

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Equações diferenciais parciais: um estudo sobre a equação do calor

Patrícia Neves de Araújo

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática,
orientado pela Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos.

IFSP

São Paulo

2016



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Equações diferenciais parciais: um estudo sobre a equação do calor

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

Patrícia Neves de Araújo

Orientador: Prof. Dra. Flávia Milo dos Santos
Coorientador: Prof. Dr. Anderson da Silva Vieira

IFSP
São Paulo
2016

A663e Araújo, Patrícia Neves de.

Equações diferenciais parciais: um estudo sobre a equação do calor / Araújo, Patrícia Neves de. São Paulo: [s.n.], 2016.

47 f.

Orientador: Prof^a. Dra. Flávia Milo dos Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Anderson da Silva Vieira.

Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016.

1. Equações diferenciais parciais 2. Equação do calor
3. Métodos de resolução. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título

CDD 510

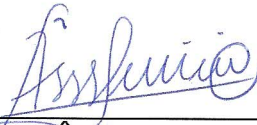
PATRÍCIA NEVES DE ARAÚJO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UM ESTUDO SOBRE A
EQUAÇÃO DO CALOR

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 02/12/2016

CONCEITO: Dez



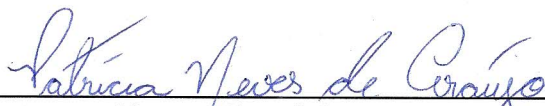
Prof. Dr. Anderson da Silva Vieira
Membro da Banca - Coorientador



Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Membro da Banca



Prof^a. Dr^a. Flávia Milo dos Santos
Orientadora



Aluna: Patrícia Neves de Araújo

“O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a caminhada.

Caminhando e semeando, no fim terás o que colher.”

Cora Coralina

*Aos meus pais, Iva e Monteiro, por serem
a melhor parte de mim,
à minha irmã Paula, por jamais me
deixar sozinha,
ao meu amor e amigo Rafael, por apoiar
o meu sonho e caminhar ao meu lado.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de passar por essa experiência que mudou a minha vida e quem eu sou.

Aos meus pais por todo o amor e o apoio que me dedicaram desde sempre. Obrigada por todos os esforços e todo o empenho em me ajudar a prosseguir. Obrigada por me ensinar que caminhar juntos nos faz mais fortes. Eu os amo incondicionalmente.

À Paula pela paciência e pelo apoio. Obrigada por me ajudar e me ensinar de forma tão altruísta. Obrigada por tudo, eu te amo muito.

Ao Rafael, por apoiar o meu sonho e me fazer acreditar que é possível realizá-lo. Obrigada pela paciência, pela compreensão e pelo amor. Eu te amo infinitamente.

À professora Dra. Flávia Milo dos Santos, por aceitar me acompanhar na realização desse trabalho, pelo apoio, paciência e dedicação. Muito obrigada por me orientar, compartilhar o seu conhecimento comigo, pelas sugestões e pela disponibilidade. É raro encontrar alguém com tamanha gentileza e compreensão.

Ao professor Dr. Ânderson da Silva Vieira, pela dedicação a este trabalho, pelo apoio e pela paciência. Muito obrigada por me ensinar tantas coisas, sempre com muito bom humor.

Aos meus orientadores, obrigada por tudo, foi um prazer trabalhar com vocês!

Ao professor Dr. Marco Aurélio Granero Santos por aceitar o convite para avaliar este trabalho e por colaborar de forma tão efetiva com a minha formação.

Aos professores Dr. Rogério Ferreira da Fonseca e Me. Wellington Pereira das Virgens pelas colaborações a este trabalho nas disciplinas TC1M7 e TC2M8.

À professora Dra. Alessandra Ferreira Ignez pela ajuda com o texto.

Ao professor Dr. Henrique Marins de Carvalho pela disponibilidade em me atender sempre que eu precisei (e não foram poucas vezes). Obrigada pelas sugestões e contribuições a este trabalho.

Aos professores da Licenciatura em Matemática que acrescentaram muito à minha formação pessoal e profissional. Agradeço especialmente aos que colaboraram, opinaram, sugeriram materiais e compartilharam ideias para a construção desse trabalho.

Aos meus colegas e amigos do curso que estiveram comigo durante todo esse tempo. Foi um prazer conhecê-los e trabalhar com vocês. Espero voltar a encontrá-los e desejo que tenham uma carreira brilhante.

A todos que estiveram ao meu lado, muito obrigada.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um pouco da teoria das Equações Diferenciais Parciais de modo a motivar o seu estudo por parte dos professores em formação, evidenciando a relação entre essa teoria, a interdisciplinaridade e a modelagem matemática, que são conceitos de grande importância na atuação do docente. Para tanto, foi realizada uma revisão bibliográfica priorizando os pontos necessários para o estudo do fenômeno de condução do calor. Foram expostos os conceitos básicos da teoria; utilizando-os juntamente com conceitos físicos, apresentamos a construção da equação do calor e destacamos algumas das formas gerais que a equação pode assumir. Apresentamos então o método de separação de variáveis para resolução da equação nos problemas de condução unidimensional em regime transiente e condução bidimensional em regime estacionário. Para o problema de condução unidimensional, abordamos os métodos numéricos e exemplificamos o uso dos métodos de resolução apresentados. Com base nisso, buscamos mostrar como a interdisciplinaridade e a modelagem matemática podem auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e como o uso dessas ferramentas pode otimizar a atuação do professor em sala de aula.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, equação do calor, métodos de resolução.

Abstract

The aim of this work is to present a little of the theory of Partial Differential Equations in order to motivate their study by the teachers in training, evidencing the relationship between this theory, interdisciplinarity and mathematical modeling, which are concepts of great importance in the teacher's performance. Therefore, a bibliographic review was done prioritizing the necessary points for the study of the phenomenon of heat conduction. The basic concepts of theory were exposed; using them together with physical concepts, we presented the construction of the heat equation and highlight some of the general forms that the equation can assume. We then presented the method of separation of variables to solve the equation for transient one-dimensional conduction and two-dimensional steady-state conduction problems. For the one-dimensional conduction problem, we approached the numerical methods and exemplify the use of the presented resolution methods. Based on this, we tried to show how interdisciplinarity and mathematical modeling can help in understanding the mathematical concepts involved and how the use of these tools can optimize the performance of the teacher in the classroom.

Keywords: Partial differential equations, heat equation, solving methods.

Lista de figuras

Figura 3.1 – Barra posicionada nos eixos	14
Figura 3.2 – Retângulo Ω com lados l_1, l_2, l_3 e l_4	18
Figura 4.1 – Placa retangular posicionada nos eixos	28
Figura 4.2 – Volume de controle para análise das taxas de transferência de calor.	29
Figura 4.3 – Discretização da Região R	32
Figura 4.4 – Molécula computacional do método explícito	36
Figura 4.5 – Molécula computacional do método implícito	37
Figura 4.6 – Gráfico da função em (4.38)	39
Figura 4.7 – Discretização do domínio do problema	40

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Resultados obtidos	42
---	----

Sumário

Lista de figuras	i
Lista de tabelas	ii
1 Introdução	3
2 Conceitos básicos	6
2.1 Definições	6
2.2 Superposição de soluções	7
2.3 Condições iniciais e de contorno	8
2.4 Classificação de equações diferenciais parciais de 2 ^a ordem semilineares com duas variáveis independentes e coeficientes reais	9
3 A equação do calor	13
3.1 O fenômeno de condução do calor	13
3.2 Condução do calor em uma barra	13
3.3 Unicidade da solução da equação do calor	18
4 Métodos de resolução da equação do calor	22
4.1 Método de separação de variáveis	22
4.1.1 Condução unidimensional em regime transiente	22
4.1.2 Condução bidimensional em regime estacionário	28
4.2 Métodos numéricos	31
4.2.1 Método explícito	35
4.2.2 Método implícito	36
4.3 Exemplo	38
5 Considerações finais	43
Referências	44
A Invariância do sinal do discriminante	46

1 Introdução

A história das equações diferenciais está diretamente relacionada aos estudos de fenômenos naturais, tendo em vista que esses constituíram a motivação para o seu desenvolvimento. Bassanezi e Ferreira [1] mencionam as equações diferenciais como um ramo da matemática que possui grande proximidade e interações com outras ciências desde sua origem, que se confunde com a do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica Clássica.

Além disso, segundo Boyce e DiPrima,

“muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas.”([2], p.1)

Assim, as equações diferenciais assumem papel de grande importância nas descrições de fenômenos da física, biologia, química, estatística e engenharia, dentre outras áreas, dadas na forma de modelos matemáticos.

Segundo Bassanezi, “a modelagem matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável” ([3], p. 15). Logo, ela possui, de fato, grande importância na formação de professores. O estudo de equações diferenciais e dos modelos que elas propiciam amplia a visão do futuro professor em relação aos métodos de ensino e à modelagem como ferramenta a ser utilizada com seus alunos.

Diversos fenômenos e situações podem ser estudados e descritos utilizando equações diferenciais: crescimento populacional, decaimento radioativo, lançamento de um objeto, queda de um corpo com resistência do ar, condução do calor em uma barra, juros compostos, resfriamento de um corpo, propagação de ondas, por exemplo. Alguns desses problemas são estudados na educação básica nas disciplinas de física, biologia e química, e com frequência são utilizados pelos professores de Matemática na aplicação dos conceitos matemáticos envolvidos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica [4] destacam que a interdisciplinaridade trata da transferência de métodos entre as disciplinas, visando o diálogo entre os conhecimentos. Afirmam ainda que o currículo deve ser tratado por meio de metodologias que levem em consideração a interdisciplinaridade e a contextualização. Por esse motivo, o estudo cuidadoso desses modelos possibilita ao professor de matemática estabelecer relações

entre os conhecimentos matemáticos e os referentes a outras áreas, podendo então utilizá-las em suas aulas para tornar os conceitos mais acessíveis aos alunos.

