

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO  
GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS - GEAM8

Na dissertação *Um Texto de Geometria Hiperbólica* (Mestrado em Matemática - IMECC - UNICAMP), Inedio Arcari apresenta uma lista de **vinte** proposições que são equivalentes ao 5º Postulado dos Elementos de Euclides, assim enunciadas:

P5 (Euclides) - Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor que a de dois ângulos retos.

P5.1 - (Axioma de Playfair) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

P5.2 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.

P5.3 - Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

P5.4 - Existe um par de retas equidistantes.

P5.5 - Se  $r \parallel s$  e  $s \parallel t$ ; então  $r \parallel t$ .

P5.7 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma.

P5.8 - Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

P5.9 - Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto.

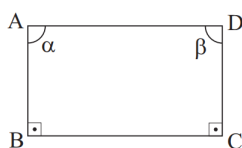
P5.10 - Uma reta que corta uma de duas paralelas, corta também a outra.

P5.11 - Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular à outra.

P5.12 - Retas paralelas são equidistantes.

P5.13 - Existem retângulos. (retângulo: quadrilátero com quatro ângulos retos)

P5.14 - Considere a Figura

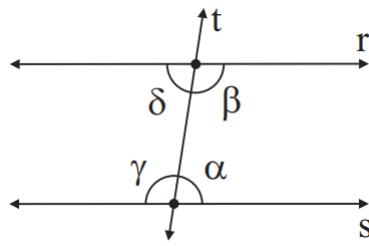


Se  $AB \equiv CD$ ; então  $\alpha = \beta = 90^\circ$ .

P5.15 - Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.

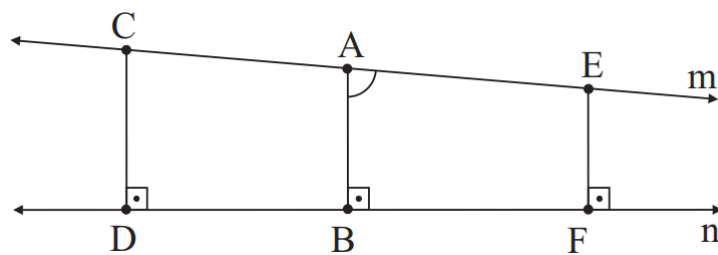
P5.16 - Lados opostos de um paralelogramo são congruentes. (paralelogramo: quadrilátero com lados opostos paralelos)

P5.17 - Considere a Figura



Se  $r$  é paralela a  $s$ ; então  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

P5.18 - Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A \in m$  e  $B \in n$  tais que  $AB \perp n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ : Então, as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ ; do lado do ângulo agudo são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ .



P5.19 - Dado um triângulo, é possível construir outro semelhante com lados arbitrariamente grandes.

P5.20 - Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo.

Em *Uma proposta de ensino a distância para o aprendizado da geometria hiperbólica* (PUC-SP), a pesquisadora Marília Valério Rocha apresenta, a seguinte classificação:

### TEOREMAS DEMONSTRADOS SEM O POSTULADO 5

01

Dada uma reta finita, é possível construir sobre ela um triângulo equilátero.

02

É possível traçar uma linha reta igual a uma dada linha reta com extremidade num dado ponto

03

É possível dadas duas linhas retas desiguais, obter da linha reta maior uma parte igual à linha reta menor

04

(LAL) Se dois triângulos apresentam respectivamente iguais dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então os demais lados e ângulos serão respectivamente iguais.

05

Nos triângulos isósceles os ângulos da base são iguais entre si

06

Se num triângulo dois ângulos são iguais entre si, então, os lados opostos aos tais ângulos são também iguais entre si.

07

De qualquer extremidades de uma linha reta dada, chamada base, se conduzem duas outras linhas retas que se encontram em um ponto; não é possível construir, com os mesmos extremos e da mesma parte, duas linhas retas respectivamente iguais àquelas inicialmente construídas que tenham um ponto de encontro diferente

08

(LLL) Se dois triângulos têm respectivamente dois lados iguais, e bases também iguais, então também são iguais os ângulos formados entre os lados iguais correspondentes.

09

É possível dividir pela metade um ângulo retilíneo dado.

10

É possível dividir pela metade uma reta finita dada.

11

Dada uma reta, é possível de um seu ponto levantar uma perpendicular.

