Elaboração de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática

A RESOLUÇÃO E O RACIOCÍNIO DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO EM PROBLEMAS DE SEQUÊNCIAS E SEQUÊNCIAS CÍCLICAS NOS VESTIBULARES E COMPETIÇÕES DE MATEMÁTICA

Melina Brianez Giannetti

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientada pelo Dr. Emiliano Augusto Chagas.

IFSP
São Paulo
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Sobrenome, Prenome(s) Completos do(s) Autor(es).
Manual de Elaboração de Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática / Nome Completo do Autor(es). - São Paulo: IFSP, 2012.
70f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador(es): Nome completo do orientador(es).

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. 4. Palavra-chave. 5. Palavra-chave I. Título do trabalho.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

*“*Um bêbado quer continuar bebendo vinho para se manter naquele estado agradável. O mesmo vale para mim quando se trata de números*”.*

Dattatreya Ramchandra Kaprekar

À minha família, pelo incentivo
Ao meu Diguinho por estar do meu lado
Ao Dodô pela compreensão
Aos meus amigos pela ajuda
E aos melhores professores do mundo,
que estavam lá a cada passo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer e dedicar essa dissertação às seguintes pessoas:

Agradeço primeiramente ao Emiliano, que ficou do meu lado todo o tempo do desenvolvimento do projeto, sem ele nada desse estudo seria possível.

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Agradeço em especial aos professores Henrique Marins de Carvalho e Luciano Magrini, que incentivaram a desenvoltura da pesquisa de problemas do tipo e a professora Diva Valerio Novaes, pois foi em uma aula dela que tudo começou.

Á Isabel Vale que me enviou um PDF de seu livro que não havia para comprar no Brasil.

Ao Rone Minéro, que me ajudou a achar o contato da autora e sempre me motivou a continuar escrevendo.

Agradeço ao Dodô, meu melhor amigo da faculdade, que me levou para a biblioteca quando eu precisava e me mostrou que a amizade verdadeira é quando a pessoa fica do seu lado mesmo quando não pode estar.

E ao Rodrigo, que sempre me incentivou a continuar estudando, apesar das ausências, e sempre esteve do meu lado.

Ao trio maravilha, que foi importante no apoio de continuar em frente mesmo nas horas mais desesperadoras.

Ao Demon Gabriel, que teve a paciência de ler meu trabalho e reduzir a BNCC para pesquisas específicas e ao Theo, que leu meu TCC para ajudar nos erros ortográficos.

A todos que tiveram paciência de ler o meu TCC e corrigir cada erro ortográfico.

Á cada aluno do IFSP que dispôs do seu tempo para participar ativamente da pesquisa pois sem cada um deles, não seria possível apresentar o trabalho nos trâmites legais.

Agradeço a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Às pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de curso, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

À instituição de ensino IFSP, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

RESUMO

Nesse trabalho, buscamos evidenciar vários métodos de resoluções de questões das olimpíadas e competições de matemáticas com o intuito de justificar que a variação de estratégias e possibilidades de resoluções das questões podem ressaltar as facilidades e capacidades lógicas de cada estudante. Buscamos mostrar que a liberdade de escrita e possibilidade de escolha da vertente matemática para realizar uma solução pode incentivar a aprendizagem da matéria e dar uma nova percepção de observação dos conhecimentos algébricos dos alunos, ademais do Ensino Médio por terem uma gama maior de conteúdo do ensino básico. Além disso, trazemos a importância e relevância das questões olímpicas como uma vertente auxiliar para a percepção dessas individualidades. Para evidenciarmos essas resoluções optamos por realizar um questionário composto de exercícios sobre sequências e sequências cíclicas como metodologia de pesquisa. Tal pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo, exclusivamente com 10 alunos voluntários matriculados no Ensino Médio que realizaram o questionário desenvolvendo suas estratégias escritas minuciosamente. A pesquisa tem o intuito de destacar as estratégias de generalização utilizadas por alunos do ensino médio para verificar como eles desenvolvem o senso crítico e como a resolução desses problemas podem dar uma percepção aos educadores das facilidades e especialidades de cada educando. Podemos observar através da pesquisa a veracidade dos assuntos tratados pelos autores do nosso referencial teórico quando verificamos a diferença das estratégias utilizadas no nosso questionário.

Palavras-chaves: Sequências cíclicas, estratégias matemáticas, problemas de vestibulares.

ABSTRACT

In this work, we seek to highlight various methods of solving questions from the Olympics and mathematics competitions in order to justify that the variation of strategies and possibilities of solving the questions can demonstrate the facilities and logical capacities of each student. We seek to show that the freedom of writing and the possibility of choosing the mathematical aspect to carry out a solution can encourage the learning of the subject and give a new perception of observation of the algebraic knowledge of the students, in addition to the High School because they have a greater range of teaching content. basic. In addition, we bring the importance and relevance of Olympic issues as an auxiliary aspect for the perception of these individualities. In order to demonstrate these resolutions, we chose to carry out a questionnaire composed of exercises on sequences and cyclic sequences as a research methodology. Such research was carried out at the Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo, São Paulo campus, exclusively with 10 volunteer students enrolled in High School who completed the questionnaire developing their written strategies in detail. The research aims to highlight the generalization strategies used by high school students to verify how they develop critical thinking and how the resolution of these problems can give educators a perception of the facilities and specialties of each student. We can observe through the research the veracity of the subjects treated by the authors of our theoretical reference when we verify the difference of the strategies used in our questionnaire.

Keywords: Cyclic sequences, mathematical strategies, entrance exam problems.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1: Resultado do algoritmo em python 19
Figura 2: EXERCÍCIO PA 38
Figura 3: EXERCÍCIO PG 40
Figura 4: EXERCÍCIO FIBONACCI 42
Figura 5: Esquema cíclico para 142857 43
Figura 6: Reta numérica 45
Figura 7: Ilustração básica de Recamán 46
Figura 8: Desenho formado pela Sequência de Recamán 47
Figura 9: Gráfico da Função Cosseno 48
Figura 10: Gráfico da Função Seno 49
Figura 11: O trabalho com padrões 50
Figura 12: Exercício da OBMEP - fase I - Nível 1 - 2022 58
Figura 13: Exercício da OBM - 3ª fase - Nível I - 2014 61
Figura 14: Forma de visualização do exercício 61
Figura 15: Segunda forma de visualização do exercício 62
Figura 16: Exercício OBRL - 2015 65
Figura 17: Exercício de ciclo da OBRL - fase I - Nível 2 - 2015 65
Figura 18: Exercício 1 do questionário – concurso FGV 2013 73
Figura 19: Resolução do exercício 1- aluno A 75
Figura 20: Resolução do exercício 1 - aluno J 76
Figura 21: Resolução do exercício 1 - Aluno D 77
Figura 22: Resolução do exercício 1 - aluno E 78
Figura 23: Resolução do exercício 1 - Aluno F 79
Figura 24: Resolução exercício 1 - Aluno G 80
Figura 25: Exercício 2 do questionário (OBRL – 2016 – NÍVEL III – FASE II) 81
Figura 26: Resolução do exercício 2 - aluno F 83
Figura 27: Resolução do exercício 2 - aluno D 84
Figura 28: Resolução do exercício 2 - aluno E 85
Figura 29: Resolução do exercício 2 - aluno G 86
Figura 30: Resolução do exercício 2 - aluno A 87
Figura 31: Resolução do exercício 2 - aluno B 87
Figura 32: Resolução do exercício 2 - aluno C 88
Figura 33: Exercício 3 – Questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II) 89
Figura 34: Exercício 3 - letra a – Questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II) 90
Figura 35: Resolução do exercício 3, letra a - aluno E 91
Figura 36: Resolução do exercício 3, letra a - aluno F 91
Figura 37: Exercício 3 - letra b – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II) 91
Figura 38: Resolução do exercício 3, letra b - aluno F 92
Figura 39: Resolução do exercício 3, letra b - aluno E 92
Figura 40: Resolução do exercício 3, letra b - aluno G 93
Figura 41: Exercício 3 - letra c – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II) 93
Figura 42: Resolução do exercício 3, letra c - aluno C 94

Figura 43: Resolução do exercício 3, letra c - aluno D 95
Figura 44: Resolução do exercício 3, letra c - aluno E 96
Figura 45: Resolução do exercício 3, letra c - aluno F 96
Figura 46: Exercício 3 - letra d – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II) 97
Figura 47: Resolução do exercício 3, letra d - aluno G 100
Figura 48: Resolução do exercício 3, letra d - aluno D.....101
Figura 49: Resolução do exercício 3, letra d - aluno E.....102
Figura 50: Resolução do exercício 3, letra d - aluno F 103
Figura 51: Exercício 4 - Questionário (OBM – 2007 – FASE 3 – NÍVEL 1).....103
Figura 52: Exercício 4 - letra a – questionário (OBM – 2007 – FASE 3 – NÍVEL 1) 104
Figura 53: Resolução do exercício 4, letra a - aluno A.....105
Figura 54: Resolução do exercício 4, letra a - aluno D.....106
Figura 55: Resolução do exercício 4, letra a - aluno J 107
Figura 56: Resolução do exercício 4, letra a - aluno F 108
Figura 57: Resolução do exercício 4, letra a - aluno G 109
Figura 58: Exercício 4 - letra b - questionário 109
Figura 59:Resolução do exercício 4, letra b - aluno J 110
Figura 60: Resolução do exercício 4, letra b - aluno A.....111
Figura 61: Resolução do exercício 4, letra b - aluno F 111
Figura 62: Resolução do exercício 4, letra b - aluno G 112
Figura 63: Exercício 5 – Questionário (OBMEP – 2018 – FASE I – NÍVEL III).....113
Figura 64: Resolução do exercício 5 - aluno F 114
Figura 65: Resolução do exercício 5 - aluno G.....115
Figura 66: Resolução do exercício 5 - aluno E 116
Figura 67: Resolução do exercício 5 - aluno J.....117

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo
LDB	Lei das Diretrizes Básicas da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PA	Progressão Geométrica
PG	Progressão Aritmética
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática (International Mathematical Olympiad)
OIMSF	Olimpíada Internacional de Matemática Sem Fronteiras
CNPq	Conselho Nacional de Pesquisas
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
IMPA	Instituto Nacional de Matemética Pura e Aplicada
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OPM	Olimpíada Paulista de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBRL	Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico
OMDF	Olimpíada de Matemática do Distrito Federal
OMERJ	Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
ORM/SC	Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina
AOBM	Associação Olímpica Brasileira de Matemática
UFG	Universidade Federal de Goiás
ABC	Academia Brasileira de Ciências
INCT-Mat	O Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática
TM	Torneio Meninas na Matemática
MEC	Ministério da Educação
MCTI	Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação
EJA	Educação Jovens e Adultos
CGEE	Centro de Gestão e Estudos Estratégicos

AKSF	Associação Canguru Sem Fronteiras (Association Kangourou sans Frontiéres)
EF I	Ensino Fundamental I
EFII	Ensino Fundamental II
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
VUNESP	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UEA	Universidade do Estado do Amazonas
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas
UnB	Universidade de Brasília
FUVEST	Fundação Universitária para o vestibular
UFG	Universidade Federal de Goiás
PROUNI	Programa Universidade para todos

LISTA DE SÍMBOLOS

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Função

n número natural

$x(n)$ número real

x_n n-ésimo termo da sequência

$\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais,

$\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais sem o zero.

f aplicação de conjunto

$\leq$ menor ou igual

n número de termos na sequência

i posição de cada termo da sequência

a_i termo da sequência.

$\{\ldots\}$ conjunto

r diferença entre os termos da sequência

$\neq$ diferente

$<$ menor que

f_n termo da sequência de Fibonacci

$=$ igual à

$\forall$ Para todo

$\geq$ maior ou igual à

ϵ pertence

$\rightarrow$ Tem relação

T Período

$sen(x)$ função seno

$\cos(x)$ função cosseno

π número Pi

$[0, 2\pi]$ intervalo do período

k número de voltas na função

θ ângulo percorrido pela circunferência

$>$ maior que

$\notin$ Não pertence

$se \begin{cases} figura\ par: \frac{n}{2} * \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ figura\ ímpar: \frac{n-1}{2} * \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \end{cases}$ Colchete de condição

$*$ Multiplicação

$\frac{n}{2}$ divisão

$ Cifrão

SUMÁRIO

Pág.

Sumário

1. INTRODUÇÃO 18
2. METODOLOGIA 23
3. REFERENCIAL TEÓRICO 27
   3.1. SEQUÊNCIAS CÍCLICAS 28
   3.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 30
4. SEQUÊNCIAS NA MATEMÁTICA 33
   4.1. PROBLEMAS SEQUENCIAIS 37
      4.1.1. Progressão Aritmética (PA) 37
      4.1.2. Progressão Geométrica (PG) 38
      4.1.3. Sequência de Fibonacci 40
      4.1.4. O número $\mathbf{142857}$ 42
      4.1.5. A Constante de Kaprekar 44
      4.1.6. Sequência de Recamán 45
      4.1.7. Funções Periódicas 47
   4.2. PROBLEMAS DE CICLO 49
5. VESTIBULARES E CONCURSOS DE MATEMÁTICA 54
   5.1. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP) 56
   5.2. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM) 59
   5.2. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE RACIOCÍNIO LÓGICO (OBRL) 64
   5.3. CONCURSO CANGURU 65
   5.4. ALGUNS VESTIBULARES 67
      5.4.1. ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) 68
      5.4.2. VUNESP (Fundação para o Vestibular da Unesp) 68
6. PESQUISA DE CAMPO 70
   6.1. RESULTADOS DA PESQUISA 72
      6.1.1. Análise do exercício 1 73
      6.1.2. Análise do exercício 2 80
      6.1.3. Análise do exercício 3, letra a 89
      6.1.4. Análise do exercício 3, letra b 91
      6.1.5. Análise do exercício 3, letra c 93

6.1.6. Análise do exercício 3, letra d 97
6.1.7. Análise do exercício 4, letra a 103
6.1.8. Análise do exercício 4, letra b 109
6.1.9. Análise do exercício 5 112
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 119
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 121

1. INTRODUÇÃO

Assim que nos deparamos com um problema podem passar várias informações pela nossa cabeça até que escolhemos um caminho para solucioná-lo. Isso na matemática é muito recorrente, como em várias situações da vida cotidiana. Porém, como esse pensamento ocorre e porquê nessa ordem são as questões principais desse trabalho.

No decorrer do curso de licenciatura em matemática, em estudos empíricos, veio à tona um problema onde necessitava-se descobrir padrões em absolutamente qualquer número.

Um dos primeiros pensamentos sugeridos foi que o número 11 era um número “palíndromo”, ou seja, é o mesmo número lido da direita para a esquerda e da esquerda para a direita. Com esse pensamento, notou-se que quando subtraísse o número normal pelo número lido de trás para frente sempre resultavam em 0.

$$11 - 11 = 0$$

A ideia foi o estopim para novas percepções e descobertas de novos padrões. A partir disso, foi ressaltada o seguinte parecer: “Os números são alternados”. Com essa observação em mente, foi plausível pensar que qualquer número pudesse chegar a um número palíndromo com a subtração ou adição correta, o que levou a realização de uma tentativa para achar o padrão do 0.

Alguns cálculos alternados de adição e subtração foram executados, trocando o último algarismo do número para o primeiro algarismo. Exemplo: $23 \rightarrow 32$ ou $123 \rightarrow 312$. Ou seja, joga-se o último algarismo do número em questão para o primeiro algarismo, assim, começaram os testes com vários números para se verificar o resultado 0.

$$27 + 72 = 99$$

$$99 - 99 = 0$$

$$ou$$

$$84 + 48 = 132$$

$$132 - 213 = -81$$

$$-81 + 18 = -63$$

$$-63 - 36 = -99$$

$$-99 + 99 = 0$$

Foram realizadas várias tentativas aleatórias, e confirmou-se que sempre chegava em 0, independente do quanto demorasse para isso. Alguns professores exibiram um grande interesse pelo padrão e montaram um algoritmo em python (figura 1) para auxiliar as contas e verificar a hipótese, com isso, descobriu-se que não era válido para todos os números, porém os números de 2 algarismos davam total aceitação da regra:

Figura 1: Resultado do algoritmo em python

```
# henrique.py
# resultados: numeros entre 10 e 999
# limite de iterações: um milhão
# 74 numeros não zeraram no processo.
```

Fonte: Compilação do autor

O professor Emiliano, professor do curso de licenciatura e orientador deste trabalho, demonstrou grande interesse pelo algoritmo e sugeriu que trabalhássemos com esse tipo de sequência fazendo observações das resoluções dos alunos em exercícios do mesmo tipo, assim podendo descobrir novas formas e estratégias de pensamentos.

Começamos a pesquisar os tipos de sequência que eram parecidas com o que havíamos descoberto, e encontramos as sequências cíclicas, que são sequências que em dado momento retornam ao número inicial, levando a uma repetição. A semelhança com o algoritmo dos estudos empíricos era que após realizar operações matemáticas condizentes com a norma da sequência sempre retornava a um número específico.

Percebemos, porém, que esses tipos de sequências eram sempre trabalhados no ensino Fundamental, e encontramos pouquíssimos trabalhos em que haviam pesquisas sobre sequências repetitivas no Ensino Médio. Achamos incomum haver tão poucas pesquisas sobre isso para esses anos escolares, sendo que o conteúdo de sequencias é bastante explorado na grade curricular do Ensino Médio. Assim, começamos a elaborar esse projeto com o intuito de destacar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos de Ensino Médio na resolução de questões que envolvem sequências cíclicas.

Problemas dessa categoria possuem grande interesse, já que ocorrem tanto no cotidiano quanto em problemas profundos de matemática, por esse motivo, compreender como estudantes do ensino básico abordam essa problemática é relevante para se compreender como os conteúdos de matemática básica se articulam para a resolução desse tipo de problema.

Muitas vezes, em uma sala de aula, os professores recebem uma grade que lhe obriga a cumprir o conteúdo programático em um determinado tempo, contudo, muitas vezes, impede os educadores de estimularem a capacidade de cada aluno de acordo com cada individualidade, por isso existem vertentes que facilitam que o professor observe essas facilidades e estimule seus educandos a estudarem e realizarem questões por estratégias congruentes aos seus raciocínios.

Ao colocarmos duas crianças que acabaram de aprender a matemática para resolver a conta $1+1$ as duas irão falar 2, porém você verá que uma contou nos dedos e a outra imaginou dois objetos para trazer a resposta. Isso ocorre por causa da dificuldade, facilidade e individualidade de cada uma das pessoas. No ensino médio, apesar dos arquétipos das resoluções já terem sido passados de uma forma específica, geralmente ensinadas no ensino fundamental, sempre há como conduzir raciocínios diferentes, estimulando a procura da melhor forma de resolução para o aluno.

O estudo de sequências é um caminho de obter um raciocínio lógico do aluno, onde ele terá que descobrir sozinho um caminho ou um padrão para chegar à solução, e no Ensino Médio, uma das vertentes que podem servir de documentos de verificação para tal são os vestibulares e olimpíadas de matemática, que tem

questões muito pertinentes e que contemplam uma gama de opções de resoluções, além de o conteúdo de sequências e sequências cíclicas aparecerem frequentemente nesses concursos e olimpíadas.

Então resolvemos focar em resoluções de questões que foram cobradas nesses concursos. Concordamos que, por causa da contextualização dos exercícios das olimpíadas, poderíamos verificar nas resoluções como os estudantes desenvolvem o senso crítico e se esses alunos conseguem obter uma percepção de como esses problemas apresentados podem se amplificar para uma pesquisa mais elaborada dentro do âmbito da matemática. Assim como Fernandes explica:

> Resolver questões olímpicas faz com que o aluno adquira um conhecimento mais apurado da matemática, implicando assim numa melhoria do ensino-aprendizagem da referida disciplina. É possível perceber que a matemática fica mais sólida com o trabalho de problemas olímpicos no cotidiano escolar, pois, para cada problema abordado é preciso buscar os conhecimentos prévios e desenvolvê-los para tal. (FERNANDES 2021, p. 31)

Para procurar entender como os estudantes em questão confrontam e desenvolvem as estratégias de Resolução de Problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas, criamos um questionário de problemas provenientes de competições de matemática e vestibulares que contemplam diversos aspectos e profundidades desse tema e então foram analisadas as produções escritas dos estudantes, para caracterizar os avanços e limitações de sua produção baseada em seus conhecimentos prévios.

Como objetivo geral, a nossa pesquisa busca investigar as estratégias de resolução e generalização utilizadas pelos alunos na resolução de questões sobre sequências cíclicas retiradas de olimpíadas de matemática.

Os objetivos específicos dessa pesquisa envolvem:

- Discutir sobre como as estratégias de resoluções podem ser úteis para que o aluno consiga desenvolver um senso crítico;
- Verificar como esses problemas podem se amplificar para uma pesquisa mais elaborada dentro do âmbito da matemática, trazendo outros tópicos;
- Verificar e mostrar a importância do estudo de sequências para o ensino de matemática.

Desfecho Primário: contribuição para a conscientização dos professores de matemática sobre as estratégias articuladas pelos estudantes na resolução de questões que envolvem sequências e sequências cíclicas, do impacto das olimpíadas de matemática e outros concursos para as percepções de mundo dos alunos e a importância do conteúdo de sequências e ciclos e sua contribuição para o conteúdo da educação matemática.

O benefício desta pesquisa será em contribuir com o desenvolvimento de estudos referentes a resoluções e generalizações em exercícios de sequências e ciclos para ajudar no processo formativo dos professores e futuros professores que lecionam matemática. O objetivo deste estudo é contribuir com as pesquisas sobre métodos de resolução no estudo de sequências e ciclos além de destacar a relevância dos vestibulares para compreender a resolução de exercícios dos alunos do Ensino médio e a conexão que os estudantes conseguem fazer da matemática com o mundo real, além de mostrar que as estratégias de generalização podem ser um incentivo para o estudo de matemática.

Esse projeto visa ter noção da necessidade de novas pesquisas e novas áreas conjuntas a serem exploradas, além da relevância para o tema e a sua contribuição para a academia.

2. METODOLOGIA

Nesse trabalho de conclusão de curso, optamos por desenvolver uma pesquisa exploratória como metodologia do trabalho científico, tendo como principal finalidade a criação de uma afinidade do pesquisador com o tema.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa foi necessário levantar alguns pontos essenciais ao trabalho, chegando assim nas seguintes fases do trabalho para serem realizadas:

- Levantamento bibliográfico;

- Questionário presencial aplicado a alunos de ensino médio com problemas de sequências e sequências cíclicas;

- Análise das resoluções de problemas retirados de Olimpíadas de Matemática;

- Análise de exemplos que estimulem a compreensão de tipos de resoluções para os exercícios em questão.

Essa pesquisa é classificada como pesquisa bibliográfica com foco em estudar e compreender pensamentos algébricos e generalizações de resoluções de exercícios envolvendo sequências com foco em problemas de ciclo, que são cobrados em concursos e olimpíadas de matemática e vestibulares.

Para o levantamento de dados dessa pesquisa, aplicada aos alunos do Ensino Médio no próprio Instituto Federal de Tecnologia e Ciências de São Paulo, Campus São Paulo, decidimos optar pela abordagem de Resolução de Problemas, que é um dos caminhos que podem ser utilizados para se obter êxito no ensino de matemática, especificamente no ensino de sequências numéricas.

Segundo Filho e Silva (2011), a Resolução de Problemas estimula processos cognitivos, possibilita ainda que o aluno reflita e analise os procedimentos de resolução, descubra outros caminhos para chegar à resposta, faça uma releitura da solução encontrada, dentre outras.

Filho e Siva (2011) definem a Resolução de Problemas como uma proposta didática onde o professor se baseia em dar problemas que tenham mais de uma única técnica de resolução para que os alunos possam explorar suas estratégias de resolução e capacidades mentais e consigam explorar a face interessante da (re) descoberta da matemática além de buscar a ampliação e a discussão de uma determinada tarefa ou sejam expandidas para outras situações-problema.

Dito isso, elaboramos o questionário (Apêndice B) com questões conforme à metodologia escolhida, abordando sequências e sequências cíclicas cobradas nas diversas olimpíadas de matemática e vestibulares. Na escolha das questões, levamos em conta Vale (2009), que fez um trabalho com crianças do ensino fundamental sobre padrões, sequências e sequências cíclicas e observou-os, fazendo uma análise dos resultados comparando-as com experiências próprias anteriores e explicando como cada exercício foi recebido pelos alunos além dos graus de dificuldade de cada exercício aplicado pela autora.

Diante dos objetivos apresentados, podemos observar que para que essa metodologia cumpra sua finalidade é necessário primeiramente apresentar situações problema que desafiem e motive os alunos a querer solucioná-la e é preciso que o indivíduo desenvolva o raciocínio lógico e que faça uso inteligente dos recursos disponíveis. Com base em Dante (1998) um problema pode oferecer ao aluno a possibilidade de enfrentar situações novas, buscando novos raciocínios, fazendo-o sentir-se realmente desafiado e deve levar o indivíduo a uma situação que necessite buscar, conscientemente, uma maneira adequada definindo estratégias e procedimentos a partir de suas experiências com o propósito de alcançar um objetivo definido.

É por esse motivo que a proposta da pesquisa apresentada utiliza questões retiradas do vestibular e concursos de matemática e assim sendo, selecionamos cinco problemas envolvendo sequências e sequências cíclicas que julgamos desafiadores suficientes para atrair a atenção dos alunos, pois é importante capacitar o aluno para lidar com situações novas e também para aplicar os conceitos matemáticos em situações cotidianas aguçando nele a criatividade, independência, favorecendo o desenvolvimento de atitude positiva em relação à matemática.

Pronto o questionário, sua aplicação e correção foram feitas em comparação à BNCC (BRASIL, 2017), ao estudo de caso de Abbott (2011), que fala de um estudo de caso sobre estratégias de resoluções de problemas no Ensino Médio e ao trabalho de Siqueira (2013) que trata do raciocínio lógico-matemático e uso dele em concursos públicos. Os referidos trabalhos foram utilizados para ajudar na análise das resoluções dos alunos, onde nós analisamos o pensamento de cada aluno diante de suas resoluções e apresentamos o que cada um desses pensamentos revela sobre as capacidades de cada educando. Baseando-se nesses trabalhos e evidenciando que o uso de padrões é um importante componente da atividade Matemática porque eles permitem conjecturar e generalizar e que por cada resolução ter sido diferente, conseguimos apresentar um fator que não pode ser ignorado, que as competições de matemática exercem, que é a facilidade de aprendizagem de vertentes matemáticas e sua possibilidade de aplicabilidade e estimulação.

Ao longo desse trabalho, apresentamos diversos exercícios que podem ser relevantes ao ensino do conteúdo de sequências e sequências cíclicas e pretende-se também, por meio da metodologia proposta, dar autonomia ao aluno para que ele próprio possa desenvolver as ideias básicas tornando o aprendizado eficaz. Para futuros estudos, sugere-se a aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula utilizando a Resolução de Problemas com o objetivo de comprovar a relevância da metodologia e a eficácia do aprendizado do tema abordado.

Neste contexto é de suma importância para o aprendizado do tema que o docente explore conceitos que usualmente não são abordados no ensino deste conteúdo, possibilitando ao aluno ampliar seus conhecimentos.

Esse projeto visa ter noção da necessidade de novas pesquisas e novas áreas conjuntas a serem exploradas, além da relevância para o tema e a sua contribuição para a academia. A proposta mostra-se relevante, pois oferece ao leitor a oportunidade de ampliar os conhecimentos sobre sequências numéricas e ao professor a possibilidade de aprofundar o ensino deste importante conteúdo. O estudo deixa claro que o ensino de sequências numéricas pode ter uma abordagem mais ampla, trazendo fatos históricos, a parte teórica que, além das progressões aritméticas e geométricas, podem abordar assuntos usualmente não tratados no

ensino médio como recorrências lineares de primeira e segunda ordem, progressões aritméticas de segunda ordem, progressões harmônicas e sequência Fibonacci.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo a LDB (Leis das Diretrizes e Bases da Educação Nacional) em seu Art. 22º sabemos que a educação tem que formar o indivíduo para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores, ou seja, a função da instituição de ensino é preparar o aluno para a vida. Contudo, vários pesquisadores concordam em afirmar que a realidade da sala de aula não é essa. O Instituto Millenium[1] realizou uma pesquisa em que alunos respondem um questionário onde afirmaram que não são preparados para a vida real, mas sim para fazerem provas.

Para Lins e Gimenez (2001) a aritmética escolar não muda porque o currículo tradicional indica o que se deve ensinar na escola e os professores são submetidos a uma enorme pressão dessa tradição. Dito isso, somos a favor de que os professores devem se moldar à realidade do currículo escolar tratando dos assuntos que são incumbidos de aplicar mostrando atividades que preparam os estudantes para a vida real e ao mesmo tempo prepare eles para provas e vestibulares. Sendo assim, defendemos nesse trabalho o estudo de generalizações e pensamento algébrico dos alunos através de exercícios de olimpíadas de matemática focados em problemas de sequência, ademais nas sequências cíclicas.

Isabel Vale, sendo nossa principal referência para tratarmos sobre sequências cíclicas, propõe que o objetivo de que todos os alunos aprendam matemática possa ser alcançado a partir de uma proposta curricular em que ofereça tarefas em que os alunos se sintam motivados a fazê-las: “Os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões (VALE, 2007, p. 5)” e de acordo com a Secretaria de Educação do Paraná[2], as olimpíadas científicas brasileiras proporcionam a estudantes e professores novas descobertas, novos lugares, ideias, técnicas e conhecimentos e têm estimulado muitos jovens a

[1] https://institutomillenium.org.br/modelo-de-ensino-prepara-para-vida/

[2] https://www.educacao.pr.gov.br/Noticia/Medalhistas-da-OBMEP-recebem-premiacoes-nas-regionais

descobrir mais sobre as ciências e as tecnologias. Além disso, também pode ser um estímulo para estudantes que pensam em se profissionalizar na área de exatas.

Partindo desta constatação estamos determinados a crer que o estudo das resoluções dos estudantes feitos a partir de questões extraídas de olimpíadas e concursos de matemática podem contribuir para motivação do estudo de sequências e padrões e, ainda contribuir para uma nova visão da natureza da matemática proporcionada por contextos interessantes de aprendizagem, que contribuam para que os estudantes aprendam melhor a matemática.

Neste capítulo retratamos os principais autores que abordam as sequências cíclicas e as principais discussões acerca das teorias que discutem Resolução de Problemas e generalizações nas atividades com sequências. Discutiremos quais são as etapas a seguir quando se trata de resolver situações problemas e os tipos de problemas mais usuais. O enfoque dado segue os objetivos da pesquisa nos aspectos ligados às resoluções e pensamento algébrico de alunos e da matemática de vestibular.

3.1. SEQUÊNCIAS CÍCLICAS

A matemática é um campo de conhecimento que envolve muito o estudo de padrões, sejam eles numéricos, geométricos, de crescimento, visual, etc. O principal autor que enxerga a matemática como a ciência dos padrões é Keith Devlin. Para esse autor “a matemática só pode ser ‘vista’ com os ‘olhos da mente’ (DEVLIN, 2002, p. 4).” Devlin estuda o que é a matemática e como ela é aceita no mundo e ressalta que, como uma criação inteiramente humana, o estudo da matemática é um estudo da própria humanidade, onde se tenta interpretar o mundo ao redor, que por sua vez, é cheio de padrões.

A autora que será a base principal desse trabalho é Isabel Vale, que escreveu vários livros e artigos sobre o assunto em conjunto com outros autores como Teresa Pimentel. Vale fala de generalizações de problemas de sequência, explica também como que são constituídos os problemas de sequências que envolvem padrões. E

assim como ela explica, concordamos que sequências que envolvem o padrão desenvolvem e aprofundam a compreensão de conceitos matemáticos importantes de várias áreas da matemática para os estudantes:

> Trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar. Paralelamente ao desenvolvimento de conceitos matemáticos, o trabalho com padrões permite preparar os alunos para aprendizagens posteriores, para além do desenvolvimento de capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. A profundidade e variedade das conexões que possibilita com todos os temas da matemática permite considerar este tema como transversal dentro do currículo a nível do ensino básico. (VALE, 2009, p. 11)

O estudo de sequências é o principal meio para estudar padrões e nesse trabalho focamos em estudar um tipo específico de sequências, chamado de sequências cíclicas. Isabel Vale é também a principal referência no estudo de sequência cíclica, em que ela apresenta a definição[3], exemplos e desenvolve pesquisas sobre o tema.

Isabel Vale propõe que para que todos os alunos aprendam matemática, eles devem ser motivados por meio de tarefas incentivadoras. Ela defende que trabalhar com sequências cíclicas motiva a pesquisa por outros campos da matemática onde cada aluno se sinta mais incentivado.

Van de Walle (2009) é outro autor que servirá de base para sequências cíclicas. Apesar de não se referir às sequencias cíclicas com essa nomenclatura em específico, Walle escreve sobre padrão repetitivo e como através dele o estudante conseguem uma compreensão maior da matemática quando investigam novas ideias de resolução.

Por sua vez, Ponte, Branco e Matos (2009) também são autores que tratam sobre padrões, que por sua vez apresentam as sequências cíclicas, mas não aprofundam no assunto, trabalhando mais em todos os tipos de sequências repetitivas, mas também terão uma importante fundamentação teórica para esse trabalho, pois é a partir da definição e compreensão das sequências repetitivas ou padrões que encontraremos um caminho mais profundo para chegar às sequências cíclicas.

[3] Definição na Pág. 51

Muitos investigadores defendem que os padrões podem ser utilizados para desenvolver e aprofundar os conhecimentos em teoria dos números, álgebra, geometria, probabilidades e funções. De acordo com Orton (1999) os padrões podem permitir que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque desenvolvem a capacidade de classificar e ordenar informação além de mostrarem a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivemos.

3.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Acreditamos que através da resolução de problemas, onde a procura de padrões seja uma estratégia fundamental, os estudantes possam viver a experiência da utilidade da matemática e desenvolver o conhecimento de novos conceitos.

Muitas pesquisas já foram realizadas sobre a Resolução de Problemas no ensino da Matemática, porém no cotidiano dos professores da área ainda surgem muitas indagações a respeito do assunto. A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento.

Do ponto de vista teórico matemático, destacamos as pesquisas de Abbott (2011), que apresenta em seu trabalho um estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de Matemática no terceiro ano do ensino médio. O presente estudo de caso obteve um resultado sobre algumas estratégias de raciocínios dos alunos em questões de vestibulares com um questionário de quatro problemas de matemática, no qual um desses problemas era de sequência. Sendo que em seus estudos, obteve a seguinte conclusão:

> O acompanhamento e a observação das aulas realizadas durante a parte prática da elaboração deste trabalho nos fez perceber o quão importante são os problemas de matemática para um aluno do ensino médio. O ensino de matemática está intimamente ligado à resolução de problemas e exercícios, nos quais a estratégia utilizada na busca pela solução necessita de subsídios para que se tenha sucesso diante do problema. Desta maneira, pude perceber que os conhecimentos acumulados pelos alunos, ao longo da vida escolar, são um dos principais fatores que influenciam no sucesso da resolução dos problemas, pois os mesmos englobam vários conhecimentos

> que acabam estimulando o raciocínio e proporcionando uma recapitulação dos mais variados conteúdos (ABBOTT, 2011, p. 42)

A capacidade de raciocinar logicamente e apresentar argumentos é uma capacidade que se está cada vez mais importante. Na matemática, os alunos aprendem que, com raciocínios apropriados, podem chegar a resultados verdadeiros, condizentes com a vida real, imparciais e sem qualquer necessidade de validação por uma autoridade externa.

Dante (1998), afirma que embora tão valorizada, a Resolução de Problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. Enfatiza ainda que para trabalhar com Resoluções de Problemas é necessário apresentar para o aluno um problema que o instiga a resolvê-lo. Tal problema deve ser interessante, criativo, capaz de desenvolver o pensamento do aluno e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado.

Ainda afirma que a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias, tendo como objetivos da resolução de problemas os seguintes tópicos:

1. Fazer o aluno pensar produtivamente;
2. Desenvolver o raciocínio do aluno;
3. Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
4. Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
5. Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
6. Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
7. Dar uma boa base matemática às pessoas.

Segundo o esquema de Polya (1978 apud DANTE 1998), são quatro as principais etapas para a resolução de um problema:

1. Compreender um problema,
2. elaborar um plano,
3. executar o plano
4. fazer o retrospecto ou verificação.

Barbosa (2009) em meio a suas pesquisas também classificou algumas generalizações através de tarefas envolvendo sequências: a generalização próxima, que se refere à descoberta do termo seguinte, e a generalização distante, que implica a descoberta do padrão e exige a compreensão da lei de formação.

De acordo com Polya (1973), para alguns matemáticos a essência da matemática é a resolução de problemas, além das resoluções sempre poderem ser discutidas e aprimoradas, proporcionando conhecimento ao aluno quando utilizamos a Resolução de problemas:

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer, Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar à nossa compreensão da resolução. (POLYA, 1973, p. 10)

Vale (2013) evidencia em suas pesquisas a resolução de tarefas baseadas na exploração de padrões por meio de múltiplas representações emerge a generalização, que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico.

É através do pensamento algébrico que, como professores, podemos entender como a mente dos nossos alunos trabalham. Acreditamos que é nosso dever como educador incentivar que cada aluno tenha a sua estratégia de resolução para que possa desenvolver um senso crítico de mundo e associação à realidade.

4. SEQUÊNCIAS NA MATEMÁTICA

Uma das dificuldades frequentemente apresentadas, no estudo da Matemática, é a aprendizagem da álgebra, pois muitas pessoas associam álgebra a um conjunto de letras, à resolução de equações de primeiro e segundo grau, a sistemas de equação etc., porém uma álgebra com pouco sentido.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) recomendam que o trabalho relacionado ao campo da álgebra deve ser desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e ampliado nos anos finais relevando as seguintes funções desse aprendizado:

> [...] exploração de situações-problema, [pois] o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, [poderá] estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50).

Assim como os PCN, a BNCC aborda a recomendação de que o aprendizagem da álgebra deve se iniciar no começo do Ensino Fundamental e estimulados nos anos finais:

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2017, p. 265).

De acordo com Jungbluth et. all (2019), o estudo com padrões tem por finalidade envolver o aluno com a disciplina de Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa porque está associada a experiências e realidades vivenciadas

pelos estudantes. Júnior (2017) dá exemplos de aplicação e utilidade das sequências que pudemos observar na história da humanidade:

Foram os gregos que nos apresentaram a observação de regularidades. Eles tinham um interesse especial pelas sequências numéricas e costumavam representá-las por meio de padrões geométricos. Também usaram as regularidades para estabelecerem algumas hipóteses para explicar fenômenos, como por exemplo, o padrão das marés – “maré cheia” e “maré baixa”.

Os egípcios também usaram o estudo de padrões e regularidades, pois precisaram descobrir de quanto em quanto tempo as cheias do Nilo ocorriam, para poder planejar suas plantações. Verificaram que esse fato ocorria a cada 365 dias e assim que esse aspecto foi identificado desenvolveram os calendários que serviam de marcadores do tempo para padronizar um ciclo e, assim, controlar suas colheitas. Dessa forma, passou-se a criar e desenvolver sequências numéricas ao longo da história.

Porém, assim como é mostrado no estudo de caso de Julião *et. all* (2020), um dos estudos que vemos os alunos tendo mais dificuldade no campo da álgebra, ao entrarem no Ensino Médio é o estudo de sequências matemáticas.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o tópico de sequências numéricas se encontra, no Ensino Fundamental, na unidade temática álgebra, que tem como finalidade:

> […] o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2017, p. 270).

No Ensino Médio, o tópico de sequências se encontra na Competência Específica 5 da BNCC, e apresenta o seguinte fundamento:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como

> observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p. 531).

Podemos observar que o tópico de sequências numéricas envolve a observação de padrões, regularidades, representações gráficas e simbólicas, e a capacidade do estudante em identificar leis matemáticas que expressem generalizações. Como podemos perceber, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), é interessante envolver os estudantes em situações nas quais eles investiguem padrões pois realizar a identificação de suas estruturas e construir a linguagem algébrica para representar as sequências simbolicamente também pode contribuir para a formação matemática deles.

Além disso, o desenvolvimento do pensamento algébrico apresenta um papel especial no ensino do conteúdo de sequências, a fim de que os alunos tenham as condições necessárias para desenvolver sua aprendizagem. Nesta perspectiva, Vale *et al.* (2008) afirma que a álgebra é uma das competências matemáticas mais importantes e para que os estudantes compreendam sua estrutura é preciso relacioná-la com outros campos:

> Do ponto de vista da Didáctica da Matemática, as conexões matemáticas visam, por um lado, a criação e exploração de situações em que os alunos trabalhem a Matemática ligada a problemas da vida real – conexões com a realidade – e a outras áreas curriculares. (VALE *et al.*, 2008, p.37)

Porém primeiramente, é necessário que o estudante entenda a definição de “sequência” para que ele obtenha a exploração das próprias generalizações de resoluções de exercícios com esse tema.

O conceito de sequência pode ser usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades (JUNGBLUTH *et. all*, 2019). O trabalho com sequências tem por base a descoberta de regularidades, se baseando na variação de uma posição ou contagem associada a cada desenho ou número.

Para definirmos matematicamente o termo “sequência”, usaremos a definição apresentada por Cerqueira (2013) sobre sequências de números reais:

> Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real $x(n)$. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será

> representado por x_n e denominado n-ésimo termo da sequência. (CERQUEIRA, 2013, p. 19)

Sendo assim, podemos atrelar o conteúdo de função como matéria essencial para a compreensão da definição de uma sequência. Ainda mais, para nos aprofundarmos em sequências infinitas, complementaremos com Souto (2017, p. 23) que usa uma definição que separa a sequência em dois subconjuntos, sendo eles sequências finitas e infinitas:

> Vamos denotar por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais sem o zero. Chama-se Sequência finita toda aplicação f do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ em $\mathbb{R}$. Em toda sequência finita, a cada número i, tal que $1 \leq i \leq n$, um número real a_i é associado. Chama-se Sequência infinita toda aplicação f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$. Em toda sequência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado em $a_i \in \mathbb{R}$. Cada elemento de uma sequência é denominado termo da sequência e em uma sequência de n termos cada i termo é identificado como a_i. Por exemplo, na sequência $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$ o número 14 é o $5°$ termo e pode ser representado por a_5. Assim temos $a_5 = 14$. (SOUTO, 2017, p. 23)

As atividades que envolvem a observação e a generalização de padrões em sequências, geralmente, solicitam ao aluno que descubra o padrão da sequência para continuá-la; que indique um termo faltante da sequência, que pode começar pela posição mais próxima da última figura da sequência e ir se distanciando; ou que procure um termo numa posição qualquer, distante dentro da sequência.

A ideia contida a esse tipo de atividade é que o estudante comece fazendo uma generalização próxima e, na continuação dos itens, chegue à generalização distante, que permite calcular o número de elementos de qualquer termo da sequência. Segundo Barbosa:

> Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização diz-se próxima. Se, pelo contrário, dificilmente as abordagens descritas anteriormente permitem o cálculo de um dado termo da sequência, implicando a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização em causa é distante. (BARBOSA, 2010, p. 61)

Acreditamos que o estudo de sequências na matemática é importante porque incentiva os alunos a estimularem as estratégias de generalização além de aguçar o pensamento algébrico e estimular a visão de mundo que o aluno tem, fazendo-o ver padrões na vida cotidiana dele e conseguir vislumbrar a beleza da interação da matemática com o mundo.

4.1. PROBLEMAS SEQUENCIAIS

Alguns exemplos importantes de sequências são estudados já no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Para explicar sua definição, usamos como base a apostila do IME (Instituro de Matemática e Estatística):

4.1.1. Progressão Aritmética (PA)

Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números tais que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre a mesma.

Por exemplo:

A sequência $\{10, 13, 16, 19, \ldots\}$ é uma PA, pois ela sempre aumenta os termos de 2 em 2 números.

Se o termo inicial da PA é a_1 e essa diferença entre os termos é r, então o n-ésimo termo é dado por $an = a1 + (n - 1)r$. Também costuma-se ensinar como obter o valor da soma de uma quantidade finita de termos consecutivos de uma PA, que pode ser incentivada pelos professores à autonomia de encontrar a fórmula.

Um exemplo de exercício geralmente pedido em concursos de matemática ou pedido em vestibulares que contempla a Progressão Aritmética segue abaixo:

Exercício (ENEM 2010): O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

Figura 2: EXERCÍCIO PA

Fonte: Enem – 2010 - QUESTÃO 167
(https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf)

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.

FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.

FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.

FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.

FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

Como podemos perceber, as estrelas funcionam como uma PA de razão 1. Esse exercício é pedido em vestibulares e costuma ser estudado no primeiro ano do Ensino Médio.

4.1.2. Progressão Geométrica (PG)

Progressão Geométrica (PG) é uma sequência de números em que o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. Esse quociente é uma constante não nula chamada razão.

Por exemplo:

A sequência $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$ é uma progressão geométrica de razão 2, pois ele cresce em termos multiplicados por 2.

A sequência $\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\}$ é uma PG de razão $-\frac{1}{3}$, pois ela cresce os termos multiplicando-os por $-\frac{1}{3}$.

Em geral, uma PG pode ser escrita na forma:

$\{a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n, \ldots\}$, para $r \neq 0$ e termo inicial a

Também é muito importante saber que se $-1 < r < 1, r \neq 0$, a soma dos infinitos termos da PG é finita.

Podemos citar a partir da Progressão Geométrica outro tipo de sequência também abordada no ensino médio chamada de dízimas periódicas, que pode ser expressa como uma soma infinita de parcelas que, a partir de certo ponto, descreve uma progressão geométrica infinita de razão compreendida entre zero e um.

A dízima periódica é um número formado por uma divisão de números inteiros cujo o resultado se mostra um período de termos repetitivos, como por exemplo a fração $\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots = 0,\overline{3}$. As dízimas periódicas podem ser classificadas em simples ou composta, que é quando a dízima é formada apenas pelo período após a vírgula ou se possui uma parte que não se repete antes do período repetitivo, respectivamente.

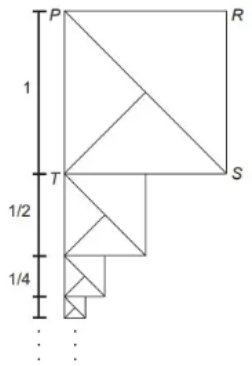
As dízimas periódicas são consideradas sequências cíclicas, pois como vimos, segue a definição de termos repetitivos, portanto, a Progressão geométrica, apesar de não ser classificada como sequência cíclica, é uma sequência geradora de sequências do tipo.

Temos a seguir um exercício de PG que caiu em um vestibular:

(Enem 2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma

sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.

Figura 3: EXERCÍCIO PG



Fonte: ENEM – 2020 – QUESTÃO 176
(https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD6.pdf)

O quadrado *PRST*, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

O exercício é dado por figuras que seus lados se reduzem a uma progressão geométrica. Ensinado logo após a PA, no Ensino Médio, a Progressão Geométrica é uma sequência bem trabalhada no Ensino Básico, trazendo várias questões interessantes.

4.1.3. Sequência de Fibonacci

Um dos assuntos mais interessantes na matemática é a sequência de Fibonacci e o número de ouro. O número de ouro aparece nas pirâmides do Egito, nos Elementos de Euclides, nas obras dos Pitagóricos, e muitas outras. Já a

sequência de Fibonacci é advinda do problema de reprodução dos coelhos do matemático italiano Leonardo de Pisa, no ano de 1202, em seu primeiro livro Liber abaci e que é muito rica em propriedades interessantes.

Este número, que é muito misterioso e enigmático, é conhecido desde da antiguidade. Conforme Mendes (2007, p. 36), o primeiro registro sobre o número de ouro aparece na obra “Os Elementos”, de Euclides e segundo Neto (2013, p. 66), os egípcios também utilizavam o número de ouro na construção das pirâmides. Zahn (2011, p. 25) defende que um dos primeiros registros sobre o número de ouro está no papiro de Rhind, que segundo ele, é um documento onde constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho mais antigo ainda.

Esta sequência foi posteriormente estudada por muitos outros matemáticos, que descobriram inúmeras propriedades interessantes. O que é mais intrigante sobre tal sequência é sua relação com o número de ouro, dando origem a uma curva fantástica, conhecida como espiral áurea, aparecendo em quase todos os lugares na natureza, como árvores, plantas, animais, e usado por muitos artistas e arquitetos em suas obras, como a Monalisa do famoso pintor italiano Leonardo da Vinci.

Sequência de Fibonacci[4] trata-se da sequência cujos dois primeiros termos são iguais a 1 e, todo número a partir do terceiro termo é a soma dos dois que o precedem, isto é:

$$f_1 = f_2 = 1, e\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 3$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots\}$$

Todos esses exemplos apresentados são abordados em contextualizações dentro até mesmo de vestibulares ou concursos de matemática.

Um exemplo de exercício consta abaixo:

[4] Para mais curiosidades da história da sequência de Fibonacci recomendamos a leitura do livro Sequência de Fibonacci e o número de ouro de Maurício Zanh de 2011

(ENEM 2020) Um segmento de reta está dividido em duas partes na proporção áurea quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra. Essa constante de proporcionalidade é comumente representada pela letra grega φ, e seu valor é dado pela solução positiva da equação $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Assim como a potência φ^2, as potências superiores de φ podem ser expressas na forma $a\varphi + b$, em que a e b são inteiros positivos, como apresentado no quadro:

Figura 4: EXERCÍCIO FIBONACCI

φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7
$\varphi + 1$	$2\varphi + 1$	$3\varphi + 2$	$5\varphi + 3$	$8\varphi + 5$	...

Fonte: ENEM – 2021 – QUESTÃO 179

(https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD5.pdf)

A potência φ^7, escrita na forma $a\varphi + b$ (a e b são inteiros positivos) é

Há algumas sequências também que não são vistas no Ensino Médio, porém valem a pena o professor em sala de aula apresentar para instigar seus alunos a procurarem saber mais sobre como a matemática pode ser intrigante.

4.1.4. O número 142857

Esse número é o período da dízima periódica simples gerada ao dividir 1 por 7. Ele tem uma propriedade muito curiosa: ao ser multiplicado por $2, 3, 4, 5\ e\ 6$, os produtos são, respectivamente, $285714, 428571, 571428, 714285\ e\ 857142$. Se olharmos para o número inicial, podemos reparar que todos os resultados são compostos pelos mesmos algarismos.

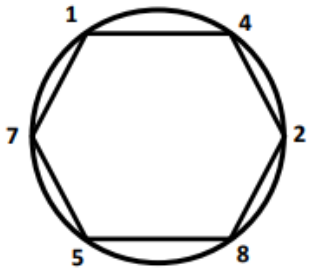
Sodré (2013) afirma que isso nem é o mais curioso desse número estranho, mas afirma que seu fato mais curioso está em que esses algarismos preservam uma

ordem circular relativa entre si, ou seja, os produtos são um tipo especial de permutação dos algarismos do número 142857, o que o torna um número cíclico.

Um número cíclico é aquele que os produtos das multiplicações de um número de n algarismos pelos números naturais de 2 a n forem as *permutações rígidas positivas* dele, ou seja, um número x que, se multiplicado por $m \epsilon (2, 3, 4 \dots n)$, sendo que n é a quantidade de algarismos do número x, a resposta tem que ser uma permutação dos algarismos de x.

Para exemplificar melhor, vamos mostrar o número 142857 em um hexágono (figura 5):

Figura 5: Esquema cíclico para 142857



Fonte: Sodré, 2013 (pg. 12)

Se nós multiplicarmos pelo número 2, sabemos que irá terminar em 4. Nossa imagem mostra que, assim o resultado será 285714.

Claro que não é necessário o esquema apresentado para se descobrirem os produtos sem fazer as multiplicações completas. Pode-se pensar, simplesmente, que as permutações rígidas positivas de 142857, em ordem crescente, são 285714, 428571, 571428, 714285 e 857142, e para formá-los basta “jogar” os números antecessores da ordem crescente 1, 2, 4, 5, 7 e 8 para trás na mesma ordem que aparecem. Exemplo: 428571, o próximo número para começar seria o 5, então $\mathbf{428}571 \rightarrow 571\mathbf{428}$ mas o esquema pode ser usado pelo professor quando propuser atividades didáticas a seus alunos.

As propriedades desse número foram estudadas também por Fourrey, E. (1899) que em seu livro Récréations Arithmétiques apresenta outras propriedades que podem ser estudadas também.

4.1.5. A Constante de Kaprekar

Para conhecer como funciona a Constante de Kaprekar, devemos seguir as seguintes instruções:

Escolha um número qualquer inteiro positivo de quatro dígitos, desde que possua pelo menos dois dígitos diferentes, em seguida, reorganize os dígitos do número escolhido em ordem decrescente e subtraia da ordem crescente dos dígitos e por fim, pegamos o resultado da subtração e repetimos o procedimento anterior até encontrar uma constante.

Vamos fazer um exemplo:

Escolheremos o número 1050, que se encaixa no critério de escolha, já que tem quatro dígitos e dois números diferentes.

Agora reorganizaremos o número em ordem decrescente e depois em crescente: $5100\ e\ 0015$. Agora basta fazer a subtração destes dois números, $5100 - 0015 = 5085$.

Agora repetiremos esse processo até chegarmos no número 6174.

$$5085 \rightarrow 8550 - 0558 = 7992$$

$$7992 \rightarrow 9972 - 2799 = 7173$$

$$7173 \rightarrow 7731 - 1377 = 6354$$

$$6354 \rightarrow 6543 - 3456 = 3087$$

$$3087 \rightarrow 8730 - 0378 = 8352$$

$$8352 \rightarrow 8532 - 2358 = 6174$$

Assim, observamos que chegamos ao número 6174. É justamente este número que é conhecido como Constante de Kaprekar. Independentemente do número que se escolha, seguindo as instruções acima, sempre chegaremos na Constante de Kaprekar, 6174. Esta descoberta foi feita por Kaprekar em 1946 e anunciada em 1949 na conferência nacional de Madras, na Índia, e posteriormente publicada no artigo Problemas Envolvendo Reversão de Dígitos, em 1953.

Uma das grandes dúvidas sobre a Constante de Kaprekar é a quantidade de vezes que tenho que repetir as instruções. O número de iterações necessárias depende dos algarismos que compõem o número selecionado inicialmente, mas em estudos feitos, chegaram à conclusão que o número máximo de vezes em que precisaremos repetir as instruções são sete.

4.1.6. Sequência de Recamán

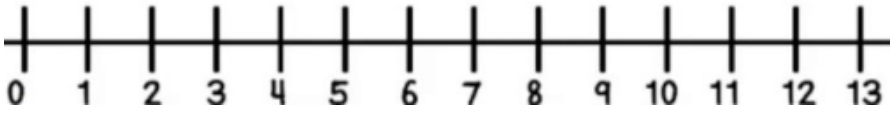
Observe a seguinte sequência de números:

$$0,1,3,6,2,7,13,20,12,21,11,22, \ldots$$

Essa sequência, por mais que não seja perceptível nessa forma, tem um padrão. Essa sequência é chamada de sequência de Recamán, atribuída ao matemático colombiano Bernardo Recamán.

Apesar de sua aparente complexidade, as regras que geram essa sequência são bastante simples. A melhor maneira de entender o algoritmo de geração é desenhar uma linha numérica (figura 6) começada em 0 até um outro número. Iremos desenhar até a linha de 0 a 13 para começar:

Figura 6: Reta numérica

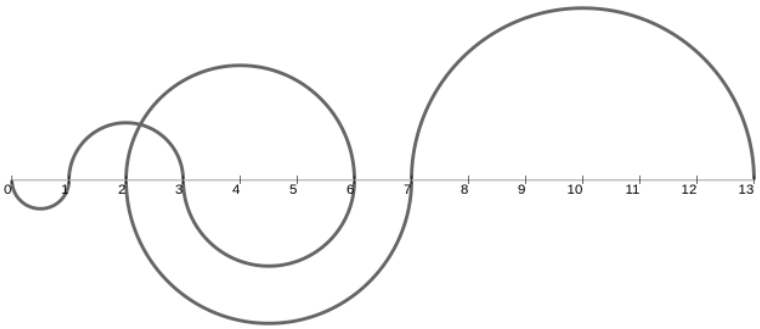


Fonte: https://i.ytimg.com/vi/36cEzK8pMYQ/maxresdefault.jpg modificado pela autora

Basicamente, a partir de 0, em cada passo tentamos mover para a esquerda um número de unidades igual ao passo que estamos dando. Se o número em que pousamos está à esquerda de zero ou já apareceu antes em nossa sequência, em vez de mover para a esquerda, movemos para a direita. Para desenhar a sequência usamos semicírculos que representam os saltos de um número para o outro.

Ou seja, começamos no 0 e não há números antes dele na nossa reta numérica, pulamos 1 casa para a direita, caindo no 1. Depois tentamos voltar 2 casas, mas é impossível, então novamente avançamos para a direita duas casas, caindo no número 3. O próximo movimento é com 3 números. Tentando voltar três casas, cairíamos no 0, que já foi usado, tendo que avançar as três casas para a direita caindo no 6. Novamente com o número 4 tentamos retornar quatro casas, caindo no número 2, que ainda não foi usado, podendo assim voltar quatro casas para a esquerda. E continuar repetindo o processo, como mostra a figura (figura 7):

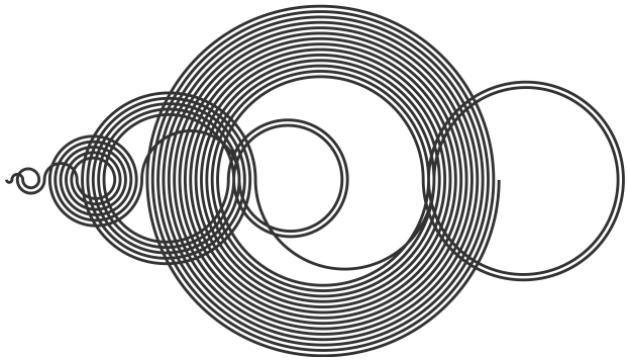
Figura 7: Ilustração básica de Recamán



Fonte: https://solmos.netlify.app/post/2019-02-20-la-secuencia-de-recaman/index_files/figure-html/unnamed-chunk-3-1.png

Observando somente essas casas, ainda não é tão perceptível um padrão, mas ele já começa a aparecer. Vejamos a sequência mais avançada (figura 8):

Figura 8: Desenho formado pela Sequência de Recamán



Fonte: https://i.ytimg.com/vi/rk775We01ic/hqdefault.jpg

Uma das conjecturas dessa sequência é que não é todo número natural que aparece. Mas que existem buracos ao longo dessa sequência.

4.1.7. Funções Periódicas

Como já foi dito junto à definição de sequência, existem algumas matérias que são básicas para que se entenda como se define e como funciona uma sequência. Função é uma delas, que, de acordo com a BNCC é introduzida no Ensino Fundamental e aprofundada no Ensino Médio.

No ensino Médio, é aprendido um tipo de função chamada *função periódica.* As funções periódicas estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no Currículo do Estado de São Paulo e na Matriz de Avaliação Processual, na 2ª e 3ª série do Ensino Médio, com maior profundidade na 2ª série para o período do primeiro bimestre letivo.

O conceito de função é talvez o conceito matemático mais utilizado nas diversas áreas do conhecimento. Através de funções específicas conseguimos expressar diversos tipos de fenômenos, como tendências, movimentos, crescimentos, etc. Quando o fenômeno descrito por essa função se repete em intervalos iguais, seja de tempo, espaço, distância, ou qualquer outro intervalo, a função que o descreve é dita função periódica. Dito isso, para contextualizar a função

periódica matematicamente, a definiremos usando a definição de Sauter e Azevedo (2022, p. 13):

Definição:

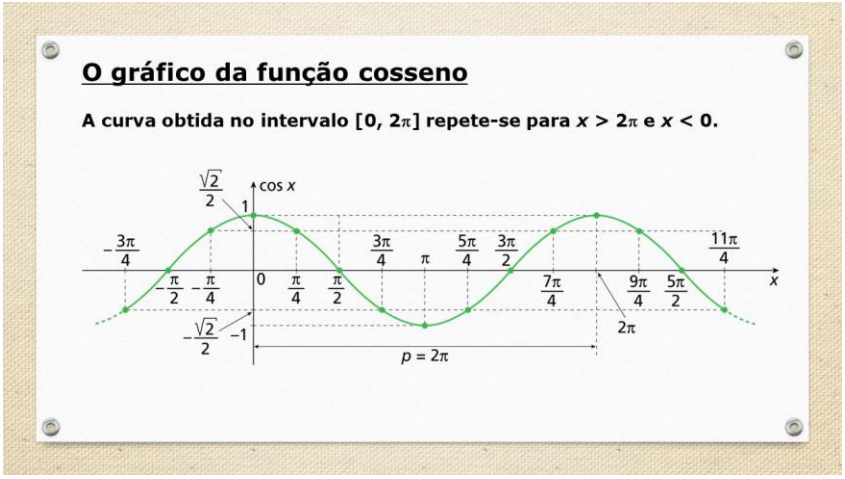
Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica quando existe um período $T \neq 0$ tal que

$$f(t + T) = f(t) \; \forall \; t \in \mathbb{R}$$

Esta função também é chamada de T – Periódica segundo os referidos autores.