A teoria de equações diferenciais parciais (EDP's) envolve conceitos como taxas de variação, funções, sistemas de equações, condições de existência de soluções, entre outros. Bassanezi [3] defende que o estudo de aplicações de conceitos matemáticos pode auxiliar na compreensão do mesmo. Dessa forma, o estudo das equações diferenciais parciais pode favorecer o desempenho do professor ao ensinar os conteúdos envolvidos, pois os compreendem melhor e veem sua utilidade. No entanto, as equações diferenciais parciais não são estudadas no curso de Licenciatura em Matemática do IFSP.

Como destaca Iório [5], a definição de equação diferencial parcial como uma equação cuja incógnita é uma função de várias variáveis é muito geral, o que nos possibilita escrever EDP's das mais diversas formas. Entretanto, nem todas elas possuem significado e, assim, a escolha dos problemas mais importantes para a teoria se baseia na origem não matemática e nas aplicações que são realizadas, como ressaltam Bassanezi e Ferreira [1]. Portanto, ao estudar as EDP's, discutiremos um modelo relativo a uma situação significativa.

Com base nos pontos mencionados sobre a relação entre o estudo de equações diferenciais parciais e a formação do professor, o objetivo desse trabalho é apresentar um pouco da teoria das EDP's e, utilizando-a, descrever o problema da condução do calor e métodos de resolução aplicáveis a ele. Desejamos expor o tema de modo acessível para o professor em formação, utilizando conceitos estudados na licenciatura e mostrando como a interdisciplinaridade e a modelagem podem melhorar a compreensão de um determinado conceito, que deixa de ser considerado algo isolado da realidade. Esperamos motivar o estudo das EDP's como forma de aprimoramento da formação e atuação do professor.

Para elaboração desse trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica explicativa com abordagem qualitativa. Segundo Severino [6], uma pesquisa explicativa tem como objetivo registrar e analisar os fenômenos estudados, através do método experimental ou com base em pesquisa qualitativa. Dessa forma, pudemos explorar a teoria das EDP's e o problema da condução do calor, buscando compreender o fenômeno físico que leva à formulação matemática que resulta na equação do calor. Com isso, tornou-se possível analisar as condições que compõem o problema não apenas como objetos matemáticos que possibilitam a sua resolução, mas como representações de características de um fenômeno observável.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos e necessários para, no capítulo

3, analisarmos a equação do calor e sua construção. No capítulo 4, são apontados métodos analíticos e numéricos de resolução da equação, aplicados a alguns exemplos com diferentes propriedades. Nesse capítulo, são apresentadas comparações entre o método de separação de variáveis e o método de diferenças finitas na resolução de um problema e, a seguir, estão as considerações finais. No apêndice A, é apresentada a demonstração da invariância do sinal do discriminante de uma equação semilinear de segunda ordem com duas variáveis independentes.

2 Conceitos básicos

2.1 Definições

Iniciamos o estudo das equações diferenciais parciais estabelecendo definições e notações básicas para o desenvolvimento da teoria. As definições, em sua maioria, foram baseadas nos textos de Iório [5] e Iório e Iório Jr [7]. Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma equação da forma

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = 0, \quad (2.1)$$

em que $x \in \Omega$ e Ω é um domínio em \mathbb{R}^n .

No texto utilizamos diferentes notações para as derivadas parciais de uma função em relação às variáveis. No caso de uma função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x)$, podemos denotar sua primeira derivada em relação a x_1 por

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, D_1 u, u_{x_1}$$

e a derivada parcial de u_{x_1} em relação a x_3 por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1}, D_3 D_1 u, u_{x_1 x_3}.$$

Denotamos por Δu o laplaciano de u em \mathbb{R}^n , ou seja

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Segundo Evans [8], uma EDP é chamada *linear* se, dentre os termos da equação, não ocorre produto de u por uma de suas derivadas parciais ou pela própria função. Caso ocorra, é chamada *não-linear*. A ordem de uma equação diferencial parcial é definida pelas derivadas parciais de maior ordem que ocorrem na equação. Os termos de maior ordem consistem no que é chamado de *parte principal* da equação. Assim, se uma equação não-linear é linear na parte principal, ela é chamada de *semilinear*. As equações podem ainda ser classificadas em *quasilineares*, quando os coeficientes da parte principal dependem apenas de u e de suas derivadas de ordem inferior a k , e *totalmente não-lineares*, que são equações que dependem de modo não-linear das derivadas de ordem k . Por exemplo, a forma geral de uma equação diferencial parcial

de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + d(x) = 0,$$

e a parte principal é $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

2.2 Superposição de soluções

Podemos associar a uma equação linear de ordem k um *operador* ou *transformação* L . Desenvolveremos as considerações seguintes com base em equações de ordem 2, mas são válidas para equações de qualquer ordem (ver [5]). Temos então, associado à equação

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = -d(x) \quad (2.2)$$

um operador L dado por

$$Lu = f \quad (2.3)$$

em que $f = -d(x)$. À equação não-homogênea (2.2), podemos associar ainda a EDP linear homogênea

$$Lu = 0. \quad (2.4)$$

Uma *solução clássica* de uma equação diferencial parcial de ordem k é uma função de classe C^k que satisfaz a equação (2.1). Como o operador é linear, decorre que qualquer combinação linear finita de soluções que satisfazem (2.2) (e, conseqüentemente, (2.3)) satisfaz também a equação (2.2). Esse resultado é chamado de *princípio da superposição* na forma finita. A proposição a seguir nos mostra que o princípio da superposição também é válido para combinações lineares infinitas, mediante determinadas condições.

Proposição 2.1 (Princípio da superposição). *Seja L um operador diferencial parcial de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo (2.4). Se $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω , então u satisfaz (2.4).

Demonstração: Demonstraremos o caso em que $k = 2$. Pelas propriedades de derivação, temos que

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x), \\ D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x), \\ D_j D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j D_i u_m(x). \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j D_i u_m(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_m(x) + \sum_{i=1}^n b_i u_m(x) + c(x) u_m(x) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} (Lu_m) = 0. \end{aligned}$$

□

2.3 Condições iniciais e de contorno

No estudo de equações diferenciais ordinárias (EDO's) e equações diferenciais parciais há uma diferença fundamental em relação às informações necessárias para a unicidade da solução. No caso de uma EDO linear, aparecem uma ou mais constantes arbitrárias que podem ser determinadas impondo valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um ponto. No caso das EDP's, a solução geral, quando existe, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, que podem ser encontradas impondo condições de contorno e condições iniciais.

São chamadas *condições de contorno* as condições impostas sobre o bordo da região de interesse. O bordo (ou fronteira) de uma região é dado por

$$\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin \text{int}A\},$$

sendo \bar{A} o fecho de A e $\text{int}A$ o interior de A . Quando são dadas apenas condições de contorno, o problema é chamado de *problema de contorno*.

Se o problema apresenta condições em que se impõe o valor da solução em uma curva ou superfície inicial, este será chamado *problema de valor inicial* ou *problema de Cauchy*.

O problema pode também apresentar condições de contorno e iniciais. Neste caso, o problema será chamado *misto*. Se as condições impostas não são independentes, o problema possui uma *condição de compatibilidade*.

Se um problema é constituído por uma EDP e condições de contorno ou iniciais, dizemos que ele é *bem-posto* se satisfaz as condições:

- i) o problema tem uma solução;
- ii) a solução é única;
- iii) a solução depende continuamente dos dados do problema.

Evans [8] enfatiza que a noção de *dependência contínua dos dados* é particularmente importante na solução de problemas relacionados à física, pois ela implica que mudanças suficientemente pequenas nas condições iniciais resultem em mudanças suficientemente pequenas na solução. Cunha [9] destaca que o conceito de problema bem-posto foi introduzido por Hadamard em 1902 e garante que o problema possui uma solução que não apresenta saltos bruscos entre dados e resultados.

2.4 Classificação de equações diferenciais parciais de 2ª ordem semilineares com duas variáveis independentes e coeficientes reais

Uma forma de classificar as equações diferenciais parciais é a quantidade de *curvas características*, que são muito úteis na resolução de problemas por métodos numéricos. Curvas características para EDP's de segunda ordem com duas variáveis independentes são curvas ao longo das quais a equação contém apenas derivadas totais de u_x e u_y .

Analisemos então a equação

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (2.5)$$

cujo *discriminante* é

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y).$$

Vamos verificar que o sinal de δ é invariante, dadas mudanças locais de coordenadas.¹ Para tanto, consideremos as funções $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$, contínuas e suficientemente deriváveis em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) de modo que o jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

nunca se anule no ponto (x_0, y_0) . Essa condição indica, pelo Teorema da Função Inversa, que podemos resolver $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$. Desse modo, podemos obter $u(x, y) = v(\xi, \eta)$. Pela Regra da Cadeia, temos

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + v_{\xi\xi} \xi_{xx} + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_{\eta\eta} \eta_{xx} + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\xi} \xi_{xy} + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_{xy} + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + v_{\xi\xi} \xi_{yy} + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_{\eta\eta} \eta_{yy} + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y.$$

Fazendo as substituições em (2.5) e reorganizando os termos, obtemos

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(v, \xi, \eta, v_\xi, v_\eta), \quad (2.6)$$

em que

$$A(\xi, \eta) = a(x, y)(\xi_x)^2 + 2b(x, y)(\xi_x \xi_y) + c(x, y)(\xi_y)^2$$

$$B(\xi, \eta) = a(x, y)\xi_x \eta_x + b(x, y)(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c(x, y)\xi_y \eta_y$$

$$C(\xi, \eta) = a(x, y)(\eta_x)^2 + 2b(x, y)(\eta_x \eta_y) + c(x, y)(\eta_y)^2.$$

Podemos assim calcular o discriminante da equação (2.6)

$$\Delta(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2.$$

Como sabemos que $J(x, y)$ não se anula, o sinal de $\Delta(\xi, \eta)$ é o mesmo de $\delta(x, y)$. Isso significa que as equações (2.5) e (2.6) são do mesmo tipo. O sinal de $\delta(x, y)$ define o tipo da equação (2.5). Assim

i) Se $\delta(x, y) = 0$, a equação é *parabólica* no ponto $(x, y) \in \Omega$;

ii) Se $\delta(x, y) > 0$, a equação é *hiperbólica* no ponto $(x, y) \in \Omega$;

¹ As passagens omitidas podem ser verificadas no Apêndice (A).

iii) Se $\delta(x, y) < 0$, a equação é *elíptica* no ponto $(x, y) \in \Omega$.

Vejam os então como identificar curvas características para a equação (2.5). Primeiramente, podemos escrevê-la como o sistema de primeira ordem:

$$\begin{aligned} p &= u_x \\ q &= u_y \\ a(x, y)p_x + b(x, y)p_y + c(x, y)q_y &= f(u, x, y, p, q). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sabemos que u é de classe C^2 , logo podemos eliminar u da primeira e da segunda equações em (2.7), pois $p_y = u_{xy}$ e $q_x = u_{yx}$; isto é

$$p_y - q_x = 0. \tag{2.8}$$

Podemos multiplicar a equação (2.8) por uma função arbitrária $\lambda = \lambda(x, y) \neq 0$ e somar à última equação do sistema, obtendo assim

$$ap_x + 2bp_y + \lambda p_y - \lambda q_x + cq_y = 0. \tag{2.9}$$

A derivada de uma função $\omega(x, y)$ em relação a x ao longo da curva $y = y(x)$ no plano xy é dada por

$$\frac{d}{dx}(\omega(x, y(x))) = \omega_x + \omega_y \frac{dy}{dx}. \tag{2.10}$$

Podemos reorganizar os termos da equação (2.9) na forma

$$a \left(p_x + \frac{2b + \lambda}{a} p_y \right) - \lambda \left(q_x - \frac{c}{\lambda} q_y \right) = 0. \tag{2.11}$$

Tomando então $P(x) = p(x, y(x))$ e $Q(x) = q(x, y(x))$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= p_x + p_y \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dQ}{dx} &= q_x + q_y \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comparando a equação (2.12) com a equação (2.11), obtemos

$$p_x + p_y \frac{dy}{dx} = p_x + \frac{2b + \lambda}{a} p_y$$

e

$$q_x + q_y \frac{dy}{dx} = q_x - \frac{c}{\lambda} q_y,$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} = -\frac{c}{\lambda}. \tag{2.13}$$

Portanto, λ deve satisfazer

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0. \quad (2.14)$$

Se adotarmos

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x, y), \quad (2.15)$$

podemos relacionar com (2.13) e obtemos

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{\mu}, \\ \mu &= \frac{2b + \lambda}{a} \Rightarrow \lambda = a\mu - 2b, \end{aligned} \quad (2.16)$$

concluindo que

$$a\mu - 2b = -\frac{c}{\lambda},$$

ou ainda,

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0. \quad (2.17)$$

Vemos então que o sinal do discriminante $\delta = b^2 - ac$ indica se existem duas, uma ou nenhuma solução real $\mu = \mu(x, y)$ que satisfaz (2.17). Se a equação (2.5) for do tipo hiperbólico, existirão duas famílias de curvas reais; se for do tipo parabólico, existirá uma família de curvas reais e se for do tipo elítico, não existirão famílias de curvas reais que satisfaçam (2.17). As curvas definidas dessa forma são as *curvas características* da equação (2.5).

3 A equação do calor

3.1 O fenômeno de condução do calor

A seguir, discutiremos alguns aspectos físicos envolvidos no fenômeno de condução do calor, com base nas ideias de Incropera e DeWitt [10]. A condução do calor é um fenômeno físico que ocorre mediante atividade atômica e molecular, de forma que, ao colidir com as moléculas vizinhas, em movimento aleatório, há a transferência de energia entre elas, das mais energéticas para as de menor energia. É possível quantificar a transferência de calor por meio das equações das *taxas de transferência de calor*, utilizadas para calcular a quantidade de energia transferida por unidade de tempo. No caso da condução de calor, a equação é conhecida como *lei de resfriamento de Fourier*, uma lei empírica obtida por observação de fenômenos.

Consideremos o experimento de condução de calor em uma barra homogênea de material conhecido, com lateral isolada (evitando a perda de calor para o ambiente) e as faces mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 .

A lei de resfriamento de Fourier diz que, dadas duas placas de área A , de mesmo material, mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 , colocadas paralelamente à uma distância Δx , haverá transferência de calor de uma placa para a outra (ver [11]). No experimento da barra, foi observado que a taxa de transferência de calor q_x nesse caso é diretamente proporcional à área das secções consideradas, à diferença de temperatura $\Delta T = |T_1 - T_2|$ e inversamente proporcional à distância entre as secções Δx . Além disso, mudando o material da barra, observou-se que havia mudança nessa quantidade, logo houve a necessidade da introdução de um coeficiente k , que depende do material. Foi obtida então a expressão

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

na qual k é a *condutividade térmica* do material da barra (ver [10]).

3.2 Condução do calor em uma barra

A seguir, apresentaremos a dedução da equação do calor conforme o texto de Figueiredo [11].

Consideremos uma barra posicionada sobre o eixo das abscissas, com lateral isolada termicamente e secção transversal de área A , como na Figura 3.1.

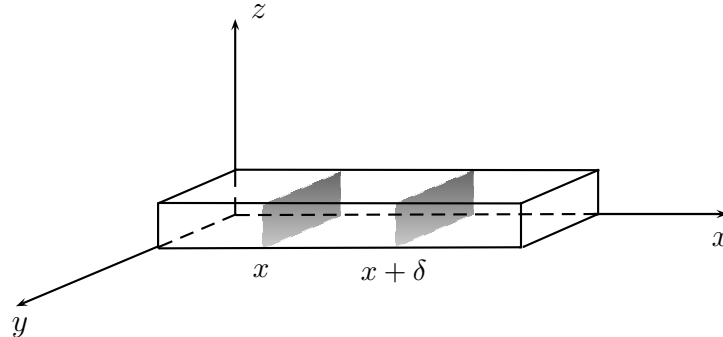


Figura 3.1 – Barra posicionada nos eixos

Tomando as secções transversais da barra em x e $x + \delta$, podemos analisar o *fluxo de calor* através de uma secção x num instante t . Denotando por $u(x, t)$ a temperatura de um ponto de abscissa x num instante t , podemos fazer $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + \delta, t)$. O fluxo de calor q será uma função de x e t . Considerando o sentido positivo do eixo x , utilizamos a lei de Fourier, tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$ para obter a expressão

$$q(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} kA \frac{\Delta T}{\delta}(x, t) = -kAu_x(x, t). \quad (3.1)$$

O sinal negativo na equação (3.1) é necessário porque o calor é transferido da secção mais quente para a mais fria da barra. Se $u(x, t)$ cresce com x , a variação em x de u é positiva e, portanto, o fluxo de calor é negativo. Caso contrário, u_x é negativo e, assim, $q(x, t)$ é positivo.

Fixando uma secção da barra localizada em x_0 e outra localizada em $x_0 + \delta$, podemos calcular o total de calor Q que entra em um segmento fixo entre x_0 e $x_0 + \delta$ no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$ utilizando o fluxo de calor $q(x, t)$. Q é a diferença entre o calor que entra na secção em x_0 e o calor que sai pela secção em $x_0 + \delta$

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt,$$

ou ainda

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) - q(x_0 + \delta, t) dt. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), temos

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} -k[u_x(x_0, t) - u_x(x_0 + \delta, t)] A dt. \quad (3.3)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que

$$kA \int_a^b u_{xx}(x, t) dx = kA[u_x(b, t) - u_x(a, t)],$$

logo podemos substituir em (3.3) e obter

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} u_{xx}(x, t) dx dt. \quad (3.4)$$

O calor específico de uma substância, denotado por c , é a quantidade de calor necessária para elevar em uma unidade a temperatura de uma unidade de massa da substância. Como a barra é homogênea, podemos expressar a massa de uma secção como $m = \rho \cdot A$, em que ρ é a densidade do material. Podemos calcular a quantidade de calor que entrou em uma secção x em um instante t por $q = c \cdot \rho \cdot A \cdot u_t(x, t)$. Logo o valor de Q também é dado por

$$Q = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\int_{t_0}^{t_0+\tau} cu_t(x, t)\rho A dt \right) dx. \quad (3.5)$$

Igualando as expressões para Q obtidas em (3.4) e (3.5), temos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x, t) dx dt. \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) é válida para todo $t_0 > 0$, todo $x_0 \in (0, L)$ e todos $\tau > 0$ e $\delta > 0$.

Assim, temos que

$$ku_{xx}(x, t) = c\rho u_t(x, t),$$

ou ainda

$$u_t = Ku_{xx}, \quad (3.7)$$

sendo $K = \frac{k}{c\rho}$ o coeficiente de *difusibilidade térmica*. A equação (3.7) é uma das formas da equação do calor. Fisicamente, ela representa a variação da temperatura $u(x, t)$ numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente, como destaca Figueiredo [11]. Há outras quantidades físicas que também se difundem de acordo com essa mesma equação em situações unidimensionais e, por esse motivo, a equação (3.7) também é chamada de *equação de difusão*.

Outras formas da equação do calor surgem de acordo com as propriedades físicas do problema. Destacaremos a seguir algumas dessas possibilidades.

No caso em que a condutividade térmica é uma função $k(x)$ não constante, podemos utilizar a lei de Fourier e o Teorema Fundamental do Cálculo para obter

$$Q = A \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [k(x)u_x]_x dx dt. \quad (3.8)$$

Pode ocorrer ainda que o calor específico do material que constitui a barra varie com x , bem como a sua densidade linear, logo

$$Q = A \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c(x)\rho(x)u_t(x,t) dx dt. \quad (3.9)$$

Das equações (3.8) e (3.9), obtemos a equação do calor

$$c(x)\rho(x)u_t = [k(x)u_x]_x, \quad (3.10)$$

também chamada de *equação do calor na forma divergente*.

Há casos nos quais existe uma fonte interna de calor em regiões da barra, devida a reações químicas, por exemplo. Desse modo, denotemos por $\phi(x,t)$ a quantidade de calor gerada por unidade de volume em uma unidade de tempo. Nessa situação, devemos somar à quantidade de calor que entra no segmento entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \delta$ pela condução do calor no período de t_0 até $t_0 + \tau$ a quantidade de calor gerada internamente no segmento nesse período. Pela definição de $\phi(x,t)$, o calor gerado internamente no segmento é dado por

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \phi(x,t) A dx dt.$$

Tem-se, portanto,

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [ku_{xx}(x,t) + \phi(x,t)] dx dt = c\rho \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} u_t(x,t) dx dt$$

e assim

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t) + \phi(x,t),$$

que é outra forma da equação do calor.