12

De um ponto externo a uma reta infinita dada é possível levantar uma perpendicular à reta dada.

13

Uma reta incidindo com uma outra linha reta, formará com esta, ou dois ângulos retos ou dois ângulos cuja soma é igual a dois retos.

14

Se por um ponto de uma reta concorrem, de partes opostas, duas retas, fazendo com a primeira reta ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas que concorrem para o dito ponto estarão em linha reta.

15

Se duas retas se intersectam, formam ângulos opostos ao vértice iguais entre si.

16

Em qualquer triângulo, prolongando-se um dos lados, o ângulo externo é sempre maior que cada um dos dois ângulos internos e opostos.

17

Em qualquer triângulo a soma de dois ângulos internos quaisquer é menor que dois retos.

18

Em um triângulo, o lado maior é oposto ao ângulo maior.

19

Em um triângulo, o ângulo maior é oposto ao lado maior.

20

(Desigualdade Triangular): Em um triângulo a soma de dois lados quaisquer, é maior que o outro lado.

21

Se sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas retas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo, que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas retas.

22

É possível construir um triângulo com três linhas retas iguais a três outras dadas, entre as quais quaisquer duas, sejam sempre maiores que a terceira.

23

É possível construir numa reta dada, e com vértice em um seu ponto qualquer, um ângulo retilíneo igual a um ângulo retilíneo dado.

24

Se dois triângulos tiverem dois lados respectivos iguais e ângulos compreendidos entre eles diferentes, o lado oposto ao ângulo maior será maior que o outro lado respectivo.

25

Se dois triângulos tiverem dois lados respectivos iguais e o outro lado de um triângulo for maior que o do outro, o ângulo compreendido pelos lados iguais, que ficar oposto ao maior lado, será maior do que o outro.

26

(a) (ALA): Se dois triângulos têm iguais dois ângulos e um lado, comum a eles, correspondentes, então, os outros lados e o ângulo correspondentes também são iguais

(b) (AAL): Se dois triângulos têm respectivamente iguais dois ângulos e o lado oposto a um deles, então, os triângulos são congruentes.

27

Se, quando duas retas são intersectadas por uma terceira, fizer com elas ângulos alternos iguais, as mesmas duas retas são paralelas.

28

Se, quando duas retas são intersectadas por uma terceira, fizer o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte; ou também dois internos da mesma parte iguais a dois retos, as mesmas duas retas são paralelas.

31

Por um ponto dado fora de uma reta dada, é possível traçar uma linha reta paralela à reta dada.

## TEOREMAS DEMONSTRADOS COM O POSTULADO 5

29

Num plano, uma reta que intersecta duas retas paralelas forma com elas ângulos alternos iguais entre si, ou ângulos externos iguais aos ângulos internos opostos da mesma parte, e finalmente ângulos internos da mesma parte, iguais a dois retos.

30

Retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

32

(a) Em todo triângulo, ao se prolongar um dos lados, o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos opostos.

(b) Em todo triângulo a soma dos três ângulos internos do triângulo é igual a dois retos.

33

As retas, que da mesma parte estão postas entre as extremidades de duas outras retas iguais e paralelas, são também iguais e paralelas.

34

Os paralelogramos apresentam lados opostos iguais entre si e são divididos pela diagonal em duas partes iguais.

35

Paralelogramos que apresentam a mesma base e estão compreendidos entre as mesmas paralelas são iguais entre si.

36

Paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais entre si.

37

Triângulos com a mesma base e compreendidos entre as mesmas paralelas são iguais entre si.

38

Triângulos postos em bases iguais e compreendidos entre as mesmas paralelas são iguais entre si.

39

Triângulos iguais postos sobre a mesma base, e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas.

40

Triângulos iguais postos sobre bases iguais, e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas.

41

Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.

42

É possível construir um paralelogramo, que seja igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado.

43

Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si.

44

É possível sobre uma linha reta dada construir um paralelogramo igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado.

45

É possível construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com ângulo igual a outro ângulo dado.

46

Dada uma linha reta, é possível construir um quadrado.

47

(Teorema “de Pitágoras”): Nos triângulos retângulos o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados construídos sobre os lados que compreendem o ângulo reto.

48

Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto.