INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Caroline Lourenço Russo

A Simbologia na História do Cálculo

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

São Paulo

2017

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

BRASIL
GOVERNO FEDERAL

A SIMBOLOGIA NA HISTÓRIA DO CÁLCULO

Caroline Lourenço Russo

TCC apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique de Marins Carvalho

São Paulo
2017

"A vida é boa por apenas duas coisas: descobrir matemática e ensinar matemática"
Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu orientador pela confiança e empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

Agradeço às minhas irmãs de amizade e amigos que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

E por fim, agradeço a todos os professores por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade no processo de formação profissional.

RESUMO

No decorrer do presente trabalho foi feita a análise do desenvolvimento simbólico dos conceitos de Derivada e Integral, com o intuito de entender como as influências históricas afetaram nas mudanças de suas notações. Todo trabalho teve como base a pesquisa bibliográfica textual, usando literaturas na área de Historia da Matemática, além de buscar nos trabalhos originais dos matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento da Matemática, as notações do Cálculo Diferencial e Integral, podendo assim analisá-las e observando suas principais mudanças e como elas afetaram a sua aplicação. A partir dessa abordagem, procuramos verificar como a simbologia que usamos nos dias atuais foi estabelecida.

Palavras Chaves: História do Cálculo; Simbologia do Cálculo; Cálculo ; Derivada; Integral.

ABSTRACT

In the course of the present work, the symbolic development of Derivative and Integral concepts was analyzed, in order to understand how historical influences affected the changes of their notations. All work was based on textual bibliographical research, using literatures in the area of History of Mathematics, as well as searching in the original works of mathematicians who contributed to the development of Mathematics, the notations of Differential and Integral Calculus, so that they can analyze and observe them its main changes and how they affected in their application. From this approach, we try to verify how the symbology we use today has been established.

Keywords: History of Calculus; Symbology of Calculus; Calculus; Derivative; Integral.

Lista de Ilustrações:

Lista de Tabelas:

Sumário

Introdução

Esse Trabalho de Conclusão de Curso tem como principal meta analisar a simbologia no decorrer da História do Cálculo, podendo assim discutir as influências históricas que levaram ao estabelecimento da simbologia usada nos dias atuais.

Foi feita uma pesquisa bibliográfica para servir de base para o presente trabalho, não encontrando trabalhos em português nessa área da simbologia Matemática do Cálculo. Sendo assim, nós voltamos para a literatura estrangeira, encontrando por fim o livro *A History of Mathematical Notations* de Florian Cajori, onde trata do desenvolvimento simbólico da Matemática. Além de usá-lo como base dos conceitos abordados nesse trabalho, usamos suas citações bibliográficas para complementar o conteúdo de todo nosso desenvolvimento.

Florian Cajori (1859-1930) nasceu na Suiça, porém se mudou para os Estados Unidos em 1875 e graduou-se em dois anos, logo após começou a lecionar em uma escola americana. Somente em 1884 ingressou na Universidade John Hopkins, onde estudou cerca de um ano e meio e saiu em 1885, sendo que no ano seguinte recebeu seu mestrado pela Universidade de Wisconsin. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Em 1885, antes mesmo de realizar seu mestrado, tornou-se Professor adjunto na Universidade de Tulane, em Nova Orleans e se tornou Professor de Matemática Aplicada na mesma Universidade, em 1887, onde se estabeleceu até 1889. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Em 1889 mudou-se para o Colorado para assumir a cadeira de Professor de Física na Faculdade do Colorado até 1898. Nesse período realizou seu doutorado pela Universidade de Tulane, em 1894. Também ocupou a cadeira de Matemática no Colorado de 1898 a 1918, sendo decano no Departamento de Engenharia nos últimos 15 anos desse último período na Faculdade do Colorado. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Foi criada especialmente para Cajori uma cadeira para História da Matemática na Universidade da Califórnia em Berkeley em 1918. Sendo essa cadeira a primeira criada nos Estados Unidos, assim evidenciando seu destaque na área. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Ao completar 70 anos com sua saúde já enfraquecida, passou por uma cirurgia em 1930, da qual não se recuperou muito bem, Cajori faleceu no ano seguinte em sua casa em Berkeley. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Cajori escreveu diversos trabalhos na área da História da Matemática, um dos seus maiores trabalhos na área foi o *A History of Mathematical Notations*, onde reuniu e analisou toda a História Simbólica da Matemática. (OCONNOR; ROBERTSON, 2017)

Então no presente Trabalho de Conclusão de Curso, foi feita além da leitura e análise, uma tradução livre do capítulo *Differential and Integral Calculus.*

Com isso, devemos nessa Introdução definir o que entenderemos por simbologia, notação, ou mesmo definir Cálculo, derivada, diferencial e integral, que usaremos no decorrer desse trabalho.

Sendo assim, começaremos pelo significado de simbologia que consiste em "A arte de elaborar ou criar símbolos; Ciência que estuda e interpreta os símbolos; sistema de símbolos. " (MICHAELIS, 2015). No nosso desenvolvimento, quando mencionamos "simbologia", estaremos nos referindo ao último significado, ou seja, uma simbologia, será para nós, um sistema, ou mesmo conjunto, de símbolos ou notações. Já notação tem como significado "Ato de notar, de representar algo graficamente através de símbolos e caracteres; Conjunto de sinais, símbolos ou caracteres com que se representa algo; sinal que modifica os sons das letras, como acentos, o til, a cedilha. " (MICHAELIS, 2015)

Logo as notações, serão entendidas como os dois primeiros significados, ou seja, será quando representaremos com símbolos os conceitos do Cálculo e conjuntos de símbolos que representam algo.

Já as definições de Cálculo, diferenciais e integrais, não serão feitas com teoremas e axiomas como costumeiramente são feitas, mas como uma explicação do autor Jason Socrates Bardi em seu livro *A Guerra do Cálculo.* De acordo com ele, Cálculo é:

> "[...] um conjunto de conhecimentos, é um tipo de análise matemática que pode ser usado para estudar grandezas em mudanças – corpos em movimento, por exemplo. Basicamente, o Cálculo é um conjunto de ferramentas matemáticas para analisar esses corpos em movimento. " (BARDI, 2010, p.22)

Além disso, Bardi (2010), explica que com o Cálculo podemos expressar uma variável em termo da outra. Sendo considerado um dos maiores avanços matemáticos desde os tempos dos gregos, com ele tornou-se possível a resolução de grandes problemas da Geometria. (BARDI, 2010, p.22-23)

Já os *diferenciais* serão "pequenos acréscimos ou decréscimos instantâneos em grandezas que variam. " (BARDI, 2010, p.22)

Trataremos de forma diferente os *diferencias* das *derivadas,* para nós os *diferenciais* serão os dx, dy, dz, etc, já a *derivada* será a operação de derivar.

Os dois protagonistas da disputa pelo desenvolvimento do Cálculo foram Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), falaremos então um pouco sobre a vida desses dois celebres matemáticos.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig na Alemanha em 1646, ingressou na Universidade em 1661 aos 15 anos, onde estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática e aos 17 anos adquiriu seu diploma de bacharel. Recebeu seu título de doutor aos 20 anos pela Universidade de Altdorf, em Nuremberg. Desde então, ingressou na vida diplomática, nunca deixando de lado suas pesquisas na Matemática. Suas contribuições para o Cálculo começaram no ano de 1675, quando publicou seu primeiro teorema, o qual tratava do que conhecemos hoje em dia, Integração por Partes, e a partir daí suas contribuições não paravam de surgir. Sua simbologia para as derivadas e para as integrais são as que mais se assemelham com as que usamos nos dias atuais.

Foi Leibniz quem introduziu as notações dx, dy, dz e $\int$ em seu trabalho *Acta Eruditorum,* escrito em conjunto com Johann Bernoulli (1667-1748), tal trabalho trata do Cálculo Diferencial e Integral.

Já Isaac Newton (1643-1727) nasceu em Woolsthorpe, perto de Licolnshire na Inglaterra. Sua vida pode ser dívida em três períodos distintos, o primeiro foi o que podemos chamar de sua infância, de 1643 à 1669. O segundo período foi de 1669 à 1687, o qual foi altamente produtivo, sendo que lecionou em Cambridge. E o terceiro período foi de 1687 até sua morte, onde atuou com funcionário do governo Inglês altamente remunerado em Londres, mais voltado à pesquisa matemática.

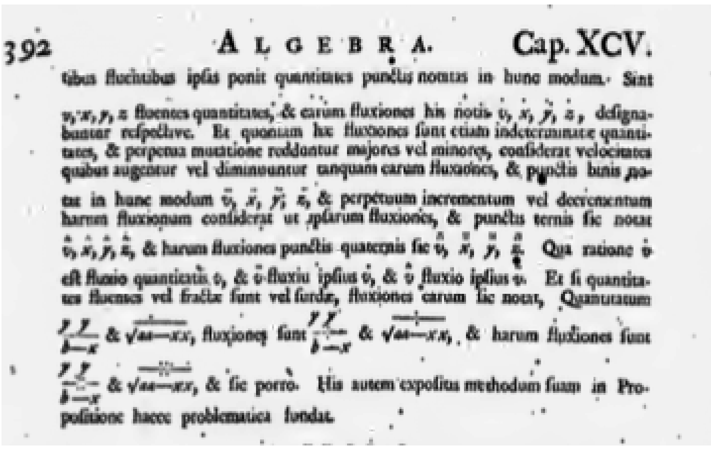
Suas contribuições para o Cálculo começaram no ano de 1665 ao desenvolver a simbologia para os fluxões, ou como é conhecida, notação de “pontos”, e foi com essa simbologia que Newton desenvolveu seu Método de Fluxões e Fluentes, que se equivale ao Cálculo Diferencial e Integral de Leibniz.

Comecemos então nossa análise histórica das simbologias das derivadas e integrais, iniciando com a simbologia de Newton para o Método Fluxional, com a chamada notação de “pontos”.

1. Derivadas e suas simbologias

O primeiro a usar e desenvolver a notação de “pontos” foi Newton por volta de maio de 1665; tal notação foi usada para indicar velocidade ou, como ele chamava, fluxões. Até então nada tinha sido feito nesse campo. Uma das reproduções da “notação fluxional” apareceu na edição latina de 1693, *De algebra tractatus* de Johannis Wallis, onde não se tinha apenas as notações para fluxões do tipo $\dot{x}$ mas também as fluxões de frações e radicais como vemos na figura abaixo, que consiste em um trecho retirado desse mesmo trabalho de Wallis.

Figura 1: Trecho de De algebra tractatus

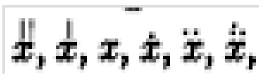

392 ALGEBRA. Cap. XCV.

tibus fluctibus ipsis ponit quantitates punctis notatas in hunc modum. Sint v, x, y, z fluentes quantitates, & earum fluxiones his notis $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, designabuntur respective. Et quoniam hæ fluxiones sunt etiam indeterminatæ quantitates, & perpetua mutatione redduntur majores vel minores, considerat velocitates quibus augentur vel diminuuntur tanquam earum fluxiones, & punctis binis notat in hunc modum $\ddot{v}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, & perpetuum incrementum vel decrementum harum fluxionum considerat ut ipsarum fluxiones, & punctis ternis sic notat $\dddot{v}, \dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}$, & harum fluxiones punctis quaternis sic $\ddddot{v}, \ddddot{x}, \ddddot{y}, \ddddot{z}$. Qua ratione $\dot{v}$ est fluxio quantitatis v, & $\ddot{v}$ fluxio ipsius $\dot{v}$, & $\dddot{v}$ fluxio ipsius $\ddot{v}$. Et si quantitates fluentes vel fractæ sunt vel surdæ, fluxiones earum sic notat, Quantitatum $\frac{yy}{b-x}$ & $\sqrt{aa-xx}$, fluxiones sunt $\frac{yy}{b-x}$ & $\sqrt{aa-xx}$, & harum fluxiones sunt $\frac{yy}{b-x}$ & $\sqrt{aa-xx}$, & sic porro. His autem expositis methodum suam in Propositione hacce problematica fundat.

Fonte: WALLIS, 1693, p. 392

Anos após esse primeiro contato com as notações de fluxões, Newton introduziu novas notações em seu tratado *Quadratura curvarum* em 1704, como por exemplo as suas notações para os fluentes, que seriam a sua representação para a aceleração.

Figura 2: Fluentes e Fluxões



Fonte: Cajori, 1993, v.2, p. 197

Newton se empenhava muito em seus estudos no campo da Física, assim os fluxões e fluentes vêm para auxiliá-lo no desenvolvimento do seu trabalho.