Se as situações mencionadas ocorrerem simultaneamente, a equação completa que descreve o fenômeno é

$$c(x)\rho(x)u_t = [k(x)u_x]_x + \phi(x,t).$$

A equação (3.7) possui infinitas soluções. Entretanto, em um problema físico real, a solução será única. Figueiredo [11] aponta que o problema de condução do calor em uma barra é descrito por meio de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem cujas condições iniciais e de fronteira estão ligadas diretamente ao fenômeno físico representado.

A distribuição de temperaturas na barra com o passar do tempo deve depender da temperatura inicial ao longo da barra, que será a *condição inicial* do problema. Seja $f(x)$ a

função que representa a temperatura inicial nas secções da barra. Teremos então

$$u(x, 0) = f(x).$$

Para encontrar a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra ao longo do tempo, é importante saber o que acontece nas suas extremidades. Essa informação estará representada pelas *condições de fronteira*. Por exemplo, consideremos uma barra cujas extremidades são mantidas a 0°C . Teremos então as seguintes condições de fronteira:

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(L, t) = 0.$$

As condições de fronteira podem ser de vários tipos, como, por exemplo:

- i) Condições de Dirichlet, em que as extremidades são mantidas a temperaturas constantes ou que variam com o tempo de acordo com funções conhecidas:

$$u(0, t) = T_1 \text{ e } u(L, t) = T_2$$

ou

$$u(0, t) = g_1(t) \text{ e } u(L, t) = g_2(t);$$

- ii) Condições de Neumann, em que o fluxo de calor através das extremidades é conhecido:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

ou

$$u_x(0, t) = h_1(t) \text{ e } u_x(L, t) = h_2(t);$$

- iii) Condições de Robin, em que ocorre uma combinação das condições acima:

$$u(0, t) = T \text{ e } u_x(L, t) = h(t)$$

ou

$$u_x(0, t) = h(t) \text{ e } u(L, t) = T.$$

Se o problema possui uma condição inicial e uma condição de fronteira, o problema está bem posto, admitindo solução única.

3.3 Unicidade da solução da equação do calor

Conforme já mencionado, o problema da equação do calor possui solução única, o que pode ser demonstrado fazendo uso do *princípio do máximo para a equação do calor*, cuja demonstração apresentaremos a seguir, conforme o texto de Iório [5]. Para tanto, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.3.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$ tal que $Lu > 0$ em Ω . Então u não tem máximo local em Ω ([5], p.221).*

Demonstração: Suponhamos que u possui um máximo local em Ω , que ocorre no ponto (x_0, t_0) . Sabemos que $u_t(x_0, t_0) = 0$ e $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$, pois trata-se de um ponto de máximo. Dessa forma, teríamos

$$Lu(x_0, t_0) = Ku_{xx}(x_0, t_0) - u_t(x_0, t_0) \leq 0,$$

absurdo. □

Consideremos o operador L tal que $Lu = Ku_{xx} - u_t$. Podemos enunciar o *princípio do máximo para o operador L* da seguinte forma:

Teorema 3.3.1. *Sejam $\Omega = (a, b) \times (0, T)$, $l_1 = \{(a, t) : 0 \leq t \leq T\}$, $l_2 = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\}$, $l_3 = \{(b, t) : 0 \leq t \leq T\}$ e $l_4 = \{(x, T) : a \leq x \leq b\}$. Suponhamos que $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua em seu domínio, seja de classe C^2 em $\Omega \cup l_4$ e satisfaça $Lu \geq 0$ em $\Omega \cup l_4$. Então o máximo de u em $\overline{\Omega}$ ocorre em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$.*

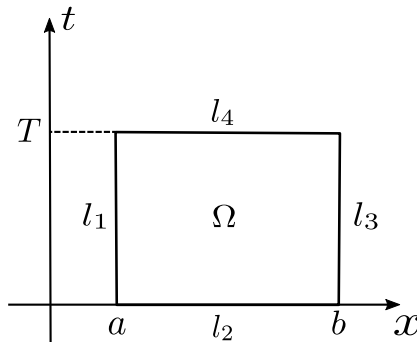


Figura 3.2 – Retângulo Ω com lados l_1, l_2, l_3 e l_4 .

Demonstração: Seja $m = \max\{u(x, t) : (x, t) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3\}$ e suponhamos que o máximo de u em $\overline{\Omega}$ não ocorra em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Assim, temos $M = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \overline{\Omega}\}$ tal que

$M > m$ e existe $(x_0, t_0) \in \Omega \cup l_4$ tal que $u(x_0, t_0) = M$. Podemos definir as funções

$$w(x) = \frac{M - m}{2(b - a)^2}(x - x_0)^2, x \in [a, b],$$

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x), (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

Sabemos que $w \in C^2([a, b])$ e $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup l_4)$, logo $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup l_4)$, o que nos possibilita encontrar as derivadas parciais de v em relação a x e a t . Temos que

$$Lw = Kw_{xx} - w_t = K \frac{M - m}{(b - a)^2} > 0$$

e por hipótese

$$Lu \geq 0, (x, t) \in \Omega \cup l_4.$$

Logo, obtemos

$$Lv = Lu + Lw \geq Lw = K \frac{M - m}{(b - a)^2} > 0$$

em $\Omega \cup l_4$. Pelo Lema 3.3.1, o máximo de u é atingido em $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$. Se $(x, t) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3$, por hipótese,

$$u(x, t) \leq m.$$

Temos ainda que

$$(x - x_0) \leq (b - a),$$

logo obtemos

$$v(x, y) \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M = v(x_0, t_0).$$

O máximo de v é atingido em um ponto $(\bar{x}, \bar{t}) \in l_4$ (que pode ser (x_0, t_0) se esse ponto pertencer a l_4). Como (\bar{x}, \bar{t}) é um ponto de máximo, temos

$$Kv_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$$

e

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0.$$

Podemos observar que

$$u_t = v_t \text{ e } v_{xx} = u_{xx} + \frac{M - m}{(b - a)^2}.$$

Logo, temos

$$Lu = K \left(v_{xx} - \frac{M - m}{(b - a)^2} \right) - v_t = 0,$$

o que implica em

$$v_{xx} = \frac{v_t}{K} + \frac{M - m}{L^2} < 0,$$

que é um absurdo pois $v_t > 0$ e $M > m$. Concluimos assim que $M = m$ (ver [5] e [11]). \square

Podemos então, a partir do Teorema 3.3.1, demonstrar a unicidade da solução do problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C([a, b] \times [0, +\infty)), \\ u_t &= Ku_{xx} + \phi(x, t) \\ u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

que é composto pela equação do calor não-homogênea com condições de fronteira não-homogêneas. Demonstrando a unicidade para este caso, podemos tomar $\phi(x, t)$, $A(t)$ e $B(t)$ adequados e obter resultado análogo para outras formas da equação do calor.

Teorema 3.3.2. *Dados $f \in C([a, b])$, $A, B \in C([0, +\infty))$ e $\phi \in C^1((a, b) \times (0, +\infty))$, existe no máximo uma solução para o problema representado por (3.11) (ver [5]).*

Demonstração: Sejam u e v soluções do problema. Assim, elas satisfazem

$$\begin{aligned} u &\in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C([a, b] \times [0, +\infty)), \\ u_t &= Ku_{xx} + \phi(x, t), \\ u(a, t) &= A(t), \\ u(b, t) &= B(t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned} v &\in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C([a, b] \times [0, +\infty)), \\ v_t &= Kv_{xx} + \phi(x, t), \\ v(a, t) &= A(t), \\ v(b, t) &= B(t), \\ v(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Logo, definindo $w = u - v$, temos

$$w_t = u_t - v_t \tag{3.14}$$

e

$$w_{xx} = u_{xx} - v_{xx}, \quad (3.15)$$

da qual obtemos

$$w_t = kw_{xx}, \quad (3.16)$$

como já era esperado, pois w é uma combinação linear de soluções do problema. Temos ainda que

$$\begin{aligned} w(a, t) &= u(0, t) - v(0, t) = 0, \\ w(b, t) &= u(L, t) - v(L, t) = 0, \\ w(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pelo Teorema 3.3.1, dado $T > 0$, o máximo e o mínimo de w em $[a, b] \times [0, T]$ é atingido em $(a \times [0, T]) \cup ([a, b] \times 0) \cup (b \times [0, T])$. Para (x, t) nesse conjunto, tem-se $w(x, t) = 0$. Como T é arbitrário, temos que $w \equiv 0$. \square

4 Métodos de resolução da equação do calor

4.1 Método de separação de variáveis

4.1.1 Condução unidimensional em regime transiente

Jean-Baptiste Joseph Fourier, segundo Iório [5], “foi o primeiro a estudar sistematicamente o problema de condução de calor e seu nome está intrinsecamente ligado ao método de separação de variáveis, conhecido como *método de Fourier*” (p. 94). Este método visa encontrar soluções para o problema da condução do calor e outros fenômenos de difusão.

O método de separação de variáveis é apresentado por Iório [5] e por Figueiredo [11] da seguinte forma.

Seja \mathfrak{R} a região do plano (x, t) determinada por $0 < x < L$ e $t > 0$ e $\overline{\mathfrak{R}}$ a união de \mathfrak{R} com sua fronteira. Para resolver o problema da condução do calor, procuramos uma função $u(x, t)$ definida em $\overline{\mathfrak{R}}$ que satisfaça o sistema

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{4.2}$$

As funções encontradas serão possíveis soluções para o problema. Após identificá-las, é possível provar que elas são, de fato, soluções do problema (4.1). Substituindo a equação (4.2) na equação do calor, temos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t),$$

ou ainda

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Nesta última expressão consideramos os pontos em que $F(x)$ e $G(t)$ não se anulam. Como a expressão do lado esquerdo depende apenas de t e a do lado direito depende apenas de

x , então ambas devem ser iguais a uma constante σ . Temos assim as expressões

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad (4.3)$$

e

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma. \quad (4.4)$$

A equação (4.3) nos leva à seguinte equação diferencial ordinária

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad (4.5)$$

que deve ser satisfeita em $0 < x < L$. Pela condição de contorno, devemos ter

$$F(0) = F(L) = 0$$

ou

$$G(t) = 0,$$

para todo $t > 0$. A segunda condição nos daria $u \equiv 0$ e, embora esta seja uma solução para a equação do calor, ela só satisfaria a condição inicial se $f(x) \equiv 0$. Assim, temos que

$$F(0) = F(L) = 0. \quad (4.6)$$

Temos, portanto, três possibilidades para σ :

- i) Se $\sigma > 0$, teremos duas soluções reais distintas para equação característica. A solução geral de (4.5) será

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Para que F satisfaça (4.6), as constantes c_1 e c_2 devem ser solução do sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Porém, a única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$, o que implica em $F \equiv 0$, que não interessa.