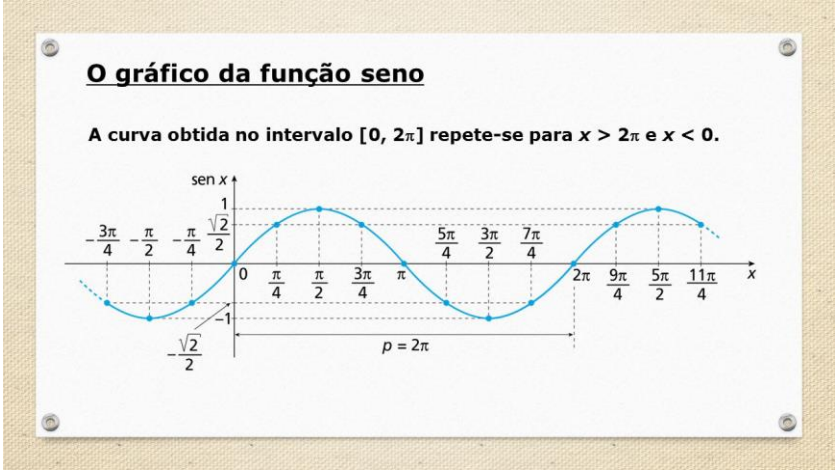
Essa função é apresentada quando se pretende estudar as funções $sen(x)$ e $\cos(x)$, pois elas são periódicas, de período $T = 2\pi$. Isso significa que, conhecendo o comportamento da função no intervalo $[0, 2\pi]$, já é possível conhecer seu comportamento em qualquer outro intervalo da forma $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$, pois o valor de θ que percorre ao longo da circunferência dá as coordenadas de um ponto após um número de voltas sem perda de generalidade (OLIVEIRA, 2019, p. 37), ou seja, seu gráfico forma um padrão, onde o período se torna uma sequência de repetições de resultados para a função (figura 9) (figura 10):

Figura 9: Gráfico da Função Cosseno



Fonte: Slideplayer (https://slideplayer.com.br/slide/3766675/)

Figura 10: Gráfico da Função Seno



Fonte: Slideplayer (https://slideplayer.com.br/slide/3766675/)

Uma das coisas que se aprende quando falamos das funções $sen(x)$ e $\cos(x)$ é aprender a calcular quantas voltas um grau de medida maior que $360°$ deu no círculo e em que quadrante parou. Segue exemplo de exercício retirado do livro didático da editora prisma:

(Bonjorno, 2020) Um móvel percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica, partindo do ponto A, origem dos arcos. Quantas voltas completas na circunferência esse móvel deu? Em qual quadrante parou?

É a partir de sequências como essas que um aluno do ensino médio tem um contato maior com sequências que são possíveis calcular próximos termos, o que abre uma porta para os problemas de ciclo, pois abrem-se repetições de um determinado período que fica se repetindo como uma sequência de números que se tem que descobrir um dos termos.

4.2. PROBLEMAS DE CICLO

Padrões e regularidades estão presentes na natureza e no cotidiano das pessoas, como por exemplo, nas pinturas de parede, nos números, na órbita dos

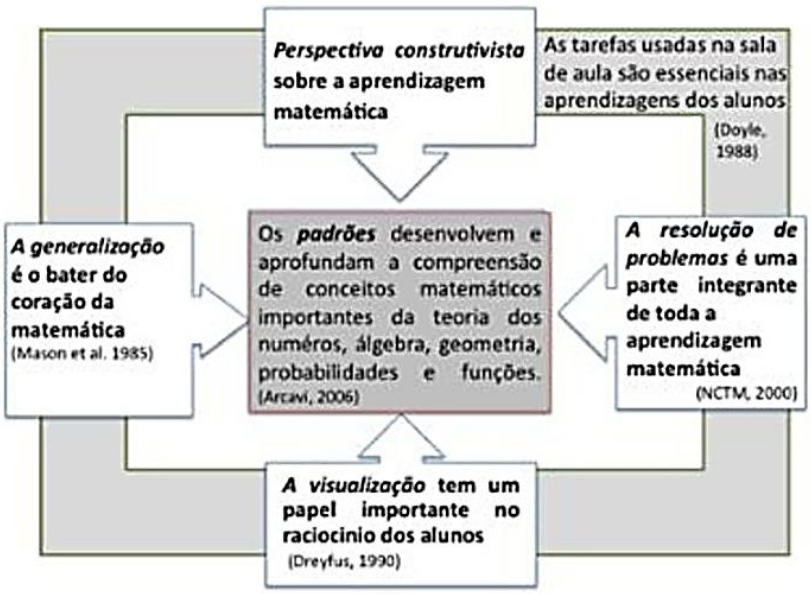
planetas, nas notas musicais, nas datas dos calendários, nas fases da lua, nas horas do dia, etc.

De acordo com Devlin (2002), a Matemática é conhecida como a ciência dos padrões. Os padrões são úteis para a exploração de situações de repetição do campo da álgebra. Eles permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque desenvolve a criatividade, a capacidade de classificar e ordenar informação e faz com que compreendam a ligação entre a matemática e o mundo em que vivem. Muitos problemas, de álgebra ou teoria dos números, envolvem sequências. Em geral as sequências possuem um padrão e geralmente os problemas pedem para encontrarmos alguns termos partindo desses padrões.

Segundo Vale *et al.* (2011, p. 9), “padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades”. Com base nessa definição, podemos concluir que o padrão é composto por regularidades, ou seja, regularidades em uma sequência, estabelecem um padrão.

Vale *et al.* (2009) apresenta um diagrama explicando como que os padrões desenvolvem nos estudantes certos conceitos matemáticos baseando-se no trabalho de alguns outros autores (figura 11).

Figura 11: O trabalho com padrões



Fonte: Vale (2009)

Anteriormente, foram citados dois tipos de sequências, sendo elas sequências finitas e infinitas. Existem, dentro delas, três tipos principais de sequências: Ponte, Branco, e Matos (2009) apresentam as sequências repetitivas, as sequências crescentes e as decrescentes. Independentemente do tipo, a ideia essencial de uma sequência implica repetição ou mudança. As sequências repetitivas são consideradas por Ponte, Branco e Matos (2009) como sendo “as mais simples” e as que “podem ser usadas para o trabalho inicial da procura de regularidades e da generalização” (p. 47).

Neste tipo de sequências existe um termo identificável que se repete de forma cíclica, indefinidamente. As sequências que contêm esses termos são um tipo de sequência infinita, conhecida como problemas de ciclo (Vale, 2011).

Quando introduzimos um número ao acaso e aplicamos sucessivamente a mesma transformação, criamos uma sucessão definida por recorrência. Viana (2016) dá um exemplo desse teste, onde o autor escolhia um número e em seguida escrevia uma expressão em que entrasse o resultado anterior e repetia esse processo algumas vezes. Viana ressalta também que a maior parte das vezes a sucessão divergia para infinito ou convergia para um número. Eis o exemplo:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$$

Comecemos com um número à nossa escolha. Por exemplo, 11.

$$u_1 = 11$$

$$u_2 = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$u_3 = 1 - \frac{11}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$u_4 = 1 - (-10) = 11$$

O quarto termo é igual ao primeiro. A sucessão repete-se indefinidamente, com um ciclo de amplitude 3:

$$11, \frac{10}{11}, -\frac{1}{10}, 11, \frac{10}{11}, -\frac{1}{10}, 11 \ldots$$

É fácil mostrar que isto acontece quando se começa por outro número qualquer (ou quase):

$$u_1 = a$$

$$u_2 = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} \; ; a \neq 0$$

$$u_3 = 1 - \frac{a}{a-1} = -\frac{1}{a-1} \; ; a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \notin \{0, 1\}$$

$$u_4 = 1 - \big(-(a-1)\big) = a$$

Realmente, a sucessão é cíclica de período 3, mas o número inicial tem de ser diferente de 0 e de 1. Este resultado é interessante e inesperado. Por isso, apetece logo fazer novas experiências do mesmo tipo.

Vale (2011) aborda os padrões presentes em sequências repetitivas, descrevendo como os autores definem essas sequências:

> Sequências cíclicas são sequências infinitas que se repetem segundo o mesmo padrão. No que tange às sequências cíclicas, a dependência da trajetória é bastante limitada, pois *basta conhecer o estado anterior para predizer o seguinte. (VALE, 2011, p. 21)*

Para exemplificar e mostrar alguns problemas de ciclo, segue algumas questões do canal do Oliveira (2014):

EXERCÍCIO: A sequência de letras a seguir mantém o mesmo padrão de repetição.

I N E A R J I N E A R J I N E A R J ...

A letra que ocupa a 555ª posição é

A) N.

B) E.

C) A.

D) R.

E) J.

Observa-se que o exercício acima é composto por um tipo de sequência infinita que produz uma repetição cíclica, seguindo um padrão as letras I, N, E, A, R, J que se repetem sempre na mesma ordem. Esta sequência é o exemplo mais clássico de problemas de ciclo que encontramos, pois o padrão que há nela é bem explicito, porém nem todos os problemas cíclicos têm padrões tão evidentes.

O ensino das sequências cíclicas tem como objetivo que o aluno perceba uma regularidade em alguns elementos de um conjunto S e ser capaz de usá-la para construir uma expressão direta de qualquer termo de S. Esse processo serve para a construção da expressão dos elementos da sequência e para o descobrimento do padrão da sequência para continuá-la.

Geralmente, os problemas cíclicos pedem que o executor do problema indique um termo faltante da sequência, que pode começar pela posição mais próxima da última figura da sequência e ir se distanciando; ou que procure um termo numa posição qualquer, distante dentro da sequência.

5. VESTIBULARES E CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Nos dias atuais, a Matemática comporta um amplo campo de estudos que instigam a pessoa a fazer generalizações, projeções e abstrações. Isso acaba favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico.

A utilização da matemática sempre fez parte da vida de todos, seja nas experiências mais simples como o contar e comprar ou nas mais complexas, como construir uma ponte, e por esse motivo o conhecimento da matemática deveria ser explorado da forma mais ampla possível.

Bagatini (2010) aponta que, diante das diversas tentativas de incentivar o estudo da Matemática, algumas se sobressaem, entre elas, as Olimpíadas de Matemática realizadas em âmbito mundial, nacional, regional, etc.

A olimpíada é de grande importância para o apoio do ensino e aprendizagem de Matemática por meio da resolução de problemas além de ser uma forma de perceber a aplicabilidade de conteúdos tomados, em primeiro momento, apenas como teoria.

A Secretaria de Educação do Paraná lista algumas vantagens para alunos que se dedicam a participar de olimpíadas científicas, dentre elas estão: São desafiadoras; Há a oportunidade de você se aprofundar em uma matéria de seu interesse; Bolsas de Estudo; Abrem portas no âmbito de conhecer professores das principais universidades do país, destaques em competições internacionais, diretores de colégios que são destaques no Brasil, entre outros; Faculdade no Exterior; Currículo; Preparação para o vestibular e melhora no rendimento escolar.

Berinde (2004) ressalta que as competições matemáticas escolares, apesar de não serem designadas como Olimpíadas, já aconteciam em 1885, na cidade de Bucareste, na Romênia, porém, Muller (2000), nos traz a informação de que no mesmo período do início da competição esportiva moderna, a Hungria organizou a primeira Olimpíada de Matemática em 1894 para alunos do último ano da escola secundária, que não demorou a ser disseminada pelo leste europeu e ao mundo, e mais tarde, em 1959, deu origem à Olimpíada Internacional de Matemática

(International Mathematical Olympiad – IMO); direcionada apenas aos alunos que, no Brasil, correspondem o Ensino Médio.

Fernandes e Oliveira (2005) destacam ainda que as olimpíadas de matemática internacionais que foram criadas tinham como objetivo principal contestar e verificar a criatividade e o raciocínio matemático.

Algumas das Olimpíadas Matemáticas Internacionais são: a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) ou *International Mathematical Olympiad* (IMO) e Olimpíada Internacional de Matemática Sem Fronteiras (OIMSF).

A IMO é a competição do campeonato mundial de matemática para alunos do ensino médio e é realizada anualmente em um país diferente. Ela procura indivíduos talentosos de todo o mundo em um estágio inicial e lhes dá a oportunidade de desenvolver seus talentos. Além de visar proporcionar uma oportunidade de troca de informações sobre a situação atual da educação matemática em cada país.

A Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras é uma competição internacional de matemática interclasses em formato colaborativo para estudantes do ensino fundamental e médio cujo os objetivos são aproximar os países estrangeiros através do estudo da Matemática, promover o interesse pela Matemática, o uso de outros idiomas na solução de problemas matemáticos e a solução de problemas matemáticos através do trabalho colaborativo.

Silva (2007) ressalta que a notoriedade da Olimpíada Internacional foi o principal motivo dos países começarem a promover suas próprias Olimpíadas de Matemáticas nacionais, sendo que alguns deles criaram Olimpíadas de Matemáticas nas províncias e cidades, como é o caso do Brasil.

De acordo com o artigo da Clemente (2004), as Olimpíadas de Matemática chegaram ao Brasil em 1979, mas só a partir de 1995 ganharam a estrutura de um projeto nacional, com recursos do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), num trabalho conjunto da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa).

No caso do Brasil, de acordo com o IPEA, essas competições foram criadas para promover o estudo da matemática, treinar professores e descobrir talentos

precoces para as ciências, selecionar os melhores alunos em matemática para investir na sua carreira e possivelmente contribuir para o avanço científico-tecnológico do seu país.

A Olimpíada de Matemática, é executada sob diversos formatos, – Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Paulista de Matemática (OPM), Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Brasileira de Racicocínio Lógico (OBRL), Olimpíadas Internacionais de Matemática, que já foram citadas, olimpíadas regionais, como Olimpíada de Matemática do Distrito Federal (OMDF), Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (OMERJ), Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM/SC) entre outras.

Assim sendo, iremos fazer um breve relato, baseado no trabalho de ALVES (2010) para que haja uma melhor compreensão do que elas abordam, destacando a OBMEP, a OBM e a OBRL.

5.1. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo IMPA, com o apoio da SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI).

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:

1. Estimular e promover o estudo da Matemática;
2. contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;

4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
5. Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A OBMEP possui duas fases, sendo a primeira fase a aplicação da prova objetiva, de 20 (vinte) questões, diferenciadas por níveis e realizada em cada uma das escolas inscritas, com a correção feita pelos professores da escola correspondente. A segunda fase é uma prova discursiva contendo 6 (seis) questões, também diferenciadas por níveis, aplicada em centros escolhidos pela OBMEP. O tempo de resolução é de três horas em locais designados pela Comissão Organizadora.

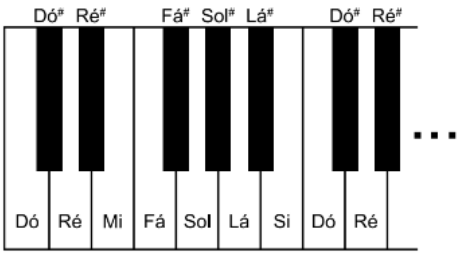
Segundo o Ministério da Educação e Ministério da Ciência e Tecnologia, a OBMEP é um projeto que cria um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre estudantes e professores de todo o país com o compromisso de afirmar a excelência como valor maior no ensino público. Suas atividades mostram a importância da Matemática para o futuro dos jovens e para o desenvolvimento do Brasil.

Atualmente existem estudos e avaliações acerca da OBMEP, como por exemplo a Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas feita pelo Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE) do MCT (Ministério da Ciência e Tecnologia). Essas avaliações apontam que, mesmo sendo uma competição recente, os resultados obtidos pela OBMEP são muito bons dentro de sua proposta. Além disso, têm contribuído para a melhoria no desempenho dos participantes e despertado o interesse e a motivação pela Matemática.

Quando se trata se sequências a OBMEP também contempla exercícios de sequências cíclicas, como podemos verificar no exemplo abaixo (figura 12):

Figura 12: Exercício da OBMEP - fase I - Nível 1 - 2022

11. A figura mostra um trecho do teclado de um piano, com as notas associadas às teclas. Os nomes das notas se repetem, seguindo o mesmo padrão. O intervalo entre duas notas consecutivas é chamado de semitom. Por exemplo, na figura, a nota Si está 7 semitons acima da nota Mi (contam-se teclas pretas e brancas).



Qual é a nota que está 17 semitons acima da nota Lá?

(A) Ré
(B) Dó#
(C) Fá
(D) Dó
(E) Sol

Fonte: OBMEP

No piano, como estamos trabalhando com as teclas pretas e brancas, temos a seguinte sequência cíclica:

$$Dó \rightarrow Dó\# \rightarrow Ré \rightarrow Ré\# \rightarrow Mi \rightarrow Fá \rightarrow Fá\# \rightarrow Sol \rightarrow Sol\# \rightarrow Lá \rightarrow Lá\# \rightarrow Si \rightarrow Dó \rightarrow Dó\# \ldots$$

Ou seja, são 12 semitons que se repetem. Na resolução do exercício, podemos trabalhar com a divisão da sequência cíclica, porém estamos começando pelo semitom $Lá$, e não pelo $Dó$. Como na sequência começa. Portanto, uma das soluções que podemos usar é somar ao que nós queremos a posição do Lá e assim, realizar a divisão.

$$17 + 10 = \frac{27}{12} = 2\ resto\ 3$$

Pelo resto, sabemos que é o $Ré$ a resposta que estamos procurando.

Alguns dos alunos poderiam pensar de outra maneira a resolução. Os alunos podem conhecer o piano e desenhá-lo na cabeça, tocando as teclas e contando, o que revela a percepção musical. Outros podem utilizar a percepção das teclas e visualizar que quando é passada as três teclas pretas, passam-se 7 semitons, que

é a percepção do enunciado, do Mi para o Si, e usar essa informação para calcular.

5.2. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)

A OBM é uma realização da Associação Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM) em parceria com a Universidade Federal de Goiás (UFG) e conta com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), da Academia Brasileira de Ciências (ABC) e do INCT-Mat.

Em 1979, a SBM organizou a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Desde então, a OBM sofre mudanças em seu formato, porém mantém a sua idéia central de estimular o estudo da Matemática pelos alunos, de desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, de influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos.

Os objetivos da OBM incluem:

1. Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas.

2. Descobrir jovens com talento matemático excepcional e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa.

3. Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando o seu devido treinamento.

4. Apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil.

5. Organizar as diversas competições internacionais de

Matemática, quando realizadas no Brasil.

Para a OBM chegar nos parâmetros atuais ela foi se desenvolvendo com o tempo, e em 1998 ela chegou a ser realizada em 3 fases e a última fase continha um nível similar ao das competições internacionais. Hoje em dia, para os Níveis 1, 2 e 3 a OBM é realizada em Fase Única. Para o Nível Universitário, a OBM é realizada em duas fases, sendo a primeira fase, a Competição Elon Lages Lima de Matemática.

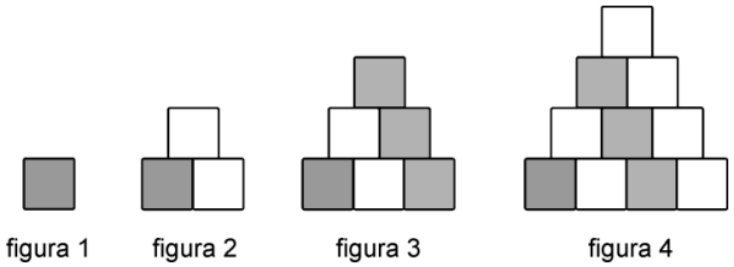
Porém, atualmente não é qualquer aluno que pode se inscrever nessa Olimpíada. De acordo com seu regulamento não há inscrição pelas escolas na OBM nos níveis 1, 2 e 3. Os alunos dessa modalidade serão convidados a participar da fase única, se forem: os 300 alunos, de cada nível, com maior pontuação na Segunda Fase da OBMEP ou alunos ganhadores de medalha de ouro, prata ou bronze na OBM do ano anterior. Podem ser também estudantes ganhadoras de medalha de ouro, prata, bronze, ou menção honrosa no Torneio Meninas na Matemática (TM), podem ser alunos ganhadores de medalha de ouro, prata, bronze, ou menção honrosa na Competição Jacob Palis Júnior de Matemática, ou de três e dez estudantes, de cada nível, com melhor desempenho em cada Olimpíada Regional, apoiada pela OBM no ano da competição.

Em seu requisito para o conteúdo de sequências, a OBM tem umas questões muito interessantes, que desenvolvem o raciocínio do aluno através de contextualizações mais visuais. Aqui, trouxemos um problema (figura 13) pedido na OBM sobre sequências e ciclos. Nesse problema, ele pede que o aluno articule e desenvolva uma forma de contagem. Abaixo segue duas resoluções possíveis:

Figura 13: Exercício da OBM - 3ª fase - Nível I - 2014

PROBLEMA 1

Esmeralda desenha quadradinhos de lado unitário para formar a sequência de figuras a seguir, de acordo com uma regra que você deve descobrir.



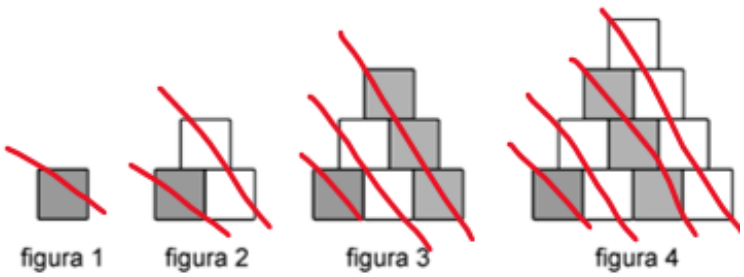
a) Quantos quadradinhos brancos tem a figura 13?

b) Se existir, qual é a figura que tem exatamente 100 quadradinhos brancos a mais que quadradinhos cinzentos?

Fonte: OBM

a) Há algumas formas de resolver esse exercício. O estudante pode observar que as figuras seguem um padrão de aparecimento que sempre se repete para todas as figuras:

Figura 14: Forma de visualização do exercício



Fonte: Compilação da autora

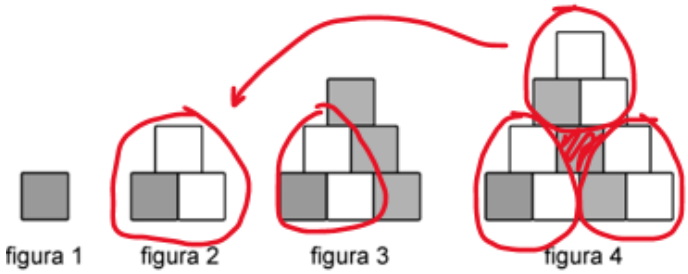
Nessa imagem podemos perceber que existe uma forma crescente de quadradinhos. Na figura 2 aumenta 2 quadrados a mais do que a figura anterior. E acontece o mesmo nas figuras 3 e 4. Além disso percebemos também o padrão de cores, que alternam entre brancos e cinzentos. Dessa forma, podemos perceber também que as figuras ímpares aumentam as figuras cinzentas e as pares as figuras brancas. Assim, podemos apresentar a seguinte resolução:

Como ele pergunta dos quadros brancos, por essa estratégia de resolução podemos perceber que eles só aumentam nas figuras pares, portanto a figura 13 terá o mesmo número de peças brancas da figura 12 somada a todas as outras figuras pares:

$$13 \rightarrow 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 42$$

Outro modo de resolver esse exercício é observando que as peças brancas não mudam nas figuras ímpares, mas a figura que é a metade da atual se repete ciclicamente n+1 vezes, sendo n o número da figura que se repete como mostrado abaixo:

Figura 15:Segunda forma de visualização do exercício



Fonte: Compilação da autora

Podemos expressar isso algebricamente da seguinte forma:

$$se \begin{cases} figura\ par: \frac{n}{2} * \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ figura\ ímpar: \frac{n-1}{2} * \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \end{cases}$$

Assim podemos afirmar que na figura 13 tem:

$$13 \rightarrow \frac{13-1}{2} * \left(\frac{13-1}{2} + 1\right) = \frac{12}{2} * \left(\left(\frac{12}{2}\right) + 1\right) = 6 * 7 = 42$$

Podemos também usar a contagem, mas esse método é o menos prático:

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 12 \rightarrow 20 \rightarrow 20 \rightarrow 30 \rightarrow 30 \rightarrow 42 \rightarrow 42$$

b) Nessa questão, levaria o dia inteiro para fazer por contagem, então precisamos descobrir uma generalização das peças cinzas para

comparar com os quadradinhos brancos, mas podemos usar o método da contagem para visualizar o método:

$$0 \to 2 \to 2 \to 6 \to 6 \to 12 \to 12 \to 20 \to 20 \to 30 \to 30 \to 42 \to 42 \to 56 \to 56 \to 72 \to 72 \to 90 \to 90 \to 110 \to 110 \to 132 \to 132 \to 156 \to 156 \to 182 \to 182 \to 210 \to 210 \to 240 \to 240 \to 272 \to 272 \to 306 \to$$

$$1 \to 1 \to 4 \to 4 \to 9 \to 9 \to 16 \to 16 \to 25 \to 25 \to 36 \to 36 \to 49 \to 49 \to 64 \to 64 \to 81 \to 81 \to 100 \to 100 - 121 \to 121 \to 144 \to 144 \to 169 \to 169 \to 196 \to 196 \to 225 \to 225 \to 256 \to 256 \to 289 \to$$

Aqui podemos perceber que a cada dois números a diferença da contagem da peça branca para a cinzenta aumenta em um, então, se na primeira figura tem apenas 1 casa de diferença, na terceira figura terá 2 casas e assim por diante. Por isso chegamos que:

$se \begin{cases} figura\ for\ ímpar: \frac{n+1}{2} = x \\ figura\ for\ ímpar: \frac{n}{2} = x \end{cases}$, onde x é a diferença entre os bloquinhos

Digamos que queremos descobrir a casa par em que tem a diferença de 100 quadradinhos brancos a mais do que o preto, assim, temos que:

$$\frac{n}{2} = 100 \Rightarrow 100 * 2 = n \Rightarrow 200^{\underline{a}}\ figura$$

Podemos conferir com o método de soma da letra a:

$$brancas: 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 196 + 198 + 200 = 10100$$

$$pretas: 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 197 + 199 = 10000$$

É muito interessante observar como que o discente resolve esse tipo de problema. A OBM traz exercícios com que é necessário desenvolver certo raciocínio lógico para que se chegue a uma resposta coerente. Observar as formas e estratégias de generalização do educando ao inves de simplesmente “jogar” o conteúdo de forma que ele copie o que foi passado é uma forma de evoluirmos no ensino e aprendizagem do aluno, e como pudermos observar nessa questão, as

olimpíadas, principalmente a OBM tem um papel fundamental em formação de exercícios para aplicação e aprendizagem em sala de aula.

Exercícios como esse são geralmente pedidos nessa olimpíada. Utilizá-los em sala de aula pode ajudar os alunos a desenvolverem um senso crítico e expor suas ideias e raciocínio-lógico para com a matemática. Podemos observar nesse exemplo que o pensamento algébrico faz parte do ensino-aprendizagem e ao analizar as resoluções feitas podem se obter incríveis resultados sobre a desenvoltura do pensamento de uma pessoa e como a pessoa usa seus conhecimentos prévios de outras áreas da matemática para conseguir raciocinar e solucionar a questão.

5.2. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE RACIOCÍNIO LÓGICO (OBRL)

A Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) é uma forma de aproximar as escolas do desafiante mundo dos jogos e desafios lógicos, os quais, através de várias ferramentas pedagógicas e de uma metodologia direcionada, visam estimular a memória, a criatividade, a destreza e o pensamento lógico-analítico dos alunos, assim como desenvolver sua capacidade de concentração na solução de problemas, seja individualmente ou em pequenos grupos.

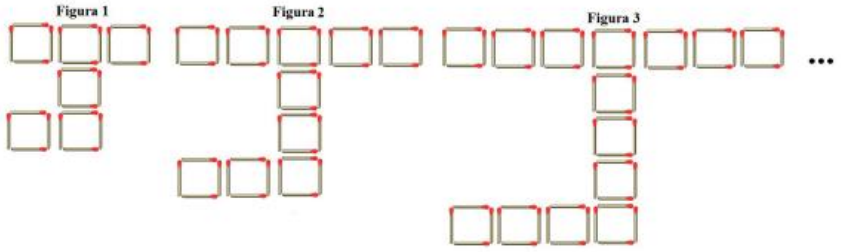
A Olimpíada está aberta a todas as escolas da rede pública e da rede particular, sendo de caráter estritamente pedagógico e cultural. A OBRL é dividida em 6 níveis, tendo a prova com conteúdos diferentes para cada nível. Na primeira fase da Olimpíada são cobrados os conteúdos a seguir para cada nível, onde os níveis que mais tem afinidade com sequências e sequências cíclicas são Nível Teta, Nível Gama, Nível Ômega, Nível Alfa, Nível Beta e Nível Delta.

A OBRL é a olimpíada que mais gosta de trabalhar exercícios de sequências cíclicas, onde os exercícios pedem os próximos termos da sequência que são muito distantes do número dado para que se possa calcular rapidamente o termo pedido, como podemos ver nas figuras abaixo:

Figura 16: Exercício OBRL - 2015

Questão 7 (valor da questão: 4,0)

A sequência de figuras abaixo foi composta por palitos de fósforos formando quadrados. Se continuarmos a formar quadrados, quantos poderemos obter na figura 8?



a) 65 b) 53 c) 29 d) 48 e) 34
x) *Nenhuma marcação*

Fonte: OBRL

Figura 17: Exercício de ciclo da OBRL - fase I - Nível 2 - 2015

Questão 3

Estão representados a seguir os primeiros elementos de uma sequência de figuras. Analise a sequência apresentada.

月 官 匹 刀 三 水 心 冊 内 口 月 官 匹 刀 三 水 心 …

Considerando que a regra de formação das figuras permaneça a mesma, a figura que ocupa 87ª posição é:

a) 月 b) 刀 c) 心 d) 冊 e) 内

Fonte: OBRL

Por conta das resoluções dos exercícios apresentados anteriormente nas outras olimpíadas serem similares a destas, descartaremos as resoluções. Caso haja curiosidade, as resoluções podem ser encontradas no site oficial da OBRL.

5.3. CONCURSO CANGURU

O Concurso Canguru de Matemática é uma competição anual internacional destinada aos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental até os da 3ª série do Ensino Médio. A competição teve origem na França e é administrada globalmente pela Associação Canguru sem Fronteiras (Association Kangourou sans Frontières - AKSF).

O Concurso Canguru de Matemática é a maior competição de Matemática do mundo, com mais de 6 milhões de participantes por ano nos mais de 80 países. Os objetivos do Concurso Canguru de Matemática Brasil, envolvem:

1. Ampliar e incentivar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos;
2. Contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis da Educação Básica;
3. Favorecer o estudo de maneira interessante e contextualizada, aproximando os alunos do universo da Matemática;
4. Estimular a capacidade dos alunos de obter prazer e satisfação intelectual na resolução de problemas de Matemática pura ou aplicada.

No Brasil, o Concurso é realizado desde 2009 e a cada ano a Comunidade Canguru cresce ainda mais. Hoje, o concurso Canguru tem 2 modalidades, sendo online e presencial. Em ambas as modalidades, os participantes do Concurso são divididos em 6 (seis) níveis de prova:

Nível P (Pre Ecolier) para os alunos do 3º e 4º anos do EF I; nível E (Ecolier) para os alunos do 5º e 6º anos do EF I e EF II, respectivamente; nível B (Benjamin) para os alunos do 7º e 8º anos do EF II; nível C (Cadet) para os alunos do 9º ano do EFII; nível J (Junior) para os alunos da 1ª e 2ª séries do EM; nível S (Student) para os alunos da 3ª série do EM; as provas dos níveis P e E têm 24 questões e as dos demais níveis, 30 questões com a duração de 1 hora e 40 minutos para realizar a prova.

5.4. ALGUNS VESTIBULARES

Atualmente o ensino da Matemática tem se caracterizado pelas constantes mudanças, que visam melhorar o ensino e a relação dos alunos com a disciplina e, até mesmo, com os professores. Os recursos tecnológicos, como o computador e o retroprojetor, e a interdisciplinaridade busca relacionar a Matemática às diversas outras disciplinas, por meio da aplicação dos conteúdos programáticos. Essa tática permite que o aluno perceba a importância dos estudos matemáticos, criando um interesse e despertando a curiosidade por novas descobertas.

Conduzir a pesquisa da Matemática a partir de experiências de concursos e vestibulares com padrões em sequências repetitivas e cíclicas é uma tentativa de torná-la mais significativa, é tentar fazer o aluno vivenciar o processo de construção dessa disciplina, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Estudar como os alunos têm resoluções diferentes para uma mesma questão leva a uma ampliação de estudos nas questões de problemas cíclicos, dando uma ênfase no âmbito de como os problemas de vestibulares trazem questões mais sérias para o mundo da matemática.

Com a curiosidade e a imagem positiva construída da matemática, as atividades que envolvam padrões em sequências vistas através dos vestibulares podem resultar em um trabalho valoroso e expressivo, de modo que os alunos consigam realizar as suas próprias generalizações.

Essa nova forma de abordar os conteúdos matemáticos tem influenciado as provas de vestibulares e concursos, estes estão buscando elaborar questões interdisciplinares, não com o intuito de dificultar as avaliações, e sim com o objetivo de selecionar pessoas capazes de relacionar as matérias com a realidade.

Um dos vestibulares a ter a iniciativa de aplicar esse arquétipo de prova com esse novo formato de avaliação foi o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), seguido das grandes Universidades brasileiras, como Unicamp, UnB, USP (com o vestibular FUVEST), UFG entre outras federais e estaduais.

Os vestibulares das faculdades e Universidades citadas têm um amplo campo de banco de questões, as quais algumas delas são relacionadas ao tema de sequências estudada nesse trabalho. Mas há duas que merecem destaque pelo trabalho frequente com problemas de ciclo.

5.4.1. ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

Criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Podem participar do exame alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores.

O Enem é utilizado como critério de seleção para os estudantes que pretendem concorrer a uma bolsa no Programa Universidade para Todos (ProUni). Além disso, cerca de 500 universidades já usam o resultado do exame como critério de seleção para o ingresso no ensino superior, seja complementando ou substituindo o vestibular.

Sua prova é dividida em dois dias: primeiro domingo e segundo domingo, sendo que o primeiro sua prova é inteiramente de conteúdo de matéria de humanas e o segundo focado na matéria de exatas. O conteúdo de sequências é feito no segundo dia de prova, não sendo reproduzido somente nos exercícios de matemática, mas sendo colocados nos exercícios de física e de química também.

5.4.2. VUNESP (Fundação para o Vestibular da Unesp)

A Fundação para o Vestibular da Unesp (Vunesp) é a instituição responsável por aplicar o vestibular para ingresso na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) e de outras instituições de ensino superior, como, Universidade do Estado do Amazonas (UEA), Faculdade de Medicina de Marília, entre muitas outras.

A Fundação é responsável por elaborar provas de várias prefeituras, governos de Estado e de órgãos da Justiça. Os mais tradicionais são da Polícia Militar do Estado de São Paulo, da Secretaria de Administração Penitenciária do Estado de São Paulo e da Prefeitura de São Paulo (capital). Além disso, a Vunesp também está entre uma das organizadoras do Enem.

Se tratando de vestibular, além da Unesp, a Fundação Vunesp também elabora e aplica provas em várias instituições de ensino superior de diversos cursos, inclusive Medicina. Seu vestibular tem uma gama bastante diversificada e bem elaborada quando o tema é sequências e sequências cíclicas, por esse motivo ganhou destaque em meio aos outros vestibulares.

As outras universidades citadas, apesar de contarem com exercícios de problemas desse tipo, não tem abrangências desse tema tão grande quanto o ENEM e a Vunesp, por esse motivo não haverá detalhamento de tais vestibulares, apesar de deixarmos a mercê do leitor de pesquisar mais sobre elas.

6. PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa surgiu no intuito de procurar entender como os estudantes do ensino básico confrontam e desenvolvem estratégias de resolução de problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas e de destacar essas estratégias e abordagens utilizadas pelos alunos na resolução de questões que foram retiradas de concursos de matemática e como os respondentes desenvolvem o senso crítico e como se desenvolvem as percepções dos problemas apresentados.

Esse conteúdo já aparece perto do final do ensino fundamental, continuando no início do ensino médio, e por esse motivo, exercícios que abrangem sequências e sequências cíclicas aparecem em olimpíadas de matemática e em concursos e vestibulares.

Como problemas dessa categoria possuem grande interesse, já que ocorrem tanto no cotidiano quanto em problemas profundos de matemática, compreender como estudantes do ensino básico abordam essa problemática é relevante para se compreender como os conteúdos de matemática básica se articulam para a resolução desse tipo de problema.

O problema dessa pesquisa é como um estudante do Ensino Médio pensa algebricamente para resolver problemas de sequências e ciclos, proveniente de olimpíadas ou concursos de matemática, tendo uma gama de estratégias obtidas sobre o assunto desde o ensino fundamental, e como esse pensamento pode ajudar a desenvolver suas habilidades e estratégias dentro da matemática.

Compreendemos por hipótese que as questões de sequências, principalmente as de ciclo, podem incentivar a utilização do raciocínio lógico matemático e assim incentivar a curiosidade dos alunos pela matemática além de mostrar que cada pessoa tem um modo diferente de pensamento, provando a capacidade de raciocínio sem a repetição de exercícios em sala de aula, pois o foco principal de ensino desse tipo de sequência é nos anos iniciais. Além disso, usar as questões de concurso e vestibulares para verificar o raciocínio do pensamento algébrico é um modo de verificar a resolução de exercícios podendo avaliar a interpretação de texto e de mundo do estudante.

Concordamos que, por causa da contextualização dos exercícios das olimpíadas, poderíamos verificar nas resoluções como os estudantes desenvolvem o senso crítico. Dessa forma, os objetivos do projeto são destacar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos na resolução de questões que envolvem sequências cíclicas que foram retiradas de concursos de matemática, observar a diferença de pensamento algébrico e se chegaram a um resultado lógico e correto e verificar se esses alunos conseguem obter uma percepção de como esses problemas apresentados podem se amplificar para uma pesquisa mais elaborada dentro do âmbito da matemática.

Além de nossos objetivos geral e específicos da pesquisa que envolve a investigação das estratégias escolhidas pelos alunos para na resoluções das sequências e sequências de ciclo, acabamos por obter um objetivo primário: procuramos entender como estudantes do ensino básico confrontam e desenvolvem estratégias de resolução de problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas mostrando que cada pessoa tem um modo diferente de pensamento. Isto nos permite estudar como a capacidade de raciocínio influência nos estudos mais profundos dentro da álgebra e como conteúdos do ensino fundamental, como divisão Euclidiana e progressões, podem se articular com ideias mais sofisticadas na resolução desse tipo de problema.

Indo mais além, também colocamos um objetivo secundário, que foi permitir que os próprios estudantes consigam articular conteúdos do ensino fundamental e do ensino médio, e perceber que as estratégias utilizadas na resolução de questões que envolvem sequências e ciclos podem se amplificar para estratégias mais elaboradas dentro do âmbito da matemática.

Para procurar entender como os estudantes participantes confrontam e desenvolvem as estratégias de resolução de problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas, criamos um questionário com problemas provenientes de competições de matemática e vestibulares que contemplam diversos aspectos e profundidades desse tema e então foram analisadas as produções escritas dos estudantes, para caracterizar os avanços e limitações de sua produção baseada em seus conhecimentos prévios.

Os dados foram analisados apresentando dados relevantes sobre a pertinência das sequências e sequências e sequências cíclicas na matemática.

A atividade foi impressa e aplicada a um grupo de estudantes para procurar entender como estudantes do ensino básico confrontam e desenvolvem estratégias de resolução de problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas mostrando que cada pessoa tem um modo diferente de pensamento, nos permitindo estudar a capacidade de raciocínio sem a repetição de exercícios em sala de aula.

6.1. RESULTADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, vamos analisar os resultados obtidos durante a prática realizada na instituição de ensino, relativo às resoluções dos participantes dessa pesquisa.

Esta pesquisa estava prevista para que fosse realizada com 20 alunos do Ensino Médio do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus São Paulo, porém foi realizada com todas suas etapas com apenas 10 alunos que, como não serão identificados por nomes, apresentaremos eles por letras de “A” até “J”. Decidimos analisar as resoluções de cada exercício, exaltando as melhores resoluções.

Mesmo que alguns deles tenham errado alguns resultados de exercícios, seja por erros de cálculo ou por método de resolução equivocados, optamos em mostrar alguns desses erros devido às resoluções diferentes e inovadoras, mostrando a eficácia de se trabalhar com a Resolução de Problemas.

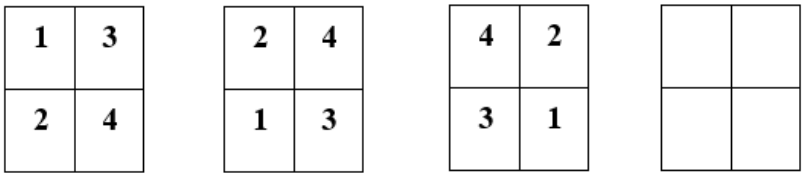
Deixamos claro que os alunos que realizaram a pesquisa são alunos que estavam interessados em treinar para olimpíadas de matemática futuras e próximas, o que gerou motivação pessoal para que eles fizessem parte do grupo de pessoas que realizaram a atividade, sendo eles matriculados no 1° ao 3° ano do Ensino Médio.

6.1.1. Análise do exercício 1

O exercício 1 segue com o seguinte enunciado (figura 18):

Figura 18: Exercício 1 do questionário – concurso FGV 2013

1) Em cada quadrado da sequência a seguir aparecem os números 1, 2, 3 e 4 que mudam de posição de acordo com certo padrão.



Fonte: Compilação da autora

O exercício 1 foi selecionado com um intuito de ser mais fácil, para que os estudantes demonstrassem sua percepção de mudança de sentido de localização, sendo que ela existe na percepção algébrica e geométrica. Além desse intuito, o exercício tem como base a identificação de um padrão que não está transparecido no enunciado. Em seu âmago, podemos esperar que as resoluções do exercício em questão tragam algumas das competências e habilidades da BNCC, explicadas a seguir:

Como no enunciado não é explicitado o padrão que se manifesta, o exercício incita o espírito de investigação e aflora as ideias para buscar o verdadeiro padrão que é citado no problema, por isso, a competência 2 é desenvolvida nessa questão:

> "2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo (BRASIL, 2017, p. 267)"

O enunciado do problema, após indicar um padrão existente, coloca um quadrado sem os elementos para que pudesse completa-lo com os números faltantes seguindo tal padrão depois de identificado, por isso cabem as habilidades: "(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (BRASIL, 2017, p. 279)" e "(EF02MA11) Descrever os elementos

ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (BRASIL, 2017, p. 283)".

Para que essa habilidade seja realizada, por se tratar de um padrão que pode ser visto do ponto rotacional, tendo que saber de sua posição inicial, tendo-a como referência temos atuando a seguinte habilidade:

> (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial. (BRASIL, 2017, p. 279)

Além disso, como a metodologia de resolução de problemas utilizada pede para que eles expliquem seus raciocínios da forma mais detalhada possível, temos duas habilidades que são trabalhadas: "(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos (BRASIL, 2017, p. 283)", temos também a habilidade EF02MA12:

> (EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido. (BRASIL, 2017, p. 283)

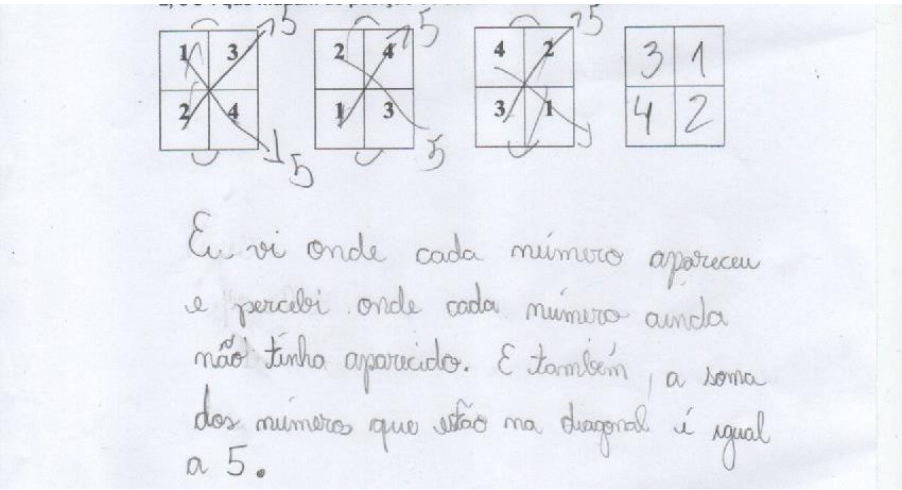
Como temos várias formas de interpretação da resolução do referido exercício e há mais de uma única variável para observação, contamos com a seguinte competência e a seguinte habilidade:

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 531)
>
> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BRASIL, 2017, p. 543)

O problema 1 foi um exercício que não houve erros de resoluções. Foram poucos que detiveram raciocínios iguais. Assim como o "aluno A", outros dois alunos (Aluno H e I) fizeram o exercício verificando onde cada número ainda não havia aparecido, que se enquadra na habilidade EF02MA11 da BNCC. Porém, com o

espírito investigativo, o “aluno A” teve um diferencial, como podemos observar em sua resolução (figura 19):

Figura 19: Resolução do exercício 1- aluno A

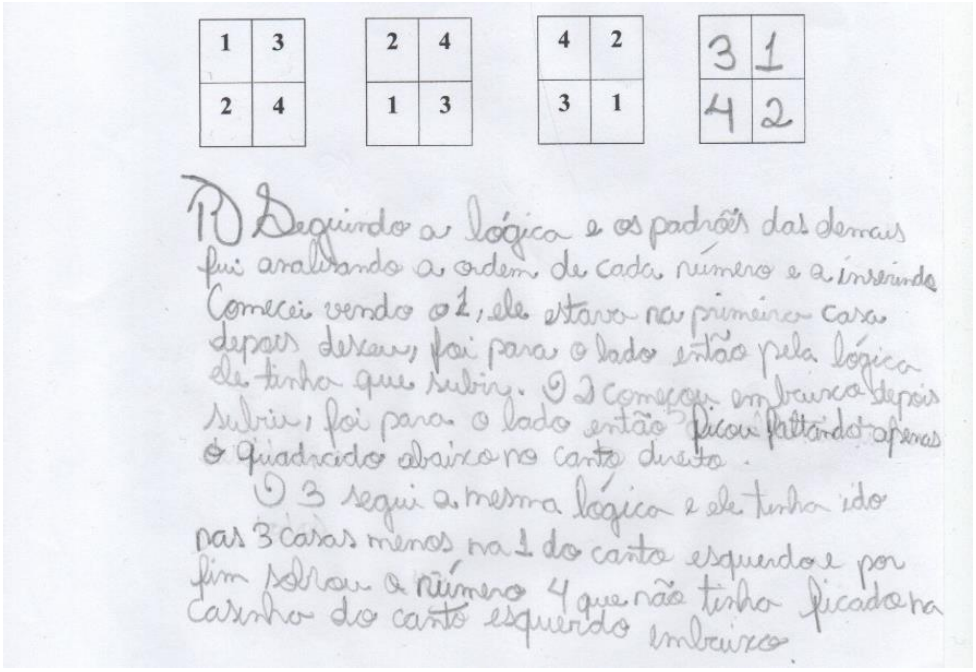


Fonte: compilação da autora

Em sua resolução, o “aluno A” (figura 19) analisou o exercício de uma forma inicialmente mais visual, como já dito, onde ele conseguiu verificar que os números não apareciam em certas posições e indicou-as. Após isso, nós podemos vislumbrar que esse aluno teve uma outra percepção ao querer descobrir o padrão que consta no enunciado do exercício: Foi encontrado um padrão de diagonal, cuja soma dela sempre resulta em 5. Isso mostra que o exercício, apesar de já resolvido e solucionado pelo “aluno A” o instigou a fazer o exercício, além de cumprir habilidades não previstas inicialmente que consideram trabalhar com soma.

Outra resolução que iremos destacar, que seguiu a ideia visual de percepção da falta de aparecimento do número em uma das posições é a resolução do “aluno J” (figura 20):

Figura 20:Resolução do exercício 1 - aluno J



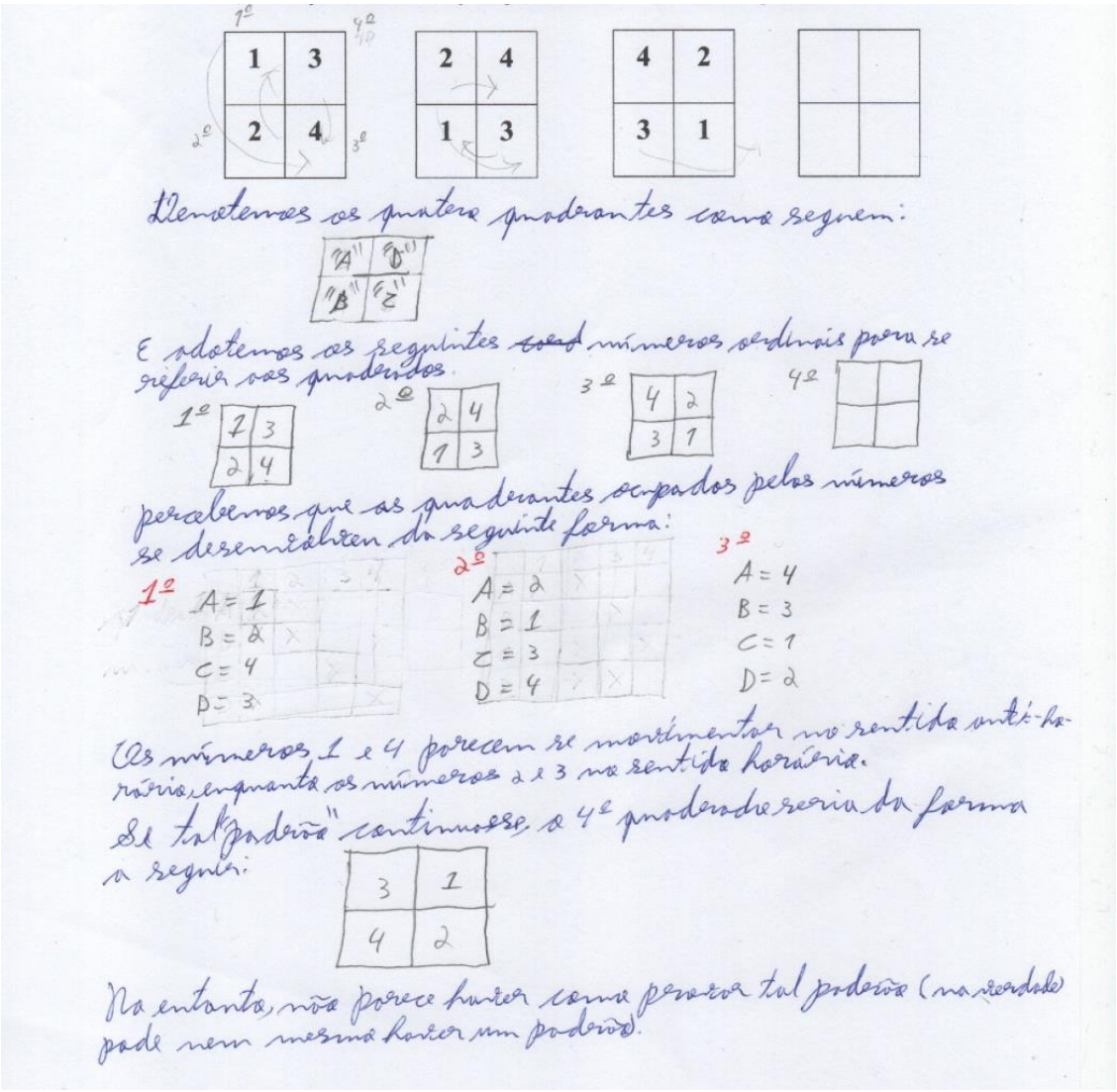
Fonte: Compilação da autora

Na resolução do “aluno J”, foi analisada a direção seguida por cada número e consequentemente, o aluno percebeu que havia um lugar em que cada número ainda não havia aparecido, contudo, podemos perceber também que não houve uma tentativa ou percepção de padrão para o número 4, cujo apresentou ser “o número que sobrou”, apesar de todos os outros terem o padrão escrito pelo aluno.

Essa resolução nos mostra que o pensamento inicial do aluno foi se modificando conforme ele foi resolvendo o exercício, já previsto por Polya quando ele se refere à metodologia de resolução de problemas.

De maneira geral, os estudantes utilizaram como estratégia de resolução aplicações elementares da rotação para chegar à solução. Podemos aqui, identificar que os estudantes introduziram ao efeito de rotação dos números, uma explicação própria e única para ser considerada a sequência explícita no enunciado do problema. Podemos, ainda, verificar que estes alunos compreenderam o problema proposto, interpretando e extraindo os dados dele, estabelecendo estratégias de resolução e executando corretamente o plano estabelecido para chegar à solução.

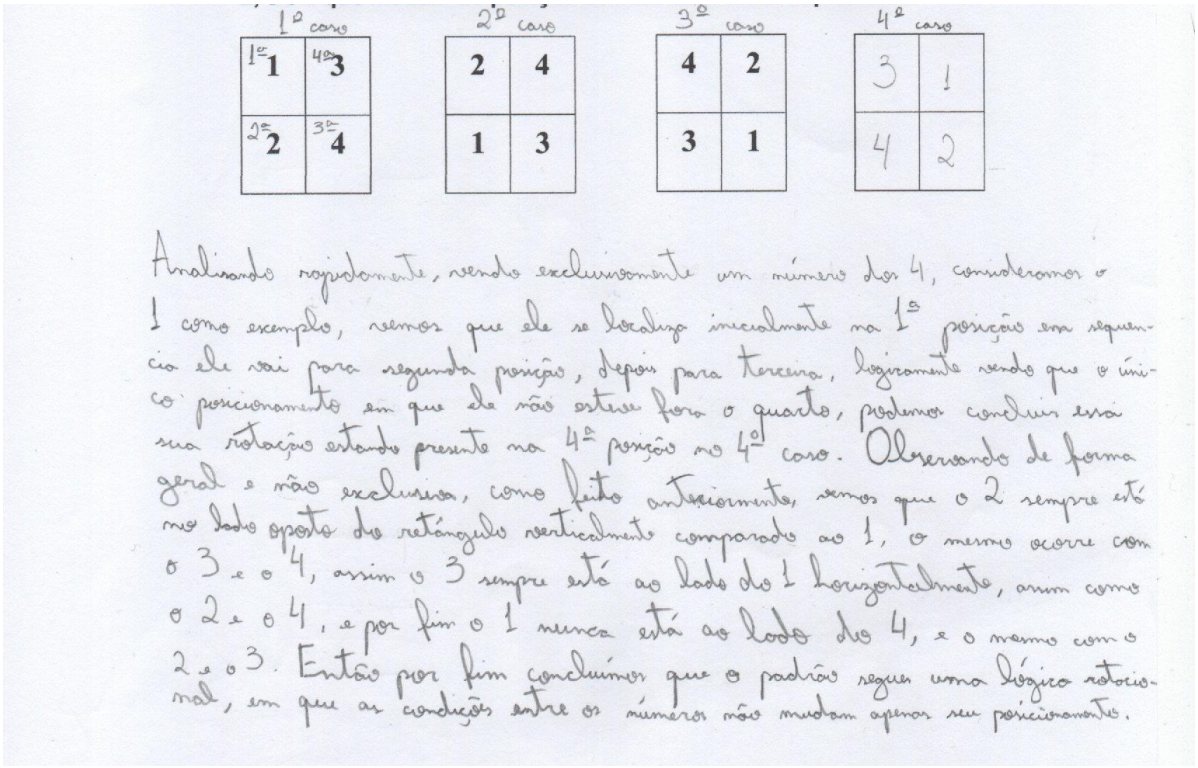
Figura 21: Resolução do exercício 1 - Aluno D



Fonte: Compilação da autora

Para o “aluno D”, a solução do problema em questão (figura 21) seguiu por conta da movimentação dos números nos quadrados, que foram considerados por ele como quadrantes. Deslocando-os em rotação nos sentidos horário e anti-horário, o aluno D realizou sua solução utilizando artifícios de álgebra linear e conteúdo de gráficos de funções, o que nos mostra uma afinidade do referido aluno com o tema. Também podemos reparar nessa resolução que o “aluno D” questionou a pergunta, mesmo com o enunciado explicitando que havia um padrão, o que revela um arquejo de questionamento sobre os fatos.

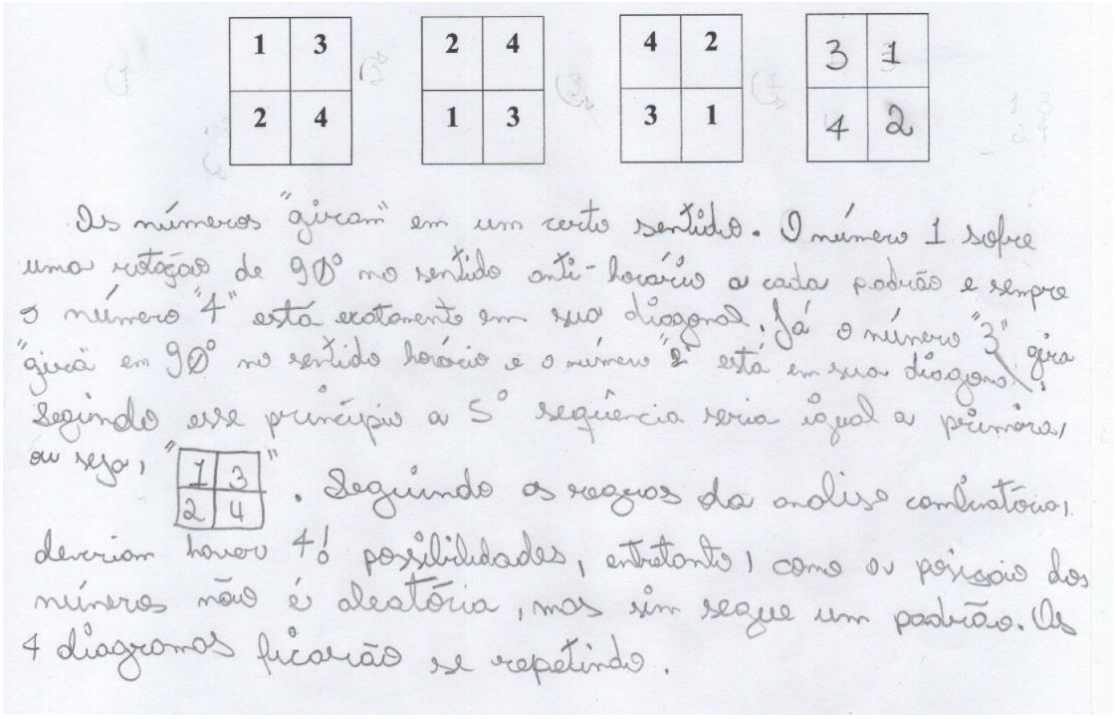
Figura 22: Resolução do exercício 1 - aluno E



Fonte: Compilação da autora

A habilidade de investigação do “aluno E” foi feita através de uma análise de um único número. O pensamento de que um dos números rege o padrão é claramente perceptível em sua resolução. Tanto que, para ele, diferente dos outros alunos mostrados anteriormente ele usou o número 1 para explicar o posicionamento dos outros números e em seguida justificou que existia uma condição de posicionamento e sua rotação devia obedecê-la, o que mostra um desenvolvimento de pensamento até mesmo computacional.

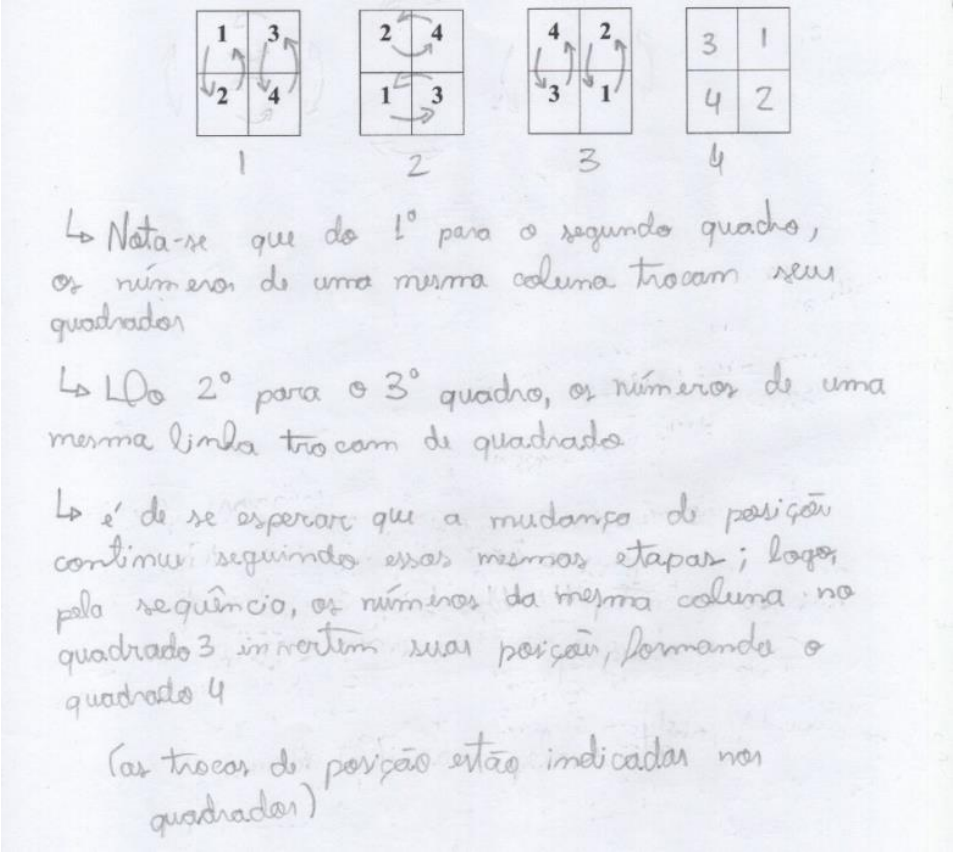
Figura 23: Resolução do exercício 1 - Aluno F



Fonte: Compilação da autora

Semelhante ao “aluno E”, o “aluno F” também atribuiu a um número específico para realizar a análise principal, porém diferente do aluno anterior, este fez o reconhecimento do padrão com dois números específicos, sendo os outros dois sempre em suas diagonais. Além do que foi pedido, podemos perceber que o aluno F, em todo seu questionário (apêndice B) tende a fazer os exercícios através de análise combinatória, o que demonstra a facilidade, ou no mínimo, mais conhecimento sobre esse conteúdo específico dentro do âmbito da matemática.

Figura 24: Resolução exercício 1 - Aluno G



Fonte: Compilação da autora

Podemos perceber que o “aluno G” fez uma resolução diferente dos outros alunos já apresentados. Podemos perceber uma grande facilidade com geometria espacial nessa resolução, pois podemos perceber que o aluno enxerga como uma folha de papel. Apesar da sua escrita de resolução estar um pouco “confusa”, ele escreve como se tivesse virando uma folha de papel em terceira dimensão, trocando as posições dos cantos das folhas.

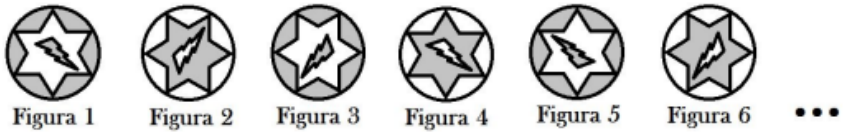
6.1.2. Análise do exercício 2

No segundo exercício, apesar de um dos alunos (aluno B) ter errado a resposta, o raciocínio que ele demonstrou foi válido e achamos que merecia ser mostrado por ter sido diferente dos demais.

O enunciado do segundo exercício do questionário (apêndice B) segue abaixo (figura 25):

Figura 25: Exercício 2 do questionário (OBRL – 2016 – NÍVEL III – FASE II)

2) Observe a sequência de figuras a seguir.



Se a partir da figura 7 a sequência se repete na ordem apresentada, ou seja, a figura 7 é igual à figura 1, a figura 8 é igual à figura 2, a figura 9 é igual à figura 3, e assim por diante, então, a figura 256 será igual à figura:

Fonte: Compilação da autora

O exercício 2 foi selecionado por ser um exercício de sequência cíclica. Com esse exercício esperamos observar qual a facilidade dos alunos com as quatro operações básicas, ou seja, qual a operação aritmética fundamental o estudante tem mais afinidade e melhores habilidades de cálculo.

Diferentemente do exercício 1, no enunciado do exercício 2 é explicitado o padrão que é trabalhado, que é uma sequência repetitiva, ou cíclica, pedindo então para que identifique e descreva tal padrão para achar os termos seguintes. Dito isso, as competências que são trabalhadas nesse exercício são a competência 5[5] e a competência 3:

> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, pg. 267)

Com isso, podemos identificar a aplicação da habilidade (EF02MA10)[6]. E por essa sequência em questão ser trabalhada com figuras, podemos identificar a habilidade (EF08MA10) “Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou

[5] Estabelecida na pg. 74
[6] Habilidade descrita na pg. 73

figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes” (BRASIL, 2017, pg. 313).

Sabemos que para solucionar um problema de ciclo, como já visto ao decorrer do trabalho, podemos dispor do uso das operações básicas e seu domínio, sabendo para que servem suas partes, como dividendo, divisor, quociente, resto, fatores, produto, etc. Assim sendo, podemos pedir que as resoluções contenham a habilidade (EF08MA06) “Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações” (BRASIL, 2017, pg. 313).

Podemos com a mesma afirmação contemplar as habilidades (EF07MA11) “Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias” (BRASIL, 2017, pg. 307); (EF07MA12) “Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais” (BRASIL, 2017, pg. 307); (EF07MA08) “Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (BRASIL, 2017, pg. 307); (EF06MA10) “Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2017, pg. 301); e (EF06MA06) “Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor” (BRASIL, 2017, pg. 301).

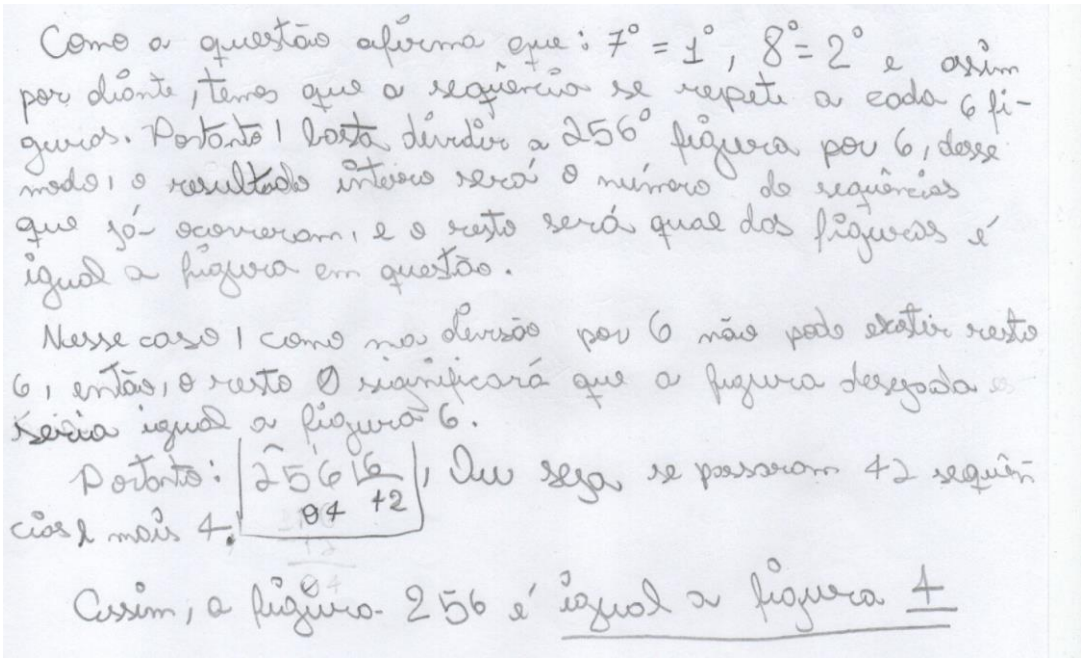
Por ser um problema de sequência repetitiva, sabemos, como salientado no enunciado, que as figuras iniciais representam figuras de posições mais elevadas na sequência, e por esse motivo, podemos aderir a seguinte habilidade:

> (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (BRASIL, 2017, pg. 295)

E como já vimos ao decorrer do trabalho, uma das formas de solucionar um problema cíclico é dividindo pelo número de repetições da sequência, nos fazendo reconhecer a habilidade (EF04MA12) “Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades” (BRASIL, 2017, pg. 295).

A maioria dos alunos seguiu o método padrão de resolução para problemas de ciclo, que é a resolução através da divisão da posição do termo pretendido pelo termo que encerra a sequência, como vemos claramente na resolução do “aluno F” (figura 26).

Figura 26: Resolução do exercício 2 - aluno F

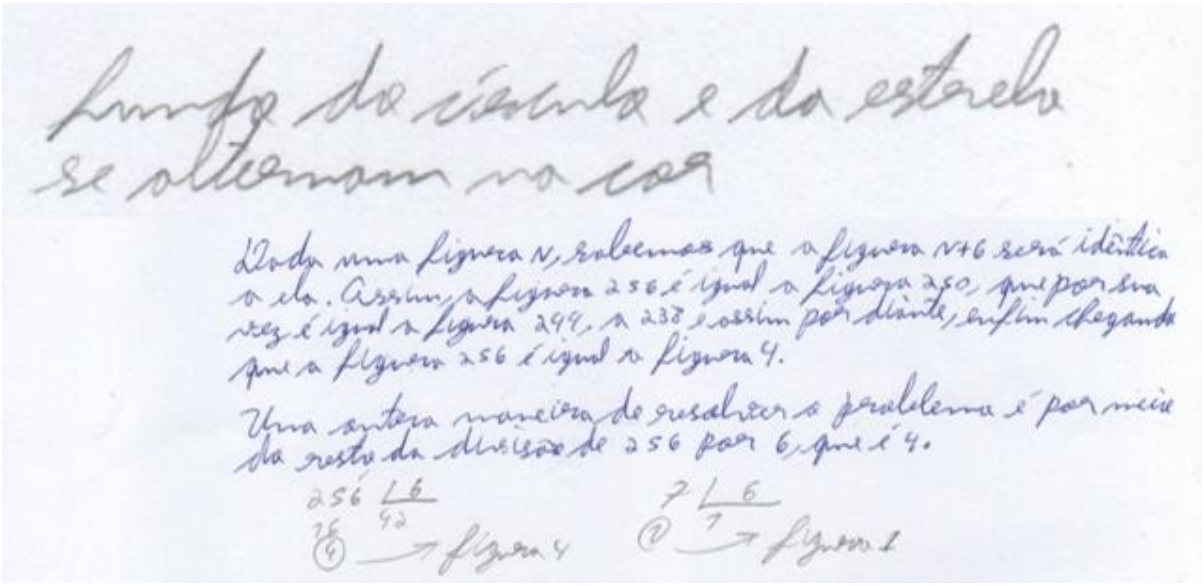


Fonte: Compilação da autora

Como já observado, o aluno F seguiu uma linha usual para resolver o problema, sendo que o aulista conseguiu manifestar a explicação do porque o resto da divisão seria a solução do problema. Isso nos mostra que o educando tem um conhecimento do que está escrevendo e para que servem seus cálculos, ao invés de pensar na matemática como uma matéria sem sentido.

Entre os alunos que usaram o método de divisão para a resolução, destacamos o “aluno D”, que conseguiu, além de resolver o exercício, destacou duas formas de resolução e escreveu uma observação sobre a sequência que não foi observada por nenhum outro aluno (figura 27).

Figura 27: Resolução do exercício 2 - aluno D



Fonte: Compilação da autora

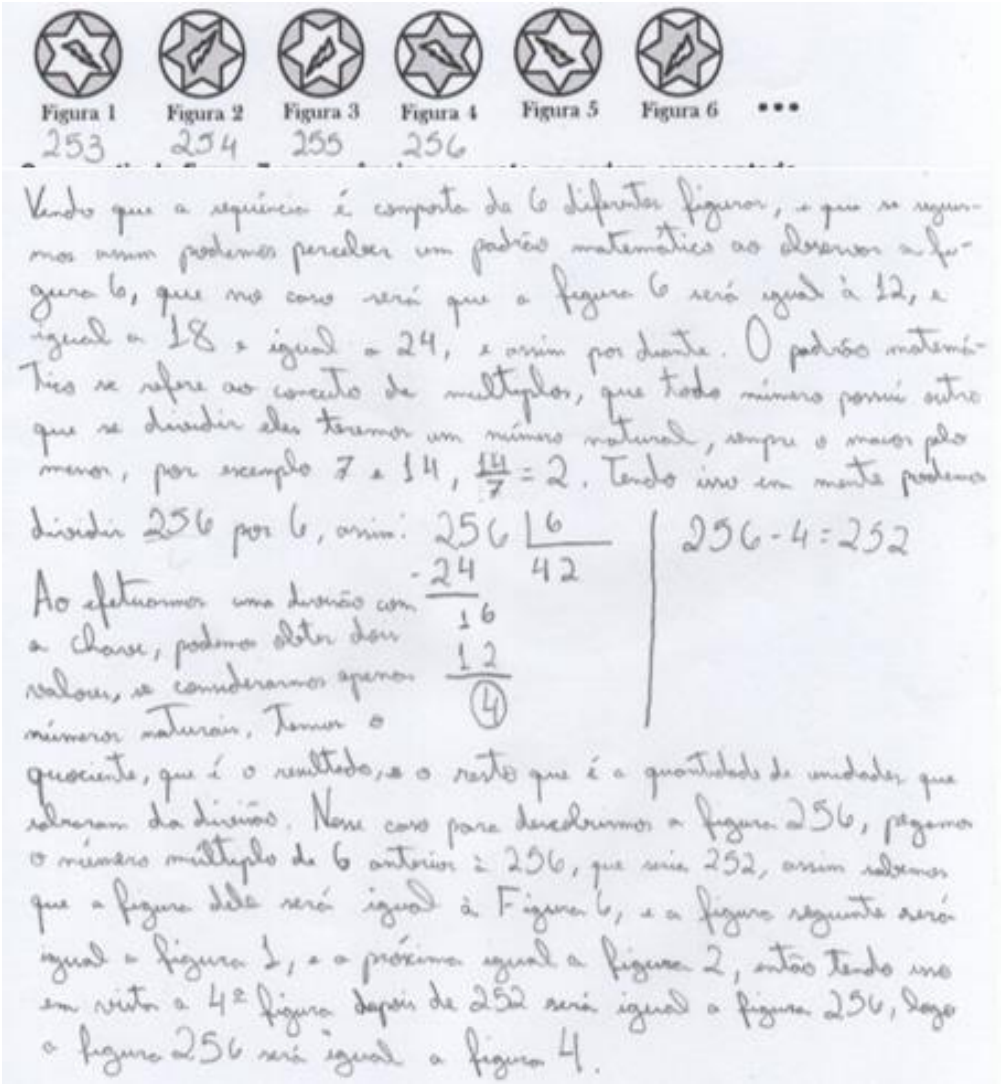
O “aluno D” demonstrou uma habilidade de percepção impressionante, pois ele observou um padrão na sequência que não seria uma notória preocupação dos acadêmicos que estariam realizando o exercício, que foi o fundo alternado da estrela. Isso, encaixa na visão de SANTOS (1997) *apud* FILHO e SILVA (2011), em que essa observação é relevante para que abra mais discussões do problema, onde o aluno conseguiu ampliar suas estratégias e elaborar outras questões para o exercício, mostrando assim que o problema de ciclo instiga o aluno a procurar por padrões e resolver exercícios de formas diferentes, procurando novas soluções para ter um diferencial na estratégia de resoluções para realizar provas e concursos.

Em sua resolução podemos destacar também as duas formas que o aluno conseguiu repercutir. Em seu primeiro raciocínio, o aluno foi subtraindo múltiplos de 6 aleatórios da figura pretendida até chagar na figura 4, sua representante. Isso é a estratégia apresentada por SANTOS (1997) apud FILHO e SILVA (2011) em que o aluno trabalha o problema de trás para frente, que mostra a face interessante da (re)descoberta matemática.

Sua outra estratégia de resolução foi a usual, usada pela maioria das aplicações do questionário. Podemos ver essa aplicação feita pelo “aluno E”, que

usou a mesma estratégia, porém com uma finalização interessante, mostrando outras habilidades (figura 28):

Figura 28: Resolução do exercício 2 - aluno E

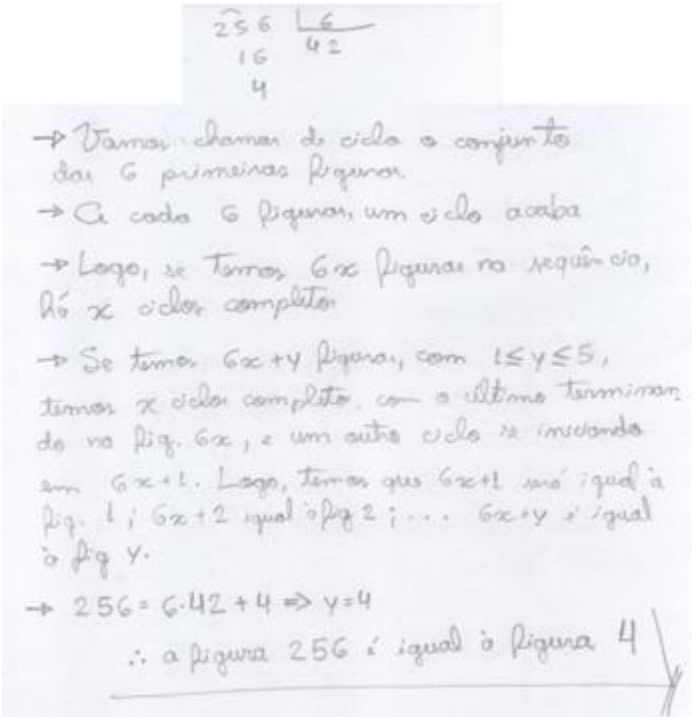


Fonte: Compilação da autora

Percebemos que houve a percepção de que a resolução do exercício se dava por múltiplos de 6. O que levou ao aluno realizar sua divisão do número 256 por 6. Porém, diferente do esperado, que seria a ligação do resto à posição representante, o referido estudante usou o resto para saber qual era o termo representativo do primeiro termo que chegava o mais próximo da posição requerida, e depois usou as imagens do exercício para fazer a contagem das posições.

Achamos realmente interessante esse modo de pensamento algébrico por conta dele ter utilizado vários conhecimentos sobre as operações básicas e conseguir transformar o método usual em seu próprio método, fugindo ao mais comum.

Figura 29: Resolução do exercício 2 - aluno G

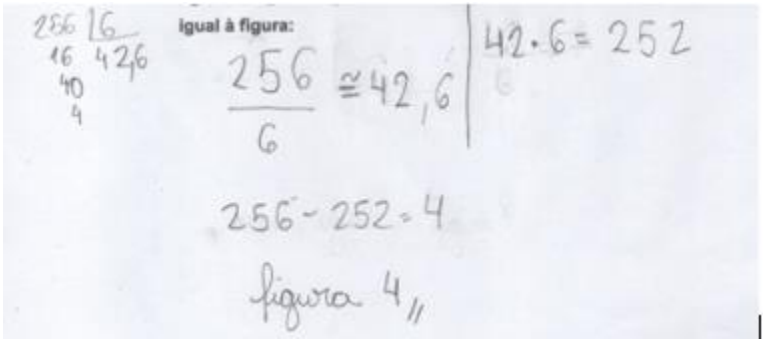


Fonte: Compilação da autora

Para o “aluno G” (figura 29), apesar de ele ter feito o cálculo da divisão em sua solução, parece que ele fez isso como uma forma de confirmação de conta, pois ele usa um método de resolução de questão que se utiliza do conhecimento de função de primeiro grau, trazendo a tona várias habilidades que não foram previstas inicialmente nesse exercício, além de ter seguido uma das etapas de modelo de resolução analisado por Polya (1978), que se denomina retrospecto, onde o aluno confirma a própria resolução usando outro método para isso.

Outra concepção impressionante denotada pelo “aluno G” é que este reconheceu o problema de ciclo e o nomeou assim, o que poucos autores fazem, como pudermos ver ao longo desse trabalho.

Figura 30: Resolução do exercício 2 - aluno A

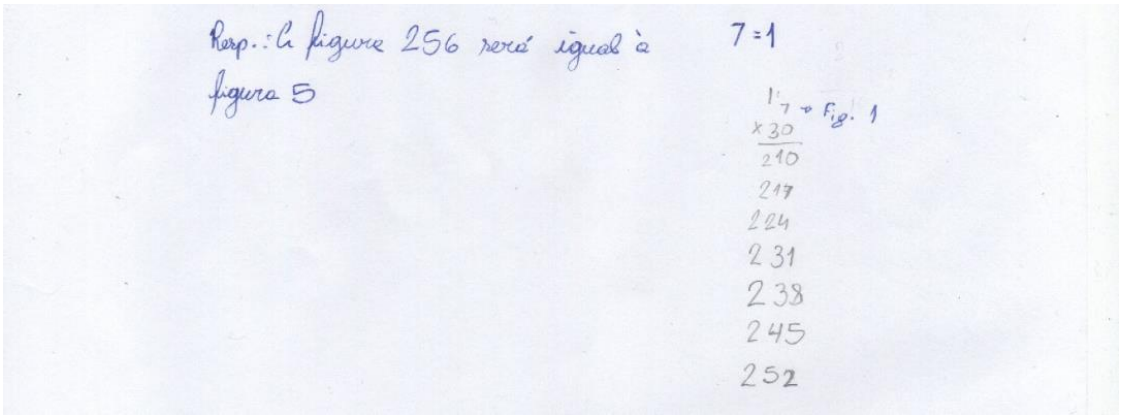


Fonte: Compilação da autora

O “aluno A”, como podemos verificar em sua resolução demonstra que, apesar de saber utilizar todas as operações básicas, não relaciona o resto da divisão como a figura representativa. Isso demonstra sua dificuldade em saber do que se trata o resto de uma divisão, apesar de ele ter mostrado em seus cálculos o que o resto da divisão representa.

Isso é muito recorrente com os alunos, como já explicado ao longo desse trabalho, pois muitos alunos “aprendem” a matemática sem atribuí-las um significado e saber o porquê serve tal coisa. Pudemos verificar esse acontecimento na resolução do aluno “A”, como previsto pelo nosso trabalho, ou seja, só por essa resolução, é possível perceber a dificuldade de cada estudante.

Figura 31: Resolução do exercício 2 - aluno B



Fonte: compilação da autora

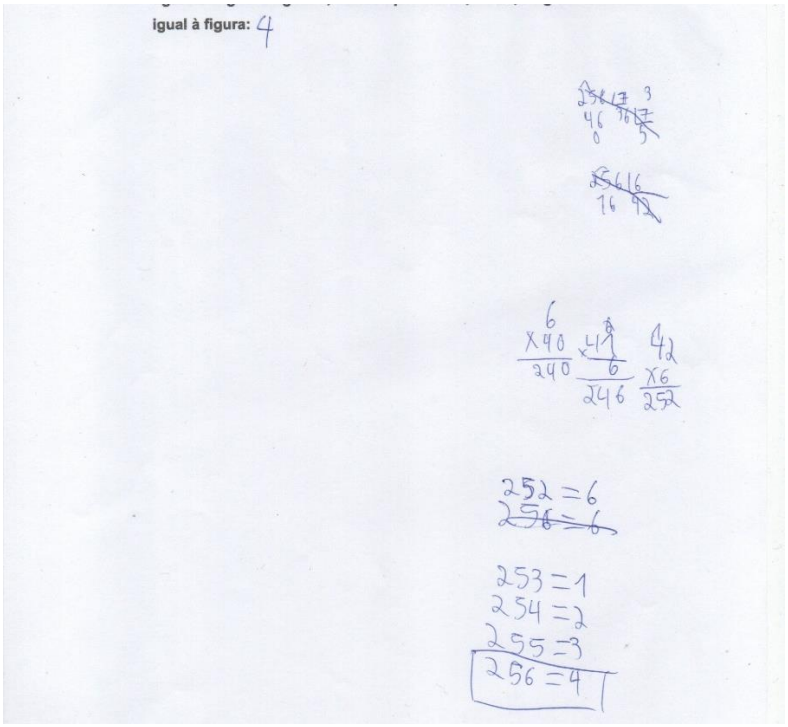
Apesar do “aluno B” ter se equivocado na resposta, como podemos ver em sua resolução (figura 31), percebemos que ele realizou um método diferente e correto,

se não pelo equívoco em realizar as contas pensando em utilizar o primeiro termo como provedor da sequência. Seu erro desenvolve-se em que ao multiplicar um representante do primeiro termo, escolhida a posição 7, ele sempre determinaria a primeira posição, o que não estaria equivocado se o aluno fizesse com a posição de fechamento do ciclo ao invés da inicial.

Apesar disso, podemos verificar sua facilidade em multiplicação e soma pela vertente que escolheu para realizar a atividade. Esse tipo de erro é muito interessante para ser tratado em sala de aula, pois traz discussões interessantes, deixando-os analisar e desenvolver um pensamento algébrico para consertar um erro.

O “aluno C” utilizou estratégias bem parecidas, mostrado a seguir (figura 32):

Figura 32: Resolução do exercício 2 - aluno C



Fonte: Compilação da autora

Para o “aluno C”, podemos reparar que seu pensamento inicial foi similar ao do “aluno B” por tentar dividir por 7, acreditando que, como o número 7 retoma o ciclo, ele que deve ser o número que conduzirá o exercício. Podemos deduzir também que quando o referido percebeu que havia errado a lógica e a arrumou, teve uma certa dificuldade para entender como a divisão resolveria a questão, então partiu para a

multiplicação, que à vista, é mais fácil para que o aluno visualize e entenda o que o exercício pede.

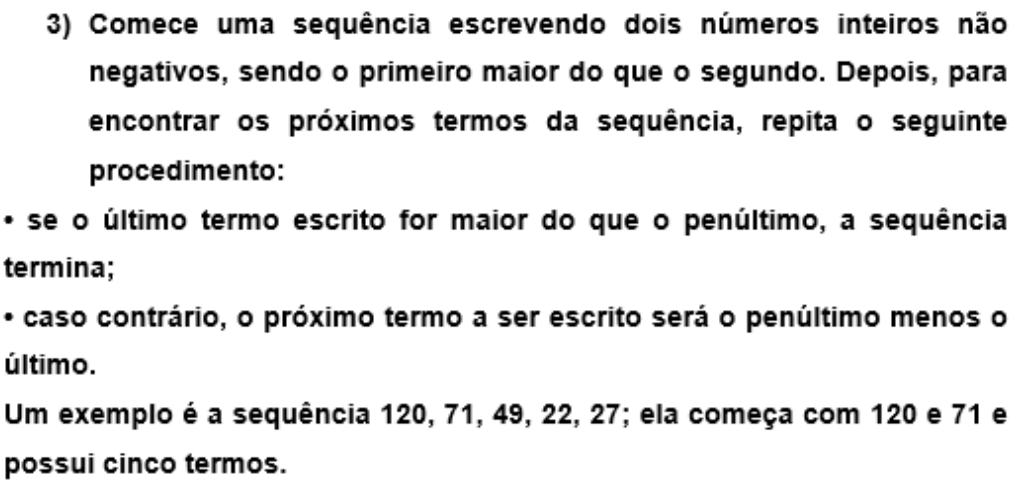
Ao compararmos com o “aluno A” podemos verificar que o referido usufruiu da subtração para concluir seu raciocínio. Logicamente, o “aluno C” deveria usar a somatória para concluir, porém teve que contar a partir do que tinha achado na multiplicação.

Verificamos que as estratégias de resolução utilizadas no problema 2, apesar de apresentarem poucas variações quanto ao plano de resolução utilizado, permitiram identificar nelas as etapas de compreensão do problema, elaboração e execução do plano de resolução.

6.1.3. Análise do exercício 3, letra a

O exercício 3 foi estipulado em quatro partes: letra a, letra b, letra c, letra d. O exercício 3 pede o seguinte:

Figura 33: Exercício 3 – Questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II)



3) Comece uma sequência escrevendo dois números inteiros não negativos, sendo o primeiro maior do que o segundo. Depois, para encontrar os próximos termos da sequência, repita o seguinte procedimento:

• se o último termo escrito for maior do que o penúltimo, a sequência termina;

• caso contrário, o próximo termo a ser escrito será o penúltimo menos o último.

Um exemplo é a sequência 120, 71, 49, 22, 27; ela começa com 120 e 71 e possui cinco termos.

Fonte: Compilação da autora

A letra a do exercício foi definida com o intuito dos participantes entenderem e terem uma proximidade maior do que era proposto no exercício, pois apesar de ter

um exemplo de como a questão é realizada no próprio enunciado (figura 34), ainda se poderiam gerar dúvidas de como a sequência funcionava.

Figura 34: Exercício 3 - letra a – Questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II)

a) Escreva a sequência que começa com 30 e 16.

Fonte: Compilação da autora

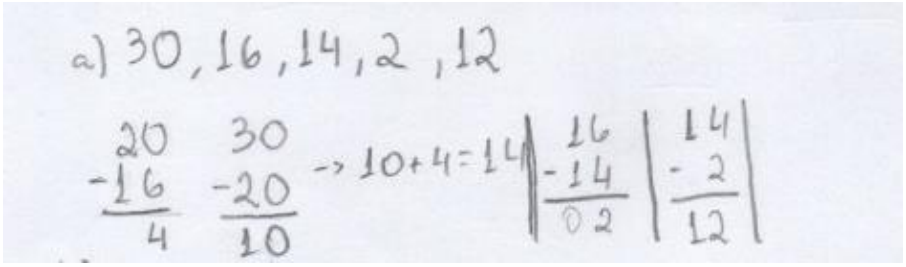
As habilidades e competências da BNCC que a letra a do exercício exige são poucas, já que trabalha mais com a questão do reconhecimento da sequência e da aplicação de uma nova sequência seguindo o mesmo padrão. São elas: (EF01MA10)[7]; (EF02MA09) “Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida” (BRASIL, 2017, pg. 283); (EF02MA11)[8]; (EF08MA10)[9] e a habilidade seguinte:

> (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (BRASIL, 2017, pg. 287)

Como esse exercício em específico era para que os alunos analisassem a percepção do exercício, foi unanimidade a resolução por subtração, porém destacamos dois alunos, cujo um deles realizou as contas por uma forma diferente do que geralmente ensinada nas escolas, e o outro utilizou a passagem retrospecto para analisar se a questão havia realmente terminado, conferindo se os números eram maiores ou menores. Seguem as resoluções dos dois alunos destacados: aluno E (figura 35) e aluno F (figura 36):

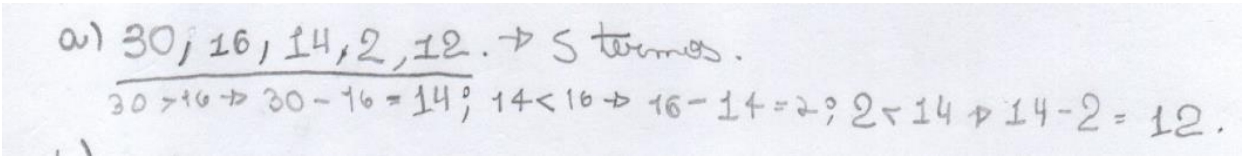
[7] Habilidade descrita na pg. 73
[8] Habilidade descrita na pg. 73
[9] Habilidade descrita na pg. 81

Figura 35: Resolução do exercício 3, letra a - aluno E



Fonte: Compilação da autora

Figura 36: Resolução do exercício 3, letra a - aluno F



Fonte: Compilação da autora

6.1.4. Análise do exercício 3, letra b

A letra b do exercício 3, a partir da afinidade e reconhecimento da sequência que foi feito na letra a, da os termos finais da sequência, para que haja um pensamento inverso de operações que foi feita anteriormente e gere ou facilidade, ou estranheza no aluno, nos permitindo analisar sua preferência entre adição e subtração. Segue o enunciado do exercício (figura 37):

Figura 37: Exercício 3 - letra b – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II)

b) Escreva a sequência que possui exatamente cinco termos, sendo o quarto termo igual a 1 e o quinto termo igual a 2.

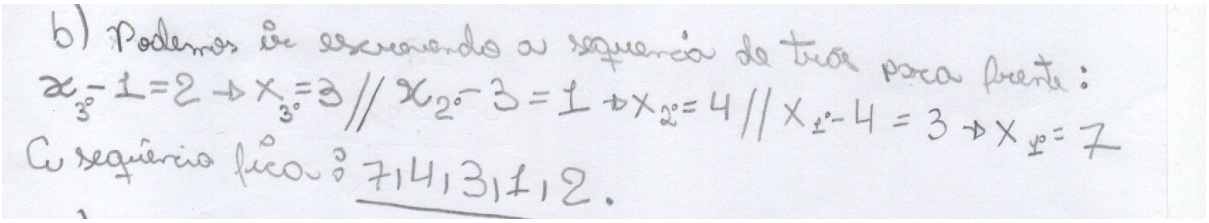
Fonte: Compilação da autora

As habilidades da BNCC trabalhadas na letra b do exercício 3 seguem a mesma linha de habilidades trabalhadas no exercício a, sendo elas: (EF04MA13)[10]; (EF01MA10)[11]; (EF02MA09)[12],(EF02MA11)[13] e a habilidade a seguir:

> (EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (BRASIL, 2017, pg. 279)

Podemos perceber essas habilidades em algumas das resoluções. Em geral, o método mais usado, quase unânime para solucionar esse exercício foi o método escolhido pelo aluno B, que foi um dos métodos previstos por SANTOS e por POLYA, conhecido como trabalhar de trás para frente.

Figura 38:Resolução do exercício 3, letra b - aluno F

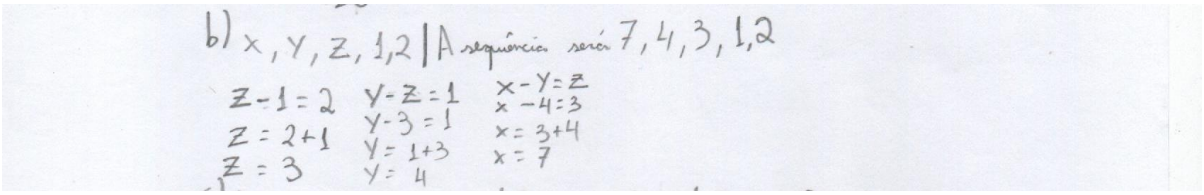


Fonte: Compilação da autora

O uso dessa resolução também é considerado por POLYA um treino para que o aluno consiga fazer uma autoavaliação.

Dois dos alunos obtiveram uma percepção diferente do exercício, querendo resolvê-lo por método de sistematização ou equação de primeiro grau (figuras 39 e 40):

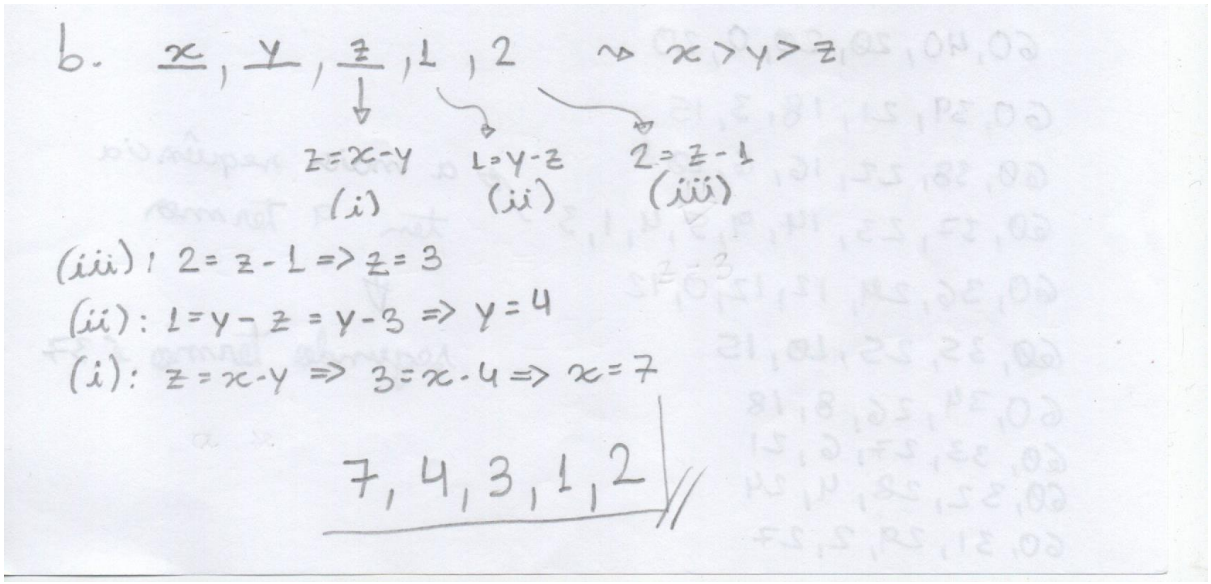
Figura 39: Resolução do exercício 3, letra b - aluno E



[10] Habilidade descrita na página 82
[11] Habilidade descrita na pg. 73
[12] Habilidade descrita na pg. 90
[13] Habilidade descrita na pg. 73

Fonte: Compilação da autora

Figura 40: Resolução do exercício 3, letra b - aluno G



Fonte: Compilação da autora

6.1.5. Análise do exercício 3, letra c

Na letra c do exercício 3, o problema foi dificultado, problematizando-o mais e tentando fazer com que o aluno solucione o problema com um pensamento mais requintado e diferente. Segue o enunciado:

Figura 41: Exercício 3 - letra c – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II)

c) Uma sequência que começa com 25 tem exatamente três termos. Quais são os valores possíveis para o segundo termo?

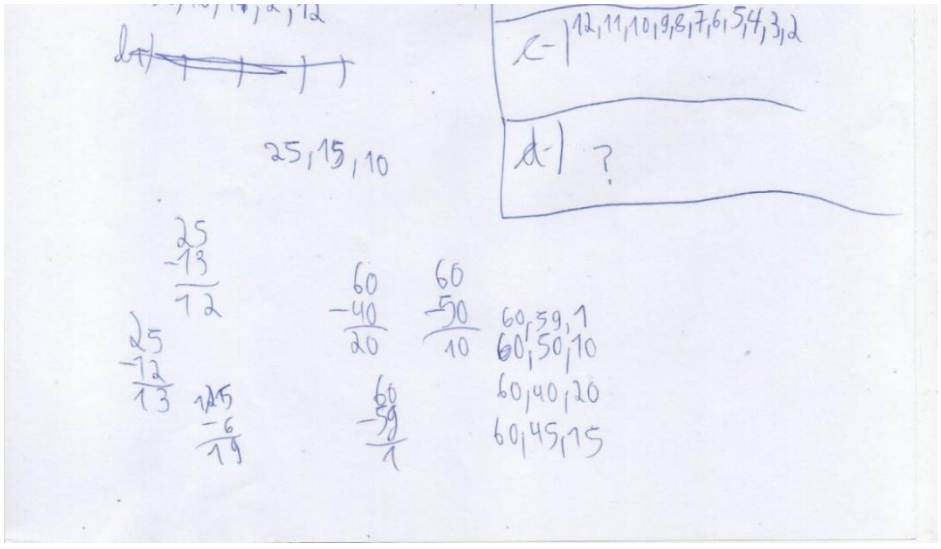
Fonte: Compilação da autora

Nesse exercício o aluno teria que pensar no funcionamento da sequência para verificar quais dos números seriam atingidos para solucionar a problemática da questão.

Por isso contemplamos as seguintes habilidades nesse exercício: (EF08MA08) “Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso” (BRASIL, 2017, pg. 313); (EF07MA18) “Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade” (BRASIL, 2017, pg. 307); (EM13MAT302) “Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, pg. 543); (EF02MA02) “Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades)” (BRASIL, 2017, pg. 283).

O exercício 3, letra c, destacamos a solução do aluno C (figura 42):

Figura 42: Resolução do exercício 3, letra c - aluno C



Fonte: Compilação da autora

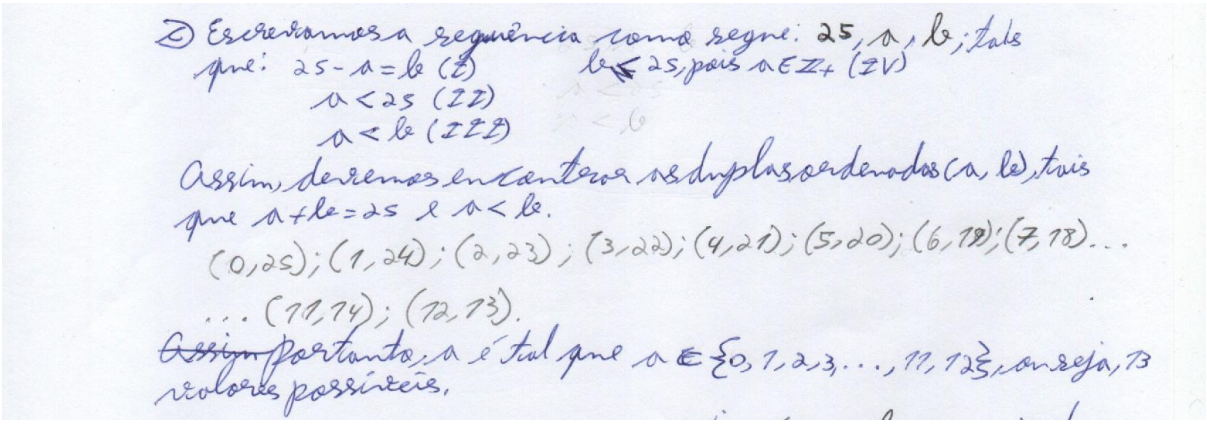
Na resposta do estudante podemos denotar que a ideia de que havia um número máximo para que a questão do enunciado se concretizasse era necessária e evidente para ele, pois o aluno escolheu um número aleatório (número 15) onde o teste da sequência não correspondeu aos pedidos de quantidade exata extraídos do enunciado seguindo o padrão e normas da sequência em questão. Em seguida, foi

testando outros números, como o número 13, que também se mostrou não assertivo. Em seguida o teste de números mais baixos, como o 12 e o 6.

Podemos concluir por essa resolução que existe a possibilidade de solucionar por contagem e testes de possibilidades e ainda mais, provamos que os métodos já mostrados em questões anteriores das olimpíadas desse trabalho são realizados por alguns dos alunos.

Uma resolução que achamos muito importante ressaltar foi a do “aluno D” que segue abaixo (figura 43):

Figura 43: Resolução do exercício 3, letra c - aluno D

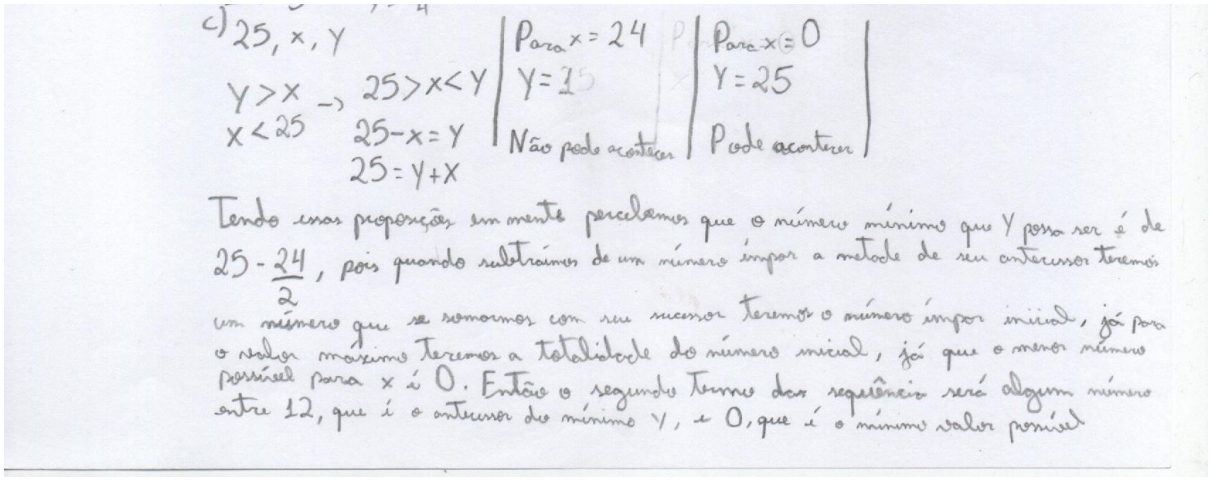


Fonte: Compilação da autora

Destacamos essa resolução porque o aluno em questão conseguiu desenvolver a sequência utilizando vários métodos e habilidades do ensino médio, onde encontramos sua resolução por equação de primeiro grau, sistemas e par ordenado. Soluções inovadoras que utilizam um certo raciocínio diversificado lógico matemático.

O próximo método mostrado para a resolução desse exercício, dois alunos mostraram raciocínio lógico matemático semelhantes, quase idênticos:

Figura 44: Resolução do exercício 3, letra c - aluno E

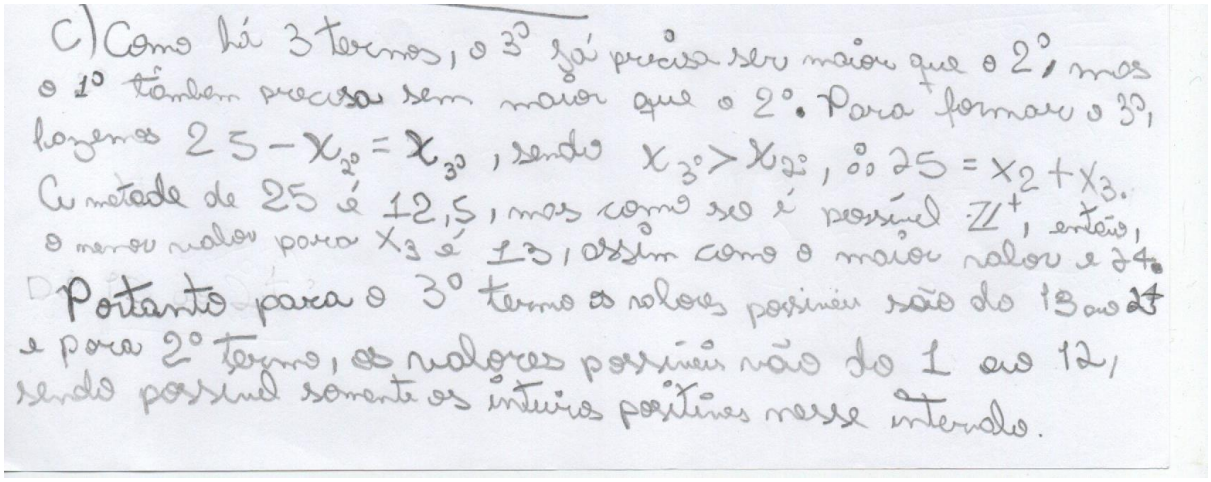


Fonte: Compilação da autora

Uma demonstração foi escrita a partir de inequações de 1º grau, porém seu diferencial pensamento algébrico foi a tentativa de identificar uma equação que provava o próximo termo seguindo a regra proposta.

Guarda semelhanças com a resolução anterior, o “aluno F” apresentou a conseguinte:

Figura 45: Resolução do exercício 3, letra c - aluno F



Fonte: Compilação da autora

Na figura 45, percebemos a semelhança com a resolução da figura 44, apesar de estar toda escrita por extenso. Contudo, percebemos que sua resolução pode abrir uma discussão interessante em sala de aula por conta de seu entendimento de um

número inteiro não negativo como inteiro positivo e sua desconsideração do número 0 para tal, tanto que a principal diferença entre a resolução do “aluno E” para o “aluno F” é a consideração do 0 como parte da solução.

6.1.6. Análise do exercício 3, letra d

Segue o enunciado (figura 46):

Figura 46: Exercício 3 - letra d – questionário (OBMEP 2015 – FASE II – NÍVEL II)

d) Uma sequência que começa com 60 tem o maior número possível de termos. Qual é o valor do segundo termo dessa sequência?

Fonte: Compilação da autora

Após procurarmos nas habilidades da BNCC, achamos as seguintes compatíveis com o exercício: (EF01MA10)[14], (EF02MA09)[15], (EF02MA10)[16], (EF02MA11)[17], também temos a habilidade (EF03MA10)[18].

Além de (EF07MA15) “Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas” (BRASIL, 2017, pg. 307) e (EF03MA10)[19].

Identificamos tais habilidades por uma abstração geral do exercício 3. Em especificidade do exercício, a BNCC tem seu parecer explicando:

> É necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem,

[14] Habilidade descrita na pg. 73
[15] Habilidade descrita na pg. 90
[16] Habilidade descrita na pg. 73
[17] Habilidade descrita na pg. 73
[18] Habilidade descrita na pg. 90
[19] Habilidade descrita na pg. 90

> o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, pg. 270)

O exercício 3, letra d, somente um aluno (aluno G) acertou, apesar disso, vale a pena analisarmos os raciocínios dos alunos que erraram tanto para apresentarmos os raciocínios diferentes quanto para que possamos verificar o pensamento algébrico para gerar discussões em cima delas e utilizar do artifício que o problema de sequência nos traz quando se trata de obter informações para uso de explicações em sala de aula.

Porém, como somente houve acerto de um único aluno, colocamos a seguir uma solução particular para que possa ser utilizada para estudos futuros:

Resolução:

Podemos criar a hipótese de que o maior número possível de termos tenha infinitos termos. Assim podemos nomear os termos da sequência da seguinte forma:

$$60, x, 60 - x, x - (60 - x), (60 - x) - \big(x - (60 - x)\big), \dots$$

Que podemos resolver, ficando com:

$$60, x, 60 - x, 2x - 60, 120 - 3x, 5x - 180, 300 - 8x, 13x - 480, \dots$$

Assim, podemos analisar uma série de sistemas compondo inequações:

$$\begin{cases} 60 > x \\ x > 60 - x \\ 60 - x > 2x - 60 \\ 2x - 60 > 120 - 3x \\ 120 - 3x > 5x - 180 \\ 5x - 180 > 300 - 8x \\ 300 - 8x > 13x - 480 \\ \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 30 \\ x < 40 \\ x > 36 \\ x < \dfrac{75}{2} \rightarrow x < 37{,}5 \\ x > \dfrac{480}{13} \rightarrow x > 36{,}9 \\ x < 60 \end{cases}$$

Como conclusão, temos:

$$36{,}9 < x < 37{,}5$$

E como a sequência é composta por números inteiros, temos que:

$$x = 37$$

Então a sequência é:

$$60, 37, 23, 14, 9, 5, 4, 1, 3$$

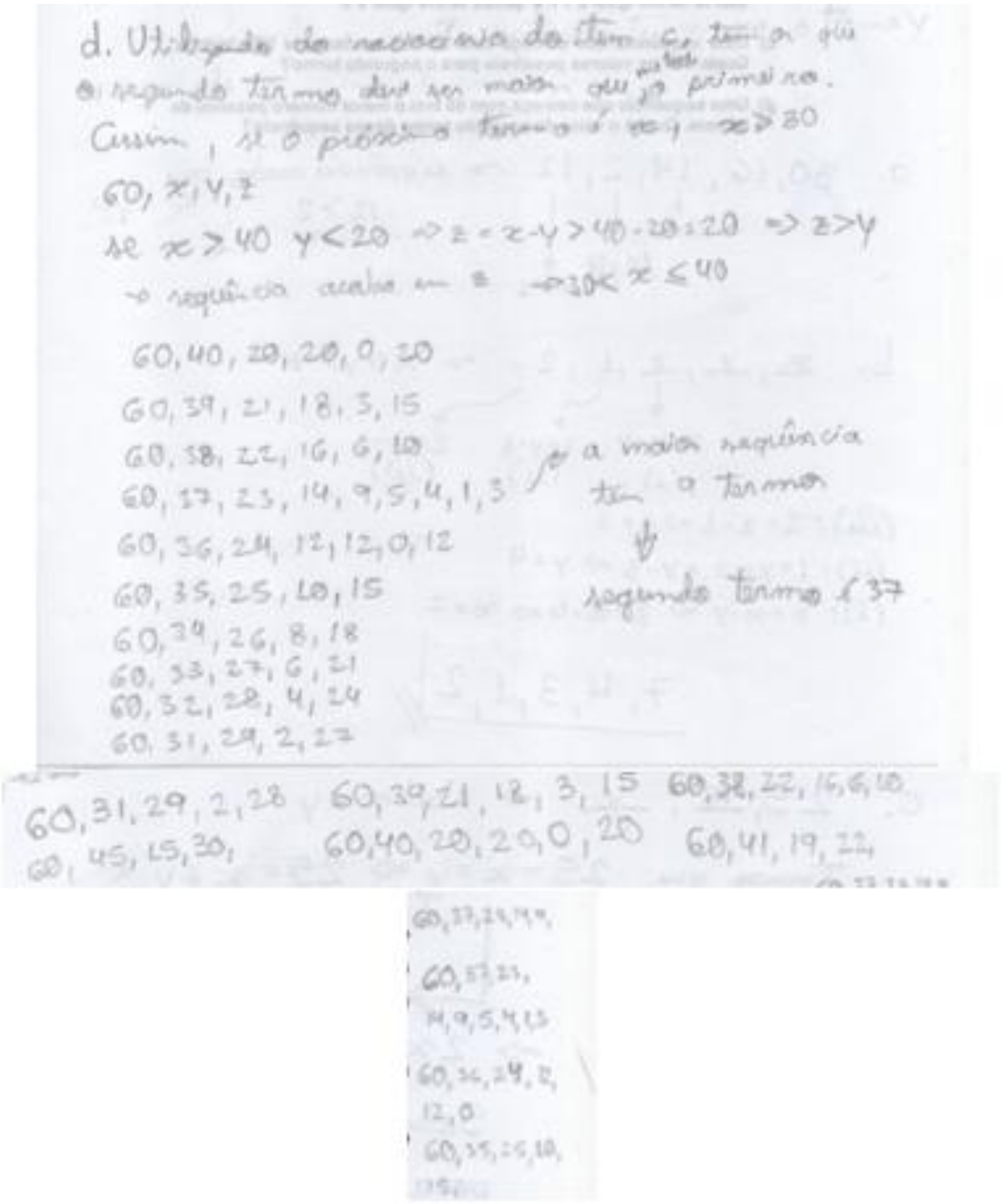
Possuindo 9 termos.

Comentário:

Vale ressaltar que nenhum dos alunos que realizaram esse exercício chegaram a um número de consenso, nem ao mesmo dos alunos que erraram, ou seja, nenhum chegou a um resultado em comum.

A primeira análise que consideramos em realizar foi do “aluno G”, pois foi o único aluno que conseguiu realizar a questão corretamente.

Figura 47: Resolução do exercício 3, letra d - aluno G



Fonte: Compilação da autora

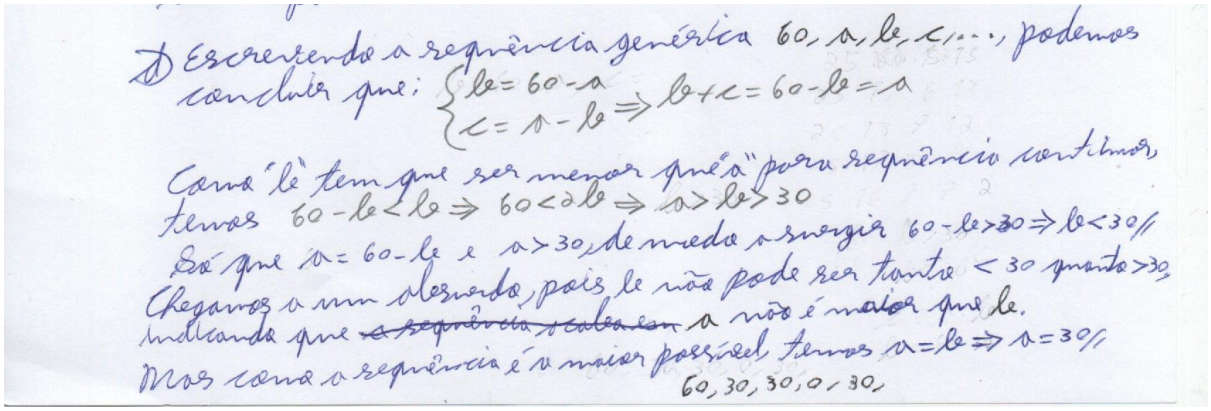
Usando o critério da divisibilidade, utilizado pelo mesmo aluno e outros dois no exercício 3, letra c, o “aluno G” conseguiu visualizar que a mesma estratégia era possível de ser utilizada para ambos os problemas, porém, diferentemente da outra questão, não resolveria o exercício por completo, mas sim daria um mínimo para que o problema ficasse mais enxuto, diminuindo o número de possibilidades de tentativas.

Após essa percepção, houve uma tentativa e visualização de fazer esse mesmo critério com o número 40, nos dando que se o segundo termo da sequência

for maior do que 40, termina com poucos termos, o que o aluno escreveu “sequência acaba em 5”.

Após determinar um mínimo e um máximo, houve a utilização do método de tentativa e erro, ou seja, foi feito uma análise de alternativa a alternativa até encontrar aquela que corresponde ao problema dado.

Figura 48: Resolução do exercício 3, letra d - aluno D



Fonte: Compilação da autora

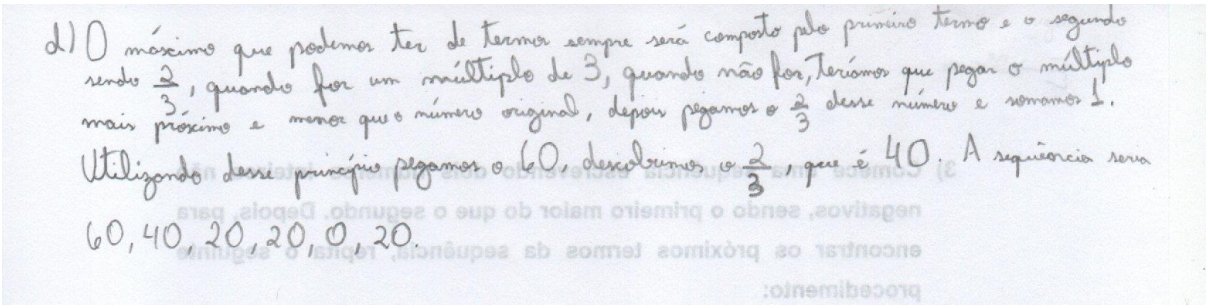
Na resolução do aluno D percebemos que seu raciocínio lógico matemático é correto apesar de seu equívoco. Percebemos que o aluno escreveu por extenso o correto, porém quando colocou no campo algébrico, se confundiu no sinal da conta. Escreve: “Como ‘b’ tem que ser menor que ‘a’ para sequência continuar, temos $60 - b < b \Rightarrow 60 < 2b \Rightarrow a > b > 30$”. Podemos verificar que ele escreve “b menor que a” e algebricamente escreve “a menor que b”.

Percebemos aqui que trocar a ordem do que se foi trabalhado levou o aluno ao erro, apesar de estar no caminho de resolução correto, o que nos mostra a importância de trabalhar a habilidade de inversão de operações e trabalhar problemas que invertam e alterem os números, como os problemas de sequências apresentados ao longo do trabalho, como Kaprekar.

Compreendemos a indução ao erro do aluno, e acreditamos que essa resolução da questão traz à tona mais uma questão interessante a ser trabalhada em sala de aula, que é a questão do uso e da importância dos sinais, trabalhando quando usamos os sinais de maior, menor, maior ou igual, menor ou igual, etc.

Destacamos mais duas resoluções equivocadas, aluno E (figura 49) e aluno F (figura 50), da letra d do exercício 3:

Figura 49: Resolução do exercício 3, letra d - aluno E



Fonte: Compilação da autora

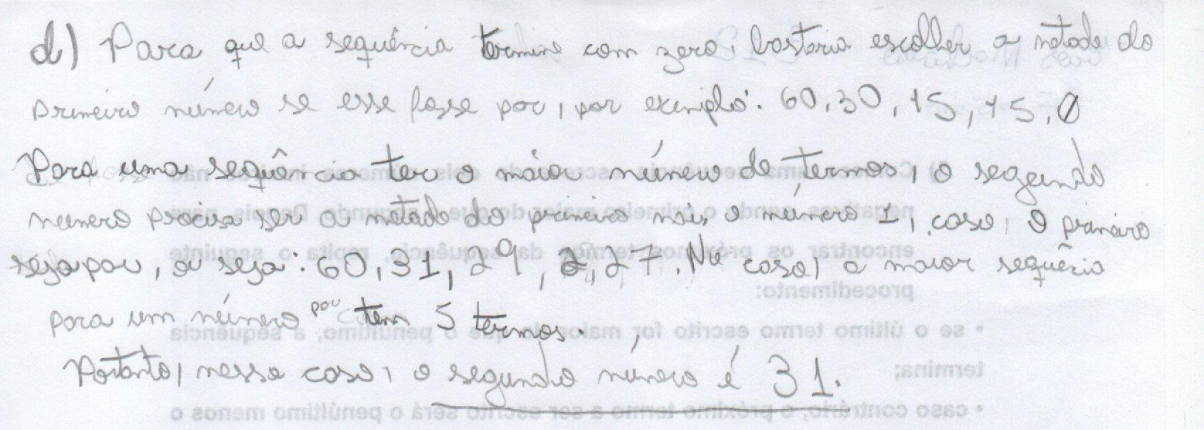
Na solução do aluno E, temos uma tentativa de descobrir um padrão para o máximo de termos que a sequência pode ser composta ao iniciar com um número x. Notamos ainda, comparando com a resolução do aluno que acertou a questão, que o aluno E tentou descrever o padrão para o número máximo do segundo termo para que ele tenha o maior número possível, porém se confundiu com o que estava procurando, e isso o levou ao erro.