Suas notações para fluxões de frações e radicais não eram de fácil compreensão, pois sua tipografia é complexa e pode facilmente confundir o leitor. Além disso Newton calculava seus fluxões em relação ao tempo, ou seja, todas suas “funções” tinham como variável o tempo (t). Assim quando Newton denota $\dot{z}:\dot{x}$, na verdade o calculo que ele esta fazendo, nas notações atuais, teria $\frac{dz}{dt}:\frac{dx}{dt}$, ou a derivada $\frac{dz}{dx}$.

Estudiosos ingleses, do século XVIII, usavam exclusivamente as notações de Newton, porém, às vezes, as usavam com algumas pequenas variações, como por exemplo, Humphrey Ditton e John Clarkey usam dois pontos separados para denotar a primeira fluxão. (CAJORI, 1993, v.2, p.198)

Figura 3: Notação Fluxional usada por Clarkey

$$“1:\overline{x+a}^{m}$$

Fonte: Cajori, 1993, p. 198, v. 2

As notações de Newton também foram utilizadas fora da Inglaterra. Um matemático francês, Alexis Fontaine, usou-as sem mesmo defini-las, apenas foi apresentado que:

Figura 4: Notação Fluxional usada po Fontaine 1

$$\overset{|}{x}-x=\dot{x},\ \overset{|}{y}-y=\dot{y},$$

Fonte: Cajori, 1993, v.2, p. 198

Tais notações usadas por Fontaine não foram aplicadas para velocidades, mas apareceram com outros usos, como uma pequena constante, ou um incremento na variável ou como também uma variação. Fontaine, mesmo tendo como principal notação a de Newton, as mesclava com as notações de Leibniz, como na figura abaixo:

Figura 5: Notação Fluxional usada po Fontaine 2

$$d\dot{s}=\frac{y\,d\overset{|}{\dot{y}}}{\dot{s}}$$

Fonte: Cajori, 1993, v.2, p. 198

Além disso, Fontaine ao escrever suas equações diferenciais, faz uso das notações de Newton ao invés do “dx” e “dy”.

Figura 6: Notação Fluxional usada po Fontaine 3

$$2n\dot{x}+(2-5n)\dot{y}=0$$

Fonte: Cajori, 1993, v.2, p. 198

O uso da notação com o ponto foi encontrada em várias reproduções dos trabalhos de Newton no século XVIII em diversos lugares da Europa, em diversos trabalhos de Ingleses. A simbologia de Leibniz não teve grande aceitação pelas revistas de Matemática da época, sendo que por mais de 15 anos, se usou apenas a notação desenvolvida por Newton. (CAJORI, 1993, v.2, p. 199)

Newton ao discorrer sobre a sua descoberta dos fluxões na revista *Philosophical Transactions*, ao se referir a si mesmo na terceira pessoa, e afirma que "não coloca seu Método em forma de símbolos, nem se limita a nenhum tipo particular de símbolos para fluentes e fluxões" [1]

Além disso, Newton ao descrever as áreas das curvas por fluentes, ele recorre a notação dos fluxões, usando-as em forma de fluxões ordenados. E ao descrever linhas por fluentes ele usa de quaisquer símbolos para as velocidades dos pontos que descrevem as linhas, ou seja, para denotar os fluxões de primeira ordem. E para o aumento da velocidade, também os denotas por outros símbolos, isto é, para denotar os fluxões de segunda ordem, como aparece em seu *Principia philosophiae* em 1687. (CAJORI, 1993, v.2, p. 200)

Newton usa de diversas notações para os fluxões, por exemplo, quando ele denota Fluentes por x, y e z, seus respectivos fluxões são escritos como p, q e r , X, Y e Z ou por sua mais conhecida notação $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$.

Newton, nessa mesma publicação, defende seu pioneirismo na simbologia do Cálculo, ao afirmar que a sua notação para os fluxões era a única em sua época, e que mesmo Leibniz não tinha desenvolvido nenhum símbolo para os Fluxões em seu método. E além disso, afirma que a simbologia que Leibniz utilizava para a diferenciação (dx, dy, dz) foi desenvolvida em 1677, ou seja, anos depois de sua primeira publicação sobre os fluxões. E por fim, Newton defende seu método com o argumento de que seus Fluxões era um método mais elegante do que o Método de Leibniz, pois seus fluxões seriam melhor compreensíveis em quantidades infinitamente pequenas, atém de serem mais naturais e geométricos que o Método Diferencial de Leibniz. (CAJORI, 1993, v.2, p. 200)

Agora nos voltamos para o Método Diferencial de Leibniz. Entre os anos de 1672 e 1676, Gottfried Wilhelm Leibniz se mudou para Paris, e foi influenciado pela Geometria Cartesiana, onde se familiarizou com o estudo das quadraturas, segundo Cajori (1993) . Dividia suas figuras em elementos ordenados, e em um de seus primeiros teoremas, publicado em Outubro de 1675, apresentou uma de suas primeiras notações

[1] Tradução livre pela autora de "Mr. Newton doth not place his Method in Forms of Symbols, nor confine himself to any particular Sort of Symbols for Fluents and Fluxions." (CAJORI, 1993, v.2, p. 200)

(Figura 7) que consistia em um sinal de igualdade, como podemos ver no teorema de Leibniz:

Figura 7: Primeiro Teorema de Leibniz

"Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum, sive omn. $\overline{xw} \sqcap$ ult. x, $\overline{\text{omn.}\ \overline{w}}$,, — omn. $\overline{\text{omn.}\ \overline{w}}$. Sit $xw \sqcap a\mathfrak{z}$, fiet $w \sqcap \frac{a\mathfrak{z}}{x}$, fiet omn. $\overline{a\mathfrak{z}} \sqcap$ ult. x omn. $\frac{a\mathfrak{z}}{x}$ — omn. $\overline{\text{omn.}\ \frac{a\mathfrak{z}}{x}}$; ergo omn. $\frac{a\mathfrak{z}}{x} \sqcap$ ult. x, omn. $\frac{a\mathfrak{z}}{x^2}$ — omn. omn. $\frac{a\mathfrak{z}}{x^2}$, quo valore in aequ. praecedenti inserto fiet: omn. $a\mathfrak{z} \sqcap$ ult. x^2 omn. $\frac{a\mathfrak{z}}{x^2}$ — ult. x, $\overline{\text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a\mathfrak{z}}{x^2}}}$ — $\overline{\text{omn.}\ \overline{\text{ult.}\ x.\ \text{omn.}\ \frac{a\mathfrak{z}}{x^2} - \text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a\mathfrak{z}}{x^2}}}}$. Et ita iri potest infinitum."

Fonte: Cajori, 1993, v.2, p. 201

Nesse teorema Leibniz introduz a noção do que chamamos hoje de Integração por partes. Falaremos mais detalhadamente sobre as notações das integrais no próximo capitulo deste trabalho.

Em uma contribuição de Leibniz para *Acta Eruditorum* em 1684, foi encontrada a notação "dx" que foi expressa como "$dw\ ad\ dx$", "$dx\ ad\ dy$" e também "$dx: dy$", mas não como:

Figura 8: Notação Fracionária da Derivada

$$\frac{dx}{dy}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Leibniz enfatizou a importância de a notação apresentar a variável a qual estava sendo trabalhada, por exemplo, quando escrevemos "dx" a variável a ser trabalhada é o x. Ele denotava a segunda derivada da seguinte forma:

Figura 9: Derivada de segunda ordem de Leibniz 1

$$ddx:dy^2$$

Fonte: Elaborada pela autora

Leibniz não abreviava suas notações. Ao precisar escrever, por exemplo, a segunda derivada de x, como estamos acostumados a denotar hoje em dia como na figura 10.

Figura 10: Derivada de segunda ordem usada nos dias atuais

$$(dx)^2$$

Fonte: Elaborada pela autora

Ele preferia deixar na forma:

Figura 11: Derivada de segunda ordem de Leibniz 2

$$dxdx \quad ou \quad ddx$$

Fonte: Elaborada pela autora

O autor James Mark Child em seu livro *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz* comenta que “Leibniz não nos dá a oportunidade de ver como ele teria escrito o equivalente a $dxdxdx$; seja como dx^3 ou $(dx)^3$.”[2] (CHILD, 1920)

Johann Bernoulli (1667 - 1748) estudou as teorias de Leibniz sobre o Cálculo e em sua contribuição para o *Acta Eruditorum,* usa da notação de Leibniz para as derivadas segunda como na figura 11 e usa a mesma estrutura para denotar o quarto diferencial como:

Figura 12: Derivada de quarta ordem de Leibniz

$$ddddv$$

Fonte: Elaborada pela autora

Somente vinte anos após a primeira publicação com as suas notações, Leibniz sugere o uso de números em sua simbologia, principalmente nas diferenciações de ordem mais elevadas. Em uma carta endereçada a Johann Bernoulli, em outubro de 1695, Leibniz escreve a equação que relaciona os dois símbolos:

Figura 13: Equação que introduz números nas notações das derivadas

$$d^m = \int^n \text{when } n = -m.$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.205

[2] Tradução livre pela autora de "Leibniz does not give us an opportunity of seeing how he would have written the equivalent of $dx\ dx\ dx$; whether as dx^3or $(dx)^3$" (CHILD, 1920)

Nesse mesmo ano, Leibniz, ao responder a uma crítica sobre seus desenvolvimentos no Cálculo, escreve ddx como d^2x e dddx como d^3x, que atualmente usamos para denotar as derivadas de segunda e terceira ordem, respectivamente.

Na primeira publicação de um livro sobre Cálculo feita por L'Hospital, levava em todo seu desenvolvimento as primeiras notações de Leibniz, como ddy, $dddy$ e $ddddy$, não usando números para indicar os índices de diferenciações mais elevadas. Em 1764 as notações de Leibniz foram encontradas nos trabalhos de Fontaine (o qual era adepto do método fluxional de Newton), além de Willian Hales, o qual também seguia o método de Newton, qual usava notações de Leibniz em 1804, porém as descreve sendo menos elegantes que as notações de Newton. (CAJORI, 1993, v.2, p.205)

No século XVIII, alguns matemáticos apresentam suas versões das notações de Leibniz, como Euler, ao escrever:

Figura 14: Derivada de Euler

$$d \cdot xdydz$$

Fonte: Elaborada pela autora

Para denotar:

Figura 15: Derivada de $xdydz$

$$d(xdydz)$$

Fonte: Elaborada pela autora

Tal notação também foi usada por Sylvestre François Lacroix, um matemático francês, porém quando escrevia $dx\ dy\ dz$, ele estava querendo denotar o produto de três diferenciações. Já Étiènne Bézout, também matemático francês diferenciou dx^2 de $d(x^2)$, o primeiro, para ele, indica o mesmo de $(dx)^2$, ou seja, o produto de dx por dx, já o segundo, indica a diferenciação de x^2. (CAJORI, 1993, v.2, p.205)

Lacroix ao denotar d^2y^2 como $(d^2y)^2$, generaliza na forma de:

Figura 16: Generalização da Derivada de Lacroix

$$d^n y^m \text{ indica } (d^n y)^m$$

Fonte: Elaborada pela autora

Além disso, Lacroix usa o ponto para denotar que a operação se aplica a todo produto das variáveis, ou seja, quando ele escreve:

Figura 17: Derivada de Lacroix 1

$$d{\cdot}x^2$$

Fonte: Elaborada pela autora

A diferenciação está sendo aplicada no x^2, que pode ser compreendido como o produto de x por x, ou quando temos:

Figura 18: Derivada de Lacroix 2

$$d{\cdot}uv$$

Fonte: Elaborada pela autora

Novamente a diferenciação esta sendo aplicada no produto de u por v. Quando nos deparamos com essa notação, devemos observar que todo o produto que se segue após o d acrescido por um ponto, equivale as variáveis que estão sendo diferenciadas.

Até a metade do século XVIII, nenhuma grande mudança na notação da diferenciação total foi encontrada, apenas uma notação dita provisória foi apresentada por Johann Bernoulli em 1706, usou Δ para denotar o coeficiente diferencial ou como ele também chamou “diferenças de frações”[3], onde antes ele usava em Latim da letra D.

As mudanças feitas a partir de então, em sua maioria, foram aplicadas nas novas concepções sobre o que seria as operações fundamentais, e assim demandando novos símbolos. (CAJORI, 1993, v.2, p.206)

Houve tentativas de aritmetização do cálculo que se iniciaram com a publicação de *Discourse Concerning Residual Analysis* em 1758 e *Residual Analysis* em 1764, as duas desenvolvidas por John Landen, porem esse processo foi considerado tão complicado que se tornou proibido. (CAJORI, 1993, v.2, p.206)

Em 1755, Landen publicou *Mathematical Lucrubations,* a qual seguia o método fluxional de Newton e suas notações. Mas em seu *Discourse Concerning Residual Analysis* acontece uma mudança, introduz dois novos símbolos. O primeiro $[x \mid y]$, para denotar o quociente de $y - u$ dividido por $x - v$, ou em outra notação $\Delta y{:}\, \Delta x$.