- ii) Se $\sigma = 0$, a equação característica de (4.5) terá duas raízes reais iguais. Logo, a solução geral da EDO será

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

que deve satisfazer também

$$c_2 = 0 \text{ e } c_1 L + c_2 = 0.$$

Isso implica $c_1 = c_2 = 0$ e $F \equiv 0$.

iii) Se $\sigma < 0$, fazemos $\sigma = -\lambda^2$ e temos a solução geral da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x),$$

que deve satisfazer ainda (4.6), ou seja,

$$c_1 = 0 \text{ e } c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Se queremos que F não seja identicamente nula, devemos ter $c_2 \neq 0$, o que implica em

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0.$$

Assim, $\lambda L = n\pi$, em que n é um número inteiro não nulo. Portanto, obtemos funções $-\sigma_n = \lambda_n^2$, que são da forma

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}.$$

Esses valores são chamados *valores próprios* ou *autovalores* do problema em (4.5) e as funções

$$F_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

são as *funções próprias* ou *autofunções* do problema. Resolvemos assim a primeira equação diferencial ordinária da separação de variáveis.

A equação em (4.4) tem como solução geral

$$G(t) = ce^{\sigma K t}.$$

Portanto, para cada valor de n , obtemos uma função da forma

$$u_n(x, t) = e^{\sigma K t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Podemos verificar que essa é uma solução da equação do calor. De fato,

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ u_x &= \frac{n\pi}{L} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ K u_{xx} &= -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ u_t &= K u_{xx}. \end{aligned}$$

Pela construção da solução, sabemos que esta satisfaz as condições de fronteira. Porém, u_n deve satisfazer também as condições iniciais. Se

$$u_n(x, 0) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

então u_n só seria solução do problema (4.1) se $f(x)$ fosse da forma

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Utilizando o princípio da superposição, temos que a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t), \quad (4.8)$$

na qual os coeficientes c_n são constantes, é também solução da equação e satisfaz as condições de fronteira. Se a condição inicial é da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

então a solução do sistema (4.1) é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.9)$$

Devemos então procurar coeficientes c_n de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pela teoria das séries de Fourier, vemos que os c_n devem ser os coeficientes de Fourier da função f em $[0, L]$, estendida para o resto de \mathbb{R} de modo que seja ímpar e periódica de período $2L$. De fato, sendo f uma função ímpar, sua série de Fourier, dada por

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

terá como coeficientes

$$a_n = 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Podemos então verificar que (4.9) realmente satisfaz o problema.

Teorema 4.1.1. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(L) = 0$ e tal que sua derivada exista e seja de quadrado integrável. Então (4.9) é solução do problema (4.1) em $\overline{\mathbb{R}}$.*

Demonstração: Primeiramente, sabemos que, se f' é de quadrado integrável e f é contínua e periódica de período $2L$, então ela converge para sua série de Fourier (ver [11]). Então analisaremos a expressão considerando a série de Fourier de f .

As séries

- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

são majoradas pelas séries

- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\pi^2 K t_1 / L^2},$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{-\pi^2 K t_1 / L^2} e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-\pi^2 K t_1 / L^2},$

com $0 < t_1 \leq t$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uniformemente convergente, como podemos verificar pelo teste M de Weierstrass, em sub-retângulos $\overline{\mathfrak{R}}_{12}$ da forma

$$\overline{\mathfrak{R}}_{12} = \{(x, t) : 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L, 0 < t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\},$$

o que significa que a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é contínua no conjunto

$\widehat{\mathfrak{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t > 0\}$. Isso implica que essa expressão é solução da equação do calor em $\widehat{\mathfrak{R}}$.

Basta então provar que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é contínua para $t \geq 0$. Para todo $(x, t) \in \overline{\mathfrak{R}}$, essa série é majorada por $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, pois

$$e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} = \frac{1}{e^{n^2 \pi^2 K t / L^2}} < 1.$$

Daí, temos, integrando por partes,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L + \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Considerando d_n como os coeficientes de Fourier de $f'(x)$ estendida como uma função par e periódica de período $2L$, temos $c_n = \frac{L}{n\pi}d_n$. Assim, obtemos

$$c_n^2 = \frac{L^2}{n^2\pi^2}d_n^2,$$

$$\sqrt{\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right)d_n^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} + d_n^2\right),$$

logo

$$|c_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} + d_n^2\right).$$

Observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \frac{2}{L} \int_0^L |f'|^2 dx.$$

Na última desigualdade, utilizamos a desigualdade de Bessel (ver [5] e [11]). Concluímos então que a série $\sum |c_n|$ é convergente, o que implica na convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, e sendo assim ela define uma função contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$. \square

Com base no que foi exposto sobre o problema (4.1), podemos pensar em soluções para problemas com outros tipos de condições de contorno. Por exemplo, para o problema

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, \\ u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \tag{4.10}$$

podemos tentar reduzir o problema a outro com condições de fronteira homogêneas. Isso pode ser feito introduzindo uma mudança de variável. Se for possível encontrar uma função $v(x, t)$, $v \in C^2(\overline{\mathfrak{R}})$ tal que

$$v(0, t) = A(t) \quad \text{e} \quad v(L, t) = B(t),$$

então podemos considerar a função $w = u - v$ e obter

$$\begin{aligned} w_{xx} &= u_{xx} - v_{xx} \Rightarrow u_{xx} = w_{xx} + v_{xx} \\ w_t &= u_t - v_t \Rightarrow u_t = w_t + v_t \\ w(0, t) &= u(0, t) - v(0, t) = A(t) - A(t) = 0 \\ w(L, t) &= u(L, t) - v(L, t) = B(t) - B(t) = 0 \\ w(x, 0) &= u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - v(x, 0), \end{aligned} \tag{4.11}$$

o que mostra que w é solução do problema

$$\begin{aligned}w_t &= Kw_{xx} + Kv_{xx} - v_t \\w(0, t) &= w(L, t) = 0 \\w(x, 0) &= f(x) - v(x, 0).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Se existir v tal que $Kv_{xx} = v_t$, então w é solução de um problema com condições de fronteira homogêneas, que pode ser resolvido utilizando o método de Fourier.

4.1.2 Condução bidimensional em regime estacionário

Kreyszig [12] discute o caso da condução bidimensional do calor em uma placa retangular fina, na qual a temperatura em um ponto (x, y) da placa independe do tempo. Representando-a em um sistema de coordenadas, suponhamos que a temperatura é mantida nula em três dos lados da placa, enquanto a temperatura nos pontos do lado restante é dada por uma função $f(x)$, conforme a Figura 4.1.

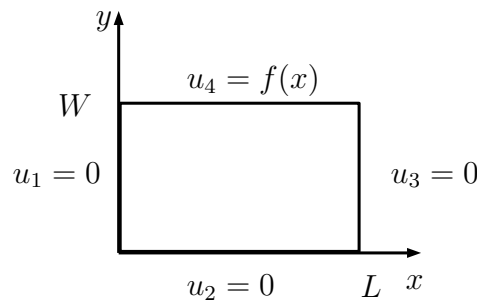


Figura 4.1 – Placa retangular posicionada nos eixos

Temos então

$$u(x, 0) = 0, \tag{4.13}$$

$$u(0, y) = 0, \tag{4.14}$$

$$u(L, y) = 0, \tag{4.15}$$

$$u(x, W) = f(x). \tag{4.16}$$

Para compreender a forma que a equação do calor assume nesse caso, podemos analisar o fenômeno físico associado, conforme Incropera e DeWitt [10] o fazem. Denotando por q_x , q_y e q_z as taxas de calor perpendiculares às superfícies de um volume de controle, Incropera e DeWitt [10] destacam que, por meio de expansões em séries de Taylor e desprezando termos de

ordem superior, podemos calcular as taxas de transferência de calor nas superfícies opostas de um volume de controle como o representado na figura 4.2.

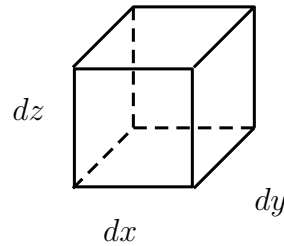


Figura 4.2 – Volume de controle para análise das taxas de transferência de calor.

Desse modo, as taxas de transferência de calor serão dadas por

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \quad (4.17)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy, \quad (4.18)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz. \quad (4.19)$$

Considerando que não haja uma fonte de energia, temos, pela conservação de energia,

$$\dot{E}_e + \dot{E}_s = \dot{E}_{ar} \quad (4.20)$$

em que \dot{E}_e é a energia que entra no volume, \dot{E}_s é a energia que sai do volume e \dot{E}_{ar} é a energia que permanece no volume. A energia armazenada é

$$\dot{E}_{ar} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Substituindo as equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.21) na equação (4.20), obtemos

$$q_x + q_y + q_z - \left[q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right] = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.22)$$

Por hipótese, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Utilizando a lei de Fourier para escrever as taxas de condução de calor, temos

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.23)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.24)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4.25)$$

Por fim, substituindo as relações (4.23), (4.24) e (4.25) na equação (4.22), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Na placa, consideramos que a condução está ocorrendo em duas dimensões. Podemos então representar o problema por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.26)$$

Nesse problema, é possível também aplicar o método de separação de variáveis, conforme aponta Kreyszig [12]. Nesse caso, procuramos uma solução da forma $u(x, y) = F(x)G(y)$. Substituindo essa solução em (4.26), obtemos

$$F''G + FG'' = 0.$$

Dividindo as parcelas por $F \cdot G$ temos

$$\frac{1}{F}F'' = -\frac{1}{G}G'',$$

e, dessa forma, concluímos que

$$\frac{1}{F}F'' = \lambda^2, \quad (4.27)$$

$$-\frac{1}{G}G'' = \lambda^2, \quad (4.28)$$

sendo λ^2 uma constante positiva.

