $g^k(z_j) = z_j$, para todo $1 \leq j \leq n$. Como $n \geq 3$, decorre que $g^k = id_{\mathbb{H}^2}$. Consequentemente, todo elemento de G é elíptico.

□

A proposição a seguir revela a existência de um número infinito de elementos hiperbólicos num grupo não elementar;

Teorema 5.8. *Se G é um subgrupo não elementar de $Isom(\mathbb{H}^2)$, então existem infinitos elementos hiperbólicos em G , sendo que o conjuntos dos pontos fixos destes elementos são disjuntos entre si.*

Demonstração. Realizaremos a demonstração em duas etapas;

1. Suponhamos que G não contém nenhum elemento hiperbólico. De acordo com o exemplo 5.4, G tem ter pelo menos um elemento parabólico. Podemos assumir que o elemento parabólico é $p(z) = z + 1$. Assim, para qualquer $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ segue que

$$p^n g(z) = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d}, \quad tr^2(p^n g) = (a + d + nc)^2.$$

Como $p^n g$ não pode ser hiperbólico, segue que

$$(a + d + nc)^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Desta forma, qualquer $g \in G$ fixa ∞ e, por isto, G é elementar. Portanto, G contém um elemento hiperbólico.

2. Seja $h \in G$ um elemento hiperbólico cujos pontos fixos sejam α e β . Como G é não-elementar, existe $f \in G$ tal que $Fix_h = \{\alpha, \beta\}$ não é invariante por f . Consequentemente, ao considerarmos a isometria hiperbólica $h_1 = fhf^{-1}$, os conjuntos $Fix_{h_1} = \{f(\alpha), f(\beta)\}$ e Fix_h são distintos. Assim, são os seguintes os casos para analisarmos:

- (a) $Fix_h \cap Fix_{h_1} = \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos o elemento hiperbólico $g_n = h^n h_1 h^{-n}$, para o qual $Fix_{g_n} = \{h^n f(\alpha), h^n f(\beta)\}$. Para verificarmos que $Fix_{g_k} \cap Fix_{g_l} = \emptyset$, para todo par $k, l \in \mathbb{N}$, temos que considerar duas possibilidades;

- i. existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $h^k(f(\alpha)) = h^l(f(\alpha))$ ou $h^k(f(\beta)) = h^l(f(\beta))$. Neste caso, segue que $h^{k-l}(f(\alpha)) = f(\alpha)$ e $Fix_{h^{k-l}} \cap Fix_{h_1} \neq \emptyset$, o que contradiz a hipótese uma vez que $Fix_{h^{k-l}} = Fix_h$.

- ii. existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $h^k(f(\alpha)) = h^l(f(\beta))$ ou $h^k(f(\beta)) = h^l(f(\alpha))$. Desta forma, considerando a primeira situação, temos $h^{n+k-l}(f(\alpha)) = f(\beta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De acordo com a proposição 5.17, $\lim_{m \rightarrow \infty} h^m(f(\alpha)) \in Fix_h$, contradizendo, novamente, a hipótese.

- (b) Suponhamos que $Fix_h \cap Fix_{h_1} = \{\alpha\}$.

Neste caso, segue da proposição 5.18 que $[h, h_1]$ é parabólico e fixa α . Como $\{\alpha\}$ não pode ser G -invariante, existe $g \in G$ tal que $g(\alpha) \neq \alpha$; por isto $g_1 = g[h, h_1]g^{-1}$ é parabólico e não fixa α . Como h e g_1 não tem pontos fixos em comum, segue da proposição 5.25 que $Fix_{h^n} \cap Fix_{g_1^n} = \emptyset$ e, consequentemente, $[h^n, g_1^n]$ é hiperbólico para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Definição 5.27. Seja G um grupo fuchsiano.

1. Uma isometria $g \in G$ é primitiva se é a geradora do estabilizador de cada um dos seus pontos fixos.
2. Sejam $h \in G$ hiperbólico e ρ_h a geodésica invariante por h . Dizemos que h é um elemento simples de G se, para todo $g \in G$, ou $g(\rho_h) = \rho_h$ ou $g(\rho_h) \cap \rho_h = \emptyset$.

Se g é um elemento hiperbólico simples, então ao projetarmos por $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G$, a imagem da geodésica invariante por g é uma curva sem auto interseção.

5.8.2 Grupos Puramente Hiperbólicos

Um subgrupo G de $Isom(\mathbb{H}^2)$ é puramente hiperbólico se todo elemento não-trivial de G é hiperbólico, mostraremos que tais grupos são discretos. É importante observarmos que um grupo que não seja discreto possui uma sequência $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ convergindo para a identidade do grupo.

Proposição 5.31. *Sejam f e g são elementos não-triviais de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Se f e g tem exatamente um ponto fixo em comum, então $\langle f, g \rangle$ não é discreto.*

Demonstração. Pela proposição 5.18, o elemento $\tilde{g} = [f, g]$ é parabólico. Consideramos f normalizado de forma que $Fix_f = \{0, \infty\}$ e suponhamos que $Fix_f \cap Fix_g = \{\infty\}$, caso contrário considere f^{-1} em vez de f . Assim,

$$f = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}, \quad |k| > 1, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n} g f^n = \begin{pmatrix} 1 & b(k^2 - 1)k^{-2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

□

A seguir, vejamos que os subgrupos não discreto de $isom(\mathbb{H}^2)$ possuem um elemento elíptico;

Lema 5.4. *Seja G um subgrupo não-elementar de $Isom(\mathbb{H}^2)$ contendo uma sequência $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_n g_n = I$ em $Isom(\mathbb{H}^2)$. Então, existe um elemento elíptico $g \in G$.*

Demonstração. Por contradição, suponhamos que não há nenhum elemento elíptico em G . Seja $h \in G$ o elemento hiperbólico $h(z) = r^2 z$, ou seja,

$$h = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Seja $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset G$ uma sequência onde

$$g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

e $a_n d_n - b_n c_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Seja $f_n^1 = [h, g_n]$; então,

$$f_n^1 = \begin{pmatrix} a_n d_n - r^2 b_n c_n & (r^2 - 1) a_n b_n \\ (\frac{1}{r^2} - 1) c_n d_n & a_n d_n - \frac{1}{r^2} b_n c_n \end{pmatrix}$$

Desta maneira, $tr(f_n^1) = 2 - b_n c_n (r - \frac{1}{r})^2$. Assim, segue que $b_n c_n < 0$, caso contrário f_n^1 seria elíptico. De maneira análoga, suponhamos que

$$f_n^1 = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seja $f_n^2 = [h, f_n^1]$, analogamente, segue que

$$tr(f_n^2) = 2 + b_n c_n (1 + b_n c_n) (r - \frac{1}{r})^4.$$

Como existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n c_n \sim 0$, para todo $n > n_0$, segue que para todo $n > n_0$ f_n^2 não é elíptico se, e somente se, $b_n c_n > 0$. Consequentemente, $b_n c_n = 0$ e $tr(f_n^1) = tr(f_n^2) = 2$, o que implica que para $n > n_0$ f_n^1 e f_n^2 são parabólicas. Assim, a sequência $\{f_n^k\}_{k,n \in \mathbb{N}}$, onde

$$f^k = [h, f_n^{k-1}], \quad f_n^1 = [h, g_n],$$

é uma sequência de isometrias parabólicas. A condição $b_n c_n = 0$ implica que podemos assumir a existência de uma subsequência, que denotaremos $\{f_n^k\}_{k,n \in \mathbb{N}}$, na qual o primeiro elemento da segunda linha de toda matriz f_n^k é nulo ($a_{21} = 0$). Desta forma, seja $\{t_{kn}\}_{k,n \in \mathbb{N}}$, $t_{kn} \rightarrow 0$ uma sequência tal que

$$f_n^k = \begin{pmatrix} 1 & t_{kn} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad f_n^k(z) = z + t_{kn}; \quad f_n^k(\infty) = \infty.$$

Como G é não elementar, existe um elemento hiperbólico $h_1 \in G$ cuja geodésica invariante ρ_{h_1} não é o eixo $\{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$, fixado por h . Consideramos que $h_1 = r_1 r_2$, onde r_1 é a reflexão sobre γ_1 e r_2 sobre γ_2 , sendo que ambas γ_1 e γ_2 são ortogonais à ρ_{h_1} e γ_2 tem uma extremidade em $z = \infty$ (uma semi-reta). Como $\{f_n^k\}_{k,n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência densa, existe um elemento $p \in \{f_n^k\}_{k,n \in \mathbb{N}}$ tal que $p = r_2 r_3$, onde r_3 é a reflexão sobre a geodésica γ_3 com extremidade em $z = \infty$, e $\gamma_1 \cap \gamma_3 = \{z_e\}$. Portanto, a isometria $g = h_1 p = r_1 r_3$ é elíptica com centro em z_e , como mostra a figura (xxx). \square

Uma consequência imediata do lema anterior é a seguinte;

Teorema 5.9. *Seja G um subgrupo não-elementar de $Isom(\mathbb{H}^2)$ que não contém nenhum elemento elíptico. Então, G é discreto.*

Corolário 5.15. *Se G é um grupo puramente hiperbólico não-elementar então G é discreto.*

Demonstração. É claro, a afirmação decorre diretamente do lema 5.4. Apresentaremos uma demonstração geométrica para este fato. Sejam $\rho_h = \{iy \in \mathbb{H}^2 \mid y > 0\}$ a geodésica deixada invariante pela isometria $h(z) = r^2 z$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ uma sequência tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = I$ em $Isom(\mathbb{H}^2)$, assim como no lema 5.4. Desta maneira, $g_n(\rho_h)$ é invariante por $g_n h^{-1} g_n^{-1}$. Ambas as isometrias h e $g_n h^{-1} g_n^{-1}$ são hiperbólicas e tem o mesmo comprimento de translação T . Como $[h, g_n]$ não é elíptica, segue da proposição 5.28 que

$$\sinh\left(\frac{d(\rho_h, g_n(\rho_h))}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T}{2}\right) \geq 1. \quad (5.1)$$

Assim, se para n suficientemente grande tivermos $g_n(\rho_h)$ arbitrariamente próximo de ρ_h , a identidade 5.1 é violada. Neste caso, a isometria $g_n h^{-1} g_n^{-1}$ deixa de ser hiperbólica. Observamos que

$$\rho_h = \{iy \in \mathbb{H}^2; y > 0\} \quad \text{e} \quad g_n(\rho_h) = \left\{z \in \mathbb{H}^2; \left|z - \frac{a_n d_n + b_n c_n}{2c_n d_n}\right| = \frac{1}{2c_n d_n}\right\}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cosh(d(\rho_h, g_n(\rho_h))) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n + c_n d_n) = 1,$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} d(L, g_n(\rho_h)) \rightarrow 0$. Portanto, para n suficientemente grande $g_n h^{-1} g_n^{-1}$ não pode ser hiperbólica, o que contradiz a hipótese. □

Os resultados anteriores indicam a natureza dos elementos de um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Agora, deduziremos uma estimativa para o produto do comprimento de duas isometrias hiperbólicas;

Proposição 5.32. *Seja G um subgrupo puramente hiperbólico de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $g, h \in G$. Se o subgrupo $\langle g, h \rangle$ é não elementar, então para todo $z \in \mathbb{H}^2$ temos*

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, gz)\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{2}d(z, hz)\right) \geq 1. \quad (5.2)$$

O limite inferior é o melhor possível.