[3] Tradução livre pela autora de “*différences des fonctions”*

O outro símbolo $[x \perp y]$, é usado quando se escolhe um v igual a x, e assim o quociente de $y - u$ por $x - v$, em termos atuais, caminha para seu limite. Nesse caso particular essa notação $[x \perp y]$ é usada no lugar de $[x \mid y]$.

Essas duas notações possuem vantagens e desvantagens sobre suas escritas, uma das vantagens em comparação com a notação da figura 8, por exemplo, é a não necessidade do uso de uma notação fracionária, o que facilita a tipografia, alem de ficar alinhada ao texto, numa mesma altura. Porém a desvantagem nas notações de Landen, e de ela necessitar de muitos traços distintos, assim podendo haver erros em sua tipografia. Podemos observar tais notações na figura 19, que consiste em um trecho do trabalho de John Landen.

Figura 19: Trecho de *Discourse Concerning Residual Analysis* 1

$$\frac{y}{s} - [x \mid y] = \overline{x-v}^{\,m-1} \times Q,$$

$[x \mid y]$ being put for the quotient of $y-u$ divided by $x-v$. Now, when v is equal to x, the expreſſion $\overline{x-v}^{\,m-1} \times Q$ or its reciprocal will vaniſh, according as m is greater or leſs than 1. ——By ſuppoſing ſuch reciprocal to vaniſh, we have in general $s=0$, which is abſurd : therefore m muſt be greater than 1 ; and, conſequently, by taking v equal to x, and writing $[x \perp y]$ for the value of $[x \mid y]$ in the particular caſe when v is ſo taken, we have $\frac{y}{s} - [x \perp y] = 0$, and $s = \frac{y}{[x \perp y]}$.

Fonte: LANDEN, 1758

Landen ainda desenvolve mais um símbolo, considerando máximos e mínimos, denota:

Figura 20: Máximos e mínimos de Landen

$$[x \perp\!\perp y]$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.206

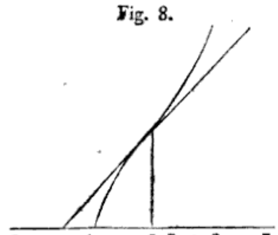
Para designar o quociente de $[x \perp y] - [v \perp u]$ por $x - v$, quando v é igual a x.

Essa notação é encontrada no trecho a seguir do trabalho de John Landen:

Figura 21: Trecho de *Discourse Concerning Residual Analysis* 2

appears by what we have said concerning tangents.

Fig. 8. Fig. 8.



Therefore the points of contrary flexion in curve lines (when the tangent at ſuch point is oblique to the baſe and ordinate) may be readily found by enquiring when $[x \perp y]$ is a maximum or a minimum. And, from what is done above, it evidently follows, that, writing $[x \perp\!\!\perp y]$ for the value of the quotient of $[x \perp y] - [v \perp u]$ divided by $x - v$, when v is therein taken equal to x,

$$[x \perp\!\!\perp y] \text{ will be } = 0, \text{ or } \frac{1}{[x \perp\!\!\perp y]} = 0,$$

when y correſponds to the point ſought.

Fonte: LANDEN, 1758

As notações de Landen não tiveram grande aceitação, não encontrando seguidores de seus símbolos. (CAJORI, 1993, v.2, p.206)

Já na França em 1764, Alexis Fontaine desenvolve as notações para a diferenciação parcial e diferenciação total, além de diferencia-las, como vemos na figura abaixo:

Figura 22: Trecho de *Mémoires donnés à l'Académie Royale des Sciences*

&c.

Cette expreſſion-ci $\frac{1}{dx} \cdot d\mu$ eſt donc bien différente de celle-ci $\frac{d\mu}{dx}$. La première ſignifie la différence de μ diviſée par dx; la ſeconde ſignifie le coëfficient de dx dans la différence de μ. 24

Fonte: FONTAINE, 1764

Nesse fragmento do trabalho de *Mémoires donnés à l'Académie Royale des Sciences*, escrito por Alexis Fontaine, contém duas notações semelhantes porém que dignam objetos matemáticos distintos, na primeira:

Figura 23: Derivada de u dividido por dx

$$\frac{1}{dx} \cdot du$$

Fonte: Elaborada pela autora

Fontaine explica como sendo a derivada de u dividido por dx, ou como Cajori (1993) escreve, derivada completa. Já a segunda notação:

Figura 24: Derivada de x em relação a u

$$\frac{du}{dx}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Fontaine a descreve como a variável x derivada em relação a u, ou como Cajori (1993) escreve, derivada parcial de x.

Essa notação para a diferenciação total foi pouco usada posteriormente, mas podemos encontrar-la no trabalho *Princípios Mathematicos* desenvolvido e publicado por José Anastacio da Cunha. No trecho abaixo de Cunha (Figura 25), aparecem algumas vezes as notações de Fontaine para a derivada total.

Figura 25: Trecho de *Princípios Mathematicos*

Seja $2\pi v = x$: ferá $\frac{v^2 dx}{dv} = 2\pi v^2$; expreffaõ que v infinito faz infinita. Naõ tem logo efta curva afymptota rectilinea. Efta he a Spiral de Archimedes.

VII. Seja y funcçaõ de x; e dx independente de x, faça $d^2y = A$, $d^3y = B$, $d^4y = C$, &c. Ou dx dependa, ou naõ dependa de x, fempre o valor de $\frac{dy}{dx}$ he o mefmo [15.6.]; e logo o mefmo o de $d\frac{dy}{dx}$; e da mefma forte o de $d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx})$, e o de $d(\frac{1}{dx}d(\frac{1}{dx}\frac{dy}{dx}))$, e affim por diante. Mas dx independente de x, faz $d\frac{dy}{dx} = \frac{A}{dx}$, $d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}) = \frac{B}{dx^2}$; $d\frac{1}{dx}d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx})) = \frac{C}{dx^3}$, e affim por diante: logo, ou dx dependa, ou naõ dependa de x, he, $A = dx\,d\frac{dy}{dx}$; $B = dx^2 d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx})$; $C = dx^3 d(\frac{1}{dx}d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}))$; $D = dx^4 d(\frac{1}{dx}(\frac{1}{dx}d(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx})))$; e affim por diante.

Fonte: CUNHA, 1790

Outro matemático que também usou a notação de Fontaine para as derivadas completas foi Alexandre Sarrazin Montferrier, conforme apresentado no trecho abaixo retirado do seu trabalho *Dictionnaire des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées.*

Figura 26: Trecho de *Dictionnaire des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*

$$\dot{A}_1 = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]$$

$$\dot{A}_3 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]$$

$$\dot{A}_4 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}}\cdot d\left[\frac{dFx}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]\right]$$

etc. etc.

Fonte: MONTFERRIER, 1835

Nessa notação de Montferrier o ponto acima do x, indica que, depois de todas as diferenciações, ao x é atribuído o valor que torna $\varphi x = 0$. (CAJORI, 1993, v.2, p.206)

Em *Théorie des fonctions analytiques* publicado e desenvolvido por Joseph-Louis Lagrange, sendo sua primeira publicação feita em 1797, exibe um novo tratamento dos conceitos fundamentais do Cálculo, onde não se manteve nas bases de Leibniz e Newton, buscou uma nova concepção nos processos da álgebra. (CAJORI, 1993, v.2, p.207)

Antes desse novo e marcante tratamento de Lagrange, as derivadas raramente eram usadas na Europa, foi ele quem, evitando o uso dos infinitesimais, fez as derivadas se disseminarem, colocando-as em destaque. Também chamou a atenção para a noção de função. (CAJORI, 1993, v.2, p.207)

No primeiro paragrafo de *Théorie des fonctions analytiques,* Lagrange explica que as funções vão se relacionar com as variáveis e as possíveis constantes , sendo elas entidades distintas entre si e que aparecerão em seu Cálculo, podendo assim trabalhar as variáveis sem se preocupar com a constantes. Explica também que a função funcionará para todos os valores de x possíveis. Além de apresentar o significado aceito de função ("qualquer quantidade formada de alguma maneira por outro montante"[4]), afirma que Leibniz e Bernoulli foram os primeiros a usa-las no sentido geral, e que desde então foram amplamente adotadas. (LAGRANGE, 1813, p.1)

Ainda nesse mesmo trabalho, continua definindo que o primeiro termo do desenvolvimento da função proposta será chamado de função primitiva, os próximos

[4] Tradução livre feita pela autora de *"à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité."* (LAGRANGE, 1813, p.1)

termos desse desenvolvimento serão formados por diferentes funções com a mesma variável, multiplicadas por potências sucessivas indeterminadas. Tais novas funções dependem apenas das funções primitivas as quais são derivadas, sendo assim chamadas de funções derivadas. (LAGRANGE, 1813, p.2)

E no decorrer dessa sua obra, ele trabalha as funções, chegando então a derivação das mesmas. Na pagina 18, ele introduz as suas novas notações para as derivadas das funções, ele escreve que $f'x$ denota a primeira derivada de fx; $f''x$ denota a primeira derivada de $f'x$; $f'''x$ denota a primeira derivada de $f''x$; e assim por diante. Afirmando que as denotariam dessa forma por simplicidade e coerência. (LAGRANGE, 1813, p.18)

Além dessa notação, Lagrange escreve fx como y, assim suas derivadas serão y', y'', y''', *etc.*

Assim tanto fx quanto y denotam as funções primitivas. E por consequência $f'x$ e y' serão funções primeiras, $f''x$ e y'' as funções segundas, $f'''x$ e y''' as funções terceiras, e assim por diante. (LAGRANGE, 1813, p.18)

Lagrange também relaciona suas notações com as notações fracionárias das derivadas, como na figura abaixo:

Figura 27: Relação entres as notações de Lagrange e as notações fracionárias

$$y' \ ou \ f'x \longrightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$y'' \ ou \ f''x \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' \ ou \ f'''x \longrightarrow \frac{d^3y}{dx^3}$$

etc

Fonte: Elaborada pela autora

Essas notações para as derivadas totais de fx, continuaram a aparecer nos trabalhos de Lagrange, como em seu *Leçons sur le calcul des fonctions* de 1801. (CAJORI, 1993)

Nesse seu trabalho de 1808, Lagrange afirma que o Cálculo envolvendo funções tem o mesmo propósito que o anterior Calculo Diferencial, e introduz a ideia de ligar o Cálculo com a Álgebra, tornando assim uma ciência separada. (LAGRANGE, 1808)

Podemos notar que nesses trabalhos de Lagrange há uma grande, ou mesmo total, semelhança com as notações que usamos hoje em dia no Cálculo Diferencial. Ele também consegue sintetizar e relacionar as principais obras no Cálculo de sua época, porém não se mantém nelas, cria sua própria base na Álgebra e insere de forma coerente e simples as funções, necessitando então criar novas simbologias.

A partir de então, surge um movimento para a reforma do Cálculo, um autor que tentou fazê-la, foi Johann Pasquich em 1798 ao publicar o *"Exponential Rechnung"* em que define que *"toda função pode ser expressa na forma* $y = Ax^a + Bx^b + \ldots$*, ele chama a função* $\in \mathrm{y} = \mathrm{aA}x^a + \mathrm{bB}x^b + \cdots$ *a exponencial de* y*"*[5] que nesse caso, o "$\in \mathrm{y}$" é na verdade o limite de $\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}/\Delta\mathrm{x}$. (CAJORI, 1993, v.2, p.208)

Johann Philipp Grüson desenvolveu uma notação similar a de Pasquich, em *"Calcul d'Exposition"*, para designar o mesmo limite, usou $\ni y$, sendo essa notação encontrada no trabalho de Lacroix intitulado *"Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral".* (CAJORI, 1993, v.2, p.208)

Tais notações de Pasquich e Grüson não foram bem aceitas pelos matemáticos da época, diferentemente da simbologia desenvolvida por Lagrange, que se tornou uma das mais aceitas e adotadas por muitos matemáticos, sendo também incorporada em outras notações. (CAJORI, 1993, v.2, p.208)

Também em 1800 foi desenvolvido por Louis François Antoine Arbogast novas notações em seu trabalho *"De Calcul des Derivations".* Seu Cálculo envolvia a teoria de série e incluía o Cálculo Diferencial como um caso particular. Tal notação foi mencionada em trabalhos de outros matemáticos como Lagrange e Lacroix. (CAJORI, 1993, v.2, p.209)

No prefácio desse mesmo trabalho, Arbogast considera que seu Cálculo irá interligar vários ramos da Análise, sendo aplicado em muitos objetos matemáticos, além de alcançar, sem muita dificuldade, resultados novos. Deve-se destacar que há também resultados ja existentes que foram apresentados pelo autor sob um novo olhar. Afirma, ainda, que seu trabalho é baseado em outros já feitos na área. (ARBOGAST, 1800) Continuando nesse mesmo prefácio, o Matemático afirma que:

[5] tradução livre feita pela autora "that every function can be expressed in the form $y = Ax^a + Bx^b + \ldots$, he calls the function $\in \mathrm{y} = \mathrm{aA}x^a + \mathrm{bB}x^b + \cdots$

> "Para formar o algoritmo das derivações, tornou-se necessário introduzir novos signos, tenho dado a este assunto particular atenção, sendo persuadido de que o segredo do poder de análise consiste na escolha feliz e uso de sinais, simples e característicos das coisas (1) Fazer as anotações, tanto quanto possível, análogas às notações recebidas, (2) Não introduzir notações que não são necessárias e que eu posso substituir Sem confusão por aqueles que já estão em uso, (3) Selecionar muito simples, mas que exibirão todas as variedades que as diferentes operações requerem.[6](CAJORI, 1993, v.2, p.209)

Arbogast empregou o “D” como a notação para a Derivação, porém essa notação já havia sido empregada por Johann Bernoulli. Tal notação foi usada, durante o final do século XVIII, por muitos matemáticos para denotar a diferença finita. (CAJORI, 1993, v.2, p.209)

Para Arbogast, $\mathrm{F}(\mathrm{a}+\mathrm{x})$ é qualquer função do binômio $\mathrm{a}+\mathrm{x}$, que se desenvolve em uma série de acordo com as potências de x, em outra palavras:

Figura 28: Série desenvolvida de acordo com as potências de x,

$$a+bx+\frac{c}{1.2}x^2+\ldots,\ \ onde\ \ a=Fa$$

Fonte: Elaborada pela autora

Ele denota com “D” a operação (derivada) em Fa, que gera b, de forma que:

Essa notação para derivada de Aborgast se manteve presente em muitos livros até os dias atuais. (CAJORI, 1993, v.2, p.209)

Figura 29: Notação D de Arbogast

$$b=DFa,\ \ c=DDFa,\ \ e\ \ assim\ \ por\ \ diante$$

Fonte: Elaborada pela autora

Nesse mesmo trabalho, Arbogast denota:

Figura 30: Derivada de Fa

$$D{\cdot}Fa$$

Fonte: Elaborada pela autora

[6] tradução livre feita pela autora de: “To form the algorithm of derivations, it became necessary to introduce new signs; I have given this subject particular attention, being persuaded that the secret of the power of analysis consists in the happy choice and use of signs, simple and characteristic of the things which they are to represent. In this regard I have set myself the following rules: (1) To make the notations as much as possible analogous to the received notations; (2) Not to introduce notations which are not needed and which I can replace without confusion by those already in use; (3) To select very simple ones, yet such that will exhibit ail the varieties which the different operations require.” (CAJORI, 1993, v.2, p.209)

Com essa inserção do ponto depois do “D” o significado se amplia para:

Figura 31: Notação D de Arbogast 2

$$D \cdot Fa = DFa \cdot D \cdot a$$

Fonte: Elaborada pela autora

Onde “Da” é uma variável e não vale 1.

Define o diferencial inverso, ou como Arbogast chama de integral, e denota como:

Figura 32: Diferencial inverso

$$d^{-1}, d^{-2}, \ \ldots$$

Fonte: Elaborada pela autora

Além de definir a derivada inversa e denotá-la como:

Figura 33: Derivada Inversa

$$D^{-1}, D^{-2}, \ \ldots$$

Fonte: Elaborada pela autora

A derivada inversa, para Arbogast, é a operação que reduz, em termos atuais, a ordem das derivadas, também é uma nova forma de denotar as derivadas como, por exemplo:

Figura 34: Derivada Inversa 2

$$DA = D^{-1} \cdot D^{2}A \ \textit{será a derivada inversa de} \ D^{2}A;$$
$$D^{0}A \ \textit{ou} \ A = D^{-1} \cdot DA \ \textit{será a derivada inversa de} \ DA$$

Fonte: Elaborada pela autora

No mesmo sentido temos:

Figura 35: Derivada Inversa 3

$$D^{-1}A \ \textit{será a derivada inversa de} \ A;$$
$$D^{-2}A \ \textit{será a derivada inversa de} \ D^{-1}A$$
$$\textit{ou}$$
$$\textit{será a segunda derivada inversa de} \ A$$

Fonte: Elaborada pela autora

E assim por diante.

No final Arbogast define de forma geral a derivada inversa da seguinte maneira: (ARBOGAST, 1800)

Figura 36: Generalização da Derivada Inversa

$$D^{-n} \text{ é a e-nésima derivada inversa de } A$$

Fonte: Elaborada pela autora

Tais notações para as derivadas inversas e diferenciações inversas (ou integrais) podem ser encontradas até os dias de hoje.

Os símbolos de Arbogast foram adotados por Christian Kramp, que desenvolveu em 1808, seu trabalho *Éléments d'Arithmétique universelle.* Nesse trabalho ao definir a função X como: (CAJORI, 1993, v.2, p.210)

Figura 37: Função X

$$X= Ax^a+Bx^b+Cx^c+\dots$$

Fonte: Elaborada pela autora

Na página 265, explica que DX é encontrado quando se "multiplicam todos os seus termos por seus termos por seus respectivos expoentes e depois os dividem por x"[7] (KRAMP, 1808)

Kramp, impulsionado pela crescente pesquisa na área da Análise Combinatória na Alemanha, afirma:

> "Arbogast é obrigado a assumir o teorema de Taylor, bem como as operações ordinárias do cálculo diferencial, como perfeitamente conhecido e demonstrado. Minhas derivadas, ao contrário, são perfeitamente independentes de toda noção do infinitamente pequeno ou do limite, do Diferencial ou de diferenças e é igualmente desacostumado deixar de ser estabelecido no teorema de Taylor, este teorema não aparece, mas como um simples corolário de uma proposição muito mais geral".[8] (CAJORI, 1993, v.2, p.211)

Além de se referir de forma crítica, as notações dx e dy no capítulo "Notations" desse mesmo trabalho:

---

[7] tradução livre feita pela autora de "multiplie tous ses termes par leurs exposans respectifs, et qu'ensuite on divise par x."(KRAMP, 1808)

[8] tradução livre feita pela autora de "Arbogast is obliged to assume the theorem of Taylor, as well as the ordinary operations of the differential calculus, as perfectly known and demonstrated. My derivatives on the contrary are perfectly independent of all notion of the infinitely little or of the limit, of the differential or of differences; and is equally disinclined let to be established on the theorem of Taylor, this theorem does not appear but as a simple corollary of a proposition much more general." (CAJORI, 1993, v.2, p.211)

> "Pesquisas posteriores me convenceram da inutilidade absoluta desse fator constante ou divisor dx, bem como da noção do infinitamente pequeno do qual ele sempre foi considerado inseparável, supondo-o igual à unidade, uma proibição a toda idéia do Infinito e faz com que toda esta parte da análise reingresse no domínio da álgebra ordinária ".[9](CAJORI, 1993, v.2, p.211)

Já no século XIX, estudiosos ingleses tentaram "reformar" a notação de Newton, como por exemplo, nos fluxões de ordem superior, colocaram apenas um ponto acima da letra e indicando a ordem por um número no lugar onde estariam os expoentes. (CAJORI, 1993, v.2, p.215)

Peter Barlow usou dessa reformulação das notações "newtonianas", quando generalizou os fluxões da seguinte forma:

Figura 38: Generalização dos Fluxões

$\dot{x}^n$ *para o e-nésimo fluxão*

Fonte: Elaborada pela autora

Já James Mitchell ao denotar os fluxões com radicais ou fracionários, faz uso dos parênteses, e o "ponto" se localiza no lugar onde estariam os expoentes, conforme a figura abaixo:

Figura 39: Fluxões com radicais ou fracionários

Lastly, if the flowing quantity be a surd, as $\sqrt{x-y}$, its fluxion is $(\sqrt{x-y})^{\cdot}$; if a fraction $\frac{xx}{d-y}$ it is denoted by $\left(\frac{xx}{d-y}\right)^{\cdot}$

Fonte: MITCHELL, 1823, p.178

Mitchell, no entanto, também faz uso da letra F ou $f,$ em expressões compostas, para denotar os fluxões, porém esse uso pode causar diferentes interpretações, como se pode entender F ou f como função ou mesmo como fluente. Todavia, essa prática não era nova, outros autores já usavam essa notações, Alexis Fontaine na França e George Cheyne em Londres foram alguns que a usaram. Cheyne também usou ϕ para denotar o "fluxão de". (CAJORI, 1993, v.2, p.215)

[9] tradução livre feita pela autora de "Later researches have convinced me of the absolute inutility of this constant factor or divisor dx, as well as the notion of the infinitely small from which it has always been considered inseparable. In supposing it equal to unity one ban ishes all idea of the infinite and one causes all this part of analysis to re-enter the domain of ordinary algebra." (CAJORI, 1993, v.2, p.211)

De acordo com Charles Babbage em *Passages from the Life of a Philosopher* de 1884, as notações de Leibniz demoraram a serem aceitas em Cambridge, e essa demora pode ter sido causada pela dificuldade de pensar e raciocinar em uma nova língua, o que, provavelmente desencorajou o seu uso. Além de afirmar que as notações dos fluxões e o seu uso, deve ter sido um grande impedimento para o progresso da ciência inglesa, porém reconhece que seria quase impossível um autor pouco conhecido, introduzir as notações de Leibniz em uma obra, e teria poucos seguidores e matemáticos que a aceitariam. (BABBAGE, 1864, p.38)

Sendo assim, Babbage se propõe a fazer uma coleção de exemplos sobre Cálculo Diferencial e Integral, para que aqueles que não aceitavam (ou não entendiam) as notações de Newton, poderiam recorrer a uma bibliografia alternativa. (BABBAGE, 1864, p.39)

Assim, em poucos anos, a mudança das notações de Newton para a de Leibniz estaria estabelecida. (CAJORI, 1993, v.2, p.216)

August Leopold Crelle, sendo influenciado pelo Cálculo e notações de Lagrange, e baseando-se no teorema de Taylor, usa da notação “d” para designar a “derivada da função” de Lagrange, ou somente a “derivação” de Arbogast, como na figura abaixo:

Figura 40: Derivada da função de Crelle

“Die Anwendung der verschiedenen . . . . vorgeschlagenen Bezeichnungen auf die allgemeine Entwicklung von $f(X+k)$ würde in der Zusammenstellung folgende sein:

$$f(X+k)=|X+k|=fX+kdfX+\frac{k^2}{2}d^2fX \; . \; . \; . \; . +\frac{k^n}{1\cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; n}d^nfX$$

$$=|X|+kd|X|+\frac{k^2}{2}d^2|X| \; . \; . \; . \; . +\frac{k^n}{1\cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; n}d^n|X|, \text{ oder wenn } fX=Y$$

$$\text{heisst, } =Y+kdY+\frac{k^2}{2}d^2Y \; . \; . \; . \; . +\frac{k^n}{1\cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; n}d^nY. \text{ Ferner:}$$

$$f(X+k)=fX+DfX+\tfrac{1}{2}D^2fX \; . \; . \; . \; . +\frac{1}{1\cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; n}D^n|X|, \; . \; . \; . \; . \text{”}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.216

Também sendo altamente influenciado por Lagrange, August-Louis Cauchy em *Résumé des leçons donnés à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal,* de 1823, e em *Leçons sur le calcul différentiel* de 1829, faz uso das notações de Leibniz:

Figura 41: Notações de Leibniz para os diferenciais

$$dx, \quad dy, \quad \frac{dx}{dy}$$

Fonte: Elaborada pela autora

E das notações de Lagrange:

Figura 42: Notações de Lagrange para as derivadas das função f

$$F' \ e \ f'$$

Fonte: Elaborada pela autora

Para as primeiras derivadas, com as quais estabeleceu um padrão, que é usado até os dias atuais. (CAJORI, 1993, v.2, p.21)

Foi com Martin Ohm, que a tentativa de "reformar" as notações do Cálculo ressurgiu. Em sua obra *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* de 1829, foi apresentado seu novo simbolismo ao escrever o Teorema de Taylor:

Figura 43: Teorema de Taylor reescrito por Ohm

$$f(x+h)=f(x)+\partial f(x) \cdot h+\partial^2 f(x) \cdot \frac{h^2}{2!}+ \ldots\ldots$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.217

Há uma notável influência do simbolismo de Arbogast, contudo Ohm substitui o D pelo ∂.