Da equação (4.27), obtemos

$$F(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x),$$

e da equação (4.28), temos

$$G(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}.$$

Logo,

$$u(x, y) = (C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x))(C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}).$$

Aplicando a condição de que $u(0, y) = 0$, obtemos $C_1 = 0$. Utilizando a condição de que $u(x, 0) = 0$, concluímos que $C_3 = -C_4$. Como $u(L, y) = 0$, temos

$$C_2 \sin(\lambda L)(C_3 e^{\lambda y} - C_3 e^{-\lambda y}) = 0,$$

ou seja

$$C_2 C_3 \sin(\lambda L)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0,$$

o que nos leva a $\text{sen}(\lambda L) = 0$. Concluimos assim que $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in \mathbb{N}$. Temos então a solução

$$u_n(x, y) = C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}}\right),$$

sendo C_n uma constante que depende de n . Pelo princípio da superposição, tem-se

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Aplicando a última condição de contorno, temos

$$u(x, W) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{senh}\left(\frac{n\pi W}{L}\right).$$

Utilizando novamente séries de Fourier, concluimos que

$$d_n = C_n \text{senh}\left(\frac{n\pi W}{L}\right)$$

são os coeficientes de Fourier de $f(x)$. Portanto, temos a seguinte expressão como solução geral do problema

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \frac{\int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\text{senh}\left(\frac{n\pi W}{L}\right)} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

4.2 Métodos numéricos

Outra forma de tratar o problema da equação do calor é por meio dos *métodos numéricos*, com os quais obtemos aproximações para a solução da equação em pontos determinados. Os métodos aqui apresentados são aplicáveis para equações parabólicas.

Primeiramente, é necessário destacar alguns pontos em relação à *discretização* do domínio da solução. Esse processo consiste em definir uma *malha* de pontos igualmente espaçados, que serão utilizados para obter aproximações da solução. Podemos, por exemplo, considerar um problema cuja solução seja uma função $u(x, y)$, definida em um conjunto R . Podemos então tomar uma malha descrita por

$$R_h = \{(x_i, y_j) = (\bar{x} + ih, \bar{y} + jk), i, j \in \mathbb{Z}\},$$

na qual (\bar{x}, \bar{y}) é um ponto de referência fixo e h e k são constantes positivas chamadas de *passos* ou *incrementos*. Devemos, no entanto, tomar cuidado com essa malha, pois ela pode não conter os pontos do contorno da região. Para resolver esse problema, podemos aproximar R de *boa*

maneira por R_h anexando ou desprezando pedaços de R de modo a definir o contorno de R_h (ver [9]). A figura 4.3 mostra uma possível discretização de uma região R representada no plano.

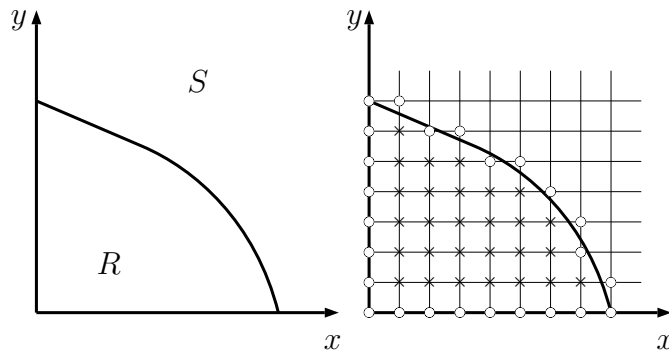


Figura 4.3 – Discretização da Região R

Outra forma de tratar o problema é incorporar as condições de contorno aos pontos de intersecção das retas paralelas aos eixos coordenados que passam pelos pontos de R_h e o contorno S de R . Obtemos assim uma malha de tamanho variável.

Podemos então aproximar uma função e suas derivadas na equação diferencial estudada. Para isso, utilizamos a série de Taylor que relaciona valores de uma função e suas derivadas em determinado ponto com valores da função em uma vizinhança. No caso de funções de uma variável $y(x)$ de classe C^{n+1} , temos

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \quad (4.29)$$

onde $x < \xi < x+h$. A última parcela em (4.29) representa o erro da aproximação de $y(x+h)$ pelo polinômio na variável h de grau n (ver [13])

$$P_n(h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x).$$

Dessa forma, podemos obter uma aproximação para y' pela relação

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''.$$

A expressão $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ é chamada de *fórmula progressiva* (ou *fórmula avançada*), sendo $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ a *diferença progressiva*. Podemos também utilizar a *diferença regressiva*, dada por $\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$ para obter a *fórmula regressiva* (ou *fórmula atrasada*)

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi).$$

Para $n = 2$ em (4.29), para h e $-h$, temos

$$y(x+h) = y(x) + hy(x) + \frac{h^2}{2!}y'(x) + \frac{h^3}{3!}y(\xi)$$

e

$$y(x-h) = y(x) - hy(x) + \frac{h^2}{2!}y'(x) - \frac{h^3}{3!}y(\xi).$$

Obtemos assim a *fórmula centrada*

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(\xi).$$

Consideremos uma aproximação da derivada de ordem q de uma função $y(x)$ por

$$y^{(q)}(x) = F(x, h) + \varepsilon(x, h),$$

em que $F(x, h)$ é uma fórmula de diferenças. Diz-se que $F(x, h)$ é de *ordem* p se $\varepsilon(x, h) = R(x)h^p$ e $R(x)$ independe de h (ver [13]). Utilizamos a notação $\varepsilon(x, h) = O(h^p)$. Isso significa que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x, h)}{h^p}$ é uma constante finita. Em outras palavras, existe uma constante C tal que $|\varepsilon(x, h)| \leq C|h^p|$, para h suficientemente próximo de zero, ou seja, há um controle do erro mesmo quando refinamos a malha.

Utilizando as propriedades de derivadas parciais e as expressões obtidas acima, podemos generalizar para funções de mais de uma variável. Desenvolveremos para o caso de uma função $u(x, t)$, que é um dos casos estudados neste trabalho. Consideremos uma malha dada pelos pontos $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, na qual h e k são os incrementos escolhidos para as variáveis x e t e (x_0, t_0) é o ponto de referência. As fórmulas progressiva e regressiva para u_t serão dadas por

$$u_t = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{h} - \frac{k}{2}u_{tt}(x, \zeta), \quad (t < \zeta < t+k), \quad (4.30)$$

$$u_t = \frac{u(x, t) - u(x, t-k)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x, \zeta), \quad (t-k < \zeta < t), \quad (4.31)$$

e as fórmulas centrais para u_{xx} e u_{tt} serão dadas por

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi, t), \quad (4.32)$$

$$u_{tt} = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} - \frac{k^2}{12}u_{tttt}(x, \zeta), \quad (4.33)$$

onde $x - h < \xi < x + h$ e $t - k < \zeta < t + k$ (ver [13]).

Cuminato e Meneguette Junior [13] apontam alguns conceitos que podem ajudar a verificar a eficácia de uma aproximação. Estes são *estabilidade*, *convergência* e *consistência*.

Um método numérico é considerado *estável* se leva a um acúmulo controlado de erros, ou seja, se fixado um ponto (x_i, t_j) , aumentando o refinamento da malha, não ocorrerá um descontrole dos erros dada a quantidade de passos necessária para obter as aproximações para a solução. Caso contrário, será dito *instável*. Cuminato e Meneguette Junior [13] destacam que estabilidade é importante em problemas nos quais há a necessidade de aplicar o método muitas vezes para obter a solução em um intervalo. Em geral, não é possível prever quantos passos serão necessários para obtenção de uma solução, logo o controle de erros é importante para realizar corretamente a escolha do valor do incremento. Ainda segundo os autores, se o método amplificar os erros já presentes nos dados iniciais, então em pouco tempo o erro fará com que a solução perca seu sentido. Se um método permite qualquer tamanho de passo, ele é dito *absolutamente estável* (ou *incondicionalmente estável*); caso contrário, é dito *condicionalmente estável*.

Para analisar a convergência de um método numérico, devemos considerar o *erro global* no ponto (x_i, t_j) , que é dado por

$$e_{i,j} = u(x_i, t_j) - U_{i,j},$$

e $U_{i,j}$ é o valor aproximado da função no ponto (x_i, t_j) . Um método será considerado convergente se e_n converge para zero quando n tende para infinito de modo que o ponto x_n permaneça fixo. Se x_n deve ser fixo, então h tende para zero, o que significa que a malha está sendo refinada.

A consistência é uma propriedade que relaciona a solução da equação de diferenças com a solução da equação diferencial. A consistência de um método está relacionada à ordem da fórmula de diferenças. Se um método tem ordem $O(h^p)$, ele é chamado de *consistente de ordem p*. A ordem de consistência também é um indicativo do quão rápida é a convergência do método. Em geral, um método de ordem $O(h^2)$ possui convergência mais rápida do que outro de ordem $O(h)$. Para um estudo mais detalhado em relação a esses conceitos, ver [9] e [13].

Seguindo essa ideia, consideremos o problema

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx}, \\ u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \tag{4.34}$$

cujos métodos analíticos de resolução foram apresentados na seção anterior. O domínio da função u é um conjunto $\mathfrak{R} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L; t \geq 0\}$. Para discretizar o domínio, devemos dividir o intervalo $[0, L]$ da variável x em N partes de passo h e a variável tempo com incremento k . Há várias formas de obter valores para $U_{i,j}$. Exploraremos dois deles a seguir.