Demonstração. Sejam ρ_g e ρ_h as respectivas geodésicas invariantes. Como $\langle g, h \rangle$ é não-elementar e puramente hiperbólico, ou ρ_g e ρ_h são disjuntas ou são incidentes. Desta forma, vamos tratar a questão considerando dois casos: (1) g e h são não-simples (2) g é simples. Além disto, observamos que, de acordo com a identidade 5.4,

$$\sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right) = \cosh(d(z, \rho_g)) \cdot \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right). \quad (5.3)$$

1. g e h são não-simples.

Seja $f \in G$ uma isometria tal que $f(\rho_g)$ incide sobre ρ_g formando um ângulo θ_g . No entanto, $f(\rho_g)$ é invariante por $f g f^{-1}$ e $T_{f g f^{-1}} = T_g$. Como $[f g f^{-1}, h]$ não é elíptico, decorre da inequação 5.17 que

$$\sinh^2\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \text{sen}(\theta_g) \geq 1. \quad (5.4)$$

Como h também é não-simples, a inequação 5.4 também é satisfeita por h . Consequentemente,

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq 1. \quad (5.5)$$

Ao multiplicarmos as equações 5.3, escritas para g e h , e aplicarmos 5.5 obtemos 5.2.

2. g é simples.

Se ρ_g e ρ_h são incidentes, então o caso é análogo ao tratado no item anterior. Por isto, podemos considerar que ρ_g , ρ_h e $h(\rho_g)$ são disjuntas duas a duas. Após aplicarmos uma isometria, podemos considerar a situação como indica a figura 8.2.2. Consideramos que $h = rr_0$, onde r e r_0 são as reflexões sobre γ e γ_0 , respectivamente. Ao aplicarmos a identidade 5.20 ao hexágono de lados $a_1 = d(\rho_g, h(\rho_g))$, $b_1 = T_h$, $a_2 = a_3 = d(\rho_g, \rho_h)$, obtemos

$$\cosh(T_h) \cdot \sinh^2(d(\rho_g, \rho_h)) = \cosh(d(\rho_g, h(\rho_g))) + \cosh^2(d(\rho_g, \rho_h));$$

da onde,

$$\begin{aligned} \cosh^2(d(\rho_g, \rho_h))[\cosh(T_h) - 1] &= \cosh(d(\rho_g, h(\rho_g))) + \cosh(T_h) \geq \cosh(d(\rho_g, h(\rho_g))) + 1 \\ &\geq 2\sinh^2\left(\frac{d(\rho_g, h(\rho_g))}{2}\right) \end{aligned}$$

Agora, sejam γ_n as geodésicas ortogonais à γ_g de forma que g^n ou g^{-n} seja igual a $r_n r_0$, onde r_n é a reflexão sobre γ_n . Desta forma, $d(\gamma_0, \gamma_n) = n \frac{T_g}{2}$. Segue que $\gamma_n \cap \gamma = \emptyset$ para todo n , caso contrário o elemento $r_n r = (r_n r_0)(r_0 r) \in G$ é elíptico. Na figura 8.2.4, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $d_1 \leq d_2$, o que implica que $d_1 \leq \frac{T_g}{4}$. Ao aplicarmos a identidade ?? ao pentágono de lados medindo $a = d_1$, $b = d(\rho_g, \gamma)$ e $d = d(\gamma_{n+1}, \gamma)$, conforme indica a figura 8.2.4 temos o seguinte;

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{T_g}{4}\right) \cdot \sinh(d(\rho_g, \gamma)) &\geq \sinh(d_1) \cdot \sinh(d(\rho_g, \gamma)) = \\ &= \cosh(d(\gamma_{n+1}, \gamma)) \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right).\sinh(d(\rho_g, \gamma)) = 2\cosh\left(\frac{T_g}{4}\right).\sinh\left(\frac{T_g}{4}\right).\sinh(d(\rho_g, \gamma)) \geq 2.$$

No entanto,

$$2\cosh(d(z, \rho_g)).\cosh(d(z, \rho_h)) \geq \cosh[d(z, \rho_g) + d(z, \rho_h)] \geq \cosh(d(\rho_g, \rho_h)).$$

Assim, decorre de 5.3 que

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{d(z, gz)}{2}\right).\sinh\left(\frac{d(z, hz)}{2}\right) &= \cosh(d(z, \rho_g)).\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right).\cosh(d(z, \rho_h)).\sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\cosh(d(\rho_g, \rho_h)).\sinh\left(\frac{T_g}{2}\right).\sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) \geq 1 \end{aligned}$$

Resta mostra que o limite inferior em 5.2 é o melhor possível. Consideramos 4 geodésicas distintas γ_j , conforme mostra a figura 8.2.1. Seja g um elemento hiperbólico que fixa a geodésica ligando 1 à -1 e leva γ_1 sobre γ_2 ; e seja h o elemento que fixa a geodésica que liga i à $-i$ e leva γ_3 sobre γ_4 . Assim, o grupo $G = \langle g, h \rangle$ é não elementar e, sendo puramente hiperbólico, age discretamente em \mathbb{H}^2 . Além disto,

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{d(0, g(0))}{2}\right).\sinh\left(\frac{d(0, h(0))}{2}\right) &= \sinh\left(\frac{T_g}{2}\right).\sinh\left(\frac{T_h}{2}\right) = \\ &= \sinh(d_1).\sinh(d_2) = \cosh(d(\gamma_2, \gamma_4)). \end{aligned}$$

No entanto, podemos construir as geodésicas de forma que $d(\gamma_2, \gamma_4)$ seja arbitrariamente pequeno. □

5.8.3 Conjuntos Limites. Classificação por Espécie

Definição 5.28. Seja G um grupo fuchsiano;

1. Um ponto $x \in \widehat{\mathbb{H}}^2$ é um ponto limite de G se existe um ponto $z \in \mathbb{H}^2$ e uma sequência $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$.
2. O conjunto limite de G é o conjunto

$$\Lambda(G) = \{x \in \widehat{\mathbb{H}}^2 \mid x \text{ é ponto limite de } G\} \tag{5.6}$$

Observação. Decorre da definição as seguintes propriedades para o conjunto limite;

1. Segue da natureza descontínua da ação de G que $\Lambda(G) \subset S^\infty$.
2. Λ é G -invariante, pois, se $x = \lim_n g_n(z_0)$, então $g(x) = \lim_n (g \cdot g_n)(z_0)$, para todo $g \in G$.

Exemplo 5.5.

1. Seja g um elemento elíptico e $G = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Então, $\Lambda(G) = \emptyset$.
2. Seja g um elemento parabólico e $G = \langle g \rangle$. Então, $\Lambda(G) = \{p\}$, onde $g \cdot p = p \in S^\infty$ é único ponto fixo de g .
3. Seja g um elemento hiperbólico e $G = \langle g \rangle$. Então, $\Lambda(G) = \{p, q\}$, onde $p, q \in S^\infty$ são os pontos fixos de g .
4. O Grupo de Picard é o subgrupo de $Isom(\mathbb{H}^2)$ definido assim;

$$G^{\mathcal{P}} = \left\{ g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

Obviamente, $G^{\mathcal{P}}$ é um subgrupo discreto em $Isom(\mathbb{H}^2)$. Ao considerarmos os elementos

$$g_{p,q}(z) = \frac{(1-pq)z + p^2}{-q^2z + (1+pq)}, \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

observamos que, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, a isometria $g_{p,q}$ é parabólica e $g(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$. Portanto, $\mathbb{Q} \subset \Lambda(G)$ e $G^{\mathcal{P}}$ não age discontínuamente sobre \mathbb{H}^2 .

Um fato interessante é que o ponto limite depende exclusivamente de uma sequência do grupo;

Lema 5.5. *Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Isom(\mathbb{H}^2)$ uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z_0) = x_0 \in S^\infty$. Se $g_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = x_0$ e $\lim_n c_n = \infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{d_n} = x_0$ e $\lim_n d_n = \infty$.*

Demonstração. Como $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\lim_n g_n(z_0) = x_0 \in \mathbb{R}$, apenas uma das possibilidades abaixo pode ocorrer;

1. $\lim_n \frac{a_n}{c_n} = x_0$ e $\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \frac{d_n}{c_n} = 0$, ou
2. $\lim_n \frac{b_n}{d_n} = x_0$ e $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{c_n}{d_n} = 0$.

No primeiro caso, segue da identidade

$$\left| g_n(z_0) - \frac{a_n}{c_n} \right| = \frac{1}{|c_n| \cdot |c_n z_0 + d_n|} \tag{5.7}$$

que $\lim_n c_n = \infty$. No segundo caso, suponhamos $z_0 \neq 0$, caso contrário é imediato, consideramos a isometria $h_n(z) = \frac{b_n z + a_n}{d_n z + c_n}$ porque $\lim_n g_n(z_0) = \lim_n h_n(z_0^{-1}) = x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma análoga, temos

$$|h_n(z_0^{-1}) - \frac{b_n}{d_n}| = \frac{1}{|d_n| \cdot |d_n z_0^{-1} + c_n|} \quad (5.8)$$

e $\lim_n d_n = \infty$. □

Proposição 5.33. *Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ uma seqüência tal que $\lim_n g_n(z_0) = x$. Então, existe uma subsequência tal que $g_n(z) \rightarrow x$ uniformemente para todo $z \in \widehat{\mathbb{H}^2} - \{0\}$.*

Demonstração. Sejam $g_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$, $h_n(z) = \frac{b_n z + a_n}{d_n z + c_n}$,

$$C_n = \{z \in \mathbb{H}^2; |c_n z + d_n| = \frac{1}{|c_n|^{1/2}}\} \quad \text{e} \quad D_n = \{z \in \mathbb{H}^2; |d_n z + b_n| = \frac{1}{|d_n|^{1/2}}\}.$$

Segue das expressões 5.7 e 5.8 que

$$g_n(C_n) = \{z \in \mathbb{H}^2; |g_n(z) - \frac{a_n}{c_n}| = \frac{1}{|c_n|^{1/2}}\} \quad \text{e} \quad h_n(D_n) = \{z \in \mathbb{H}^2; |h_n(z) - \frac{b_n}{d_n}| = \frac{1}{|d_n|^{1/2}}\}.$$

Assim como na demonstração do lema 5.5, vamos considerar as duas situações possíveis. No primeiro caso, onde $\lim_n \frac{a_n}{c_n} = x_0$ e $\lim_n c_n = \infty$, o exterior do círculo C_n é levado sobre o interior do círculo $g_n(C_n)$, conforme indica a figura (xxx), enquanto o raio de ambos os círculo tendem à zero. Além disto, o centro do círculo C_n converge para $\lim_n \left(-\frac{d_n}{c_n}\right) = 0$. Consequentemente, para todo $z \in \mathbb{H}^2 - \{0\}$, $\lim_n g_n(z) = x_0$ uniformemente. No segundo caso, a situação é análoga ao considerarmos h_n e D_n . □

Corolário 5.16. $\Lambda(G)$ é fechado.