Figura 44: Nova notação para as derivadas desenvolvida por Ohm

$$\partial(A+B \cdot x^m)_x = mBx^{m-1}, \quad \partial(a^x)_a = x \cdot a^{x-1}, \quad \partial(a^x)_x = a^x \cdot \log a .$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.217

Sendo y_x a função de x, então quando escrevemos:

Figura 45: Notação para as derivadas desenvolvida por Ohm

$$(\partial^a y_x)_a$$

Fonte: Elaborada pela autora

É o mesmo que denotarmos:

Figura 46: Notação para as derivadas desenvolvida por Ohm 2

$$\partial^a y_x$$

Fonte: Elaborada pela autora

Se escrevermos o a no lugar do x. (CAJORI, 1993, v.2, p.217)

Ohm também faz uso das notações de Leibniz, e as relaciona com as suas. Posteriormente, mescla suas notações com as de Leibniz, como na figura abaixo:

Figura 47: Relação entre as notações de Leibniz e Ohm

$$\frac{dy}{dx} = \partial y_x \,, \qquad d^2y = \partial^2 y_x \cdot dx^2 \,, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \partial^2 y_x \,.$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.217

Suas notações obtiveram grande reconhecimento na Alemanha, além de serem encontradas também na Áustria como, por exemplo, no trabalho de Ferdinand Wolf de 1845, que faz uso de várias notações do Cálculo, tais como a de Ohm, Lagrange e Leibniz, como afirma Cajori no trecho destacado abaixo: (CAJORI, 1993, v.2, p.217)

Figura 48: Trecho de *A History of Mathematical Notations*

Ohm's notation found some following in Germany. For instance, F. Wolff[3] in 1845 writes f_x to designate a function of x, and $y-y' = \partial f_{x'}(x-x')$ as the equation of a line through the point x', y'; Wolff uses also the differential notation dx, dy, d^2y, and the derivative $\frac{dx}{ds}$.

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.217

Abbé Moigno, em seu trabalho *Leçons de calcul Différentiel et de calcul Intégral, rédigées d'aprés les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.,* o qual foi escrito em conjunto com Cauchy, afirma que substitui as notações:

Figura 49: Notações de Leibniz

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}dx, \quad \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{dz}{dx}dx, \quad \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}dx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Por notações mais compactas como:

Figura 50: Notações e Moigno

$$y'_x = D_x y,\ d_x y,\ z'_x = D_x z,\ z'_y = D_y z,\ d_x z,\ d_y z$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.218

Ele também denota o diferencial e a derivada, onde $z = F(y)$ e $y = f(x)$:

Figura 51: Diferencial de Moigno

$$d_x z = z'_x dx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Que equivale a escrever:

Figura 52: Derivadas parciais

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Mas de acordo com Moigno é normal suprimir os índices x e y e escrever:

Figura 53: Derivadas parcias 2

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Nos Estados Unidos, as notações do Cálculo tiveram dois períodos distintos, antes 1824 eram encontradas, em sua maioria, notações de Newton, já de 1824 s 1841 eram usadas, quase que exclusivamente, notações de Leibniz. (CAJORI, 1993, v.2, p.218)

Benjamin Pierce, em 1841, adotava o “D” de Arbogast para denotar a derivada em seu trabalho *An Elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces,* cujo primeiro volume foi publicado em Massachsettes.(CAJORI, 1993, v.2, p.218)

Pierce, afirma que a derivada da função é dada pela diferença entre dois de seus valores que são correspondentes a dois diferentes valores da variável da função, e quando essa diferença é infinitamente pequena ela será chamada de diferencial. E assim, irá denotá-las como: (PIERCE, 1852)

Figura 54: Trecho de *An Elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces*

Differentials are denoted by the letters δ, δ', &c., d, d', &c., D, D', &c.

Fonte: PIERCE, 1852, p.179

Além disso, de acordo com Pierce, "o quociente do diferencial da função dividido pelo diferencial da variável, em que a função se aplica, é chamado de coeficiente diferencial da função" [10](PIERCE, 1852, p.182)

Figura 55: Derivadas de Pierce

$$d_c f \cdot x = \frac{df \cdot x}{dx}$$

$$d_c^2 f \cdot x = d_c \cdot d_c \cdot f \cdot x$$

Fonte: Elaborada pela autora

Pierce também calcula as diferenciações de funções trigonométricas, conforme observamos no trecho abaixo do seu trabalho *An Elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces.*(PIERCE, 1852)

Figura 56: Trecho de *An Elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces* 2

96. *Corollary.* By the same process we should find

$$d_c \,.\, \cos.^{[-1]} x = d_c \text{ arc cos. } x = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (506)$$

97. *Problem.* To differentiate $\text{tang.}^{[-1]} x = \text{arc tang. } x$.

Solution. Let $y = \text{tang.}^{[-1]} x$

or $\text{tang. } y = x$,

so that, by differentiation,

$$\frac{dy}{\cos.^2 y} = dx = dy \sec.^2 y = dy\,(1 + \text{tang.}^2 y) = dy\,(1 + x^2)$$

and

$$d_c \,\text{tang.}^{[-1]} x = d_c\, y = \frac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1}. \qquad (507)$$

Fonte: PIERCE, 1852, p.203

[10] tradução livre feita pela autora de "The quotient of the differential of a function divided by the differential of the variable is called the differential coefficient of the function; […]"(PIERCE, 1841, p.182)

A notação “D” para o diferencial foi amplamente usada em diversos trabalhos nas Américas, mas mesmo assim não superou o uso da simbologia de Leibniz. Alguns matemáticos preferem a notação “Dy” ao invés da notação como na Figura 7, para evitar que o aluno cometa o erro de considerar a derivada como uma fração. Porém tal notação fracionária da derivada possui flexibilidade de usos, pois permite a passagem simples da derivada para o diferencial, ou do diferencial para a derivada, com apenas regras algébricas simples.(CAJORI, 1993, v.2, p.218-219)

Mesmo com essa flexibilidade da notação de Leibniz, George S. Carr tentou introduzir, de forma experimental, uma nova notação para as derivadas, sendo seu formato bem diferente das demais, ele denotou como:(CAJORI, 1993, v.2, p.219)

Figura 57: Derivadas de Carr

$$y_x = \frac{dy}{dx},$$

$$y_{2x} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$y_{3x} = \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\ldots$$

Fonte: Elaborada pela autora

Essa notação não foi muito bem aceita e acabou não sendo adotada em trabalhos posteriores.

Com o crescente uso das funções, o estudo das suas continuidades se tornou importante e, por consequência, se desenvolve a consideração das derivadas pelos lados, direito e esquerdo. Assim se tornando necessário desenvolver notações para tais.(CAJORI, 1993, v.2, p.219)

Peano, em 1903, usa:

Figura 58: Derivadas de Peano

$$D(f,u,x)$$

Fonte: Elaborada pela autora

Para denotar a derivada de “ f ”, na classe “u” em relação a variável “x”. Sendo a sua derivada pela direita dada por:

Figura 59: Derivada pela direita

$$D(f,x+Q_0,x)$$

Fonte: Elaborada pela autora

E a derivada pela esquerda, por:

Figura 60: Derivada pela esquerda

$$D(f,x-Q_0,x)$$

Fonte: Elaborada pela autora

Há uma noção de generalização das derivadas na forma:

Figura 61: Generalização das derivadas

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Onde n não precisa ser um número inteiro como, por exemplo:

Figura 62: Derivada com n não inteiro

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Que foi aplicada por Leibniz, Euler, Fourier, Cauchy e Liouville. Esse conceito foi aplicado inicialmente nos diferenciais. Euler, em 1730 e 1731, escreve: (CAJORI, 1993, v.2, p.219) :

Figura 63: Derivada de Euler

$$\frac{d^{1/2} y}{\sqrt{dx}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Seguindo a definição dada por Leibniz:

Figura 64: Derivada com definição de Leibniz

$$\frac{d^{1/2}y}{\sqrt{dx}} = \sqrt{x}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Sendo adotada por Liouville em sua definição. Esses conceitos chamaram a atenção de George Peacock, que os usou para ilustrar seu “princípio da permanência de formar equivalentes”[11](CAJORI, 1993, v.2, p.219)

Peacock escreve:

Figura 65: Princípio da permanência de formar equivalentes

$$\frac{d^n(e^{mx})}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

Fonte: Elaborada pela autora

E assim toma como definição dessa operação mesmo quando “n” não é inteiro positivo. (CAJORI, 1993, v.2, p.220)

Esse desenvolvimento não obteve grandes resultados, mas mostra a influência que a notação adequada possui nas generalizações.

A generalização das derivadas foi bastante usada na Inglaterra por D.F. Gragory, P. Kelland e por Oliver Heaviside, que a usaram para o desenvolvimento da teoria eletromagnética. (CAJORI, 1993, v.2, p.220)

As notações das derivadas percorreram um grande caminho até os dias atuais. Assumiram muitas formas possíveis e diferentes, facilitando seu uso, dando ao seu usuário a escolha da notação mais eficaz no problema a ser resolvido.

Em todo o seu desenvolvimento, as derivadas foram rodeadas por polêmicas no âmbito do seu pioneirismo. Há um consenso entre a sociedade científica em geral, que vários matemáticos contribuíram para a consolidação das propriedades das derivadas, dando à Newton e Leibniz o mérito do primeiro passo em direção ao Cálculo Diferencial.

[11] tradução livre feita pela autora de "principle of the permanence of equivalent forms." (CAJORI, 1993, v.2, p.219)

Agora nos voltamos para o estudo da Simbologia das Integrais, que também teve um caminho de mudanças nas suas notações, não tão extenso quanto as derivadas. Além de também ter começado a ser desenvolvida por Leibniz e Newton. Tal caminho estudaremos melhor no próximo capítulo.

2. Integrais e suas simbologias

Uma das primeiras aparições da notação $\int$ para a integral foi em outubro de 1675, em um manuscrito de Leibniz, em que usa:

Figura 66: Primeira Integral de Leibniz

$$\int l$$

Fonte: Elaborada pela autora

Para designar $omn. l$, ou seja, a soma de todos os "$l's$". (CAJORI, 1993, v.2, p.242)

Essa notação para a integral de Leibniz, pode ser identificada pela letra "S" alongada, a qual era usada por Leibniz em sua época. Mas somente 11 anos após sua primeira aparição, a $\int$ foi publicada no meio acadêmico. (CAJORI, 1993, v.2, p.242)

Em 1686, Leibniz fez uso de uma notação um pouco mais compacta, parecendo com a forma atual da letra "f". Como vemos na figura abaixo:

Figura 67: Fórmula cycloidal

$$y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}.$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.242

Onde Leibniz descreve a formula cicloidal. (CAJORI, 1993, v.2, p.242)

Essa notação foi usada por Louis Carré em 1701, e em 1704 por John Craig em seu artigo *Philosophical Transactions of London.* E continuou aparecendo em outras obras, como nas de Manfredi em 1707 e de Wolf em 1713. (CAJORI, 1993, v.2, p.242)

A notação mais alongada de Leibniz, como na figura 66, reaparece com Johann Bernoulli em *Leibnizens Mathematische Schriften* datado de 1858. É nomeada com o termo "integral" por Johann Bernoulli, porém o primeiro a usar esse termo foi seu irmão Jacob Bernoulli. Além disso, John Bernoulli propôs a Leibniz que usasse o "I" como sinal da integração, porém logo aceitou $\int$ como a notação da integral. (CAJORI, 1993, v.2, p.243)

Klügel defende, em seu trabalho *Mathematisches Wörterbuch,* que o "I" seria mais apropriado para denotar a integração, porém observamos que essa notação não seria bem adaptável no século XIX, pois havia, nessa época em diante, a necessidade de indicar simbolicamente os limites de integração. (CAJORI, 1993, v.2, p.243)

Em um dos seus artigos publicado no *Acta Eruditorum* entre 1694 e 1695, Leibniz adiciona uma virgula após a sua notação, como na figura abaixo:

Figura 68: Integral com vírgula

$$\int ,xxdx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Johann Bernoulli não escreve a virgula no volume desse mesmo trabalho de 1698. Alguns escritores dos séculos seguintes, colocam um ou dois pontos no lugar da virgula.

Figura 69: Integral com um e dois pontos

$$\int .xxdx \; ou \quad \int :xxdx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Waring em seu trabalho *Meditationes Analyticae,* faz uso das duas notações, a de Newton para os fluxões e a de Leibniz para as integrais.