Ter essa metodologia em mãos discentes abre-se o caminho para o trabalho com demonstrações e provas de afirmação falsa ou verdadeira, além de poder discutir em aberto outros padrões que notaram e tentar mostrar se eles são verdadeiros ou falsos, trabalhando contraexemplos.

Esse é um dos motivos de termos ressaltados também a solução do aluno F, pois apesar de também ser uma solução incorreta, denota-se um padrão interessante que podemos incitar os alunos a saber se esse pensamento está correto e deixar que eles tomem senso crítico tentando captar e discutir o motivo disso acontecer.

Foi colocado que para que a sequência termine em 0, bastaria escolher como segundo termo a metade do primeiro termo (figura 50), o que, como foi dito, leva-nos a discussões e temas interessantes e relevantes de serem trabalhados e analisados em sala de aula.

Figura 50: Resolução do exercício 3, letra d - aluno F



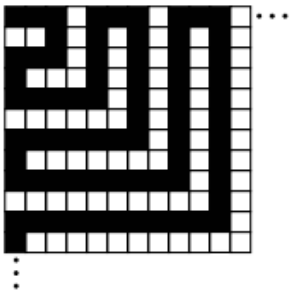
Fonte: Compilação da autora

6.1.7. Análise do exercício 4, letra a

O enunciado do exercício 4 se divide em duas partes, letra a e b. Sendo assim, segue o enunciado do exercício 4:

Figura 51: Exercício 4 - Questionário (OBM – 2007 – FASE 3 – NÍVEL 1)

4) Parte das casas de um quadriculado com o mesmo número de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) é pintada de preto, obedecendo ao padrão apresentado pelo desenho ao lado.



Fonte: Compilação da autora

O enunciado do exercício 4, letra a, segue abaixo:

Figura 52: Exercício 4 - letra a – questionário (OBM – 2007 – FASE 3 – NÍVEL 1)

a) Quantas casas serão pintadas num quadriculado com 14 linhas e 14 colunas, de acordo com esse padrão?

Fonte: Compilação da autora

O exercício 4 contempla duas partes, letras a e b, onde os dois exercícios pedem uma visualização do padrão apresentado em maiores termos da sequência, por isso, vamos relatar as competências e habilidades trabalhadas em todo exercício 4, em ambas as letras.

Como o exercício em questão se trata de uma sequência que possui um padrão podemos observar as habilidades: (EF01MA10)[20]; (EF02MA10)[21]; (EF02MA11)[22]; (EM13MAT310) “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2017, pg. 546)

No exercício, pede-se que se conte quantas peças desse padrão estarão pintadas com outras áreas de quadrado, o que dá a liberdade para o executor da atividade trabalhar com medidas de área e probabilidade, podendo executar as seguintes habilidades:

(EF03MA21) “Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos” (BRASIL, 2017, pg. 289);

(EF07MA32) “Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas” (BRASIL, 2017, pg. 309).

> (EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área. (BRASIL, 2017, pg. 293)

[20] Habilidade descrita na pg. 73
[21] Habilidade descrita na pg. 73
[22] Habilidade descrita na pg. 73

(EF08MA19) “Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos” (BRASIL, 2017, pg. 315)

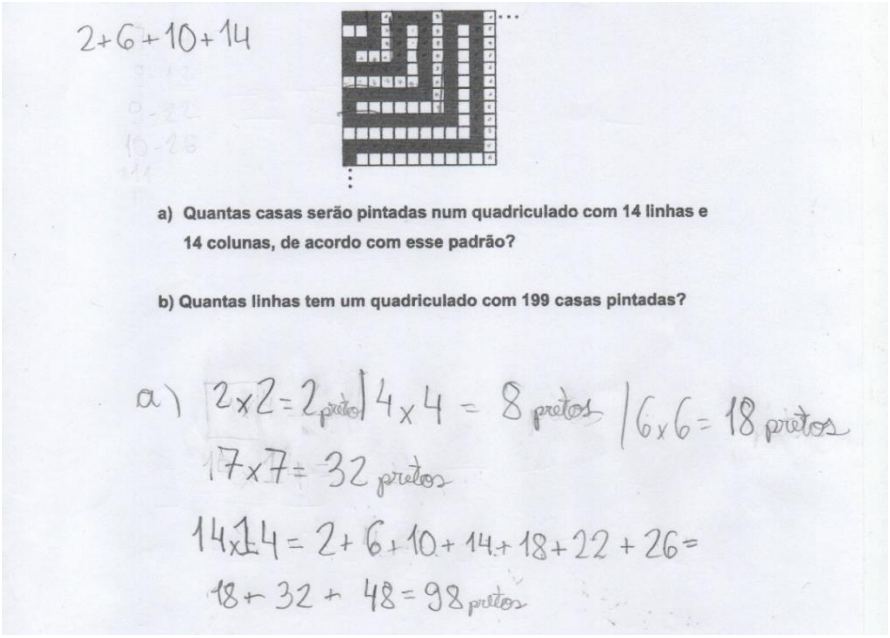
> (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (BRASIL, 2017, pg. 295)

Além da seguinte competência:

> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017, pg. 267)

A primeira análise desse exercício que fizemos foi da resolução do “aluno A” (figura 53) cuja a resolução primeiramente foi utilizado o método de contagem através da figura padronizada.

Figura 53: Resolução do exercício 4, letra a - aluno A



Fonte: Compilação da autora

Podemos analisar a tentativa de descobrimento de um padrão numérico que fugisse ao visual do enunciado para solucionar a questão. O aluno analisou

quadrados menores que poderiam ser visualizados no quadrado padronizado apresentado no enunciado. Podemos até mesmo perceber o método de contagem manual pelos pontos de lápis feito nas casas brancas.

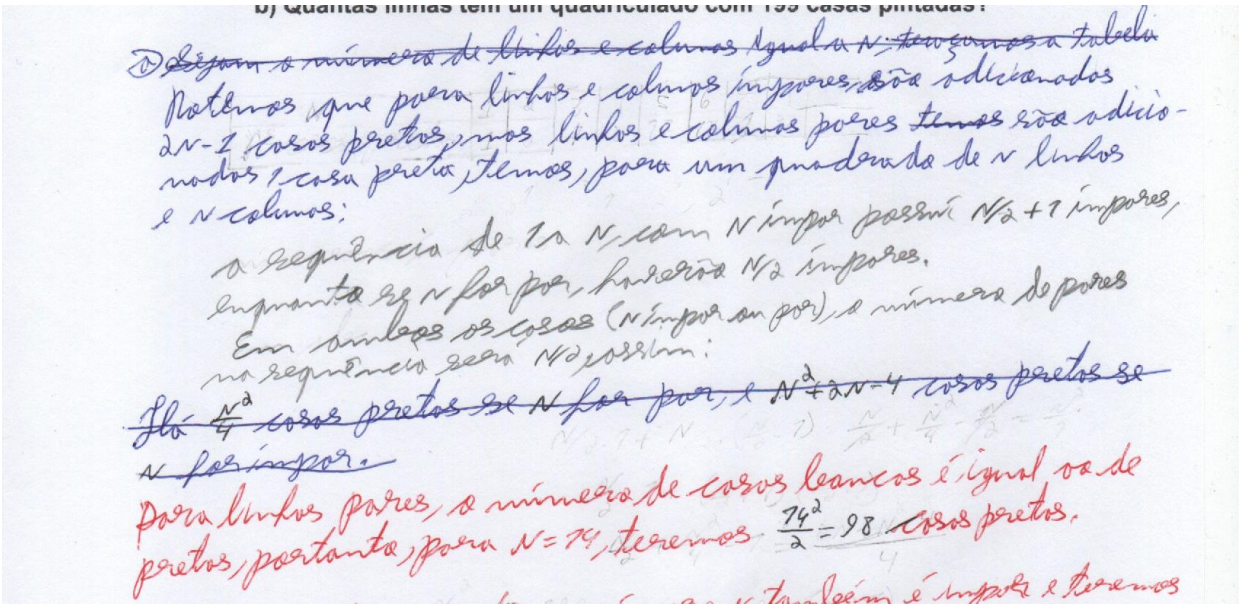
Podemos verificar ainda mais que, o padrão encontrado foi feito através da utilização de um outro tipo de sequência, já introduzida nesse trabalho, que é estudada no ensino médio: a progressão aritmética.

O referido estudante percebeu que a cada quadrado perfeito que tinha medidas pares as casas pretas aumentavam seu preenchimento em 4 quadradinhos. Então chegou a uma dedução de soma com um crescimento de uma progressão aritmética para responder e calcular a questão corretamente.

Essa lógica matemática desse aluno nos mostra que podemos utilizar de vários artifícios da mesma vertente para solucionar um problema, verificando a conexão que se existe em vários tipos de sequência, mas que para os alunos parecem casos isolados.

Por razões contrárias ao aluno A, que tentou padronizar os números por percepção mais visual, destacamos o “aluno D” que fez uma resolução mais algébrica para tentar descobrir o padrão de casas pintadas (figura 54):

Figura 54: Resolução do exercício 4, letra a - aluno D

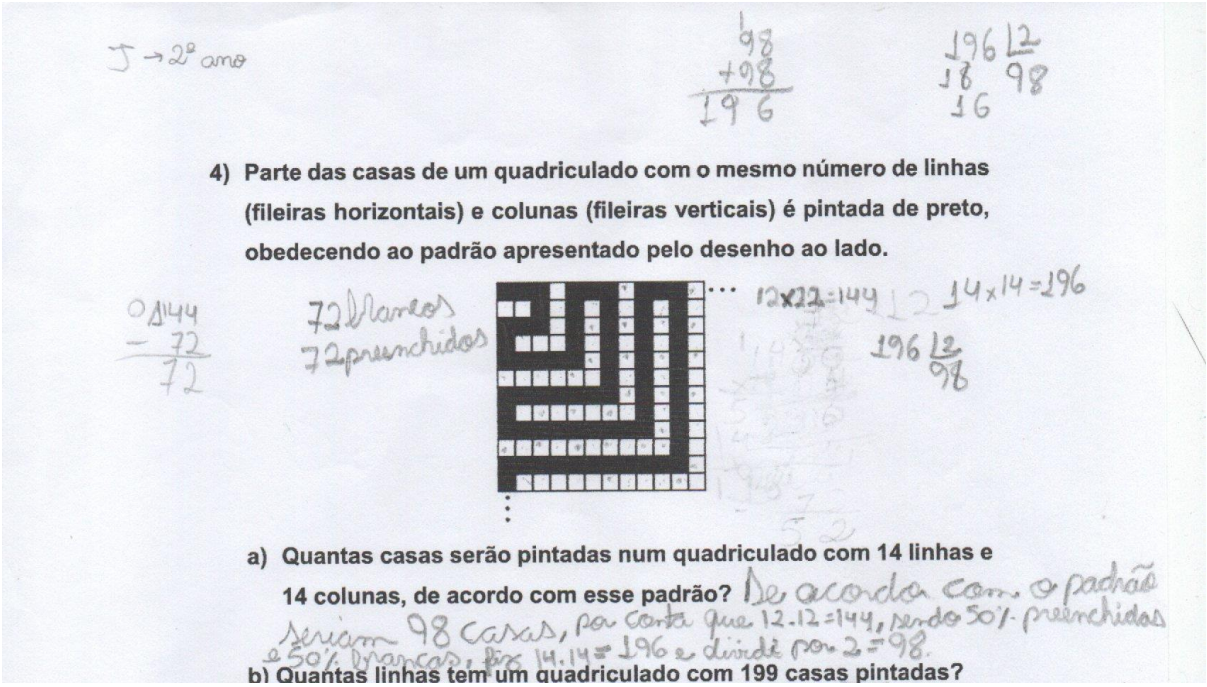


Fonte: Compilação da autora

Houve uma tentativa por parte do “aluno D” de expressar algebricamente a quantidade de casas pintadas e não pintadas, e nesse processo, o estudante percebeu que, em casas de quadrado com lado de medidas ímpares tinha uma diferença de casas brancas e pretas e em pares não, então somente precisa calcular a área daquele quadrado e dividir na metade, chagando na resposta do exercício proposto.

Em similaridade com a resolução anterior, o “aluno J” (figura 55) teve a mesma linha de raciocínio, porém expressou sua linha de pensamento através da porcentagem em cima do preenchimento do quadrado, introduzindo uma outra forma de metodologia de resolução do atual exercício.

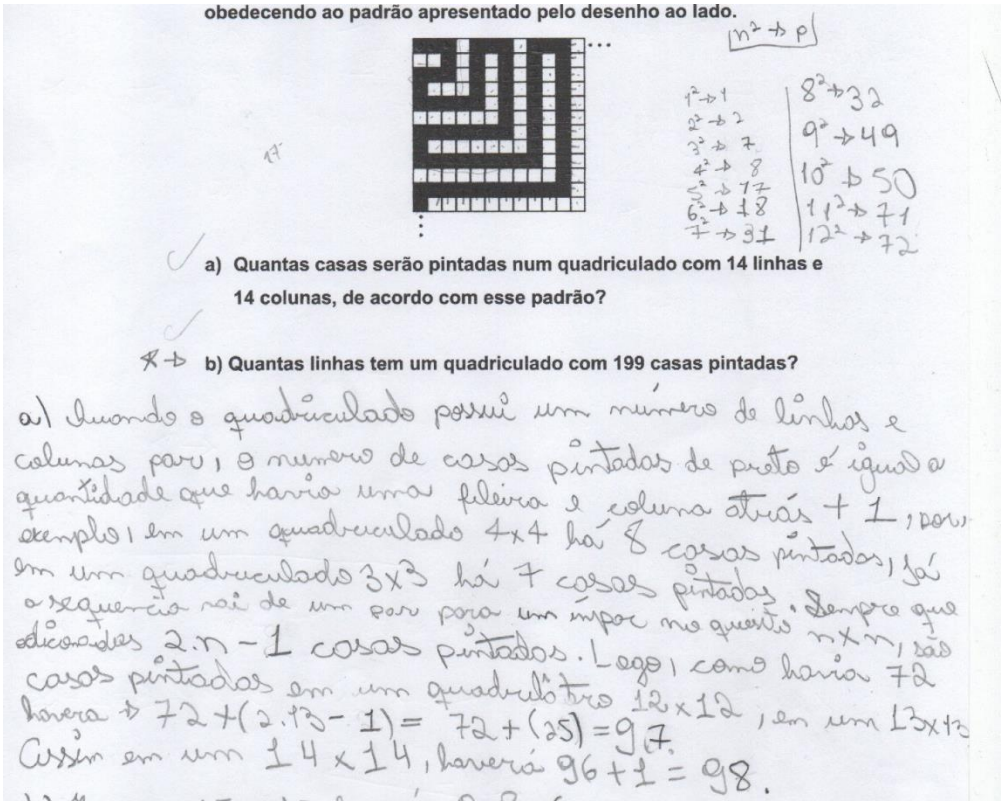
Figura 55: Resolução do exercício 4, letra a - aluno J



Fonte: Compilação da autora

A seguir (figura 56) temos a resolução do “aluno F”, que usou do artifício do conhecimento próximo para trazer uma resolução com a descoberta de um padrão algébrico.

Figura 56: Resolução do exercício 4, letra a - aluno F

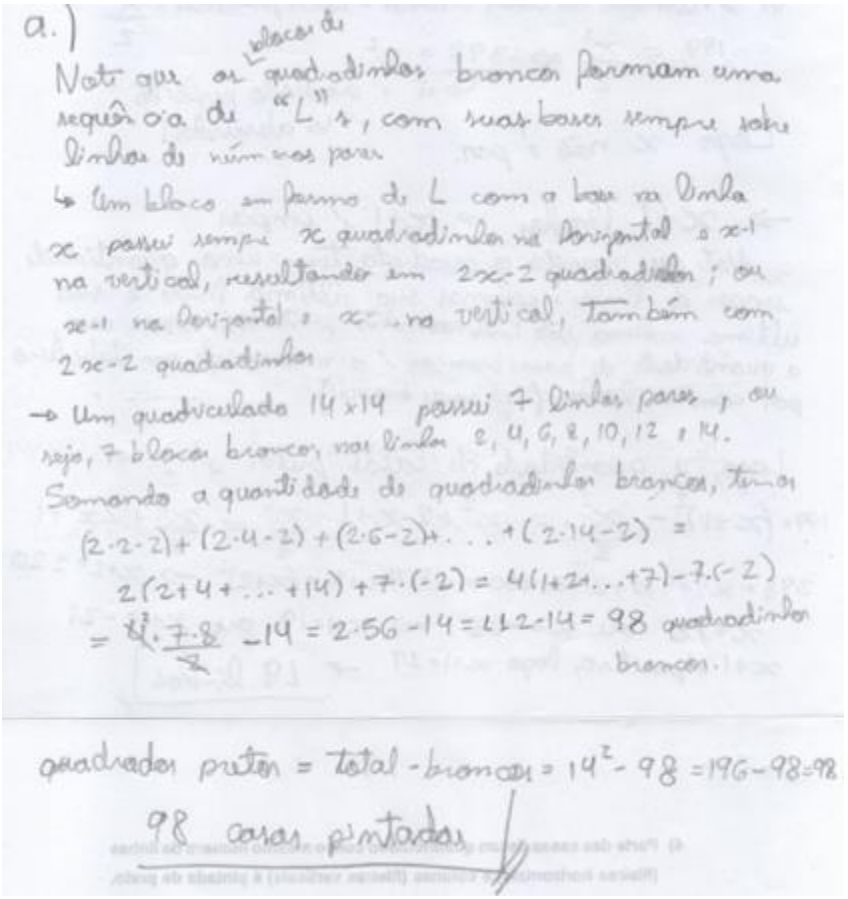


Fonte: Compilação da autora

Apesar de ter revelado a mesma lógica da resolução do aluno anterior, o “aluno F” se utilizou de outro artifício para chegar a solução. Como podemos verificar ao lado da figura dada pelo exercício, o aluno realizou o esquema contagem, como os outros alunos para perceber que dos quadrados ímpares para os seguintes pares, aumentava-se somente 1 unidade. Assim, o aluno conseguiu após essa percepção, realizar uma expressão algébrica onde seria fácil calcular os ímpares e adicionar apenas 1 para achar a próxima quantidade de casas pintadas em um quadrado Nxn.

Nosso último destaque da resolução da primeira parte do exercício 4, foi a resolução do “aluno G” (figura 57), que, diferente dos demais, realizou seus cálculos por meio de observações visuais, conseguindo identificar a figura de um L por parte da forma padronizada dos blocos de casas brancas, e a partir disso, desenvolveu seu raciocínio lógico-matemático de uma maneira totalmente divergente às outras resoluções que foram puramente algébricas.

Figura 57: Resolução do exercício 4, letra a - aluno G



Fonte: Compilação da autora

6.1.8. Análise do exercício 4, letra b

Seguimos nossas análises das resoluções com o enunciado do exercício 4b, cujas habilidades já foram introduzidas no começo do capítulo 6.1.7. Dito isso, segue o enunciado da segunda parte do exercício 4 (figura 58):

Figura 58: Exercício 4 - letra b - questionário

b) Quantas linhas tem um quadriculado com 199 casas pintadas?

Fonte: Compilação da autora

Como pudemos verificar na primeira parte do exercício, pediu-se para expandir o número da área do quadriculado trabalhado seguindo o mesmo padrão,

cujo a maioria o método inicial de contagem para seguir ao algébrico. Nesse exercício, estamos pedindo para que eles consigam determinar o contraponto e deduzir a área através das casas pintadas.

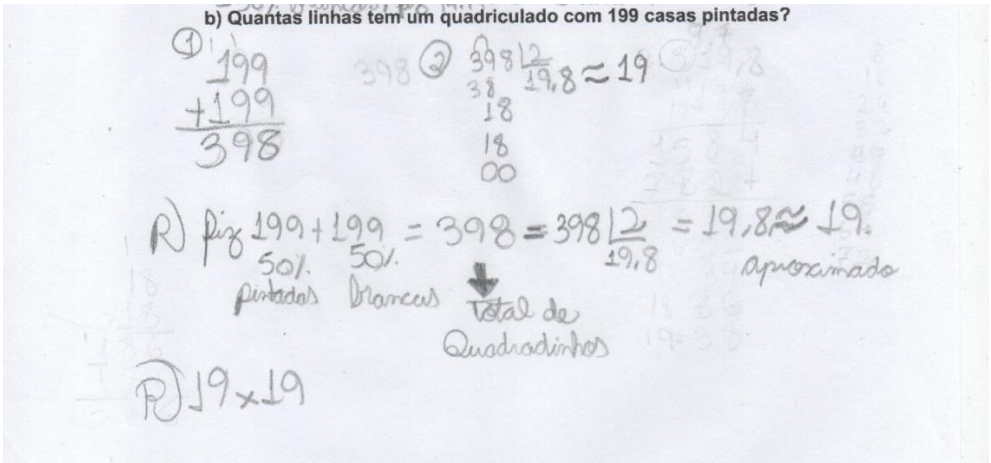
Resolvemos começar mostrando a resolução do “aluno J” (figura 59) por uma questão de que a maioria dos alunos na primeira parte do exercício em questão, apesar de alguns dos que notaram não utilizarem essa metodologia, perceberam que nos quadriculados de lado par continham o mesmo número de casas brancas e pretas.

Apesar disso, todos os alunos utilizaram de seus artifícios e estratégias próprias utilizadas na primeira parte do exercício para responder a questão, como podemos verificar nas figuras 59 à 62.

Isso foi um inesperado, pois se previa a utilização de outros métodos de resolução para se fazer o exercício de trás para frente, o que é interessante levar essa discussão à diante para que se possa analisar como essa habilidade é desenvolvida pelos alunos e que erros podem ser cometidos por conta disso.

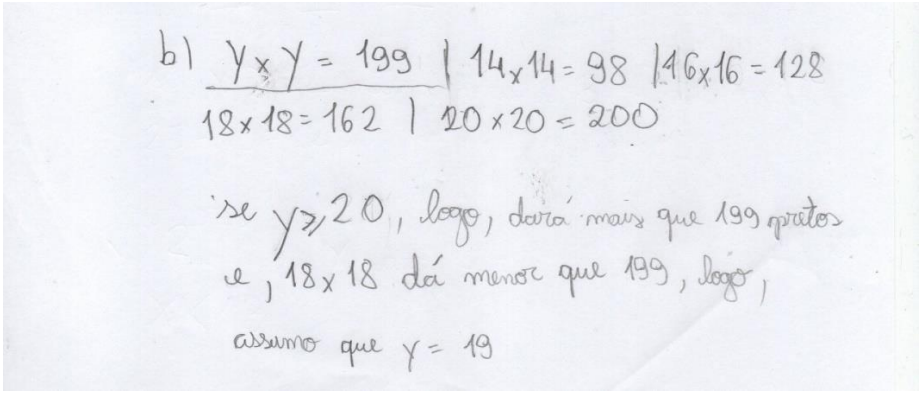
Seguem as resoluções de alguns alunos que foram mostrados na parte 1 do exercício 4:

Figura 59:Resolução do exercício 4, letra b - aluno J



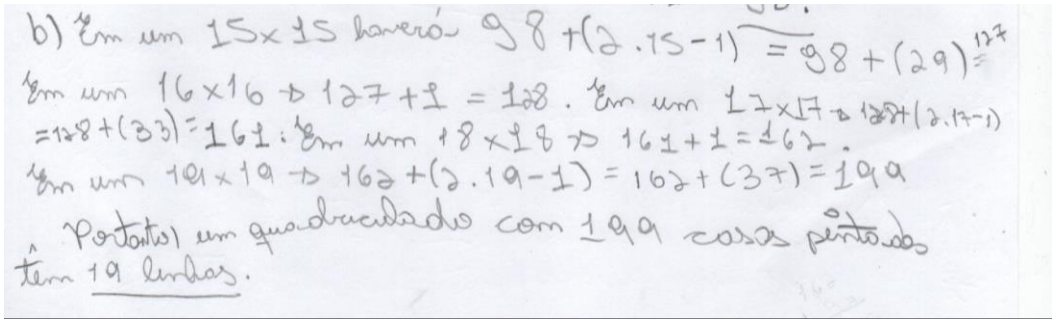
Fonte: Compilação da autora

Figura 60: Resolução do exercício 4, letra b - aluno A



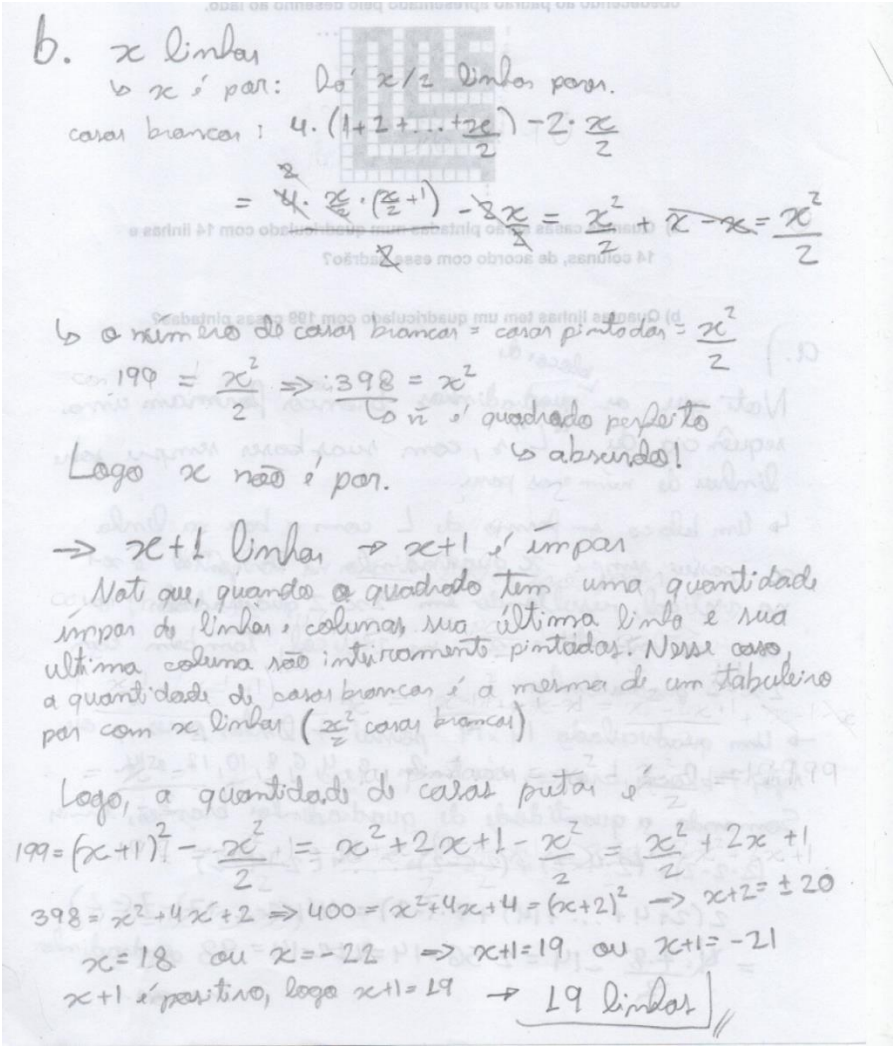
Fonte: Compilação da autora

Figura 61: Resolução do exercício 4, letra b - aluno F



Fonte: Compilação da autora

Figura 62: Resolução do exercício 4, letra b - aluno G



Fonte: Compilação da autora

6.1.9. Análise do exercício 5

Nesse exercício, dois alunos erraram o resultado, porém iremos analisar seus raciocínios. Segue o enunciado do exercício 5:

Figura 63: Exercício 5 – Questionário (OBMEP – 2018 – FASE I – NÍVEL III)

5) Gabriel brinca com números de dois ou mais algarismos. Ele substitui os dois primeiros algarismos à esquerda do número pela soma desses algarismos, e repete esse procedimento até obter um número de um algarismo. Por exemplo, partindo do número 2018 ele obtém o número 2, pois $2018 \rightarrow 218 \rightarrow 38 \rightarrow 11 \rightarrow 2$. Quantos são os números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1?

Fonte: Compilação da autora

O exercício 5 conta com somas e manipulação de números, por isso são previstas as seguintes competências e habilidades da BNCC: competência 2[23], habilidade (EF01MA08)[24],

> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, pg. 267)
>
> (EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo. (BRASIL, 2017, pg. 279)
>
> (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (BRASIL, 2017, pg. 291)

(EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado (BRASIL, 2017, pg. 291)

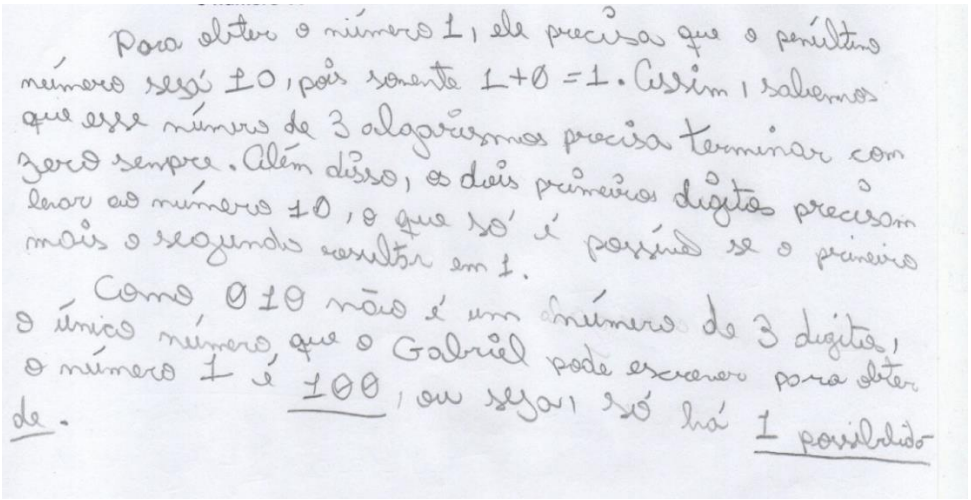
[23] Competência descrita na pg. 73
[24] Habilidade descrita na pg. 91

(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais. (BRASIL, 2017, pg. 291)

Surpreendentemente, a maioria dos alunos erraram no exercício, dentre os equívocos, destacamos dois que representam os erros mais compreensíveis: o “aluno F” (figura 64) se equivocou a reduzir suas opções a um único número, por deduzir as possibilidades a números terminados por 0. Além disso, houve uma falha na interpretação do enunciado, cujo mostra um número de dois algarismos que somando-os não forma um número de um único algarismo $(38 \rightarrow 11)$, o que foi notado e explicado pelo “aluno E” (figura 66).

O segundo erro foi um equívoco do “aluno G” (figura 65) por não considerar um número dentro da demonstração utilizada, sendo que foi uma metodologia prevista por nós, o critério da divisibilidade, pois é um dos assuntos tratados para adentrar na aprendizagem de sequências era o critério de divisibilidade.

Figura 64: Resolução do exercício 5 - aluno F



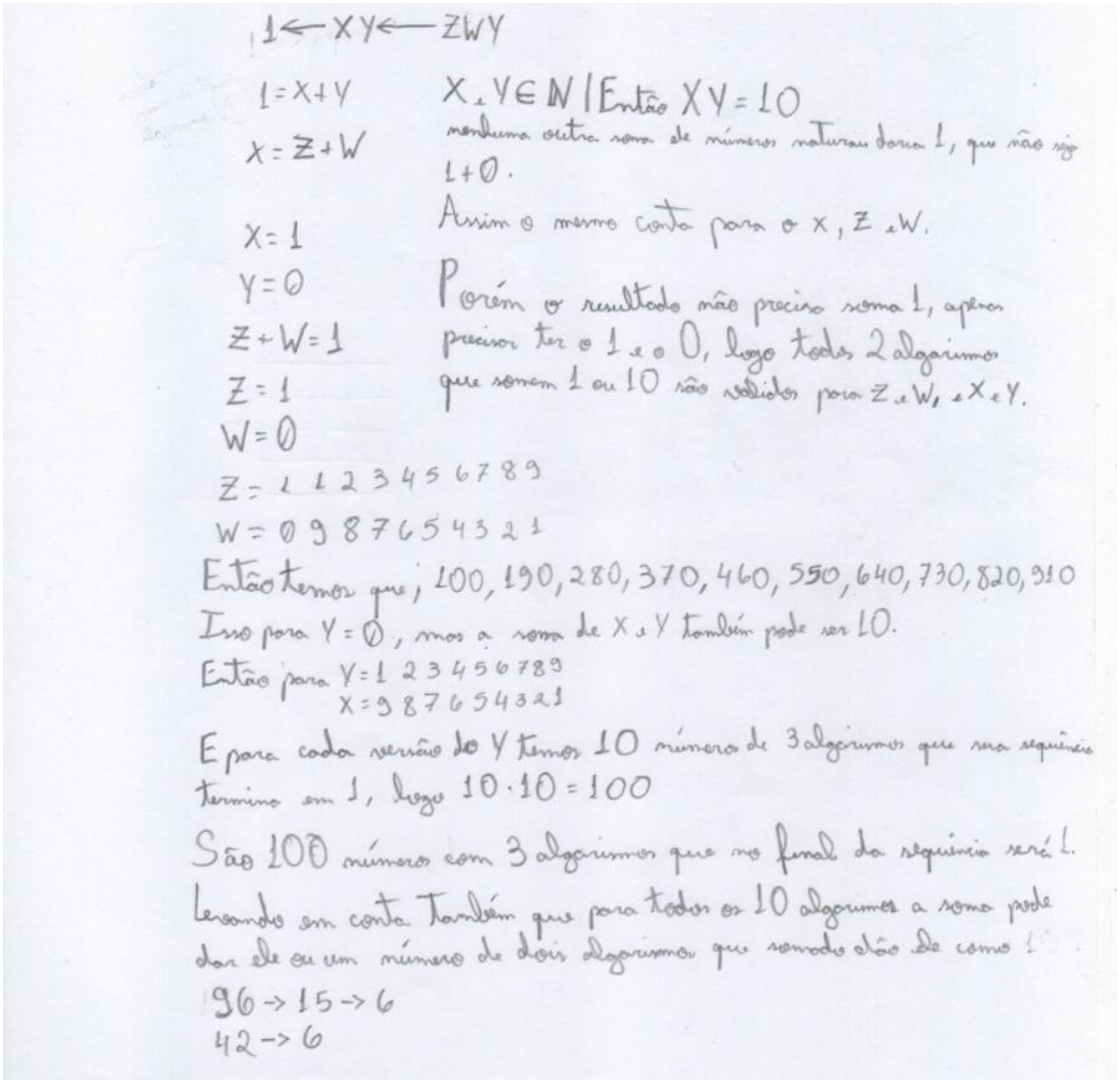
Fonte: Compilação da autora

Figura 65: Resolução do exercício 5 - aluno G

Fonte: Compilação da autora

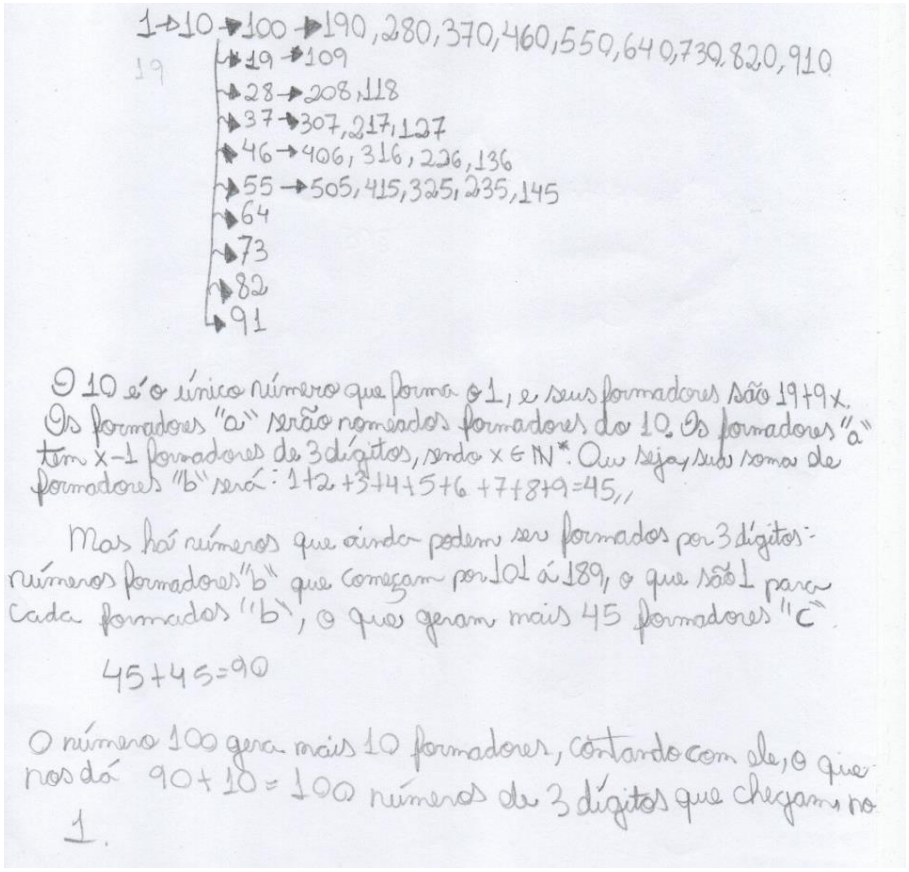
Dos alunos que acertaram a questão, achamos que dois merecem destaque, os alunos E e J demonstraram estratégias muito interessantes do ponto de vista algébrico, e apesar de parecidos, cada um com uma lógica diferente para chegar a um resultado.

Figura 66: Resolução do exercício 5 - aluno E



Fonte: Compilação da autora

Figura 67: Resolução do exercício 5 - aluno J



Fonte: Compilação da autora

O aluno E resolveu a questão observando quantos números de três algarismos terminavam em 0 e cumpriam com as exigências do enunciado e em seguida deduzindo quantas combinações de números poderiam ser utilizados para gerar os números que não terminariam com zero. Já o “aluno J” resolveu a questão verificando quais números de dois dígitos formariam o 10 e associando quantos números de 3 dígitos são formados a partir deles.

Essa diversificação de pensamentos nos mostra que os alunos conseguem pensar por si mesmos para responder as questões complexas, e mostra a importância de se trabalhar com sequências no ensino médio para compreendermos as limitações dos alunos em variados assuntos, por isso, concordamos que o trabalho de lógica matemática concreto desenvolve a capacidade de dedução, raciocínio e abstração, como refere-se a citação de Piaget em Siqueira (2013) onde afirma-se que o ensino deve formar o raciocínio, buscando compreensão ao invés de memorização, e que

para chegar-se ao desenvolvimento do espírito dedutivo se deve por conta das operações mentais ou intelectuais e pela coordenação de ações e as experiências lógico matemáticas adquiridas conforme o tempo.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por muitas vezes ouvimos reclamações dos alunos por conta de professores considerarem suas resoluções erradas por não fazerem da mesma forma que lhes foi ensinado. Com esse trabalho pudemos indicar que essa vertente levada por alguns professores não facilitam o aprendizado dos alunos, mas podem levar a inibir o potencial dos educandos.

Com as pesquisas realizadas neste trabalho de conclusão de curso, pudemos demonstrar que as questões de sequências, principalmente as de ciclo, podem incentivar a utilização do raciocínio lógico matemático e aguçar a curiosidade dos alunos pela matemática.

Esse trabalho também trouxe de contribuição para os educadores que a olimpíada de matemática apresenta uma vertente para que os professores consigam perceber quais os conteúdos da matemática que os alunos preferem usar nas questões, pois há uma gama de possibilidades de resoluções nos exercícios suficientes para que os alunos se sintam a vontade de determinar uma estratégia que seja mais favorável para eles, como observamos nas resoluções apresentadas no trabalho.

A partir dessas resoluções analisadas ao longo deste estudo conseguimos a clareza de que o trabalho com sequências e sequências cíclicas retirados de competições e olimpíadas de matemática desenvolve e traz à tona essas compreensões, sendo que os vários métodos observados por esses alunos mostram a diversidade de resoluções com uma gama diversificada de conhecimentos.

Podemos notar que as formas diferentes para resolver as questões mostram claramente que há certa diversidade de pensamento para cada pessoa, e quando isso é incentivado trazem resultados melhores em relação à aprendizagem matemática.

Os resultados dessa experiência foram congruentes ao esperado, provando que a resolução de problemas é proveniente de ser aplicada e, que além de mostrar aos educadores a facilidade de cada educando, mostra a sagacidade do intelecto

deles. Ademais gera uma forma para obter novos exemplos de pensamento algébrico como métodos de ensino.

Se comparados com os trabalhos de pesquisa de campo dos pesquisadores norteadores desse trabalho, podemos perceber que a nossa pesquisa entra em comum acordo com o resultado desses pesquisadores no aspecto da diferença de pensamento algébrico dos estudantes. Assim como no trabalho de pesquisa de campo com crianças de Vale (2009), nossa pesquisa mostrou que quando damos liberdade de resolução com exercícios estimuladores, ainda com alunos adolescentes, são desenvolvidos pensamentos algébricos inclinados à vertente mais confortável para o estudante.

E assim como Abbott (2011), conseguimos verificar o quão essencial é entender e estudar as resoluções e as estratégias utilizadas na resolução de problemas de matemática no ensino médio, e pudemos perceber sua fundamental importância no estudo da resolução de problemas. Além disso, assim como no trabalho do referido autor, sabemos que é possível identificar e relacionar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas propostos em sala de aula, proporcionando importantes reflexões sobre o papel do professor e o processo de ensino-aprendizagem em matemática.

Concluímos com esse trabalho que, por mais que as escolas preparem os alunos para realizar provas ao invés de preparar para a vida, podemos como educadores, adequar nossas aulas trazendo métodos inovadores e úteis para se obter uma perspectiva mais ampla de cada raciocínio e individualidade dos alunos, como a Resolução de Problemas, e trabalhar em cima de provas e concursos para que se possa aguçar a curiosidade dos alunos e incentivá-los a trabalhar com a matemática.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT F. **Estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de Matemática no ensino *médio***. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31671. Acesso em: 05/01/2021.

ALVES, Washington José Santos. **O impacto da Olimpíada de matemática em Alunos da Escola Pública**. 2010. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino em Matemática) – Faculdade de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/10840/1/Washington%20Jose%20Santos%20Alves.pdf. Acesso em: 24/08/2022.

BAGATINI, Alessandro. **Olimpíadas de matemática, Altas habilidades e Resolução de Problemas**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2010. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29144/000775916.pdf?sequence=1&isAllowed=y Acesso em: 09/09/2022.

BARBOSA, Ana Cristina Coelho. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico**. 2009. Tese de Doutorado. (Doutor em Matemática) - Instituto de Estudos da Criança. Universidade do Minho. Braga. 2009 Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf. Acessado em: 08/01/2021

BERINDE, Vasile. **The Native Country of International Mathematical Olympiads. A brief history of Romanian Mathematical Society,** Baia Mare: CUB PRESS. 2004.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. **O ESTUDO DE PADRÕES E REGULARIDADES NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.** 2008. Dissertação. (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências. Universidade de Lisboa.Lisboa 2008. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf. Acesso em: 12/08/2022

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília**: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996**.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília. Disponível em:

https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf. Acesso em: 29/03/2023

UPMAT BRASIL EDUCACIONAL LTDA. CANGURU de matemática. 2023. A história da olimpíada Canguru. Disponível em: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/. Acesso em: 15/05/2023

CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. **Um estudo sobre sequências e séries.** 2013. Dissertação. (Mestre em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita”. Rio Claro. 2013 Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92416/cerqueira_acs_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 30/07/2022

CLEMENTE, Walter. Garimpo de inteligência - A Olimpíada de Matemática revela talentos para a pesquisa de novas tecnologia. IPEA. Brasília, ed. 1, 1/8/2004. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&view=article&id=1523:catid=28&Itemid=23. Acesso em 15/07/2022

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática. 10. ed. São Paulo: Ática, 1998.

DEVLIN, Keith. **Mathematics:** The Science of Patterns. New York. Scientific American Library. 2002.

FERNANDES, Alessandra dos Santos. **Resolução de problemas olímpicos envolvendo análise combinatória e probabilidade através da metodologia de Polya.** 2021. Dissertação. (Mestrado em Matemática) - Centro Tecnológico, De Ciências Extas E Educação. Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau. 2021 Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/226889/PMTM-B0003-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y. Acesso em: 18/04/2023

FERNANDES, J. A.; OLIVEIRA, CAC. Olimpíadas de Matemática: contextualizando o dia-a-dia. **ENCONTRO DE EXTENSÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPO GRANDE**, v. 3, 2005

FILHO, Moysés Gonsalves Siqueira; SILVA, Circe Mary Silve da. **Matemática: resolução de problemas**. Brasília. Liber Livro, 2011.

FOURREY, Émile. **Récréations Arithmétiques.** Paris. Librairie nony et c’. 1899.

IME- INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – USP. **Apostila Capítulo 3 Sequências e Séries Numéricas.** 2018. 14 pg. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/mat0315-2016/sequencias2.pdf>. Acesso em: 13/01/2022

JULIÃO, Giovana da Silva; CRISTOVÃO, Eliane Matesco; OLIVEIRA, Paulo Cesar. **Uma análise de representações semióticas no estudo de sequências numéricas com alunos do ensino médio.** REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

DO SUL (UFMS), Mato Grosso do Sul, v. 13 n. 33., Dezembro de 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/347912529_Uma_analise_de_representacoes_semioticas_no_estudo_de_sequencias_numericas_com_alunos_do_Ensino_Medio. Acesso em: 16/12/2021

JUNGBLUTH, Adriana; SILVEIRA, Everaldo; GRANDO, Regina Célia. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 3, p. 96-118, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/44255/pdf. Acesso em: 10/11/2021

JUNIOR, Deusdete Gomes de Almeida. **UM ESTUDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SUAS APLICACÕES NO ENSINO DAS PROGRESSÕES.** 2017. Dissertação. (Mestrado em Matemática) - PRO-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão. 2017 Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/7783/2/DEUSDETE_GOMES_ALMEIDA_JR.pdf. Acesso em: 22/03/2023

LINS, ROMULO CAMPOS; GIMENEZ, JOAQUIM. **PERSPECTIVAS EM ARITMÉTICA E ÁLGEBRA PARA O SÉCULO XXI**. 4ª edição. Campinas. Papirus Editora. 2001.

MALHEIRO, Catarina; GOMES, Alexandra. **A rotina de Kaprekar**. 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/76/kaprekar.pdf. Acesso em: 08/02/2023

MENDES, F. M. P. **A Matemática na natureza.** 2007. Dissertação (Mestrado) — Universidade De Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007. Disponível em: https://docplayer.com.br/11524105-A-matematica-na-natureza.html. Acesso em: 04/04/2023

MÜLLER, I. **Tendências atuais de Educação Matemática.** UNOPAR Cient., Ciênc. Hum. Educ., Londrina, v. 1, n. 1, p. 133-144, jun. 2000.

NETO, P. R. de S. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013. Disponível em: https://docplayer.com.br/34038736-A-aplicacao-do-numero-de-ouro-como-recurso-metodologico-no-processo-de-ensino-aprendizagem.html. Acesso em: 06/04/2023

Olimpíada Brasileira de Matemática. **OBM**. 2023. Site oficial da Olimpiada Brasileira de Matemética. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 10/05/2023

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **OBMEP**. Site oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 11/05/2023

Olimpíada de Brasileira de Raciocínio Lógico. **OBRL**. Site oficial da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico. Disponível em: <https://www.obrl.com.br/>. Acesso em: 12/05/2023

OLIVEIRA Renato. **RACIOCÍNIO LÓGICO PARA CONCURSOS**: CICLOS EM EXERCÍCIOS. YouTube, 2014. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VYFMikzyv-Q&list=LL&index=12&t=560s. Acessado em: 25/09/2020

OLIVEIRA, Adriana T. E., **Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática. 2019.** Dissertação (Mestrado) — PROFMAT/SBM. Universidade Federal do Mato Grosso - UFMG, 2019. Disponível em: https://ri.ufmt.br/bitstream/1/2713/1/DISS_2019_Adriana%20Tenir%20Eg%c3%a9a%20de%20Oliveira.pdf. Acesso em: 03/09/2022

ORTON, Anthony. **Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics**. Nova York. Continuum. 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro. Interciência, 1978.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **ÁLGEBRA NO ENSINO BÁSICO**. 2009. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf Acesso em: 05/12/2022

SAUTER, Ezequia e AZEVEDO, Fábio Souto, **Análise de Fourier:** Um Livro Colaborativo. Porto Alegre. UFRJ, 2022.

SILVA, Viviane. **Osvaldo Sangiorgi e o "Fracasso da Matemática Moderna" no Brasil.** 2007. p. 161 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). São Paulo. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP. 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11130/1/dissertacao_viviane_silva.pdf. Acesso em: 07/03/2023

SIQUEIRA E.; **O raciocínio lógico-matemático: classificação e uso em concursos públicos.** 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de engenharia do campus de Guaratinguetá, Universidade estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138973/000865117.pdf?sequence=1. Acessado em: 03/01/2021

SODRÉ, Leandro de Oliveira. **O número 142857 e o número de ouro:** curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas. 2013. Dissertação (mestrado em Matemática em Rede Nacional). Juiz de Fora. Universidade Federal de Juiz de Fora – PROFMAT. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2364/1/leandrodeoliveirasodre.pdf. Acesso em: 05/04/2023

SOUTO, Eduardo Filipe de Miranda. **ENSINO DE SEQUENCIAS E PROGRESSOES NO ENSINO MÉDIO**. 2017. Dissertação (mestrado em Matemática em Rede Nacional). Minas Gerais. Universidade Federal de Viçosa. 2013. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/11592/1/texto%20completo.pdf. Acesso em:30/08/2022

VALE, I. e Pimentel, T. **Padrões e conexões matemáticas no ensino básico.** Educação e Matemática, Viana do castelo, 110, 33-38. Novembro/Dezembro 2010. Disponível em: https://www.academia.edu/1425432/Padr%C3%B5es_um_tema_transversal_do_curr%C3%ADculo. Acesso em: 24/11/2021

VALE, Isabel. et al. **Os Padrões no Ensino e Aprendizagem Álgebra**. Lisboa, 2007. Disponível em: http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf. Acesso em: 24/11/2021

VALE, I., BARBOSA, A., BORRALHO, A., BARBOSA, E., CABRITA, I., FONSECA, L., & PIMENTEL, T. **Padrões no ensino e aprendizagem da matemática** – propostas curriculares para o ensino básico. Viana do castelo. Projecto Padrões. 2009.

VALE, Isabel. BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática:** Uma proposta didáctica no âmbito do novo Programa para o Ensino Básico. 1ª edição. Lisboa .Texto editores LTDA, 2011.

VALE, Isabel. **Padrões em contextos figurativos:** um caminho para a generalização em matemática. REVEMAT. Florianópolis. v. 08, n. 2, p. 64-81, 2013. 2013. Disponível em: file:///C:/Users/melbr/Downloads/26921-Texto%20do%20Artigo-106402-1-10-20131220.pdf. Acesso em: 19/12/2021

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; BOAVIDA, Ana Maria Roque; PAIVA, Ana Luísa; CEBOLA, Graça. **A experiência matemática no ensino básico:** Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico. Lisboa. GDIDC. 2008.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. São Paulo. Penso Editora, 2009.

VIANA, José Paulo. **Surpresas cíclicas**. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, p. 113-123, Novembro de 2016.

ZAHN, M. Sequência de Fibonacci e o número de ouro. Rio de Janeiro - RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa ***"Problemas de sequências e ciclos nos vestibulares e concursos de matemática e aplicações."*** a ser realizado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo cujos pesquisadores responsáveis são *Melina Brianez Giannetti* e *Emiliano Augusto Chagas.* O objetivo é de procurar entender como estudantes do ensino básico confrontam e desenvolvem estratégias de resolução de problemas de matemática que envolvem sequências e sequências cíclicas mostrando que cada pessoa tem um modo diferente de pensamento, nos permitindo estudar a capacidade de raciocínio sem a repetição de exercícios em sala de aula. Você está sendo convidado(a) a fazer parte das atividades e tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo em relação com a pesquisadora ou com a instituição. Sua participação não é obrigatória, nem remunerada e consiste em realizar um questionário composto de 5 exercícios retirados de olimpíadas de matemática em aula, com auxílio da pesquisadora, durante duas aulas de 45 minutos. Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos aos participantes. Nesta pesquisa, os riscos para você são mínimos, como desconforto em realizar a atividade ou dor de cabeça e cansaço por tempo da resolução dos exercícios, se isso ocorrer, você poderá se retirar, bem como sua saída a qualquer momento da pesquisa não terá nenhuma influência no seu processo de avaliação. O benefício desta pesquisa será em contribuir com o desenvolvimento de estudos referentes a resoluções e generalizações em exercícios de sequências e ciclos para ajudar no processo formativo dos professores e futuros professores que lecionam matemática. As atividades da pesquisa serão desenvolvidas em sala de aula, com a observação da professora pesquisadora. O objetivo deste estudo é contribuir com as pesquisas sobre métodos de resolução no estudo de sequências e ciclos além de destacar a relevância dos vestibulares para compreender a resolução de exercícios dos alunos do Ensino médio e a conexão que os estudantes conseguem fazer da

matemática com o mundo real, além de mostrar que as estratégias de generalização podem ser um incentivo para o estudo de matemática. Os materiais coletados (registros escritos) serão utilizados somente como dados para a pesquisa e não serão publicados dados referentes a sua participação, e os materiais coletados serão descartados após cinco anos. O seu nome e sua imagem não serão publicados. Caso alguma imagem apareça o seu nome, ela será borrada/cortada preservando assim a sua identidade. Você receberá uma via deste termo na qual consta o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento. Destacamos que a pesquisa respeitará as normas estabelecidas pelo Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), os preceitos da ética de acordo com as normas do IFSP e a dignidade dos estudantes. Este documento está elaborado em duas VIAS, que devem ser rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término por você, e pela pesquisadora responsável, ficando uma via com cada um.

Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas
Orientador - e-mail:
emiliano@ifsp.edu.br

Rua Pedro Vicente, 625

Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4569

Melina Brianez Giannetti
Licencianda – email:
melina.giannetti@aluno.ifsp.edu.br
São Paulo/SP
Telefone: (11) 98887-6919

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé
São Paulo/SP
Telefone: (11) 37754569
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

_____

Participante da Pesquisa
Assinatura e nome

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a), seu filho(a), estudante do Ensino Médio, está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa: “Problemas de sequências e ciclos nos vestibulares e concursos de matemática e aplicações”, a ser realizado de forma presencial no Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo, cujos pesquisadores responsáveis são Emiliano Augusto Chagas e Melina Brianez Giannetti. Compreendemos por hipótese que as questões de sequências, principalmente as de ciclo, podem incentivar a utilização do raciocínio lógico matemático e assim incentivar a curiosidade dos alunos pela matemática além de mostrar que cada pessoa tem um modo diferente de pensamento, provando a capacidade de raciocínio sem a repetição de exercícios em sala de aula, pois o foco principal de ensino desse tipo de sequência é nos anos iniciais. Além disso, usar as questões de concurso e vestibulares para verificar o raciocínio do pensamento algébrico é um modo de verificar a resolução de exercícios podendo avaliar a interpretação de texto e de mundo do estudante. Dessa forma, os objetivos do projeto são destacar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos na resolução de questões que envolvem sequências cíclicas que foram retiradas de concursos de matemática, observar a diferença de pensamento algébrico e se chegaram a um resultado lógico e correto e verificar se esses alunos conseguem obter uma percepção de como esses problemas apresentados podem se amplificar para uma pesquisa mais elaborada dentro do âmbito da matemática. O(A) educando(a) está sendo convidado(a) porque é aluno(a) de Ensino Médio que já fez ou irá prestar algum vestibular ou concurso de matemática. O(A) aluno(a) tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento que recebe neste serviço. Sua participação não é obrigatória, nem remunerada e consiste em responder um questionário escrito

(presencial) de questões objetivas e dissertativas, destacando cada passo realizado para a resolução do exercício. Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos aos(às) participantes. Nesta pesquisa, os riscos para o(a) estudante são mínimos, pois este questionário não envolverá coleta de dados pessoais e nem identificação, apenas informações sobre o raciocínio envolvidos no momento de resolução dos exercícios do questionário, por isso, os possíveis riscos desta pesquisa, são de cansaço e/ou desconforto ao responder o questionário. Garantimos ao estudante de menor e a seu(sua) acompanhante, quando necessário, o ressarcimento das despesas devido à sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente. Também estão assegurados o direito a pedir indenizações e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa ao (à) participante da pesquisa. Asseguramos ao menor o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo ao (à) participante, pelo tempo que for necessário. Garantimos a manutenção do sigilo e da privacidade de sua participação e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e, posteriormente, na divulgação científica. Os materiais coletados serão mantidos sob nossa guarda por um período mínimo de cinco anos após o término da pesquisa, sendo posteriormente descartado, garantindo sigilo do material. O(A) participante pode entrar em contato, a qualquer momento, com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, do Instituto Federal de São Paulo (CEP/IFSP), e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. O CEP/IFSP situa-se à Rua Pedro Vicente, 625, Canindé – São Paulo - SP, telefone: (11) 3775-4665, e-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br e/ou com o(s) pesquisador(es) por meio dos contatos que constam junto ao campo da(s) assinatura(s). Este documento (TCLE) está elaborado em duas VIAS, que devem ser rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término pelo(a) Sr(ª)., ou por seu(sua) representante legal, e pelo pesquisador responsável, ficando uma via com cada um.

Professor Doutor Emiliano Augusto Chagas
Orientador
E-mail: emiliano@ifsp.edu.br
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 27637576 (coordenação do curso)

Melina Brianez Giannetti
Estudante de Graduação – Licenciatura em Matemática
E-mail: melina.giannetti@aluno.ifsp.edu.br
Telefone: (11) 988876919

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4665
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Eu, _____, portador(a) do documento de Identidade _____ fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações sobre a pesquisa e autorizo meu filho a participar

_____

Responsável pelo participante

Apêndice B - Questionário

1) Em cada quadrado da sequência a seguir aparecem os números 1, 2, 3 e 4 que mudam de posição de acordo com certo padrão.

1	3
2	4

2	4
1	3

4	2
3	1

2) Observe a sequência de figuras a seguir.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 • • •

Se a partir da figura 7 a sequência se repete na ordem apresentada, ou seja, a figura 7 é igual à figura 1, a figura 8 é igual à figura 2, a figura 9 é igual à figura 3, e assim por diante, então, a figura 256 será igual à figura:

3) Comece uma sequência escrevendo dois números inteiros não negativos, sendo o primeiro maior do que o segundo. Depois, para encontrar os próximos termos da sequência, repita o seguinte procedimento:

• se o último termo escrito for maior do que o penúltimo, a sequência termina;

• caso contrário, o próximo termo a ser escrito será o penúltimo menos o último.

Um exemplo é a sequência 120, 71, 49, 22, 27; ela começa com 120 e 71 e possui cinco termos.

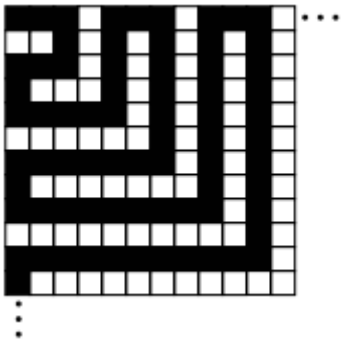
a) **Escreva a sequência que começa com 30 e 16.**

b) **Escreva a sequência que possui exatamente cinco termos, sendo o quarto termo igual a 1 e o quinto termo igual a 2.**

c) **Uma sequência que começa com 25 tem exatamente três termos. Quais são os valores possíveis para o segundo termo?**

d) **Uma sequência que começa com 60 tem o maior número possível de termos. Qual é o valor do segundo termo dessa sequência?**

4) **Parte das casas de um quadriculado com o mesmo número de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) é pintada de preto, obedecendo ao padrão apresentado pelo desenho ao lado.**



a) **Quantas casas serão pintadas num quadriculado com 14 linhas e 14 colunas, de acordo com esse padrão?**

b) **Quantas linhas tem um quadriculado com 199 casas pintadas?**

5) **Gabriel brinca com números de dois ou mais algarismos. Ele substitui os dois primeiros algarismos à esquerda do número pela soma desses algarismos, e repete esse procedimento até obter um número de um algarismo. Por exemplo, partindo do número 2018 ele obtém o número 2, pois $2018 \rightarrow 218 \rightarrow 38 \rightarrow 11 \rightarrow 2$. Quantos são os números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1?**