Demonstração. Consideramos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda(G)$ uma seqüência convergindo para $x \in S^\infty$. Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $\{g_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ tais que $x_n = \lim_k g_k^n(z_0)$. Agora, seja $\{g_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência tal que

$$|g_k^n(z_0) - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Portanto,

$$|g_k^n(z_0) - x| < |g_k^n(z_0) - x_n| + |x_n - x|,$$

Consequentemente, restritos a subsequência, $\lim_k g_k^n(z_0) = x$. □

Corolário 5.17. *Se G é um grupo fuchsiano não-elementar, então $\Lambda(G)$ é um conjunto perfeito (contém seus pontos de acumulação).*

Demonstração. Pelo teorema 5.8 existem infinitos elementos hiperbólicos em G , o que implica em $\#\Lambda(G) = \infty$. Vamos mostrar que todo ponto em $\Lambda(G)$ é ponto de acumulação de uma sequência em $\Lambda(G)$. Sejam $x_0 \in \Lambda(G)$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência $g_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$ tal que $x_0 = \lim_n g_n(z_0)$ e $\lim_n \frac{a_n}{c_n} = x_0$. O ponto 0 também é um ponto limite uma vez que, pela proposição 5.33, $0 = \lim_n \left(-\frac{d_n}{c_n}\right) = \lim_n g_n^{-1}(z_0)$. Havendo um terceiro ponto limite x_1 , ao aplicarmos a proposição 5.33 à extensão da ação da sequência $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre S^∞ , concluímos que $\lim_n g_n(x_1) = x_0$. No segundo caso, a análise é análoga. \square

Corolário 5.18. *Sejam G um grupo fuchsiano não-elementar e $x_0 \in \Lambda(G)$. Então, a órbita de x_0 é densa em $\Lambda(G)$.*

Demonstração. De acordo com a proposição 5.33, a cada ponto $x \in \Lambda(G)$ associamos uma sequência $\{g_n^x(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$. G sendo não-elementar implica em $\#\Lambda(G) > 2$, da onde concluímos que todo ponto $x \in \Lambda(G)$ pode ser aproximado por $\{g_n^x(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_0 \in \Lambda(G)$. \square

Corolário 5.19. *Seja G um grupo fuchsiano não-elementar. Então, $\Lambda(G)$ é o fecho do conjunto dos pontos fixos dos elementos hiperbólicos em G .*

Demonstração. Segue do teorema 5.8 que em G existem infinitos elementos hiperbólicos. Seja $h \in G$ o elemento hiperbólico $h(z) = k^2 z$, $k > 1$, assim temos $\text{Fix}_h = \{0, \infty\}$. Portanto, $\infty \in \Lambda(G)$ porque $\lim_n h^n(z) = \infty$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{H}}^2 - \{0\}$. Decorre da proposição 5.33 que a órbita de ∞ esta contida em $\Lambda(G)$ e todas a suas subsequências convergem em $\Lambda(G)$. \square

Os grupos fuchsianos subdividem-se em duas espécies, de acordo com o conjunto limite;

Definição 5.29. G é de 1^a -espécie se $\Lambda(G) = S^\infty$, caso contrário G é de 2^a -espécie .

Decorre dos resultados anteriores que quando G é um grupo fuchsiano de 2^a -espécie o conjunto limite $\Lambda(G)$ é a união enumerável de arcos fechados mutuamente disjuntos em S^∞ . Exemplos de grupos de 2^a -espécie serão dados na seção sobre Grupos de Schottky e de grupos de 1^a -espécie na seção sobre Grupos Triangulares.

5.8.4 Polígonos Fundamentais

Nesta seção, descreveremos alguns resultados que visam compreender o espaço quociente \mathbb{H}_P^2/G . Devido a riqueza e a complexidade do assunto, não exauriremos a análise nem apresentaremos algumas das demonstrações, as quais podem ser encontradas nas referências [?] e [?]. Devido a compacidade do espaço $\widehat{\mathbb{H}}_P^2$, é mais simples a visualização geométrica no disco hiperbólico \mathbb{H}_P^2 , embora os cálculos sejam feitos em \mathbb{H}^2 .

Definição 5.30. Seja G um grupo Fuchsiano. \mathcal{P} é um polígono fundamental convexo para G (abreviaremos pf_c), quando;

1. $\overline{\mathcal{P}}$ for uma região fundamental para G ,
2. \mathcal{P} for um domínio e $\partial\overline{\mathcal{P}}$ é um polígono hiperbólico,
3. \mathcal{P} for localmente finito, o que significa que cada subconjunto compacto de $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ intersecta um número finito de G -imagens de $\overline{\mathcal{P}}$,
4. \mathcal{P} for convexo.

Observação. .

1. \mathcal{P} pode ter vértices em S^∞ , talvez um número infinito deles, assim como o bordo de \mathcal{P} também pode ter lados que são arcos de círculo em S^∞ .
2. Sejam $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ e P_n um (pf_c) para o grupo $G_n = \langle g_n \rangle$, então

$$\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{P}_i, \quad \text{é um } (pf_c) \text{ para } G.$$

Na próxima seção, veremos que todo grupo Fuchsiano admite um polígono fundamental convexo.

Exemplo 5.6. .

1. $G = \langle g_1, g_2 \rangle$, onde $g_1(z) = z + 3$ e $g_2(z) = \frac{z}{z+1}$.

É fácil verificar que $\mathcal{P}_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -3 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3\}$ é um pf_c para $G_1 = \langle g_1 \rangle$. Para descrevermos \mathcal{P}_2 , o pf_c de $G_2 = \langle g_2 \rangle$, observamos que

$$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad |g_2(z) - 1| = \frac{1}{|z+1|}.$$

Assim, a imagem de $\sigma = \{z \in \mathbb{H}^2; |z+1| = 1\}$ por g_2 é $\tau = \{z \in \mathbb{H}^2; |z-1| = 1\}$. Além disto, o interior de σ é levado no exterior de τ , enquanto o exterior de σ é levado no interior de τ . Desta forma, $\mathcal{P}_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z+1| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{H}^2; |z-1| > 1\}$ é um (pf_c) para G_2 , enquanto a região $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ na figura (xxx) é im pf_c para G .

2. $G = \langle g_1, g_2 \rangle$, onde $g_1(z) = 2z$ e $g_2(z) = \frac{3z+4}{2z+3}$.

Neste caso, temos que

$$|g_2(z) - \frac{3}{2}| = \frac{1}{4} \frac{1}{|z + \frac{3}{2}|}.$$

Segue da expressão acima que g_2 leva a região $\{z \in \mathbb{H}^2; |z + \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ sobre a região $\{z \in \mathbb{H}^2; |z - \frac{3}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$, e leva $\{z \in \mathbb{H}^2; |z + \frac{3}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$ sobre a região $\{z \in \mathbb{H}^2; |z - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Portanto, $\mathcal{P}_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z + \frac{3}{2}| \geq \frac{1}{2}\} \cap \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \frac{3}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$. Portanto, $\mathcal{P}_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; 1 < |z| < 2\}$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ é o *pf* de G , conforme a figura (xxx).

3. Seja γ_n a geodésica $\{z \in \mathbb{H}^2; |z - (4n + 2)| = 1\}$ e γ'_n a reflexão de γ_n sobre o eixo imaginário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n \in Isom(\mathbb{H}^2)$ o elemento hiperbólico que aplica o exterior de γ_n sobre o interior de γ'_n , isto é,

$$g_n(z) = -(4n + 2) + \frac{1}{z - (4n + 2)}.$$

Seja $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$. Um *pf* para G é obtido assim: para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{H}^2; |z + (4n + 2)| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{H}^2; |z - (4n + 2)| > 1\},$$

e $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$. O *pf* para G encontra-se na figura (xxx).

Uma vez que $g(\bar{\mathcal{P}}) \cap \bar{\mathcal{P}}$ é convexo, segue que ele é um segmento de geodésica, possivelmente vazio, ou contém 3 pontos não colineares e o triângulo formado por eles. Se a segunda possibilidade ocorrer, então $g(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, o que não é possível. Pelo mesmo argumento, concluímos que para quaisquer $g, h \in G$, onde $g \neq h$, $\bar{\mathcal{P}} \cap g(\bar{\mathcal{P}}) \cap h(\bar{\mathcal{P}})$ é um ponto.

Definição 5.31. Seja \mathcal{P} um polígono fundamental convexo para G .

1. Um lado de \mathcal{P} é um segmento geodésico de comprimento positivo da forma $\bar{\mathcal{P}} \cap g(\bar{\mathcal{P}})$, onde $g \in G$.
2. Um vértice de \mathcal{P} é um ponto $v \in \bar{\mathcal{P}}$ da forma $v = \bar{\mathcal{P}} \cap g(\bar{\mathcal{P}}) \cap h(\bar{\mathcal{P}})$, onde $g, h \in G$ e $g \neq h$.

Observação. Pode ocorrer que uma sequência de lados de \mathcal{P} esteja sobre uma mesma geodésica. Neste caso, dizemos que a união destes lados formam uma aresta de \mathcal{P} .

Um grupo fuchsiano G é sempre enumerável por ser um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Decorre da enumerabilidade de G , juntamente com o fato de \mathcal{P} ser localmente finito, que;

1. \mathcal{P} tem um número enumerável de lados e vértices,
2. Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, apenas um número finito de lados e vértices podem encontrar K ,
3. $\partial\mathcal{P}$ é a união de lados de \mathcal{P} ,

4. a interseção de um par de lados de \mathcal{P} ou é vazia ou é um vértice que esta na extremidade de cada um dos lados.

Vamos agora entender a relação entre G e \mathcal{P} . Seja

$$G^* = \{g \in G \mid \overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}) \text{ é um lado de } \mathcal{P}\},$$

e seja $S = \{\overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}) \mid g \in G^*\}$ o conjunto dos lados de \mathcal{P} . Ao considerarmos a aplicação

$$\Upsilon : G^* \rightarrow S, \quad \Upsilon(g) = \overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}),$$

observamos que, por definição, ela é sobrejetiva e também é injetiva porque $\overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}) = \overline{\mathcal{P}} \cap h(\overline{\mathcal{P}})$ se, e somente se, $g = h$. Desta forma, a cada lado $s \in S$ podemos associar $g_s = \Upsilon^{-1}(s)$, e $s = \overline{\mathcal{P}} \cap g_s(\overline{\mathcal{P}})$. Decorre que $s' = g_s^{-1}(s) = \overline{\mathcal{P}} \cap g_s^{-1}(\overline{\mathcal{P}})$ também é um lado de \mathcal{P} e $g_{s'} = g_s^{-1}$. Seja $\mathfrak{p} : S \rightarrow S$, $\mathfrak{p}(s) = s' = g_s^{-1}(s)$ a aplicação de aplicação que identifica os lados em pares. Ela é bem definida, pois

$$(s')' = g_{s'}^{-1}(s') = (g_s^{-1})^{-1}(g_s^{-1}(s)) = g_s g_s^{-1}(s) = s.$$

Assim, temos uma partição para o conjunto dos lados de \mathcal{P} dada por $S = \bigcup \{s, s'\}$, onde $s' = g_s^{-1}(s)$ e $g_s \in G^*$.