Figura 70: Integral de um Fluxão

$$\int . \frac{\dot{x}}{x} \, (log x)$$

Fonte: Elaborada pela autora

Em *Instituitiones Calculi Integrales* escrito por Euler em 1778, encontra-se a notação:

Figura 71: Integral de uma sequência

$$\int pdx \int qdx \int rdx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Que não equivale ao produto das integrais de p, q e r, mas sim a integral aplicada em tudo o que se segue. (CAJORI, 1993, v.2, p.244)

Em relação ao diferencial na integração, o consenso até então, era escreve-lo, como na figura 72, porém essa prática não era universalmente aceita. (CAJORI, 1993, v.2, p.244)

Figura 72: Integral com diferencial

$$\int y dx$$

Fonte: Elaborada pela autora

Adotando o conceito, de Leibniz, de integral ser uma soma, necessita do uso do diferencial. Porém, se considerarmos a integração como o inverso da diferenciação, a omissão do diferencial pode ser feita. Leibniz faz uso desses dois tipos de notação, no seu trabalho de 1686 adota a notação de tipo mostrado na figura 72. Já no seu manuscrito de 1675, escreve: (CAJORI, 1993, v.2, p.244)

Figura 73: Integral sem diferencial

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Outros autores também preferem omitir o diferencial na integração, como Benjamin Pierce quando escreve em seu trabalho *Curves, Functions and Forces* de 1846: (CAJORI, 1993, v.2, p.244)

Figura 74: Generalização da Integração de Pierce

$$(n+1) \int .ax^n \;=\; ax^{n+1}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Willian R. Hamilton em 1858 relaciona:

Figura 75: Integração de Hamilton

$$\int_\theta (\qquad) = \int (\qquad) d\theta$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.244

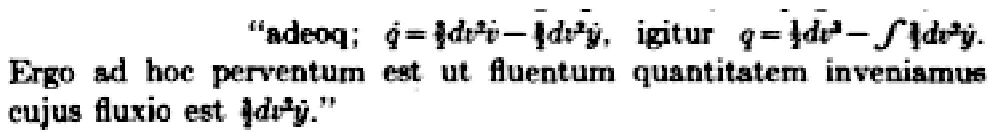
Newton publicou seus trabalhos sobre Cálculo só a partir de 1687, apesar de ter comunicado seus colegas sobre seu desenvolvimento no Cálculo no período de 1665 a 1687. (CALÁBRIA; BONFIM, 2017) Alguns anos antes, em 1685, John Craig (colega de Newton) usou a notação de Leibniz para os diferenciais, em seu trabalho *Methodus figurarum.* Craig continua empregando os diferenciais de Leibniz nos anos seguintes, sendo que no ano de 1703, em um de seus artigos, Craig emprega o sinal de integração de Leibniz. (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

Em 1716, George Cheyne publica em Londres, seu trabalho intitulado *Philosophical Principles of Religion, Part II,* que contem uma discussão, feita em 23 de setembro de 1713 em um de seus capítulos, sobre o zero ao infinito. Tal capítulo foi escrito usando os símbolos de Leibniz para a diferenciação e integração. Porém em 1718, Cheyne muda seu campo simbólico ao publicar seu trabalho *De Calculo Fluentium,* onde só utiliza a simbologia Newtoniana. Essa mudança foi impulsionada pelo aumento da controvérsia entre Newton e Leibniz, e seus respectivos seguidores. (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

De Moivre, entre os anos 1702 e 1703, no volume XXIII do *Philosophical Transactions of Londres,* usa o conceito de fluxões de Newton com o sinal de integração de Leibniz. (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

No trecho abaixo, ele faz uso da simbologia de Newton e Leibniz numa mesma expressão, o que nos mostra, que mesmo seguindo Newton, De Moivre recorre a conveniência da simbologia Leibniziana para integração. (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

Figura 76: Trecho de *Philosophical Transactions of Londres*



"adeoq; $\dot{q} =$ [illegible] $dv^2\dot{v} -$ [illegible] $dv^2\dot{y}$, igitur $q =$ [illegible] $dv^3 - \int$ [illegible] $dv^2\dot{y}$. Ergo ad hoc perventum est ut fluentum quantitatem inveniamus cujus fluxio est [illegible] $dv^2\dot{y}$."

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.245

Outros exemplos de seguidores de Newton que fazem uso dessa simbologia "mista" são John Keill no período de 1714 a 1716, Waring, Olinthus, Gregory, Payfair, John Brinkley, entre outros. Esses autores, em sua maioria, usavam a notação da forma: (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

Figura 77: Simbologia Mista

$$\int \dot{x}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Até os dias atuais, a notação de Newton para os fluxões é usada junto com a notação para integração de Leibniz, no estudo da mecânica e da álgebra de vetores. (CAJORI, 1993, v.2, p.245)

Retornando ao século XVIII, encontramos mais dois autores que fazem uso da simbologia Leibniziana para o Cálculo Integral. Benjamin Robins usa da notação de Leibniz ao fazer uma revisão de uma publicação de L. Euler. E Joseph Venn, publica em 1768, um trabalho intitulado *History of Matematics* onde usa da simbologia de Leibniz e em seus próximos trabalhos continua a usar de forma extensiva a simbologia Leibniziana, mesmo usando os conceitos de fluxão e fluente, mas nunca a notação de Newton. E talvez foi o último que fez uso da simbologia de Leibniz para a diferenciação e integração na Grã-Bretanha. A primeira notação empregada para o Cálculo que foi publicada na imprensa Inglaterra foi a de Leibniz, porém na última parte do século XVIII, ela desaparece em solo britânico. (CAJORI, 1993, v.2, p.246)

Para entendermos melhor esse desaparecimento, nos voltamos para o simbolismo de Newton para os fluentes.

Os fluentes de Newton foram publicados em seu trabalho *Quadratura Curvarum* em 1704, onde os denotava como:

Figura 78: Fluente de primeira ordem

$$\overset{|}{x}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.246

A qual seria a integral de x, ou mesmo:

Figura 79: Fluente de segunda ordem

$$\overset{||}{x}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.246

Seria a integral do fluente da figura 78.

Podemos observar na sequência da figura abaixo:

Figura 80: Sequência de Fluentes e Fluxões

$$\overset{||}{x},\ \overset{|}{x},\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.246

Cada termo dessa sequência se observado da esquerda para a direita é o fluxão do termo sucessor. Agora se considerarmos olhar da direita para a esquerda, cada termo se torna o fluente do seu antecessor. (CAJORI, 1993, v.2, p.246)

Newton adotou outra notação para os fluentes, colocou o termo a ser integrado dentro de um retângulo como na figura 82. Essa nova notação foi publicada em seu trabalho *De Analysi per equationes numero terminorum infinitas.* (CAJORI, 1993, v.2, p.246)

Figura 81: Notação do retângulo para o Fluente

$$\boxed{\frac{aa}{64x}} = \int \frac{aa \cdot dx}{64x}$$

Fonte: Elaborada pela autora

Tal notação de Newton para o fluente (ou integração) não foi bem aceita, e não foi popular nem mesmo na Inglaterra. O grande problema dessa notação do retângulo, é a dificuldade de usá-la na preparação de um manuscrito ou mesmo na impressão. Já a notação para o fluente como na figura 78 podia ser confundido com uma abcissa ou uma serie de abcissas, como na figura abaixo: (CAJORI, 1993, v.2, p.246)

Figura 82: Série de abcissas

$$x,\ x',\ x''$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.246

A simbologia para os fluentes de Newton não foram tão populares nem mesmo na Inglaterra. Mesmo assim, foi usada por Brook Taylor em seu trabalho *Methodus incrementorum* em 1715, como na figura abaixo:

Figura 83: Trecho de *Methodus incrementorum*

“$\overset{||}{x}$ designat fluentem secondam ipsuis x” and (p. 38) “$\dot{p} = -r\dot{s}$, adeoque $p = -\boxed{r\dot{s}}$.”

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.246

Já em seu *Principia* (Livro II, Lema II), Newton deixa de usar as notações que ja havia feito para os fluentes, e começa a usar letras maiúsculas para designar os fluentes e letras minúsculas para os fluxões. (CAJORI, 1993, v.2, p.247)

Figura 84: Trecho de *Principia (Livro II, Lema II)*

"If the moments of any quantities A, B, C, etc., increasing or decreasing, by a perpetual flux, or the velocities of the mutations which are proportional to them, be called a, b, c, etc., the moment or mutation of the generated rectangle AB will be $aB+bA$."

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.247

Nesse trecho, Newton denota o que chama de "momento" e "fluxão" com o mesmo símbolo. O fluxão, para Newton sempre será a velocidade e nunca uma "quantidade infinitamente pequena". Já o "momento", na maioria das vezes, é entendido por ele como uma "quantidade infinitamente pequena". Essa notação é provisória. (CAJORI, 1993, v.2, p.247)

Colin Maclaurin (1698-1746), matemático escocês, não usa nenhuma notação para o fluente (ou integração), apenas escreve:

Figura 85: Fluente de Maclaurin

"$\dot{y}z+\dot{z}y$, the fluent of which is yz."

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.247

E em diversos trabalhos, da mesma época, não foi encontrado nenhum símbolo para o fluente (ou integração). (CAJORI, 1993, v.2, p.247)

A notação de Leibniz, como na Figura 72, não teve grande concorrência, uma variação foi encontrada em alguns trabalhos da França e Italia, tal notação seria uma outra forma da de Leibniz para a integração, como vemos na figura abaixo:

Figura 86: Variação da notação de Leibniz

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.247

E foi usada na França, por Reyneau em 1708, como vemos no trecho abaixo do seu trabalho *Usage de L'Analyse*:

Figura 87: Trecho de *Usage de L'Analyse*

$$S.\frac{gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{p}}{\overline{a+bx^n}^{p+1}} = \frac{g}{\overline{m+1}\times a}x^{m+1} - \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times a^2}gbx^{m+1}$$

$$+ \frac{\overline{m+1+pn+n}\times\overline{m+1+pn+2n}}{\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}\times a^3}\times gb^2x^{m+1+2n} - \&c.$$

4°. L'integrale abregée ſera le quotient qu'on vient de trouver, au devant duquel on aura mis la grandeur complexe (qui eſt ſous le ſigne dans la differentielle propoſée) élevée à la puiſſance $p+1$; dans notre exemple l'integrale ſera S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{g}{\overline{m+1}\times a}x^{m+1}$

$$- \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times a^2}\times gbx^{m+1+n} + \&c.$$

Fonte: REYNEAU,1782

Foi usada, também na França, por L'Abbé Sauri, em 1774, em seu trabalho *Cours complet de mathématiques: Tome V,* como vemos na figura abaixo:

Figura 88: Trecho de *Cours complet de mathématiques: Tome V*

$$S.\frac{(dA)dx}{dy.}.$$

Fonte: SAURI, 1774

Já na Italia foi usada por Frisi no seu trabalho *Paulli Frisii Operum Tomus primus* de 1782, de onde foi retirado o trecho abaixo:

Figura 89: Trecho de *Paulli Frisii Operum Tomus primus*

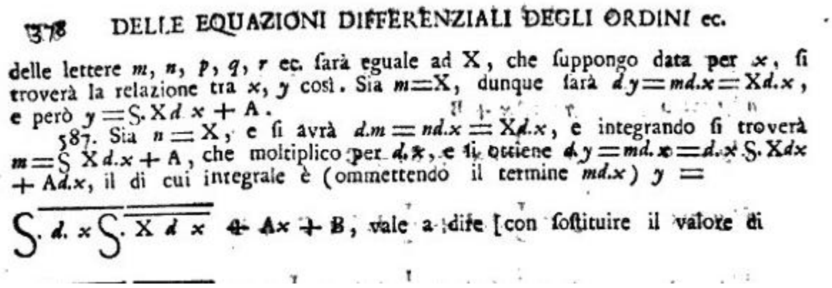
INFINITORUM. 303

ſi numeri n, m ſint integri, fracti, poſitivi, negativi, aut etiam irrationales, r vero ſit numerus integer, ſemper erit algebrice quadrabilis area $S.\frac{bx^{rn-1}dx}{(a+cx^n)^m}$.

Fonte: FRISI, 1782

E também por Gherli em 1775, para denotar as integrais múltiplas, como observamos no trecho abaixo retirado do seu trabalho *Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure:*

Figura 90: Trecho de *Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure*



378 DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEGLI ORDINI ec.

delle lettere m, n, p, q, r ec. ſarà eguale ad X, che ſuppongo data per x, ſi troverà la relazione tra x, y così. Sia $m = X$, dunque ſarà $dy = md.x = Xd.x$, e però $y = S.Xd.x + A$.

587. Sia $n = X$, e ſi avrà $d.m = nd.x = Xd.x$, e integrando ſi troverà $m = S\, Xd.x + A$, che moltiplico per $d.x$, e ſi ottiene $dy = md.x = d.x\, S.Xdx + Ad.x$, il di cui integrale è (ommettendo il termine $md.x$) $y = S.d.x\, S.\overline{Xdx} + Ax + B$, vale a dire [con ſoſtituire il valore di

Fonte: GHERLI, 1775

Boscovich, também na Italia, em 1796, faz uso em algumas partes do seu trabalho *Elementi delle matematiche pure, Edizione terza Italiana,* uma letra s minúscula para designar a integração como na figura abaixo:

Figura 91: Notação de Boscovich

$$s\, a\, x^m\, dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Depois, nesse mesmo tratado, usa da notação de Leibniz para a integração como na figura 72, e por final faz uso da notação:

Figura 92: Integração de Boscovich

$$\int \frac{cy^2\, dx}{2r}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Onde, aparentemente, foi usada para preencher todo o espaço à frente da fração. (CAJORI, 1993, v.2, p.248)

O uso dessas duas notações das figuras 72 e 92 não é comum numa mesma publicação, sendo porém a última utilizada, freqüentemente para integrais especiais.

Também usam a notação contida na figura 86, Fourier no trabalho escrito em 1811 e publicado em 1824, como podemos ver no trecho abaixo:

Figura 93: Trecho do trabalho de Fourier

"... . And taking the integral from $x=0$ to $x=\pi$, one has, on representing these integrations by the sign $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}\varphi \sin \cdot i\,x\,dx = \ldots\ldots$"

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Mais tarde, Fourier usa a notação de Leibniz, a qual encontra-se em uso até os dias atuais.

Claude Louis Marie Henri Navier, orientando de Fourier, usa a notação, como na figura 85, no seu artigo sobre o movimentos de fluídos, como vemos no trecho abaixo:

Figura 94: Trecho do trabalho de Navier

"Le signe $\mathcal{S}$ désigne une intégration effectuée, dans toute l'entendu de la surface du fluide. ..."

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Lagrange, na terceira edição de *Mécanique analytique,* escreve;

Figura 95: Trecho de *Mécanique analytique*

"Nous dénoterons ces intégrales totales, c'est-à-dire relatives à l'étendue de toute la masse, par la charactéristique majuscule $\mathcal{S}$, en conservant la charactéristique ordinaire $\int$ pour désigner les intégrales partielles ou indéfinies."

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Onde explica que a notação como na figura 85, será usada em seu trabalho para designar as integrais totais. Já a notação de Leibniz será usada para designar as integrais parciais ou indefinidas.

Em *Cours d'Analyse,* volume I de C. Jordan, datado de 1893 usa a notação:

Figura 96: Integral de uma função no domínio E

$$\int_E$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.248

Para designar a integral de uma função no domínio E, além de afirmar que geralmente será denotado dessa forma. (CAJORI, 1993, v.2, p.248)

De acordo com Cajori (1993), foi encontrado apenas um escritor que rejeita a notação de Leibniz para a integração, sendo ele, August Leopold Crelle, matemático alemão, fundador do *Crelle's Journal.* Não usa nenhuma das já conhecidas notações para a integração. Em 1813, no seu trabalho *Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grössen,* argumenta que uma vez o diferencial "d" estando na posição de um "multiplicador", a operação inversa, ou seja, a integração, basta ser denotada como um divisor, como na figura abaixo: (CAJORI, 1993, v.2, p.249)

Figura 97: Notação para a Integração de Crelle

$$\frac{1}{d}, \frac{1}{d^2}, \frac{1}{d^3}, \ \dots$$

Fonte: Elaborada pela autora

Crelle partiu da concepção da operação inversa à Derivada, assim como Leibniz, e com isso escolheu uma notação de acordo com essa escolha. Entretanto, Leibniz também considerava a integração como um somatório, sendo assim, escolheu sua notação (Figura 65) a partir da primeira letra da palavra *summa.* Crelle não obteve seguidores de sua notação. (CAJORI, 1993, v.2, p.249)

O primeiro a indicar os limites de integração com símbolos foi Euler, antes os limites de integração eram indicados apenas com palavras. (CAJORI, 1993, v.2, p.249)

Euler fez essa notação em seu trabalho *Instituitones calculi integralis,* contendo seu desenvolvimento no campo do Cálculo Integral. Vemos essa notação dos limites de integração na imagem abaixo:

Figura 98: Integração com limites

$$Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \left[\begin{matrix} ab\, x^n = \frac{1}{2} \\ ad\, x \;\; = 1 \end{matrix}\right]$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.249

A notação de Euler foi usada, com a omissão do "ab" e "ad", entres os anos de 1819 e 1820, por F. Sarrus e H. G. Schmidten. (CAJORI, 1993, v.2, p.249)

A notação para integrais definidas que usamos hoje em dia foi um grande avanço para a notação do Cálculo Integral. Sendo ela, introduzida por Joseph Fourier, um dos primeiros matemáticos franceses da primeira parte do século XIX, escreve *La Théorie analytique de la chaleur* em 1822.

Nesse trabalho, Fourier, delimita e explica seus limites de integração e exemplifica na função em que esta trabalhando, como vemos na figura abaixo:

Figura 99: Trecho de *La Théorie analytique de la chaleur*

$\int_a^b$ intégrale qui commence lorsque la variable équivalent à a, et qui est complète lorsque la variable équivant à b; et nous écrivons l'équation (n) sous la forme suivante

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)dx + \text{etc.''}$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.250

Fourier já tinha usado essa mesma notação em *Mémoires* escrito para a Academia Francesa entre os anos de 1819 e 1820, sendo uma parte reescrita em 1822. (CAJORI, 1993, v.2, p.250)

Sua notação com os limites de integração foi adotada por diversos matemáticos, como Giovanni Plana, quando escreveu:

Figura 100: Notação com os limites de integração

$$\int_0^1 a^u\, du = \frac{a-1}{Log.\ a};$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.250

Foi usada também por Augustin-Jean Fresnel quando escreveu seu trabalho sobre a Teoria Ondulatória da Luz, entre os anos 1821 e 1822. Cauchy também à usou em *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur la calcul infinitésimal,* escrito em 1823. (CAJORI, 1993, v.2, p.250)

Baseando-se nessa mesma idéia, podemos observar F. Sarrus em 1823 usando a notação:

Figura 101: Integração definida de Sarrus

$$|F(x)|_a^x \qquad |_a^x F(x)$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.250

Para designar o processo de substituição dos limites "a" e "x" na integral de $F(x)$, a qual foi usada também por Moigno e Cauchy. (CAJORI, 1993, v.2, p.250)

Ohm, na Alemanha, desenvolve uma nova notação para as integrais definidas:

Figura 102: Integrais definidas de Ohm

$$\int_{x+a} \varphi . dx \text{ or } (\partial^{-1}\varphi_x)_{x+a},$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.250

Sendo denotado por "x" o limite superior de φ e "a" o inferior, sendo essa notação aderida em 1830 e 1846 e seus trabalhos *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* e *Geist der Differential- und Integral-Rechnung,* que de acordo com Cajori (1993), seria mais conveniente que a de Fourier.

Algumas pequenas mudanças na notação da integral definida foi necessária a partir do estudo de funções de variável complexa como, por exemplo, quando Forsyth, em 1893, integra em torno de uma fronteira "B", denota na forma de :

Figura 103: Integração em torno de uma fronteira B

$${}_B\int$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.251

Ou quando Kramers, em 1909, integra em torno de um círculo, escreve, algumas vezes, a integração usando o símbolo $\oint$.

Peano em 1903, denota a integral de “f” dada no intervalo de “a” à “b” como:

Figura 104: Integral de “f” dada no intervalo de “a” à “b”

$$\int (f, a \vdash\!\dashv b)$$

Fonte: CAJORI, 1993, v.2, p.251

A simbologia das Integrais não teve um grande caminho como a simbologia das Derivadas, mesmo assim pequenas mudanças foram necessárias devido ao crescente estudo no campo do Cálculo Integral.

Considerações Finais

Podemos observar que o uso de letras distintas como símbolos feito por Leibniz obteve mais sucesso ao longo da História do Cálculo, demonstrando melhor o seu uso como operadores, facilitando também seu uso em fórmulas. Diferentemente da simbologia de Newton, que usou apenas pontos para os fluxões, podendo confundir o seu leitor, aumentando também o risco de erro tanto na sua grafia quanto na sua interpretação, pois um leitor desatento pode esquecer que seus fluxões estão sendo calculados em relação à uma única variável, geralmente em relação ao tempo. Por outro lado, se necessitamos calcular derivadas em relação à mesma variável, o uso da notação de Newton pode nos economizar na grafia e diminuir a redundância das notações.

De acordo com Cajori (1993) uma boa notação deve possuir algumas características importantes que contribuíram para a sua adoção, como ser clara e denotar com nitidez o conceito e operação a ser representada. Ainda deve ser adaptável aos novos desenvolvimentos da Ciência. Ser simples, fácil de escrever e de ser impressa também é desejável. Podemos observar que no decorrer do nosso estudo, as notações mais bem aceitas foram aquelas que possuíam todas, ou a maioria, dessas características.

Assim, no decorrer da História do Cálculo Diferencial foi de maior aceitação as notações que decorriam das palavras “derivada”, “diferença”, “diferencial” e “derivativo”, ou seja, notações usando as letras d, D e ∂, que podemos relacionar com a primeira letra latina das palavras citadas.

As notações para a derivada, como podemos observar na figura 8, é amplamente adotada até os dias atuais pelos livros didáticos, sendo que podemos notar que uma das suas qualidades é a sua fácil adaptação em diversos problemas como, por exemplo, podemos com poucas operações algébricas tornar uma derivada em um diferencial. Um maior rival desse tipo de notação desenvolvida por Leibniz, foi as notações dos fluxões de Newton. Tal notação de Newton foi bastante usada em sua época, porém são poucos os livros nos dias atuais que realmente as utilizam, muitos mostram apenas como curiosidade, porém é efetivamente mais usada em livros didáticos de Física.

Já a notação para a integração que é usada nos dias atuas é a introduzida por Leibniz, não obteve grandes variações e adaptou-se facilmente às aplicações da operação como, por exemplo a necessidade de denotar os limites de integração na integrais definidas. Nos livros didáticos atuais é usada unicamente a notação da integração de Leibniz. Já a notação dos fluentes desenvolvida por Newton foi logo deixada de lado pelo seu próprio criador, pois sua aceitação foi muito baixa, até mesmo na Inglaterra, devido a sua difícil grafia, compreensão e baixa adaptação em problemas do Cálculo.

Leibniz e Newton partiram de caminhos diferentes em direção ao Cálculo, além de possuirem preocupações distintas. Newton se apoiou em uma linguagem rigorosa, se baseando na simbologia da Geometria Clássica. Já Leibniz defendia que com a fundamentação do Cálculo, nascia a necessidade da criação de um sistema simbólico.

Leibniz tem um lugar de destaque na simbologia da Matemática, suas contribuições, não só para o Cálculo, foram muito importantes para o desenvolvimento da Matemática, pois sua simbologia facilitou a escrita e compreensão dos conceitos matemáticos mais complexos.

Newton também tem lugar de destaque tanto na Matemática quanto em outras áreas da Ciência, seu desenvolvimento cientifico é notável. E como Presidente da Royal Society pode ter exercido grande influência na produção cientifica da época.

Constatamos no decorrer das nossas pesquisas que o desenvolvimento da simbologia das integrais não foi tão extenso quanto o das derivadas, e nesse desenvolvimento, as contribuições dos matemáticos foram grandes e numerosas. E como sugestão para a continuidade desse trabalho seria, se possível, o levantamento biográfico de todos esses matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento tanto das derivadas quanto das integrais.

Referências Bibliográficas

ARBOGAST, Louis François Antoine. **De Calcul des Derivations.** Estrasburgo: de L'imprimerie de Levrault, 1800.

BABBAGE, Charles**. Passages from the Life of a Philosopher**. Londres: Longman Green, 1864.

BARDI, Jason Socrates. **A Guerra do Cálculo.** 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010. Tradução de: Aluizio Pestana da Costa.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematical Notations.** New York: Dover Publications, Inc, 1993.

CALÁBRIA, Angélica Raiz; BONFIM, Sabrina Helena. **O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz:** Aproximações e Distanciamentos dos Métodos. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

CHILD, J. M.. **The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz.** Chicago e London: The Open Court Publishing Company, 1920. 246 p. Disponível em: <http://dynref.engr.illinois.edu/rvc_Child_1920.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2017.

CUNHA, José Anastacio da. **Principios Mathematicos.** Lisboa: 1790.

FONTAINE, Alexis. **Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps**. Paris: Royal Society, 1764.

FRISI, Paolo. **Paulli Frisii Operum Tomus Primus.** Milão: 1782.

GHERLI, Odoardo. **Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure.** Modena: 1775.

KRAMP, Christian. **Éléments d’Arithmétique Universelle**. Cologne: Th. F. Thiriart, 1808.

LAGRANGE, Joseph Louis. **Leçons sur le calcul des fonctions.** Paris: Libraire Pour Les Mathématiques, 1808.

LAGRANGE, Joseph Louis. **Théorie des Fonctions Analytiques.** 2. ed. Paris: Libraire Pour Les Mathématiques, 1813.

LANDEN, John. **A discourse concerning the residual analysis**. Londres: 1758.

MICHAELIS, 2015 – Dicionário online disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/> Acesso em: 22 mai. 2017.

MITCHELL, James. **Dictionary of the Mathematical and Physical**. Londres: G. And W. B. Whittaker, 1823.

MONTFERRIER, Alexandre Sarrazin**. Dictionnaire des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées**. Bruxelas: Libraire Classique Et Mathématique, 1835.

PIERCE, Benjamin**. An Elementary Treatise on Curves, Functions and Forces**. Boston e Cambridge: James Munroe And Company, 1852.

REYNEAU, Charles René. **Usage de L'Analyse.** Paris: 1782.

O'CONNOR, John J; ROBERTSON, Edmund F. **MacTutor History of Mathematics archive.** 2017. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Acesso em: 27 abr. 2017.

SAURI, M. L'abbé. **Cours complet de mathématiques: Tome V.** Paris: 1774.

WALLIS, Johannis. **De Algebra Tractatus.** Oxonia: Academia da Oxonia, 1693.

Apêndice

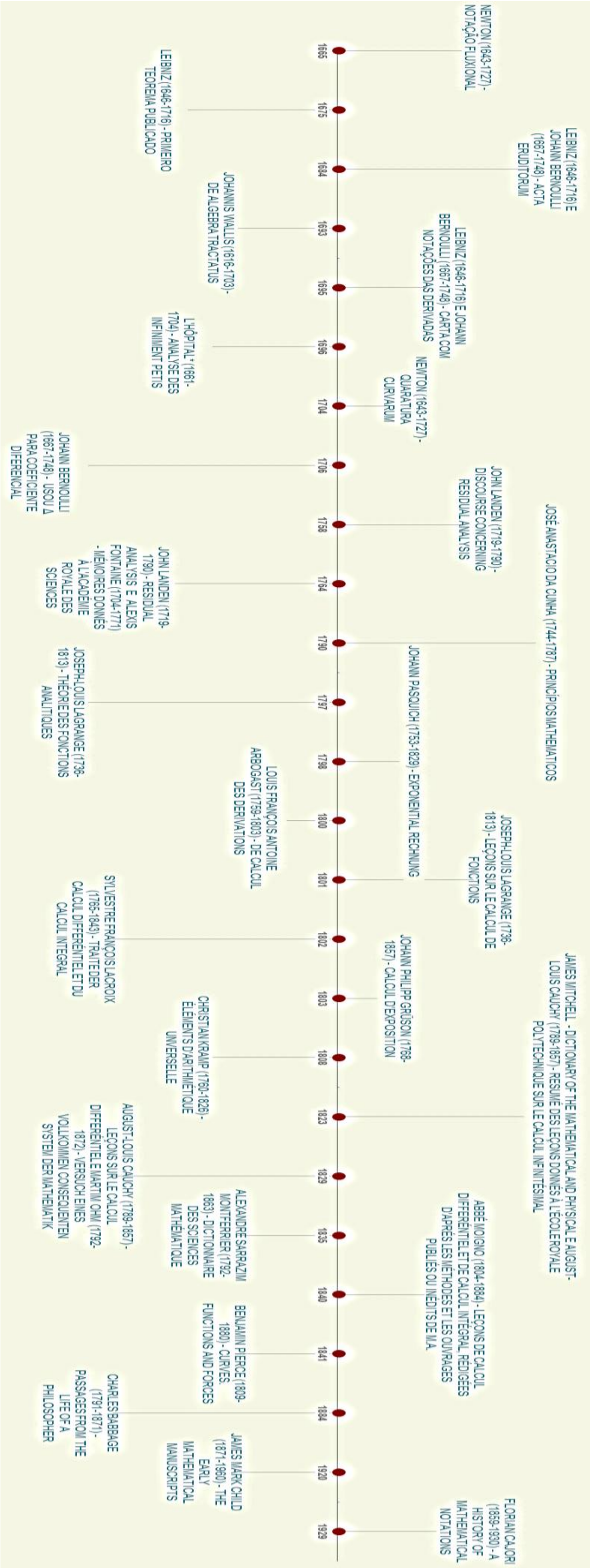
1. Linha do tempo das Derivadas:

Tabela 1: Linha do Tempo das Derivadas

ANO	AUTOR - OBRA
1665	Newton (1643-1727) - notação fluxional
1675	Leibniz (1646-1716) - Primeiro teorema publicado
1684	Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748) - *Acta Eruditorum*
1693	Johannis Wallis (1616-1703) - De Algebra Tractatus
1695	Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748) - carta com notações das derivadas
1696	L'Hôpital* (1661-1704) - *Analyse Des Infiniment Petis*
1704	Newton (1643-1727) - *Quaratura Curvarum*
1706	Johann Bernoulli (1667-1748) - Usou Δ para coeficiente diferencial
1758	John Landen (1719-1790) - *Discourse Concerning Residual Analysis*
1764	John Landen (1719-1790) - *Residual Analysis e* Alexis Fontaine (1704-1771) - *Mémoires Donnés à l'Académie Royale des Sciences*
1790	José Anastacio Da Cunha (1744-1787) - *Princípios Mathematicos*
1797	Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) - *Théorie des Fonctions Analitiques*
1798	Johann Pasquich (1753-1829) - *Exponential Rechnung*
1800	Louis François Antoine Arbogast (1759-1803) - *De Calcul des Derivations*
1801	Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) - *Leçons sur le Calcul de Fonctions*
1802	Sylvestre François Lacroix (1765-1843) - *Traite der Calcul Differéntiel et du Calcul Integral*
1803	Johann Philipp Grüson (1768-1857) - *Calcul d'Exposition*
1808	Christian Kramp (1760-1826) - *Éléments d'Arithmétique Unverselle*
1823	James Mitchell - *Dictionary of the Mathematical and Physical* e August-Louis Cauchy (1789-1857) - *Resumé des leçons donnés à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*
1829	August-Louis Cauchy (1789-1857) - *Leçons sur le calcul differéntiel* e Martim Ohm (1792-1872) - *Versuch eines vollkommen consequenten System der Mathematik*
1835	Alexandre Sarrazim Montferrier (1792-1863) - *Dictionnaire des Sciences Mathématique*
1840	Abbé Moigno (1804-1884) - *Leçons de calcul Differéntiel et de calcul Intégral, rédigées d'aprés les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M.A.*
1841	Benjamin Pierce (1809-1880) - *Curves. Functions and Forces*
1884	Charles Babbage (1791-1871) - *Passages from the life of a Philosopher*
1920	James Mark Child (1871-1960) - *The Early Mathematical Manuscripts*
1929	Florian Cajori (1859-1930) - *A History of Mathematical Notations*

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 105: Linha do Tempo das Derivadas



Fonte: Elaborada pela autora

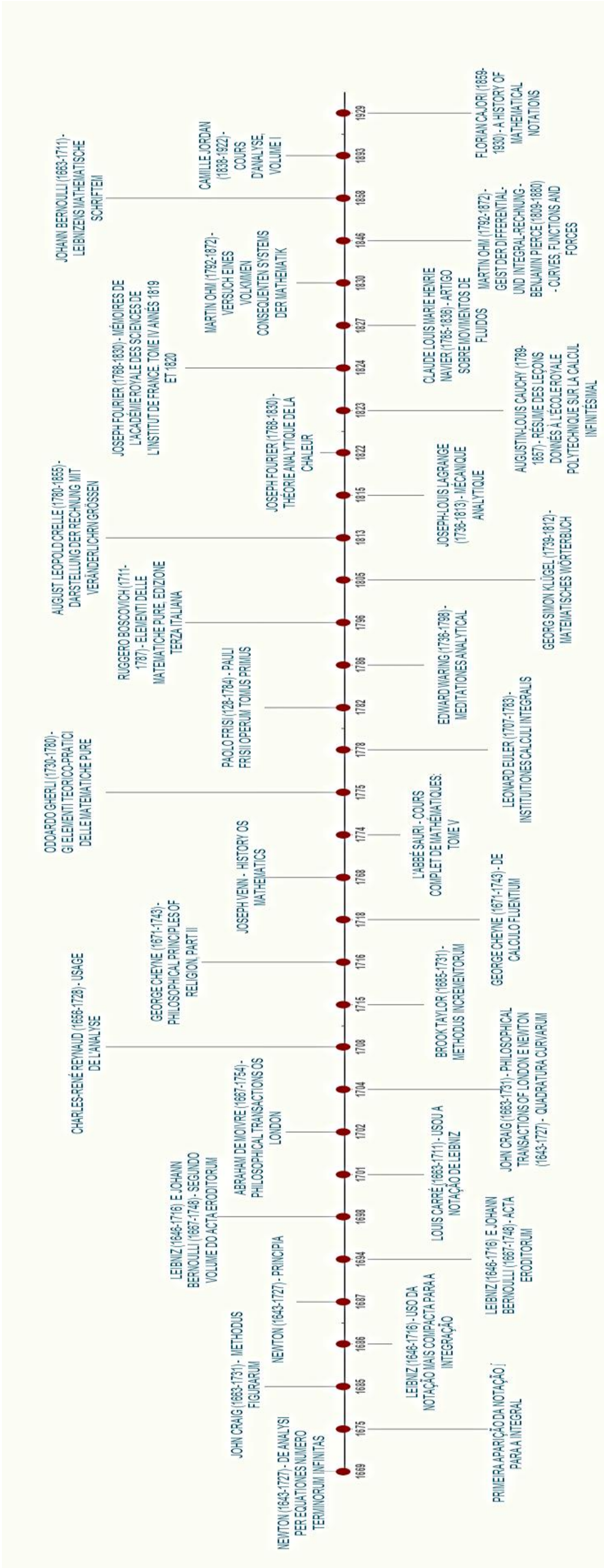
2. Linha do Tempo das Integrais:

Tabela 2: Linha do Tempo das Integrais

DATA	AUTOR - OBRA
1669	Newton (1643-1727) - *De Analysi per equationes numero terminorum infinitas*
1675	Primeira aparição da notação ∫ para a integral
1685	John Craig (1663-1731) - *Methodus figurarum*
1686	Leibniz (1646-1716) - uso da notação mais compacta para a integração
1687	Newton (1643-1727) - *Principia*
1694	Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748) - *Acta Eroditorum*
1698	Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748) - Segundo volume do *Acta Eroditorum*
1701	Louis Carré (1663-1711) - usou a notação de Leibniz
1702	Abraham De Moivre (1667-1754) - *Philosophical Transactions os London*
1704	John Craig (1663-1731) - *Philosophical Transactions of London* e Newton (1643-1727) - *Quadratura Curvarum*
1708	Charles-René Reynaud (1656-1728) - *Usage de L'Analyse*
1715	Brook Taylor (1685-1731) - *Methodus incrementorum*
1716	George Cheyne (1671-1743) - *Philosophical Principles of Religion, Part II*
1718	George Cheyne (1671-1743) - *De Calculo Fluentium*
1768	Joseph Venn - *History os Mathematics*
1774	L'Abbé Sauri - *Cours complet de Mathématiques: Tome V*
1775	Odoardo Gherli (1730-1780) - *Gi elementi teorico-pratici delle matematiche pure*
1778	Leonard Euler (1707-1783) - *Instituitiones Calculi Integralis*
1782	Paolo Frisi (128-1784) - *Pauli Frisii Operum Tomus primus*
1786	Edward Waring (1736-1798) - *Meditationes Analytical*
1796	Ruggero Boscovich (1711-1787) - *Elementi delle matematiche pure, edizione terza Italiana*
1805	Georg Simon Klügel (1739-1812) - *Matematisches Wörterbuch*
1813	August Leopold Crelle (1780-1855) - *Darstellung der Rechnung mit veränderlichrn Grössen*
1815	Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) - *Mécanique analytique*
1822	Joseph Fourier (1768-1830) - *Théorie Analytique de la Chaleur*
1823	Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) - *Résume des leçons donnés à l'école royale polytechnique sur la calcul infinitésimal*
1824	Joseph Fourier (1768-1830) - *Mémoires de l'académie royale des sciences de L'Institut de France. Tome IV annés 1819 et 1820*
1827	Claude Louis Marie Henrie Navier (1785-1836) - Artigo sobre movimentos de fluidos
1830	Martin Ohm (1792-1872) - *Versuch eines Volkmmen consequenten systems der Mathematik*
1846	Martin Ohm (1792-1872) - *Geist der differential-und Integral-Rechnung* e Benjamin Pierce (1809-1880) - *Curves, Functions and Forces*
1858	Johann Bernoulli (1663-1711) - *Leibnizens Mathematische Schriftem*
1893	Camille Jordan (1838-1922) - *Cours d'Analyse, volume I*
1929	Florian Cajori (1859-1930) - *A History of Mathematical Notations*

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 106: Linha do Tempo das Integrais



Fonte: Elaborada pela autora