4.2.1 Método explícito

O método explícito utiliza, para calcular o valor de $u_{i,j+1}$ os valores de $U_{i-1,j}$, $U_{i,j}$ e $U_{i+1,j}$. Primeiramente, utilizando as diferenças progressivas no tempo, como em (4.30), obtemos uma aproximação para u_t

$$u_t(x_i, t_j) \simeq \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k},$$

e utilizamos as diferenças centradas, conforme visto em (4.32) para aproximar u_{xx}

$$u_{xx}(x_i, t_j) \simeq \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}.$$

Podemos então substituir essas aproximações em (4.34) (ver [13])

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = a \cdot \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

da qual obtemos

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{ak}{h^2}(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}). \tag{4.35}$$

Uma *molécula computacional* é uma representação gráfica que nos permite compreender o procedimento realizado pelo método. Na figura 4.4, temos a molécula computacional que representa a equação (4.35).

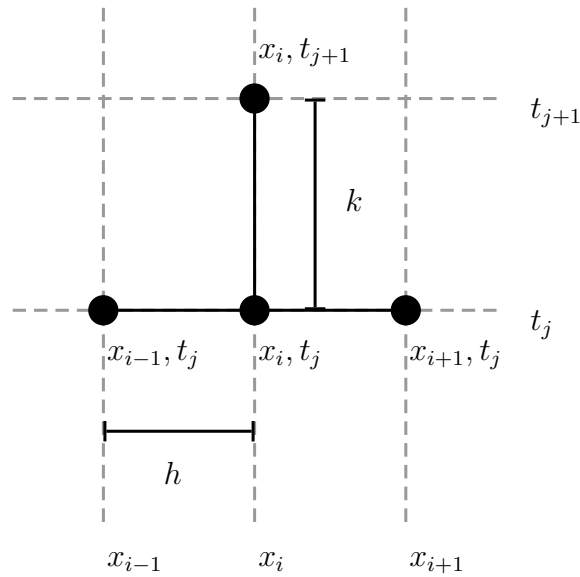


Figura 4.4 – Molécula computacional do método explícito

Cuminato e Meneguette Junior [13] destacam que o método explícito é convergente, condicionalmente estável e incondicionalmente consistente.

4.2.2 Método implícito

O método implícito utiliza valores das linhas $j-1, j-2, \dots$ para aproximar um ou mais valores na linha j . Segundo Cunha [9], o uso de diferenças finitas atrasadas para discretizar u_t nos proporciona um método incondicionalmente estável. O método será definido por

$$\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} = a \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} \right),$$

ou ainda

$$\left(1 + 2\frac{ak}{h^2} \right) U_{i,j} - \frac{ak}{h^2} (U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) = U_{i,j-1}.$$

O método implícito pode ser representado pela seguinte molécula computacional da figura 4.5.

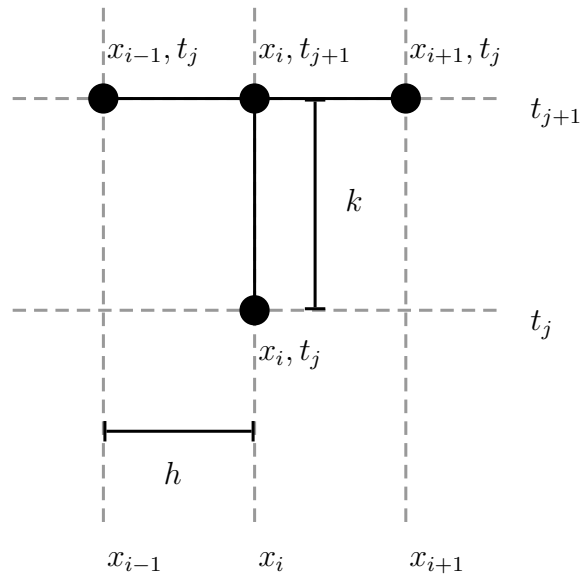


Figura 4.5 – Molécula computacional do método implícito

Denotando por σ o valor de $\frac{ak}{h^2}$, podemos observar que o método implícito nos fornece a relação

$$-\sigma U_{i-1,j} + (1 + 2\sigma)U_{i,j} - \sigma U_{i+1,j} = U_{i,j+1}.$$

Podemos expressar a relação entre os valores por um sistema de equações na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\sigma & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & 1 + 2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\sigma & 1 + 2\sigma & -\sigma \\ 0 & \cdots & 0 & -\sigma & 1 + 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{N-2,j} \\ U_{N-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,j-1} \\ U_{2,j-1} \\ \vdots \\ U_{N-2,j-1} \\ U_{N-1,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma U_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma U_{N,j} \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\sigma & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & 1 + 2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\sigma & 1 + 2\sigma & -\sigma \\ 0 & \cdots & 0 & -\sigma & 1 + 2\sigma \end{pmatrix}$$

é estritamente diagonalmente dominante, o que permite encontrar a solução do sistema, que é única (ver [14]). Esse método é incondicionalmente consistente e incondicionalmente estável (ver [13]).

4.3 Exemplo

Vejamos então como podemos utilizar os métodos apresentados para resolver um problema com uma equação de difusão.

Exemplo 4.3.1. *Calcule a primeira linha de soluções do problema*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < t < 1, \\ u(x, 0) &= x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0 = u(1, t), & 0 < t < 1, \end{aligned} \quad (4.36)$$

com $\sigma = \frac{1}{6}$ e $k = \frac{1}{54}$, em que k é o passo na variável t .

Método de separação de variáveis

Conforme visto, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que os c_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$, ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

No problema acima, temos que $L = 1$, $k = 1$ e $f(x) = x(1-x)$. Iniciamos então calculando os coeficientes de Fourier de $f(x)$

$$c_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = 2 \int_0^1 x(1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx.$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$c_n = 2 \left[\frac{-x(1-x)\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x) dx \right].$$

Utilizando integração por partes novamente, temos

$$c_n = 2 \left[\frac{-x(1-x)\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(1-2x)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right] \right].$$

Temos assim

$$\begin{aligned}
 c_n &= 2 \left[\frac{1(1-1)\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{0(1-0)\cos(0)}{n\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-2)\text{sen}(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{(1-0)\text{sen}(0)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{2 \cdot 1}{n^3\pi^3} \right] \\
 &= \frac{4}{n^3\pi^3}(1 - \cos(n\pi)).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Para n par, temos $c_n = 0$. Se n é ímpar, temos $c_n = \frac{8}{n^3\pi^3}$. Logo, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3} e^{-((2n+1)\pi)^2 t}. \tag{4.38}$$

Podemos ver na Figura 4.6 o gráfico da solução obtida pelo método de separação de variáveis em $(x, t) \in ([0, 1] \times [0, 1])$.

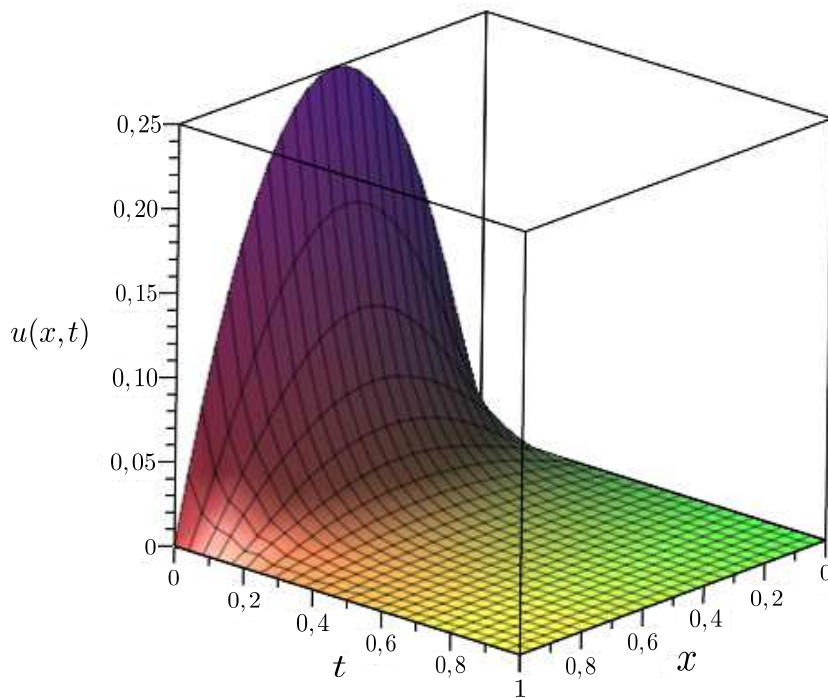


Figura 4.6 – Gráfico da função em (4.38)

Método explícito

O enunciado pede que calculemos a primeira linha de soluções, ou seja, as soluções para t_1 . Como temos $\sigma = \frac{1}{6}$, $a = 1$ e $k = \frac{1}{54}$, temos $h = \frac{1}{3}$. Portanto, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ e $x_3 = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{54}$, $t_2 = \frac{2}{54}$ e assim sucessivamente. Na figura 4.7 vemos a malha de discretização do problema.

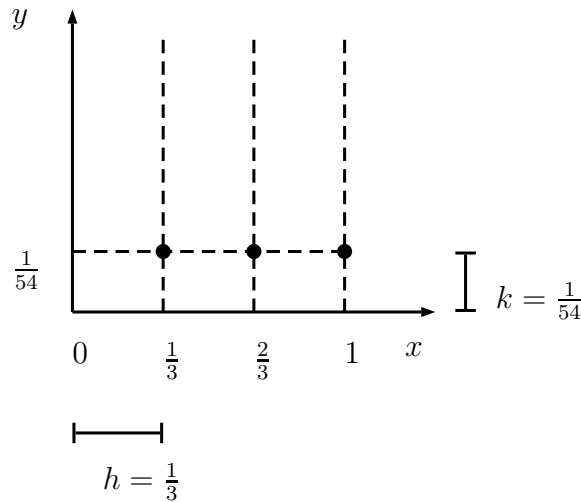


Figura 4.7 – Discretização do domínio do problema

Utilizando a condição inicial, temos

$$u(x_0, t_0) = u(0, 0) = 0 = U_{0,0},$$

$$u(x_1, t_0) = u\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} = U_{1,0},$$

$$u(x_2, t_0) = u\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} = U_{2,0},$$

$$u(x_3, t_0) = u(1, 0) = 1(1 - 1) = 0 = U_{3,0}.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$u(x_0, t_1) = 0 = U_{0,1},$$

$$u(x_3, t_1) = 0 = U_{3,1}.$$

Assim, precisamos dos valores de $U_{1,1}$ e $U_{2,1}$. Utilizando o método explícito, temos

$$U_{1,1} = U_{1,0} + \sigma(U_{0,0} - 2U_{1,0} + U_{2,0}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\left(0 - 2 \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{5}{27} = 0,185185$$

e

$$U_{2,1} = U_{2,0} + \sigma(U_{1,0} - 2U_{2,0} + U_{3,0}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9} - 2 \cdot \frac{2}{9} + 0\right) = \frac{5}{27} = 0,185185.$$

Obtivemos assim a primeira linha de soluções da equação por meio do método explícito.

Método implícito

Utilizando os valores calculados anteriormente, temos

$$u(x_0, t_0) = u(0, 0) = 0 = U_{0,0},$$

$$u(x_1, t_0) = u\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} = U_{1,0},$$

$$u(x_2, t_0) = u\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} = U_{2,0},$$

$$u(x_3, t_0) = u(1, 0) = 1(1 - 1) = 0 = U_{3,0},$$

$$u(x_0, t_1) = 0 = U_{0,1},$$

$$u(x_3, t_1) = 0 = U_{3,1}.$$

Temos as relações

$$U_{1,0} = -\sigma U_{0,1} + (1 + 2\sigma)U_{1,1} - \sigma U_{2,1}$$

$$U_{2,0} = -\sigma U_{1,1} + (1 + 2\sigma)U_{2,1} - \sigma U_{3,1}.$$

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\sigma & -\sigma \\ -\sigma & 1 + 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,0} + \sigma U_{0,1} \\ U_{2,0} + \sigma U_{3,1} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

da qual obtemos

$$U_{1,1} = U_{2,1} = \frac{4}{21} = 0,190476.$$

Os resultados obtidos pela solução exata são $u(x_1, t_1) = 0,186102$ e $u(x_2, t_1) = 0,186102$. Vemos então que, para a primeira linha de soluções, os erros globais cometidos no método explícito foram

$$e_{1,1} = e_{2,1} = 0,185 - 0,186 = -0,001,$$

e no método implícito foram

$$e_{1,1} = e_{2,1} = 0,190 - 0,186 = 0,004.$$

A tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos por cada método.

Tabela 4.1 – Resultados obtidos

Soluções obtidas	$U_{0,1}$	$U_{1,1}$	$U_{2,1}$	$U_{3,1}$
Solução exata	0	0.186102	0.186102	0
Método explícito	0	0.185185	0.185185	0
Método implícito	0	0.190476	0.190476	0

Obtivemos boas aproximações para os valores de $u(x_1, t_1)$ e $u(x_2, t_1)$. No entanto, o que nos permite avaliar o quanto esses métodos são viáveis são os conceitos de estabilidade, convergência e consistência.

Apresentamos um exemplo de resolução de um problema de condução unidimensional em regime transiente utilizando os métodos de separação de variáveis, explícito e implícito, porém existem outros métodos que podem ser utilizados para obter resoluções do mesmo problema, como o *método de Crank-Nicolson*. Outros métodos, como o *método de aproximações assimétricas* e o *método Hopscotch*, são muito utilizados para dimensões mais altas (ver [13]). Para obter soluções para o problema de condução bidimensional em regime estacionário, Incropera e DeWitt [10] destacam os métodos de diferenças finitas e o *método gráfico*, o que indica que o método de resolução a ser utilizado em cada situação depende das condições do problema.

5 Considerações finais

Neste trabalho pudemos observar a relação existente entre as equações diferenciais parciais e a formação do professor. Essa relação tem como base a interdisciplinaridade, a modelagem matemática e os conceitos utilizados no desenvolvimento da teoria que são ensinados na educação básica.

Nos conceitos básicos da teorias das EDP's, pôde-se verificar a importância dos conceitos de função e variação. No decorrer do trabalho, a ideia de sistema de equações esteve presente diversas vezes, pois os problemas estudados são compostos pela equação e condições iniciais e de contorno relacionadas a ele.

Utilizando o modelo da equação do calor, os conceitos matemáticos citados no primeiro capítulo passam a assumir significado físico, o que os torna mais acessíveis. Isso mostra como a interdisciplinaridade e a modelagem auxiliam na compreensão e no ensino de matemática. Na formulação matemática do problema da condução do calor foram utilizados conceitos físicos que são representados matematicamente pelas condições que compõem o problema, evidenciando a relação intrínseca que há entre a matemática e outras ciências.

A análise dos métodos numéricos reforça a importância dos diferentes modos de resolver um problema, além de evidenciar a representação gráfica do mesmo como alternativa de resolução.

O trabalho apresentou uma parte da teoria das equações diferenciais parciais e um exemplo de aplicação da mesma buscando utilizar uma abordagem que pudesse despertar o interesse de um professor em formação pelo estudo das EDP's. Não visamos esgotar o tema, mas sim oferecer ferramentas básicas para o seu estudo e instigar o leitor a pesquisar sobre outros tópicos da teoria.

Existem diversas possibilidades de prosseguimento dessa pesquisa. Deixamos como sugestão o estudo de outros modelos, como a equação da onda, e resoluções para outras formas da equação do calor. Outra abordagem possível é a análise experimental dos efeitos do estudo de tópicos de matemática aplicada na formação de professores.

Referências

- [1] BASSANEZI, R.; FERREIRA, W. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988. 552 p.
- [2] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais parciais e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 605 p.
- [3] BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Revista Biomatemática*, Campinas, v. 9, p. 9–21, 1999.
- [4] BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB, 2013.
- [5] IÓRIO, V. *EDP: um curso de graduação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005. 300 p. (Coleção Matemática Universitária).
- [6] SEVERINO, A. *Metodologia do trabalho científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2007. 304 p.
- [7] JR., R. I.; IÓRIO, V. d. M. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013. 343 p. (Projeto Euclides).
- [8] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. 2. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. 662 p. (Graduate studies in mathematics).
- [9] CUNHA, M. *Métodos numéricos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.
- [10] INCROPERA, F.; DEWITT, D. P. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 698 p.
- [11] FIGUEIREDO, D. de. *Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais*. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. 274 p. (Projeto Euclides).
- [12] KREYSZIG, E. *Matemática Superior para Engenharia*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [13] CUMINATO, J. C.; JUNIOR, M. M. *Discretização de Equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 379 p. (Matemática Aplicada).

- [14] BURDEN, R.; FAIRES, J. *Análise Numérica*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008.

A Invariância do sinal do discriminante

A seção (2.4) traz a demonstração de que, em uma equação da forma

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (\text{A.1})$$

o sinal de $\delta = b^2 - ac$ é invariante dadas mudanças locais de variáveis. Analisemos essa demonstração detalhadamente. Consideremos a Regra da Cadeia já apresentada:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\eta \eta_{xx} + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_\xi \xi_{xy} + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\eta \eta_{xy} + v_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\eta \eta_{yy} + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y$$

Substituindo em (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} & a(x, y)(v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\eta \eta_{xx} + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x) \\ & + 2b(x, y)(v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_\xi \xi_{xy} + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\eta \eta_{xy} + v_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)) \\ & + c(x, y)(v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\eta \eta_{yy} + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y) = g(v, \xi, \eta, v_\xi, v_\eta). \end{aligned}$$

Podemos escrever a equação acima na forma

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$A(\xi, \eta) = a(\xi_x)^2 + 2b(\xi_x \xi_y) + c(\xi_y)^2$$

$$B(\xi, \eta) = a(\xi_x \eta_x) + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c(\xi_y \eta_y)$$

$$C(\xi, \eta) = a(\eta_x)^2 + 2b(\eta_x \eta_y) + c(\eta_y)^2.$$

A equação (A.2) é uma equação diferencial parcial semilinear de 2ª ordem. Podemos então calcular seu discriminante, que é

$$\begin{aligned}
\Delta(\xi, \eta) &= B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) \\
&= [a(\xi_x \eta_x) + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c(\xi_y \eta_y)]^2 \\
&\quad - [a(\xi_x)^2 + 2b(\xi_x \xi_y) + c(\xi_y)^2][a(\eta_x)^2 + 2b(\eta_x \eta_y) + c(\eta_y)^2] \\
&= a^2(\xi_x \eta_x)^2 + b^2(\xi_x \eta_y)^2 + 2b^2(\xi_x \eta_y \xi_y \eta_x) + b^2(\xi_y \eta_x)^2 + c^2(\xi_y \eta_y)^2 \\
&\quad + 2ab((\xi_x)^2 \eta_x \eta_y + \xi_x \xi_y (\eta_x)^2) + 2ac(\xi_x \eta_x \xi_y \eta_y) \\
&\quad + 2bc(\xi_x \xi_y (\eta_y)^2 + (\xi_y)^2 \eta_x \eta_y) \\
&\quad - a^2(\xi_x \eta_x)^2 - 2ab(\xi_x)^2 \eta_x \eta_y - ac(\xi_x \eta_y)^2 \\
&\quad - 2ab\xi_x \xi_y (\eta_x)^2 - 4b^2(\xi_x \xi_y \eta_x \eta_y) - 2bc\xi_x \xi_y (\eta_y)^2 \\
&\quad - ac(\eta_x \xi_y)^2 - 2bc(\xi_y)^2 \eta_x \eta_y - c^2(\xi_y \eta_y)^2 \\
&= b^2[(\xi_x \eta_y)^2 - 2\xi_x \xi_y \eta_x \eta_y + (\xi_y \eta_x)^2] - ac[(\xi_x \eta_y)^2 - 2\xi_x \xi_y \eta_x \eta_y + (\xi_y \eta_x)^2] \\
&= (b^2 - ac)[(\xi_x \eta_y)^2 - 2(\xi_x \eta_y \xi_y \eta_x) + (\xi_x \eta_y)^2] \\
&= \delta(x, y)J(x, y)^2.
\end{aligned}$$

Obtemos, assim, que o sinal de $\Delta(\xi, \eta)$ é o mesmo sinal de $\delta(x, y)$, pois o jacobiano $J(x, y)$ não se anula em uma vizinhança de (x_0, y_0) .