Proposição 5.34. *Seja G um grupo Fuchsiano e \mathcal{P} um polígono fundamental convexo para G . Então, o conjunto $G^* \subset G$ gera o grupo G .*

Demonstração. Seja G_0 o subgrupo de G gerado por G^* . Seja $z \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ e $g \in G$ de forma que $g(z) \in \overline{\mathcal{P}}$; além disto, suponha que para $h \in G$ também tenhamos que $h(z) \in \overline{\mathcal{P}}$. Assim, a única possibilidade é que $h(z)$ e $g(z)$ pertencem ao $\partial \overline{\mathcal{P}}$, ou seja $h(z) \in \overline{\mathcal{P}} \cap hg^{-1}(\overline{\mathcal{P}})$. Portanto, $hg^{-1} \in G_0$ e $[g] = [h]$ em G/G_0 . Seja $\phi : \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2 \rightarrow G/G_0$ a aplicação definida por $\phi(z) = [g]$, onde $g(z) \in \overline{\mathcal{P}}$. O fato de \mathcal{P} ser localmente finito implica que, dada uma vizinhança aberta $V(z)$ de z , existe um número finito de imagens $g_1(\overline{\mathcal{P}}), \dots, g_m(\overline{\mathcal{P}})$ tais que;

1. $z \in g_1(\overline{\mathcal{P}}) \cap \dots \cap g_m(\overline{\mathcal{P}})$,
2. $V(z) \subset g_1(\overline{\mathcal{P}}) \cup \dots \cup g_m(\overline{\mathcal{P}})$, e se $g(\overline{\mathcal{P}}) \cap V(z) \neq \emptyset$, então $g = g_i$.

Portanto, se $w \in V(z)$, então $w \in g_j(\overline{\mathcal{P}})$ para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, da onde $\phi(w) = G_0 g_j^{-1} = \phi(z)$. Consequentemente, ϕ é constante em $V(z)$. Como $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ é conexo, segue que ϕ é constante em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$. Desta forma, assumindo que $z \in \mathcal{P}$, $g \in G$ e $w \in g^{-1}(\mathcal{P})$, temos

$$G_0 = \phi(z) = \phi(w) = G_0 g \quad \Rightarrow \quad g \in G_0.$$

Consequentemente, $G = G_0$. □

A seguir, analisaremos a geometria nos vértices para obtermos uma condição suficiente que garanta que o polígono fundamental de G ladrilhe \mathbb{H}^2 .

Definição 5.32. Seja G um grupo Fuchsiano.

1. Um ciclo C em $\overline{\mathcal{P}}$ é a interseção de uma órbita de G com $\overline{\mathcal{P}}$. Necessariamente, C é um conjunto finito $\{z_1, \dots, z_n\}$ com comprimento denotado por $|C| = n$.
2. Se $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ é um ciclo, então os grupos de isotropia de z_j são conjugados e isomorfos à \mathbb{Z}_N , para algum $N \in \mathbb{N}$. A ordem do ciclo C é $ord(C) = N$.
3. Seja C um ciclo e suponha que em z_j o ângulo interno de $\overline{\mathcal{P}}$ seja θ_j . Então, o ângulo do ciclo C é $\theta(C) = \theta_1 + \dots + \theta_n$.

Proposição 5.35. *Seja G um grupo Fuchsiano e \mathcal{P} um polígono fundamental convexo para G de G . Então, para todo ciclo $C \subset \overline{\mathcal{P}}$ temos*

$$ord(C) = \frac{2\pi}{\theta(C)}.$$

Demonstração. É imediata, caso contrário não existiria um $(pfc) \overline{\mathcal{P}}$ para G . □

Inicialmente, suponhamos que o ciclo C não contém nenhum elemento que seja ponto fixo de uma isometria elíptica pertencente à G ; neste caso dizemos que C é um ciclo acidental. Ciclos acidentais são caracterizados pelo fato que $\theta(C) = \theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi$, $n = |C|$; por isto, podemos classificá-los pelo comprimento;

1. $C = \{z_1\}$, então $\theta_1 = 2\pi$, da onde $z_1 \in \mathcal{P}$,
2. $C = \{z_1, z_2\}$ $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, uma vez que $0 \leq \theta_i \leq \pi$. Assim, z_j é um ponto situado no interior de uma aresta
3. Segue que se z é um vértice acidental, então o comprimento do ciclo de z é maior ou igual a 3 ($|C| \geq 3$).

Observação. É conveniente considerarmos os pontos fixos elípticos como vértices de $\overline{\mathcal{P}}$. É uma questão de conveniência considerarmos os pontos elípticos de ordem 2 como vértices ou não; conforme mostra o exemplo $G = \{I, g\}$, onde $g(z) = -1/z$. Neste caso, $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{H}^2; |z| < 1\}$. Podemos considerar que $\overline{\mathcal{P}}$ tem um lado dado pela geodésica ligando -1 à 1 e nenhum vértice, ou considerar que \mathcal{P} tem um vértice em $z = i$ e dois lados que formando a aresta $\{z \in \mathbb{H}^2; |z| = 1\}$.

Quando o grupo fuchsiano é de 1ª-espécie o polígono fundamental convexo \mathcal{P} é um subconjunto limitado de \mathbb{H}^2 . Quando ele é de 2ª-espécie \mathcal{P} pode ter um conjunto enumerável de arestas sobre S^∞ com medida euclideana finita, tais arestas são denominadas de lados livres de \mathcal{P} ; cada um deles é um intervalo fechado. Quando um vértice v de \mathcal{P} pertence a S^∞ dizemos que é um vértice próprio sempre que v for a extremidade de dois lados em \mathcal{P} , e de vértice impróprio quando ele for a extremidade de um lado livre de \mathcal{P} . Em ambos os casos, v é um vértice de \mathcal{P} no infinito. (figura 9.3.2)

5.8.5 Polígonos de Dirichlet. Teorema de Poincaré

Nesta seção, apresentaremos, sem demonstrá-los, dois resultados fundamentais para a teoria dos grupos Fuchsianos: O teorema de existência de um polígono fundamental convexo e o teorema de Poincaré. Para maiores detalhes recomendamos as referências [?] e [?].

Seja G um grupo Fuchsiano agindo em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ e seja $w \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ um ponto que não é ponto fixo de algum elemento elíptico de G . Para cada $g \in G$, $g \neq I$, definimos

$$L_g(w) = \{z \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2 \mid d_{\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2}(z, gw)\}, \quad H_g(w) = \{z \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2 \mid d_{\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2}(z, w) < d_{\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2}(z, gw)\}$$

Observação. $L_g(w)$ é a geodésica mediatriz dos pontos $w, g(w) \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, enquanto $H_g(w)$ é um semi-plano, portanto convexo.

Definição 5.33. O polígono de Dirichlet $\mathcal{D}(w)$ com centro em $w \in \mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ que é associado à G é

$$\mathcal{D}(w) = \bigcap_{g \in G} H_g(w) \tag{5.9}$$

Um fato importante é que para todo elemento $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2)$, $h(\mathcal{D}(w)) = \mathcal{D}(h(w))$.

Teorema 5.10. O polígono de Dirichlet $\mathcal{D}(w)$ é um polígono fundamental convexo para G .

Corolário 5.20. Se w_1 e w_2 forem pontos que não sejam pontos fixos de elementos elípticos de G , então os espaços quocientes $\overline{\mathcal{D}(w_1)}/G$ e $\overline{\mathcal{D}(w_2)}/G$ são homeomorfos.

Assim, a cada grupo Fuchsiano G podemos associar um polígono fundamental convexo \mathcal{P}_G que ladrilha \mathbb{H}^2 . O conjunto de geradores de G definem os lados de \mathcal{P}_G e determinam os pares de lados que são identificados, o que nos permite descrever o orbital \mathcal{P}_G/G . A condição geométrica necessária para \mathcal{P} ladrilhar \mathbb{H}^2 é a seguinte;

Condição (V) - Para todo ciclo $C \subset \partial \overline{\mathcal{P}}_G$, a soma dos ângulos internos do ciclo é da forma $\theta(C) = \frac{2\pi}{N}$, onde $N = \text{ord}(C)$.

O Teorema de Poincaré afirma que a recíproca é verdadeira, ou seja, a condição (V) também é suficiente. Antes de enunciá-lo, vamos considerar sobre um polígono hiperbólico \mathcal{P} uma partição do conjunto de lados S ;

$$S = \bigcup \{s, s'\}. \tag{5.10}$$

Agora, seja $G_S = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2) \mid s = \overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}), s \in S\}$. Dizemos que G_S é subordinado a partição 5.10 se G_S admite uma partição

$$G_S = \bigcup_{g_s \neq I} \{g_s, g_s^{-1}\},$$

onde, $s = \overline{\mathcal{P}} \cap g_s(\overline{\mathcal{P}})$ e $s' = \overline{\mathcal{P}} \cap g_s^{-1}(\overline{\mathcal{P}})$.

Teorema 5.11. (Poincaré) *Seja \mathcal{P} um domínio convexo em \mathbb{H}^2 de tal forma que $\partial\overline{\mathcal{P}}$ é um polígono hiperbólico. Seja $S = \{s \subset \partial\overline{\mathcal{P}} \mid s \text{ é lado de } \mathcal{P}\}$ e seja $S = \bigcup\{s, s'\}$ uma partição de S em pares de lados. Suponha que*

1. $G_S = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2) \mid \overline{\mathcal{P}} \cap g(\overline{\mathcal{P}}) \subset S\}$ é um conjunto de isometrias de \mathbb{H}^2 subordinada a partição $S = \bigcup\{s, s'\}$,
2. a condição (V) é satisfeita.

Então, o grupo G gerado por G_S é um grupo Fuchsiano e \mathcal{P} é um polígono fundamental convexo para G .

5.8.6 Região de Nielsen

O polígono fundamental convexo de um grupo fuchsiano de 1ª-espécie é um subconjunto limitado de \mathbb{H}^2 , quando G é de 2ª-espécie surgem vértices e arestas no infinito. Na proposição 5.31, mostramos que, num grupo fuchsiano, não podem existir um elemento hiperbólico h e outro parabólico g com $\text{Fix}_h \cap \text{Fix}_g = \{z_0\}$, senão $\langle g, h \rangle$ não é discreto.

Definição 5.34. Um arco de discontinuidade para um grupo fuchsiano G é um arco em S^∞ sobre o qual a ação estendida de G sobre $\widehat{\mathbb{H}}^2$ é descontínua.

Quando G é de 2ª-espécie vimos que $S^\infty - \Lambda(G)$ é uma união enumerável de arcos, cada um sendo um exemplo de arco de discontinuidade. Um arco de discontinuidade C , conforme a figura (xxx), define uma geodésica γ_C que divide \mathbb{H}^2 em dois semi-planos, seja H_C^1 o semi-plano cujo bordo é $C \cup \gamma_C$ e H_C^2 o seu complementar. Se G é de 2ª-espécie, S^∞ é a união enumerável de arcos C_i sobre os quais a ação de G é descontínua; sejam γ_i as respectivas geodésicas definidas pelas extremidades de C_i , e H_i o semi-plano cujo bordo é $C_i \cup \gamma_i$. Como a coleção $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é G -invariante, a coleção $\{H_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ também é G -invariante. Devido a possível existência de pontos fixos em S^∞ , a união dos arcos de discontinuidade é um subconjunto aberto de S^∞ .

Definição 5.35. Sejam G um grupo fuchsiano não elementar de 2ª-espécie agindo sobre \mathbb{H}^2 e $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma coleção de arcos descontínuos associados à G . A região de Nielsen associada à G é a região

$$N_G = \bigcap_i H_i^2 \tag{5.11}$$

Se G for de 1ª-espécie definimos $N_G = \mathbb{H}^2$

N_G é o menor conjunto G -invariante aberto e convexo em \mathbb{H}^2 . Geometricamente, N_G corresponde ao espaço \mathbb{H}^2 cortado ao longo das geodésicas γ_i . Cada uma das componentes de $(\mathbb{H}^2 - N_G)/G$ é homeomorfa a um cilindro cujo bordo é formado pelas curvas C_i e γ_i .

Há dois tipos de elementos hiperbólicos que, por motivos geométricos, merecem atenção:

- (a) os elementos hiperbólicos simples, definidos em 5.27.
- (b) os elementos hiperbólicos de bordo, que são aqueles deixam invariante algum arco de discontinuidade. Estas isometrias existem apenas quando G é de 2ª-espécie. Neste caso, temos

$$S^\infty - \Lambda(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \subset S^\infty \text{ é um arco fechado,}$$

e a translação de cada I_i sobre S^∞ define um elemento hiperbólico de bordo.

Proposição 5.36. *Seja G um grupo fuchsiano finitamente gerado. Então,*

- 1. *existe um número finito de classes de conjugação de subgrupos cíclicos gerados por elementos hiperbólicos de bordo.*
- 2. *podem existir infinitas classes de conjugação geradas por elementos hiperbólicos simples.*

Demonstração. .

- 1. G sendo finitamente gerado implica que o (pfc) \mathcal{P} possui um número finito de lados livres s_1, \dots, s_n , onde cada lado s_i pertence a um intervalo de discontinuidade C_i . Seja h_i o elemento hiperbólico de bordo que deixa C_i invariante. Agora, consideramos h um elemento hiperbólico de bordo que deixa o intervalo de discontinuidade C invariante. Como C é um arco de dicontinuidade para G , existe $g \in G$ tal que $C \in g(\mathcal{P})$. Desta forma, $g^{-1}(C) = C_i$, para algum $1 \leq i \leq n$, e $gh_i g^{-1}$ deixa C invariante, da onde temos que $h = g^{-1}h_i g$. Portanto, todo elemento de bordo é conjugado a um dos h_i .
- 2. Neste item, basta construir um exemplo. Seja G o grupo fuchsiano gerado pelos elementos hiperbólicos f e g obtidos pela identificações dos lados de um polígono \mathcal{P} de 4-lados e vértices $v_1, v_2, v_3, v_4 \in S^\infty$, como mostra a figura 10.3.1. Segue da geometria da ação que f e g são elementos hiperbólicos simples e primitivos. Agora, consideramos o polígono \mathcal{P}_1 com vértices v_1, v_3, v_4, v_5 , onde $v_5 = f(v_1)$, e observamos que pelo teorema de Poincaré ele também é um (pfc) para G . As identificações dos lados de \mathcal{P}_1 são f e fg , ambos elementos hiperbólicos, simples

e primitivos. Este processo gera a sequência $\{f^n g\}$, onde todos são hiperbólicos, simples e primitivos. Além disto, após normalizarmos f na forma

$$f = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

temos $tr(f^n g) = k^n a + \frac{d}{k^n}$. Portanto, a sequência tem uma infinidade de elementos hiperbólicos, simples e primitivos que não são conjugados.

□

O significado geométrico da proposição acima, quando G é finitamente gerado, é que \mathbb{H}^2/G tem um número finito de fins e existem infinitas geodésicas fechadas mutuamente não homotópicas.

5.8.7 Grupos de Schottky

Sejam $C_1, C'_1, \dots, C_n, C'_n$ uma coleção de geodésicas circulares em \mathbb{H}^2 limitando uma região $R \in \mathbb{H}^2$. Assuma que a cada par de geodésicas $\{C_k, C'_k\}$ existe uma isometria $f_k \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que $f_k(C_k) = C'_k$ e $f_k(R) \cap R = \emptyset$.

Definição 5.36. O grupo $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ obtido a partir da família de geodésicas circulares descrita acima é um Grupo de Schottky se, para cada $k = 1, \dots, n$, a isometria f_k leva o exterior de C_k sobre o interior de C'_k .

Exemplo 5.7. Seja n o número de geradores de G e k o número de classes de conjugação definidas por elementos hiperbólicos de bordo em G . Todos os exemplos a seguir são de grupos de 2^a -espécie.

1. $\{C_1, C'_1\}$ e $G = \langle f_1 \rangle$,
onde $C_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 1| = 1\}$, $C'_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 5| = 3\}$ e $f_1(z) = \frac{5z-8}{z-1}$.
Neste caso, f_1 é hiperbólico e \mathbb{H}^2/G é um cone com vértice em $z = 2$, conforme a figura (xxx).
2. $\{C_1, C'_1\}$ e $G = \langle f_1 \rangle$,
onde $C_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 1| = 1\}$, $C'_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 3| = 1\}$ e $f_1(z) = \frac{3z-4}{z-1}$.
Neste caso, f_1 é parabólico e \mathbb{H}^2/G é um cone com vértice em $z = 2$, conforme a figura (xxx).
3. $\{C_1, C'_1\}$ e $G = \langle f_1 \rangle$,
onde $C_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 1| = 1\}$, $C'_1 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - 5| = 1\}$ e $f_1(z) = \frac{5z-6}{z-1}$.
Neste caso, f_1 é hiperbólico e \mathbb{H}^2/G é um cilindro, conforme a figura (xxx).
4. $\{C_1, C'_1, C_2, C'_2\}$ e $G = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde os círculos encontram-se desenhados na figura (xxx). O espaço quociente \mathbb{H}^2/G é um toro menos um ponto no infinito.

5. $\{C_1, C'_1, C_2, C'_2\}$ e $G = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde os círculos encontram-se desenhados na figura (xxx). O espaço quociente \mathbb{H}^2/G é homeomorfo à uma *calça*.
6. $\{C_1, C'_1, C_2, C'_2\}$ e $G = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde os círculos encontram-se desenhados na figura (xxx). O espaço quociente \mathbb{H}^2/G é homeomorfo à um toro menos um disco.
7. $\{C_1, C'_1, \dots, C_n, C'_n\}$ e $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$.
Suponha que $\Sigma_g^k = \mathbb{H}^2/G$ é uma superfície de genus g e cujo bordo tem k componentes, $k > 0$. A superfície dobro de Σ_g^k é a superfície

$$\Sigma_n = \Sigma_g^k \cup_{id} \Sigma_g^k, \tag{5.12}$$

obtida ao identificarmos as componentes do bordo pela aplicação identidade $id : \partial\Sigma_g^k \rightarrow \partial\Sigma_g^k$. O genus de Σ_n é n , enquanto o genus de $\Sigma_g^k \cup_{id} \Sigma_g^k$ é $2g + k - 1$. Consequentemente,

$$g = \frac{1}{2}(n - k + 1), \quad n \geq 1, k \geq 1. \tag{5.13}$$

Exercício 5.19. .

1. Considere $1 \leq n \leq 6$ e $1 \leq k \leq 6$ e construa uma tabela para o genus. Desenhe cada uma das superfícies obtidas a partir da tabela.
2. Prove que o genus de Σ_n em 5.12 é n . (dica: construa Σ_n identificando os lados do (*pf*) de G)

5.8.8 Superfícies de genus $g \geq 2$

Pelo fato dos grupos Fuchsianos finitamente gerados serem de maior interesse para a teoria das superfícies compactas, observamos que G é finitamente gerado se, e somente se, todo polígono fundamental convexo de G tem um número finito de lados.

A seguir, definiremos a configuração de um grupo Fuchsiano. Para isto, considere r o número de classes de conjugação de subgrupos elípticos, p o número de classes de conjugação de subgrupos parabólicos e h o número de classes de conjugação de subgrupos gerados por elementos hiperbólicos de bordo. Também considere que:

$$n = \#G^*, \quad G^* \text{ é o conjunto de geradores de } G \tag{5.14}$$

$$g = \frac{1}{2}[n - (h + p) + 1], \tag{5.15}$$

Definição 5.37. A configuração de um grupo Fuchsiano G , finitamente gerado, é

$$(g : m_1, \dots, m_r : p : h),$$

onde cada parâmetro é não-negativo e $m_j \geq 2$.

Devido ao teorema da classificação das superfícies ??, se a configuração de um grupo fuchsiano G for $(g : m_1, \dots, m_r : p : h)$, então ele tem uma apresentação

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_{h'}, d_1, \dots, d_p, e_1, \dots, e_r : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{h'} c_j \prod_{l=1}^p d_l = 1, \quad (5.16)$$

$$e_1^{m_1} = \dots = e_r^{m_r} = 1 > . \quad (5.17)$$

Teorema 5.12. Para uma dada configuração $(g : m_1, \dots, m_r : p : h)$ existe um grupo Fuchsiano finitamente gerado se, e somente se,

$$2g - 2 + p + h + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0 \quad (5.18)$$

Demonstração. .

1. (\Leftarrow)

Vamos começar construindo um polígono fundamental convexo em \mathbb{H}_p^2 e provar que a condição (V) em 5.8.5 é satisfeita. Sejam $d > 0$ e \mathcal{C}_d a circunferência com centro na origem e raio d . Marcamos sobre \mathcal{C}_d $4g + r + p + h$ vértices equidistantes, conforme mostra a figura (xxx); assim, os vértices são

$$z_1, \dots, z_{4g}, z_{4g+1}, \dots, z_{4g+r}, z_{4g+r+1}, \dots, z_{4g+r+p}, z_{4g+r+p+1}, \dots, z_{4g+r+p+h}.$$

Se $1 \leq i \leq 4g$, a cada par de vértices adjacentes z_i, z_{i+1} construímos o segmento geodésico $\overline{z_i z_{i+1}}$. Se $4g + 1 < j \leq 4g + r + 1$, marcamos os pontos w_j^e equidistante dos vértices z_j, z_{j+1} e de tal forma que o ângulo formado pelos segmentos $\overline{z_j w_j^e}$ e $\overline{w_j^e z_{j+1}}$ mede $2\pi/m_j$. O mesmo é feito para obtermos o ponto w_r^e , onde o ângulo formado pelos segmentos $\overline{z_{4g+r} w_r^e}$ e $\overline{w_r^e z_{4g+r+1}}$ mede $2\pi/m_r$. Analogamente, se $4g + r + 1 < j \leq 4g + r + p + 1$, marcamos os pontos $w_j^p \in S^\infty$ de maneira equidistante dos vértices e de tal forma que o ângulo formado pelos segmentos $\overline{z_j w_j^p}$ e $\overline{w_j^p z_{j+1}}$ seja 0. Se $4g + r + p + 1 < j \leq 4g + r + p + h + 1$ ($z_{4g+r+p+h+1} = z_1$), marcamos

os pontos $w_{j_1}^h, w_{j_2}^h$ sobre S^∞ de maneira que os segmentos $\overline{z_j w_{j_1}^h}$ e $\overline{z_{j+1} w_{j_2}^h}$ sejam congruentes e os ângulos $\widehat{Oz_i w_{j_1}^h}$ e $\widehat{Oz_i w_{j_2}^h}$, indicados na figura xxx, meçam

$$\theta_1 = \frac{1+d}{1+2d}\theta.$$

Seja \mathcal{P}_d a região convexa de \mathbb{H}_P^2 limitada pelo polígono hiperbólico cujos vértices são os pontos

$$z_1, \dots, z_{4g+1}, w_1^e, z_{4g+2}, w_2^e, \dots, z_{4g+r}, w_r^e, \quad (5.19)$$

$$z_{4g+r+1}, w_1^p, z_{4g+r+2}, \dots, z_{4g+r+p}, w_p^p, \quad (5.20)$$

$$z_{4g+r+p+1}, w_{11}^h, w_{12}^h, z_{4g+r+p+2}, \dots, z_{4g+r+p+h}, w_{h1}^h, w_{h2}^h. \quad (5.21)$$

Consideramos S o conjunto dos lados de $\partial\overline{\mathcal{P}_d}$ e G_S o conjunto das isometrias que realizam as identificações dos lados, definidas assim;

- (a) as identificações dos $4g$ lados $\overline{z_1 z_2}, \dots, \overline{z_{4g-1} z_{4g}}, \overline{z_{4g} z_{4g+1}}$;

$$\begin{aligned} h_1(\overline{z_1 z_2}) &= \overline{z_3 z_4}, & h_2(\overline{z_2 z_3}) &= \overline{z_4 z_5}, & h_3(\overline{z_5 z_6}) &= \overline{z_7 z_8}, & h_4(\overline{z_6 z_7}) &= \overline{z_8 z_9} \\ \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots \\ h_{2g-3}(\overline{z_{4g-7} z_{4g-6}}) &= \overline{z_{4g-5} z_{4g-4}}, & h_{2g-2}(\overline{z_{4g-6} z_{4g-5}}) &= \overline{z_{4g-4} z_{4g-3}}, \\ h_{2g-1}(\overline{z_{4g-3} z_{4g-2}}) &= \overline{z_{4g-1} z_{4g}}, & h_{2g}(\overline{z_{4g-2} z_{4g-1}}) &= \overline{z_{4g} z_{4g+1}}. \end{aligned}$$

- (b) as transformações elípticas e_i com centro em w_i^e e ângulo de rotação $2\pi/m_i$;

$$\begin{aligned} e_1(\overline{z_{4g+1} w_1}) &= \overline{w_1^e z_{4g+2}}, & \dots & , e_{r-1}(\overline{z_{4g+r-1} w_{r-1}^e}) &= \overline{w_{r-1}^e z_{4g+r}}, \\ e_r(\overline{z_{4g+r} w_r^e}) &= \overline{w_r^e z_{4g+r+1}}, \end{aligned}$$

- (c) as transformações parabólicas p_i , com centro em $w_i^p \in S^\infty$;

$$\begin{aligned} p_1(\overline{z_{4g+r+1} w_1^p}) &= \overline{w_1^p z_{4g+2}}, & \dots & , p_{p-1}(\overline{z_{4g+r+p-1} w_{p-1}^p}) &= \overline{w_{p-1}^p z_{4g+r+p}}, \\ p_r(\overline{z_{4g+r+p} w_p^p}) &= \overline{w_p^p z_{4g+r+p+1}}, \end{aligned}$$

- (d) as transformações hiperbólicas b_i (elementos hiperbólicos de bordo), que levam o segmento geodésico $\overline{z_i w_{i_1}^h}$ sobre $\overline{z_{i+1} w_{i_2}^h}$ e o interior do círculo definido por $\overline{z_i w_{i_1}^h}$ sobre o exterior do círculo definido por $\overline{z_{i+1} w_{i_2}^h}$, onde $4g+r+p+1 \leq i \leq 4g+r+h+1$ e $z_{4g+r+p+h+1} = z_1$;

Desta forma,

$$G_S = \{h_i, h_i^{-1}, e_j, e_j^{-1}, p_k, p_k^{-1}, b_l, b_l^{-1}, \mid 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq h\}, \quad (5.22)$$

Agora, precisamos verificar a condição (V) em 5.8.5 para cada um dos ciclos. Os ciclos sobre $\partial\overline{P}_d$ são os seguintes:

- (a) $C_1 = \{z_1, \dots, z_{4g}, \dots, z_{4g+r+p+h}\}$, é um ciclo acidental;
- (b) $C_2 = \{w_1^e\}, \dots, C_{r+1} = \{w_r^e\}$, são ciclos formados pelos vértices dos elementos elípticos;
- (c) $C_{r+2} = \{w_1^p\}, \dots, C_{r+p+1} = \{w_r^p\}$, são ciclos formados pelos vértices dos elementos parabólicos;
- (d) $C_{r+p+2} = \{w_{11}^h, w_{12}^h\}, \dots, C_{r+p+h} = \{w_{h1}^h, w_{h2}^h\}$, são ciclos formados pelas extremidades dos lados livres de \mathcal{P} .

De acordo com a hipótese do Teorema de Poincaré;

- (a) a soma dos ângulos internos do ciclo acidental C_1 tem que ser 2π ,
- (b) para cada ciclo elíptico C_i a soma deve ser $2\pi/m_i$,
- (c) para cada ciclo parabólico deve a soma deve ser 0,
- (d) para cada ciclo hiperbólico de bordo a soma deve ser π .

É suficiente verificarmos a condição (V) apenas para o ciclo C_1 , uma vez que os outros ciclos a satisfazem trivialmente. Ao ligarmos, por uma geodésica, a origem a cada um dos vértices em 5.19 obtemos uma partição do polígono hiperbólico \overline{P} da seguinte maneira, como mostra a figura (xxx);

- (a) $4g$ triângulos $\Delta_i = \triangle Oz_i z_{i+1}$ com vértices O, z_i e z_{i+1} , $1 \leq i \leq 4g + 1$. Os ângulos internos $\widehat{z_i O z_{i+1}}$, $\widehat{O z_i z_{i+1}}$ e $\widehat{O z_{i+1} z_i}$ medem θ, α e α , respectivamente. Com a exceção de θ , que é fixo por construção, a medida de cada um dos outros ângulos varia continuamente com d . Em cada um dos triângulos Δ_i , ao considerarmos o triângulo obtido traçando a altura relativa a base, temos a relação

$$\cosh(d) = \cotg(\theta/2)\cotg(\alpha), \quad (5.23)$$

Portanto, quando $d = 0$ temos $\tg(\alpha) = \cotg(\theta/2)$ e $\alpha = \pi/2 - \theta/2$, enquanto $\lim_{d \rightarrow \infty} \alpha = 0$.

- (b) r quadriláteros $\square_j^e = \square Oz_{4g+j} w_j^e z_{4g+j+1}$ com vértices O, z_{4g+j}, w_j^e e z_{4g+j+1} , $1 \leq j \leq r$. Os ângulos internos $\widehat{z_{4g+j} O z_{4g+j+1}}$, $\widehat{O z_{4g+j} w_j^e}$, $\widehat{z_{4g+j} w_j^e z_{4g+j+1}}$ e $\widehat{w_j^e z_{4g+j+1} O}$ medem $\theta, \beta_j, 2\pi/m_j$ e β_j , respectivamente. Os ângulos β_j variam

continuamente com d . Ao ligarmos a origem à w_j^e obtemos um triângulo onde vale a relação

$$\cosh(d) = \frac{\cos(\theta/2)\cos(\beta_j) + \cos(\pi/m_j)}{\sen(\theta/2)\sen(\beta_j)}. \quad (5.24)$$

Assim, quando $d = 0$ temos $\cos(\theta/2 + \beta_j) = \cos(\pi - \pi/m_j)$ e

$$\lim_{d \rightarrow 0} \beta_j = \pi - \pi/m_j - \theta/2, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \beta_j = 0$$

- (c) p quadriláteros $\square_j^p = \square O z_{4g+r+j} w_j^p z_{4g+r+j+1}$, $1 \leq j \leq p$, com vértices O , z_{4g+r+j} , w_j^p e $z_{4g+r+j+1}$. Os ângulos internos $\widehat{z_{4g+r+j} O z_{4g+r+j+1}}$, $\widehat{O z_{4g+r+j} w_j^p}$, $\widehat{z_{4g+r+j} w_j^p z_{4g+r+j+1}}$ e $\widehat{w_j^p z_{4g+r+j+1} O}$ medem θ , γ_j , 0 e γ_j , respectivamente. No triângulo construído ao ligarmos a origem à w_j^p vale a relação

$$\cosh(d) = \frac{\cos(\theta/2)\cos(\gamma_j) + 1}{\sen(\theta/2)\sen(\gamma_j)}. \quad (5.25)$$

Assim, quando $d = 0$ temos $\cos(\theta/2 + \gamma_j) = 1$ e

$$\lim_{d \rightarrow 0} \gamma_j = \pi - \theta/2, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \gamma_j = 0.$$

- (d) h quadriláteros $\square_j^h = \square O z_{4g+r+p+j} w_j^h z_{4g+r+p+j+1}$, $0 \leq j \leq h$, onde $z_{4g+r+p+h+1} = z_1$. Os vértices O , z_{4g+j} , w_j^e e z_{4g+j+1} . Os ângulos internos $\widehat{z_{4g+j} O z_{4g+j+1}}$, $\widehat{O z_{4g+j} w_j^e}$, $\widehat{z_{4g+j} w_j^e z_{4g+j+1}}$ e $\widehat{w_j^e z_{4g+j+1} O}$ medem θ , δ_j , 0 e δ_j , respectivamente. Analogamente, no triângulo construído ao ligarmos a origem à w_{1j}^h , vale a relação

$$\cosh(d) = \frac{\cos(\theta_1)\cos(\delta_j) + 1}{\sen(\theta_1)\sen(\delta_j)}. \quad (5.26)$$

Tendo em vista que $\theta_1 = \theta$ se $d = 0$ e $\lim_{d \rightarrow \infty} \theta_1 = \theta/2$, temos

$$\lim_{d \rightarrow 0} \delta_j = \pi - \theta/2, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \delta_j = 0.$$

Portanto, o ângulo $\theta(C_1)(d)$ do ciclo C_1 mede

$$\theta(C_1)(d) = 8g\alpha + 2(\beta_1 + \dots + \beta_r) + 2(\gamma_1 + \dots + \gamma_p) + 2(\delta_1 + \dots + \delta_h).$$

Vejamos que existe um valor d_0 para o qual $\theta(C_1)(d_0) = 2\pi$. Para isto, consideramos as seguintes situações;

(a) $d = 0$.

Neste caso,

$$\begin{aligned}\beta_1 + \cdots + \beta_r &= \pi r - \pi \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} - \frac{\theta r}{2} = \pi \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) - \frac{\theta r}{2}, \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_p &= \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) p, \\ \delta_1 + \cdots + \delta_h &= \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) h.\end{aligned}$$

Levando em conta que $\theta = \frac{2\pi}{4g+r+p+h}$, então

$$\begin{aligned}\theta(C_1)(0) &= 2\pi \left[2g + p + h + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right] - (4g + r + h + p)\theta = \\ &= 2\pi \left[2g - 2 + p + h + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right] + 2\pi.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, segue da hipótese que $\theta(C_1)(0) > 2\pi$.(b) $d = \infty$.

Pelo que vimos, neste caso é imediato que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(C_1)(d) = 0.$$

Como $\theta(C_1)(d)$ é contínua na variável d , concluímos que existe um valor $d_0 \in [0, \infty]$ para o qual $\theta(C_1)(d_0) = 2\pi$. Portanto, pelo teorema de Poincaré aplicado ao polígono \mathcal{P}_{d_0} , construído sobre a circunferência \mathcal{C}_{d_0} , o grupo G gerado pelo conjunto das transformações G_S é um grupo Fuchsiano. Além disto, \mathcal{P}_{d_0} é o polígono fundamental convexo para G .

2. (\Rightarrow)

Vamos calcular a área do polígono \mathcal{P}_{d_0} . Para isto, observamos que existem $4g + 2r + 2p + 3h$ lados e a soma dos ângulos internos é

$$\sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + \sum_{i=1}^r \beta_i + \pi h = \sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + 2\pi + \pi h.$$

Segue da fórmula 5.7 que

$$\begin{aligned}
A &= [4g + 2r + 2p + 3h - 2]\pi - \left[\sum_{i=1}^r \frac{2\pi}{m_i} + 2\pi + \pi h \right] = \\
&= 2\pi \left[2g - 2 + p + h + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{2\pi}{m_i} \right) \right].
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$2g - 2 + p + h + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{2\pi}{m_i} \right) > 0$$

□

Observação. O teorema acima responde única e exclusivamente a questão sobre a existência de um grupo fuchsiano com determinada configuração, ele não responde questões sobre a relação entre os grupos cujos espaços quocientes sejam homeomorfos entre si. De fato, como mostra o exemplo abaixo, os espaços quocientes podem ser homeomorfos e, por isto, os grupos são homeomorfos, porém não são conjugados como subgrupos de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Para melhor compreender esta questão, recomendamos a leitura do capítulo I em [?].

Exemplo 5.8. $\{C_1, C'_1, C_2, C'_2\}$ e $G = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde os círculos encontram-se desenhados na figura (xxx). O espaço quociente \mathbb{H}^2/G é homeomorfo à uma calça. O isomorfismo entre os grupos pode ser entendido através da figura (xxx)

Exercício 5.20. Seja G um grupo fuchsiano finitamente gerado de 1ª-espécie e seja \mathcal{P} um (pfc) para G . Suponha que \mathcal{P} tem N pares de lados distintos identificados;

1. Se a configuração de G é $(g : m_1, \dots, m_n)$, $1 \leq m_r \leq \infty$, mostre que $N \leq 12g + 4n - 6$.
2. Se a configuração de G é $(g : 0)$, mostre que $N \geq 4g$ e dê um exemplo onde o limite inferior é atingido.
3. Se a configuração de G é $(g : m_1, \dots, m_n)$, $n > 0$, mostre que $N \geq 4g + 2n - 2$ e dê um exemplo onde o limite inferior é atingido. (dica: considere que \mathcal{P} tem n ciclos elípticos ou parabólicos e a ciclos acidentais. Se cada ciclo C_i tem $|C_i|$ vértices então $N = \sum_{i=1}^{n+a} |C_j|$; além disto, $0 \leq a \leq \frac{N-n}{3}$. Agora, use a fórmula da Característica de Euler)
4. Sejam G_1, G_2 subgrupos finitamente gerados de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Se $\mathbb{H}^2/G_1 \stackrel{homeo}{\sim} \mathbb{H}^2/G_2$, mostre que $G_1 \stackrel{iso}{\sim} G_2$. (dica: demonstre o teorema de classificação das superfícies compactas e mostre que a fórmula 5.16 é verdadeira)

5.8.9 Grupos Triangulares

Seja $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ um triângulo hiperbólico com vértices A , B e C , e ângulos internos medindo α , β e γ , respectivamente. A fórmula da área de um triângulo hiperbólico $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, obtida em 5.36, é

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

As reflexões r_1 , r_2 e r_3 sobre os lados do triângulo geram o grupo $\tilde{G}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$. Embora as transformações pertencentes à $\tilde{G}(\alpha, \beta, \gamma)$ sejam isometrias de \mathbb{H}^2 , vamos nos restringir ao subgrupo $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_\alpha r_\beta, r_\beta r_\gamma, r_\gamma r_\alpha \rangle$, de ordem 2 em $\tilde{G}(\alpha, \beta, \gamma)$, porque seus elementos preservam a orientação (são conformes) e, por isto, ele é um subgrupo de $PSl(2, \mathbb{R})$. Desta forma, os geradores de $G(\alpha, \beta, \gamma)$ são elementos elípticos ou parabólicos, tendo como centro os vértices de $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, pois

$$r_2 r_3(A) = A, \quad r_3 r_1(B) = B, \quad r_1 r_2(C) = C.$$

Devido as relações elementares

$$(r_i r_j)^{-1} = r_j r_i, \quad r_2 r_3 = (r_1 r_2)^{-1} (r_1 r_3)^{-1},$$

segue que $G(\alpha, \beta, \gamma) = \langle r_1 r_2, r_1 r_3 \rangle$.

De acordo com ??, para que $G(\alpha, \beta, \gamma)$ seja um grupo discreto é necessário que existam $p, q, r \in \mathbb{N}$ tais que

$$\alpha = \frac{\pi}{p}, \quad \beta = \frac{\pi}{q}, \quad \gamma = \frac{\pi}{r}.$$

Porém, a fórmula da área impõem a condição

$$1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) > 0, \tag{5.27}$$

aos valores assumidos por p , q e r . No que segue, sejam

$$G(p, q, r) = G\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right), \quad \Delta(p, q, r) = \Delta\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right) \tag{5.28}$$

Ao assumirmos que $p \leq q \leq r$, a primeira 3-upla possível é $(2, 3, 7)$. O Teorema de Poincaré implica que $G(p, q, r)$ é um grupo discreto e $\mathcal{P} = \Delta(p, q, r) \cup r_1 \Delta(p, q, r)$ é um (pfc) para $G(p, q, r)$. Portanto, o (pfc) de $G(p, q, r)$ é um quadrilátero cujos vértices formam 3 ciclos distintos, digamos C_p , C_q e C_r , sendo que um deles contém 2 vértices.

Definição 5.38. Um grupo triangular hiperbólico é um do grupo do tipo $G(p, q, r)$, onde $p \leq q \leq r$ pertencem à \mathbb{N} e $2 \leq p \leq \infty$, $3 \leq q \leq \infty$ e $7 \leq r \leq \infty$.

Ao contrário do que ocorre nas Geometrias Euclidianas e Esféricas, na Geometria Hiperbólica a fórmula da área permite a existência de infinitos triângulos do tipo $\Delta(p, q, r)$, $p, q, r \in \mathbb{N}$. Devido ao fato que a primeira 3-upla possível é $(2, 3, 7)$, segue que $\Delta(2, 3, 7)$ é o triângulo com a menor área possível. Como todo polígono hiperbólico com um número finito de lados que não sejam livres pode ser subdividido em triângulos hiperbólicos, segue que todo subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$, de 1ª-espécie, não-elementar é subgrupo de um grupo triangular. Assim, a área de um polígono fundamental associado a um grupo Fuchsiano é sempre maior ou igual ao dobro da área de um triângulo hiperbólico do tipo $\Delta(p, q, r)$, ou seja, $\Delta(p, q, r) \cup r(\Delta(p, q, r)) \subseteq \mathcal{P}$, onde r é a reflexão sobre um dos lados de $\Delta(p, q, r)$. Assim sendo, temos o seguinte resultado;

Proposição 5.37. *Para todo grupo Fuchsiano não-elementar G de 1ª-espécie, com polígono fundamental \mathcal{P} , segue que*

$$A(\mathcal{P}) \geq \frac{\pi}{21}.$$

A igualdade é precisamente quando \mathcal{P} tem a configuração $(0 : 2, 3, 7; 0; 0)$.

Exemplo 5.9. .

1. $G(2, 3, 7)$ (figura).
2. $G(2, 3, 8)$ (figura).
3. Sejam T_1 e T_2 os dois triângulos ilustrados na figura 10.6.1. Assim, os ângulos internos de T_1 são $\pi/2$, $\pi/3$ e 0, enquanto em T_2 temos ângulos internos $2\pi/3$, 0, e 0. Com isto, é claro que $T_1 = \Delta(\pi/2, \pi/3, \infty)$. Ao considerarmos as seguintes reflexões;

$$\begin{aligned} r_1 &: \text{sobre a reta } x = 1/2, & r_1(z) &= -\bar{z} + 1 \\ r_2 &: \text{sobre o segmento } |z| = 1, & r_2(z) &= 1/\bar{z} \\ \eta &: \text{sobre o segmento } x = 0, & \eta(z) &= -\bar{z}, \\ \tau &: \text{sobre o segmento } x = 1, & \tau(z) &= -\bar{z} + 2; \end{aligned}$$

os grupos triangulares associados à T_1 e T_2 são

$$G_1 = \langle r_1, r_2, \eta \rangle \quad \text{e} \quad G_2 = \langle r_1, r_2, \tau \rangle, \quad \text{respectivamente.}$$

Decorre da igualdade $\eta r_1(z) = r_1 \tau(z) = z - 1$ que $\eta \in G_2$ e $\tau \in G_1$. Consequentemente, $G_1 = G_2$. Porém, a relação entre as áreas

$$A(T_2) = 2.A(T_1),$$

revela que T_2 não é o polígono fundamental para G_1 . Portanto, G_2 é um grupo triangular do tipo $G(\pi/2, \pi/3, 0)$.

Os grupos triangulares são muito simples de serem descritos e muito simples de serem caracterizados;

Proposição 5.38. *G é um grupo triangular $G(p, q, r)$ se, e somente se, G é de 1ª-espécie e tem configuração $(0 : p, q, r)$.*

Demonstração. .

(\Rightarrow)

Suponha que $G = G(p, q, r)$. A região $\Delta(p, q, r) \cup r(\Delta(p, q, r)) \subseteq \mathcal{P}$, onde r é a reflexão de sobre um dos lados de $\Delta(p, q, r)$, é um (pfc) de G e, pelo teorema de Poincaré, G é um grupo fuchsiano. Obviamente, G é de 1ª-espécie. As isometrias $g = r_1 r_2$ e $h = r_1 r_3$ geram G e satisfazem as relações

$$g^r = h^q = (h^{-1}g)^p = I.$$

Portanto, $\langle g \rangle$, $\langle h \rangle$ e $\langle h^{-1}g \rangle$ representam classes de conjugação elípticas ou parabólicas. O genus de \mathbb{H}^2/G , igual ao genus de \mathcal{P}/G , é $g = 0$, pois

$$2 - 2g = 3 - 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g = 0.$$

2. (\Leftarrow)

Suponha que G é um grupo discreto com configuração $(0 : p, q, r)$. Vamos assumir que \mathcal{P} é um (pfc) para G com os ciclos C_p, C_q, C_r , correspondendo as classes de conjugação elípticas ou parabólicas, e C_1^a, \dots, C_k^a correspondendo aos ciclos accidentais. O fato de G ser de 1ª-espécie implica na inexistência de lados livres. A área de \mathcal{P} é

$$A(\mathcal{P}) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Seja $|C|$ o número de vértices pertencentes ao ciclo C ; lembramos que $|C_i^a| \geq 3$, $1 \leq i \leq k$. Fixando um $w \in \mathcal{P}$ e ligando-o à cada um dos vértices de \mathcal{P} , decorre da fórmula da área

$$A(\mathcal{P}) = \pi \left(|C_p| + |C_q| + |C_r| + \sum_{i=1}^k |C_i^a| - 2 \right) - [2\pi k + 2\pi \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right)]. \quad (5.30)$$

Igualando as expressões 5.29 e 5.30 obtemos

$$(|C_p| - 1) + (|C_q| - 1) + (|C_r| - 1) + \sum_{j=1}^k (|C_j^a| - 2) = 1,$$

onde cada um dos termos é um inteiro não-negativo. As únicas possibilidades são as seguintes:

- (a) $|C_p| = 1$, $|C_q| = 1$, $|C_r| = 2$ e $|C_i^a| = 0$, para todo $1 \leq i \leq k$.
- (b) $|C_p| = |C_q| = |C_r| = 1$ e $|C_1^a| = 3$.

No caso (a), representado na figura 10.6.3, temos 4 vértices e, por isto, o polígono é um quadrilátero. No caso (b), representado na figura 10.6.4, o polígono é um hexágono com 3 vértices formando um ciclo acidental e 3 vértices correspondendo, cada um deles, a um ciclo elíptico. O hexágono pode ser transformado num quadrilátero fundamental do grupo G .

□

Exercício 5.21. .

1. Mostre que se $G < isom(\mathbb{H}^2)$ é um subgrupo discreto que contém um grupo triangular $G(p, q, r)$ como subgrupo, então G é um subgrupo triangular.
2. Mostre que todo subgrupo de 1^a-espécie é um subgrupo de um grupo triangular hiperbólico.

Índice Remissivo

- área
 - de uma região, 29
 - elemento de
 - hiperbólico, 30
- órbita, 36
- índice
 - de um ponto, 234
- ângulo
 - entre vetores, 26
- pfc*, 180
- ação, 33
 - grupo fundamental, 35
 - linear, 33
 - livre, 36
 - pontos fixos da, 36
 - propriamente descontínua, 38
 - transitiva, 36
- aplicação
 - de transição, 200
 - aberta, 246
 - equivariante, 238
 - invariante, 238
- aplicação antípoda, 100
- arco
 - discontinuidade, 185
- atlas, 199
 - de S^2 , 81
- Axioma
 - congrência LLL, 54
- axioma
 - das paralelas, 41
- campo paralelo, 213
- característica de Euler
 - de orbital, 235
 - de superfície, 234
- característica de Euler, 7, 108
- carta local, 200
- ciclo, 183
 - ângulo do, 183
 - acidental, 183
 - ordem do, 183
- classe lateral
 - à direita, 22
 - à esquerda, 22
- comprimento
 - de curva, 26
 - de curva, 29
- Condição (V), 184
- conexão
 - Levi-Civita, 223
 - riemanniana, 223
- configuração, 189
 - da ação, 105
- conjunto limite, 176
- coordenadas
 - esféricas, 78
- curvatura, 215
 - de curva, 73
 - escalar, 220
 - gaussiana, 219
 - ricci, 219
 - seccional, 219
- desigualdade
 - Cauchy-Schwartz, 25
- difeomorfismo, 244
- distância, 30
 - esférica, 91
- distância

- euclideana, 42
- esfera, 77
- espaço
 - hiperbólico, 109
 - das órbitas, 36
 - esférico, 83
 - euclideano, 41
 - quociente, 36
- estrutura
 - geométrica, 10
- fibrado tangente, 204
- forma de conexão, 212
- Fuchs, 169
- função
 - deslocamento, 160
- geodésica, 30
- geometria, 5
 - esférica, 83
- gomo
 - esférico, 98
 - hiperbólico, 30, 139
- grande círculo, 80
- grupo, 15
 - 1^a-espécie, 179
 - 2^a-espécie, 179
 - O_2 , 46
 - U_1 , 17
 - do dodecaedro, 104
 - abeliano, 15
 - cíclico, 20
 - conforme, 32
 - de holonomia, 223
 - de Schottky, 187
 - diedral
 - quadrado, 18
 - triângulo, 17
 - do cubo, 104
 - do icosaedro, 104
 - do octaedro, 104
 - do tetraedro, 102
 - elementar, 169
 - finitamente gerado, 21
 - geradores, 21
 - linear, 16
 - multiplicativo, 16
 - normal, 22
 - ordem, 21
 - ortogonal, 46
 - O_3 , 19
 - SO_2 , 17
 - SO_3 , 19
 - permutações, 19
 - Picard, 177
 - raízes da unidade, 17
 - simétrico, 19
 - Tipo I, 61
 - Tipo II, 61
 - triangular
 - esférico, 102
 - euclideano, 65
 - hiperbólico, 195
- grupo fundamental, 9
- hiperbólico
 - de bordo, 186
 - simples, 171
- holonomia, 214
- homomorfismo, 23
 - epimorfismo, 24
 - isomorfismo, 24
 - monomorfismo, 24
 - núcleo, 23
- Hopf, 207
- identidade
 - Bianchi, 216
 - Jacobi, 206
- imersão, 244
- inteiros, 16
 - módulo n , 16
- invariante
 - geométrico, 203
- inversão, 111
- isometria, 31, 203
 - primitiva, 171

- Jordan-Schönflies, 135
- lado livre, 183
- Lambert, 146
- lei dos cossenos
 - esférica, 92
 - hiperbólica, 138
- lei dos senos
 - esférica, 95
 - hiperbólica, 138
- métrica
 - esférica, 82
 - compatível, 217
 - completa, 31
 - esférica, 28
 - euclideana, 28
 - hiperbólica, 28, 109
 - riemanniana, 28
- meridiano, 80
- norma, 25
- orbital, 232
- orientação, 52
- paracompacto, 199
- paralelo, 80
- plano tangente, 28, 201, 243
- polígono
 - fundamental, 180
- poliedro, 107
 - de Platão, 107
- pontos antípodas, 100
- produto
 - semi-direto, 52
- produto angular, 117
- produto interno
 - euclideano, 25
- projeção
 - estereográfica, 81
- racionais, 16
- recobrimento, 9
 - universal, 9
- reflexão
 - deslizamento, 66
 - reta afim, 49
 - sobre reta, 44
- região
 - fundamental, 39
- reticulado, 59
- retas
 - concorrentes, 116
 - paralelas, 116
 - ultra-paralelas, 116
- rotação, 43
 - centro em P , 49
- rotações, 17
- símbolos
 - $Fix(g)$, 36
 - $Fix_\alpha(\Omega)$, 36
 - G_x , 36
 - $Isom(\mathbb{H}^2)$, 122
 - $N \triangleleft G$, 22
 - $O(2, 1)$, 128
 - O_2 , 46
 - O_3 , 85
 - O_G , 56
 - R_θ , 43
 - SO_2 , 43
 - $T_{A,b}$, 49
 - T_v , 48
 - $\Lambda(G)$, 176
 - Ω/G , 36
 - \mathcal{O}_x , 36
 - \mathbb{H}_P^2 , 126
 - \mathbb{E}^3 , 77
 - \mathcal{T} , 48
 - \mathcal{T}_G , 56
 - \mathfrak{C} , 104
 - \mathfrak{D} , 104
 - \mathfrak{J} , 104
 - \mathfrak{Z} , 102
 - $|G : H|$, 22
 - \mathbb{S}^2 , 77
 - $d_{\mathbb{E}^2}$, 42
 - $d_{\mathbb{S}^2}$, 91

- r_l , 44
- \overline{Fix}_f , 157
- $\mathbb{H}_{\mathcal{K}}^2$, 130
- \mathbb{M}^2 , 127
- \mathbb{M}_+^2 , 128
- $\widehat{\mathbb{H}}_P^2$, 126
- $SL_2(\mathbb{R})$, 121
- SO_3 , 85
- T_g , 160
- Difeo(X), 201
- símbolos de Christoffell, 211
- Saccheri, 146
- sequência
 - exata, 52
- símbolo
 - $Isom(\mathbb{H}^2)$, 122
- simplesmente conexo, 9
- soma conexa, 7
- subgrupo, 20
 - índice, 22
 - centro de G , 20
 - dos comutadores, 21
 - isotropia, 36
 - normalizador, 22
 - normalizador de $g \in G$, 20
 - torção, 21
- submersão, 244
- superfície
 - localmente homogênea, 10
- superfície
 - fechada, 7
 - genus da, 7
 - homogênea, 10
 - irreduzível, 7
 - riemanniana, 202
- Teorema
 - Gauss-Bonnet, 8
 - Lagrange, 22
 - Principal, 11
- teorema
 - uniformização, 12
- Teorema Pitágoras
 - esférico, 92
 - hiperbólico, 136
- transformação conforme, 32, 204
- translação, 48
- triângulo
 - esférico, 92
- vértice
 - impróprio, 183
 - próprio, 183
- valor regular, 248