RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
APLICAÇÃO DA TEORIA DE GEORGE POLYA

Filipe Barbosa de Arruda

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP
São Paulo
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Arruda, Filipe Barbosa de.
Resolução de problemas aplicação da teoria de George Polya – São Paulo: IFSP, 2013.
41f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
Orientador: Professor Mestre Henrique Marins de Carvalho.

1. Matemática. 2. Resolução de Problemas. 3. Análise Combinatória. 4. Situação- problema. Análise Combinatória. I. Título do trabalho.

FILIPE BARBOSA DE ARRUDA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: APLICAÇÃO DA TEORIA DE GEORGE POLYA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 19/06/2013 **CONCEITO:** 8,0

Prof. Me. Amari Goulart
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Profa. Me. Elisabete Teresinha Guerato
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Aluno: Filipe Barbosa de Arruda

“Os lábios dos sábios derramarão o conhecimento, mas o coração do tolo não fará assim”.

Provérbios de Salomão

Aos Meus Pais e Irmãos

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter dado forças, ânimo e coragem desde o primeiro momento em que entrei na instituição.

Agradeço aos meus pais que nos momentos de dificuldades sempre me aconselharam com palavras de ânimo. Aos meus irmãos Débora e Daniel que em conjunto me confortaram e fizeram valer a palavra família. A minha noiva Marcia, que sempre me apoiou e se mostrou muito companheira. A todos os meus irmãos na fé que se fizeram presente nos momentos mais difíceis e que certamente tem uma parcela na minha formação.

As pessoas que agradecerei a seguir fizeram parte da minha vida acadêmica, agradeço ao Toninho pelas boas risadas e conversas, Djalma, Robson, Patrícia pelo exemplo de coragem, Lindomar, Anderson (Pirucão), André Rosale, Diego, Thais Cezaro, Talita, Jéssica, Laura, Fernando Manholer, Ana Olivia, Pavan, Cideni, Aline, Silviene, Leandro, Everton Nonato por fazerem parte desta história, ao Orlando pelo companheirismo na reta final, ao Arnaldo que sempre se mostrou generoso, ao Anderson (Gordinho) por me dar um exemplo de força e luta, sei que são muitas pessoas, mas não posso deixar de agradecer.

Fica meu carinho especial a Renata e a Thais de Matos que posso chamar de amigas e que são pessoas muito queridas, com quem tive momentos de risadas de conselhos e de muito estudo e que levarei por toda a minha vida.

Não há nesses agradecimentos preferências, mas com certeza há pessoas que deixarão ótimas lembranças e é por isso que agradeço a Tatiane que foi uma verdadeira irmã e desde o primeiro semestre foi companheira nos estudos. E finalmente agradeço o meu irmão Diogo (Paçoca), que sempre estudou comigo, terei em minha memória lembranças de muitos momentos de estudo aonde enfrentamos muitas adversidades, mas com muito bom humor mesmo quando perdíamos a cabeça sempre restava uma risada e foi isso que fez a diferença.

Não poderia deixar de agradecer os alunos que se dispuseram a responder os questionários e a participar desta pesquisa e ao professor Dr. Rogério Ferreira da Fonseca por ceder as aulas para o desenvolvimento da atividade.

Agradeço a todos os professores da licenciatura em matemática que contribuíram para minha formação, principalmente professor Mestre Henrique Marins de Carvalho que teve muita paciência ao me orientar e que muitas vezes alimentou minhas ideias. A professora Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni e professora Dra. Cristina Lopomo Defendi por terem compreensão e ajudarem muito na formatação e correção deste trabalho.

Também ao professor Mestre Amari Goulart e a professora Mestre Elisabete Teresinha Guerato por participarem da banca avaliadora.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo pesquisar e analisar o método de Resolução de Problemas, tendo como base a obra, *A arte de Resolver Problemas* (2006) de George Polya. Para realizar esta pesquisa foi escolhido um tópico abordado no Ensino Médio: a Análise Combinatória. Assim, partindo dos conceitos de Polya, temos uma proposta de ensino de Análise Combinatória utilizando resolução de problemas. Apresentamos a teoria de Polya a uma turma do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP, em seguida aplicamos dois questionários nos quais buscamos saber qual a percepção de cada aluno sobre resolução de problemas e assim verificarmos qual a percepção dos alunos sobre suas potencialidades nas atividades de ensino.

Palavras-chaves: Matemática, Resolução de Problemas, Análise Combinatória, Situação-Problema.

ABSTRACT

The aim of this work is to research and analyse the Method of Problem Resolution based on the book "The Art of Problem Solving" (2006) by George Polya. The topic chosen for this research is addressed in High School education: Combinatorics. Thus, based on concepts described by Polya, we will have a proposal for teaching Combinatorics through problem solving. Polya's theory was presented to students taking a Undergraduate degree in Mathematics at IFSP. Afterwards, two questionnaires were applied, in an endeavor to understand each student's perception of problem solving, and therefore verify its potentiality in teaching activities.

Keywords: Mathematics, Problem Resolution, Combinatorics, Situation/Problem.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Resolver um problema, um exercício ou uma situação sempre foi um assunto presente na Matemática desde a antiguidade. Muitas descobertas, demonstrações de teoremas foram feitas através de questionamentos que foram desenvolvidos ao longo do tempo.

No inicio do século XX ocorreram muitas mudanças sociais e econômicas, essas mudanças refletiram na educação de modo geral, e não foi diferente na educação matemática. Com todas essas mudanças, iniciaram-se pesquisas de como ensinar matemática. Segundo Onuchic[1] (2008) "Ensinar em matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para fazer isso. Não há um caminho único para se 'ensinar' e 'aprender' matemática".

Nós acreditamos que a estratégia de resolução de problemas seja um bom auxílio para "ensinar" e "aprender" matemática, pois segundo Romanatto[2] (2008) "nesse novo cenário de práticas educativas com o conhecimento matemático, a resolução de problemas se apresenta como um dos caminhos mais promissores para o 'fazer matemática' em nossas salas de aula".

Para Polya resolver um problema não era simplesmente chegar à solução, para ele cada um de nós tem que desenvolver o próprio raciocínio e ter independência para resolver um problema.

Apresentaremos ao leitor, na Fundamentação Teórica, um pouco da história de George Polya, seus principais trabalhos e sua formação acadêmica, ou seja, uma

[1] Dr. Lourdes de la Rosa Onuchic possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (1954), mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos-USP (1971) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP (1978).

[2] Mauro Carlos Romanatto é professor do Departamento de Didática da Faculdade de Letras da Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) em Araraquara. Atua em grupos de pesquisa sobre Educação Matemática na UFSCAR (Universidade Federal de São Carlos) e também como líder em um Grupo de Estudos e Propostas Sobre Formação do Educador Contemporâneo (UNESP).

pequena biografia de Polya. Em seguida abordaremos o trabalho pelo qual ficou mais conhecido: a “Arte de Resolver Problemas”, de forma detalhada, colocando em evidência suas quatro fases.

Com a fundamentação teórica, iremos para o próximo tópico que é a Aplicação da Teoria, onde fica evidenciado o objetivo de nossa pesquisa que é uma proposta de ensino de Análise Combinatória utilizando resolução de problemas. Para aplicarmos a teoria escolhemos um tópico que é abordado no ensino médio: a Análise Combinatória que é um assunto vasto e acreditamos que a estratégia de Polya pode auxiliar no ensino do mesmo. A pesquisa será aplicada em alunos da disciplina de Fundamentos para o Ensino de Matemática – Combinatória e Probabilidade do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – *Campus* São Paulo.

Teremos na aplicação da teoria dois questionários, o primeiro com três questões que visa analisar o que os alunos conhecem sobre a estratégia de Polya, em seguida apresentaremos as quatro fases de Polya, trazendo cinco exercícios para resolvermos utilizando a estratégia desse autor.

Após resolvermos os exercícios entregaremos o segundo questionário com cinco questões, que foram elaboradas para verificarmos se eles compreenderam a teoria e se aplicariam essa estratégia em sala de aula.

Faremos um comparativo dos dois questionários analisando as respostas e trazendo comentários sobre as mais relevantes. Com todos esses dados discorreremos nossas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

George Polya nasceu em 13 de dezembro de 1887, em Budapeste (Hungria). Licenciou-se em 1905, foi um dos quatro melhores alunos da turma. Interessou-se por diversas áreas de estudos como: latim, física e filosofia e por fim a matemática. Em 1912 concluiu seu Doutorado. Em 1913 publicou um dos seus maiores resultados, a solução do problema do passeio aleatório. Em 1918, ele publicou artigos sobre a teoria dos números, combinatória e sistemas de votação. No ano seguinte, além de artigos sobre estes temas, ele publicou sobre astronomia e probabilidade.

Enquanto ele estava realizando estes trabalhos, revelaria alguns dos seus mais profundos resultados no estudo das funções integrais. Em 1920 foi promovido a professor extraordinário na ETH, em Zurique (Instituto Federal de Tecnologia de Zurique), e em 1928 após muitos trabalhos foi promovido a professor ordinário da ETH, Polya fez muitas pesquisas em diversas áreas da matemática vamos apenas citar algumas delas:

- transformada de Fourier de uma medida de probabilidade, mostrando que era uma função característica;
- escreveu sobre distribuição normal;
- simetria geométrica e a enumeração de classes de simetrias de objetos;
- funções de produção que utilizam os grupos de permutação para enumerar os isômeros em química orgânica;

Em seu trabalho de 1937, fez umas das maiores contribuições para a Análise Combinatória, o teorema de enumeração. E em 1945 publicou seu livro mais famoso “*How to solve it*”, que foi traduzido para o português em 1987 com o título “A arte de resolver problemas”. Como pudemos observar a formação de Polya não era voltada para a educação matemática, mas sim nas diversas áreas da matemática.

George Polya defende que o aluno ao resolver um problema de matemática, pode montar uma linha de raciocínio, ou seja, desenvolveria métodos de resolução nos quais o professor se colocaria como intermediário, fazendo questionamentos para que o aluno chegasse à solução. Polya define suas indagações como: “naturais, simples, óbvias, apenas o bom senso comum, mas elas formulam este bom senso em termos gerais” (2006, p.3). Fazendo essas indagações o professor terá dois objetivos, auxiliar o aluno a resolver o problema proposto e fazer com que ele desenvolva seus próprios métodos para resolver problemas futuros.

As indagações que Polya propõe foram dividas por ele em uma lista com quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Segundo Polya (2006), seguindo essas fases o aluno poderá apresentá-las mentalmente e realizar a resolução de uma maneira natural. Nesse processo, o professor faz as indagações tantas quanto forem necessárias para que gere em seu aluno interesse em resolver problemas.

O professor deve estar atento aos questionamentos, pois se uma questão for colocada de forma equivocada pode ao invés de ajudar, pode atrapalhar todo o processo já desenvolvido. As próximas seções apresentam as quatro fases da teoria de Polya.

2.1. Compreensão do Problema

Nesta primeira fase, é necessário que o enunciado do problema seja totalmente compreendido, que antes de caminhar para a resolução o aluno tenha analisado tudo que lhe é pedido. As indagações apresentadas por Polya são:

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou excessiva? Ou contraditória? Trace uma figura. Adapta uma notação adequada.

De acordo com Polya (2006), o problema escolhido deve chamar atenção do aluno e não ser muito fácil nem muito difícil, além disso, o aluno precisa compreender o problema e desejar resolvê-lo.

A importância desta primeira fase fica nítida quando colocadas às indagações, porque, ao ser questionado *Qual a incógnita?* o aluno é conduzido pelo professor a olhar para onde se quer chegar, ou seja, o que estou querendo encontrar. Assim na, primeira fase, o aluno terá a oportunidade de separar o problema, definindo bem quais dados se tem para resolver, aonde se quer chegar, o que condiciona a chegar à solução, usando todos os artifícios que são possíveis, até mesmo uma figura para ilustração, concretizando o problema e tornando-o mais interessante.

Para Polya é uma "tolice responder uma pergunta que não foi compreendida. É triste trabalhar para o fim que não se deseja. Essas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram" (2006, p.5). Essa primeira fase pode ser aperfeiçoada, de tal maneira que, quando o enunciado estiver claro e bem gravado, o aluno consiga permear pelo problema sem perder o enunciado de vista, ou seja, desenvolver o problema de quantas maneiras possíveis utilizando de quantas ferramentas matemáticas necessárias para sua resolução.

2.2. Estabelecimento de um Plano

O plano é estabelecido quando sabemos quais são os cálculos, contas ou desenhos que precisamos para chegar à resposta. Polya defende que "o principal feito na resolução do problema é a concepção de ideia de um plano" (2006, p.7). Os questionamentos dessa segunda fase são colocados de forma que o aluno tenha a concepção de ideia do plano, que ele tenha uma independência ao estabelecer seu plano de resolução.

Os questionamentos são:

Já viu este problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Ou um que seja útil aqui? Conhece um teorema que lhe poderia ser útil? Ou uma propriedade? Olha bem para a incógnita! Pensa num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlacionado e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método?

Ao colocar as indagações o professor deve observar como foram recepcionadas pelos alunos, e fazer uma comparação com suas próprias dificuldades em estabelecer um plano de resolução.

Uma das questões mais importantes desta segunda fase é: *conhece um problema correlato?* , pois uma boa ideia não surge de qualquer maneira. A boa ideia definida por Polya é baseada em uma experiência passada, daí a importância desta indagação, trazer à memoria do aluno algum teorema ou exercício já conhecido.

Essa pergunta pode trazer outra barreira, o aluno pode imaginar diversos problemas parecidos e não saber qual pode utilizar. Para eliminar esta barreira Polya sugere "Considere a incógnita! e procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante" (2006, p.8). Com essa sugestão além de eliminar diversas dessas barreiras é reforçada a primeira fase.

Polya reforça que as indagações acima não "fazem milagres", porém se bem compreendidas auxiliam no estabelecimento de um bom plano para resolução do problema. Contudo se a indagação não estiver clara ao aluno o professor pode variá-la, e procurar outras formas de resolver o problema. Uma questão que pode nortear essa variação seria: "*É possível reformular o problema?*" (2006, p.8). Essa reformulação deve ser acompanhada de perto pelo professor para que o aluno não se perca do problema inicial, sempre ponderando com questionamentos da primeira fase, trazendo assim os *dados e* a *incógnita* à tona.

Após as indagações e colocações mencionadas acima, espera-se que o aluno já tenha uma ideia de resolução, porém se essa ideia não ocorreu o professor pode colocar questões mais explicitas, sempre tomando as precauções para não fornecer diretamente a resposta.

Seguindo as indagações e as considerações, fica estabelecido o plano de resolução, o aluno terá em mãos todas as ferramentas necessárias para resolver o problema, agora é só executa-lo.

2.3. Execução do Plano

A execução do plano ou a resolução de fato do problema, se torna mais fácil segundo Polya se o aluno estabeleceu claramente a ideia do plano, ou seja, que dados são necessários para se resolver o problema e quais são as ferramentas matemáticas que serão utilizadas.

Contudo as indagações não são deixadas de lado, e são apresentadas da seguinte forma: *é possível verificar claramente que cada passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?* É uma fase que necessita de paciência para não se perder na resolução daí a importância das indagações, que são colocadas de forma que o aluno fique completamente inserido no processo de resolução.

Sendo assim, cabe ao professor nesta fase adotar notações corretas e fazer com que o aluno verifique cada passo, pois no momento da resolução não podem restar dúvidas que o caminho, é o correto. Segundo Polya esta correção ou verificação pode ser feira de maneira intuitiva, ou seja, perceber que o passo está correto ou formal, demonstrar que o passo está correto.

Portanto, com todas essas deduções, notações e concepções o aluno resolverá o problema.

2.4. Retrospecto

Normalmente quando chegamos à solução de um problema, exercício ou teorema, nós passamos para outra atividade. Para Polya essa é uma fase importante para que ocorra o aperfeiçoamento do aluno em resolver problemas. Esta fase consiste em reexaminar a solução do problema, revendo o resultado final, passando pelos caminhos que levaram à resposta. Nesta fase são colocadas indagações para que o aluno examine a solução.

As indagações são: *É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, para outros problemas?*

Com essas indagações Polya defende que “um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos que problema nenhum fica completamente esgotado” (2006, p.12). Polya ainda complementa “um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que problemas matemáticos tem pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação tem com qualquer outra coisa” (2006, p.13).

Com todos esses argumentos Polya acredita que os alunos se interessem por essa fase, pois se realmente seguiram os passos anteriores, terão uma curiosidade em saber se esse problema servirá para algum outro.

O proveito que podemos absorver desta última fase é que ao examinar novamente a resolução o aluno encontre fatos novos e teorias matemáticas não observadas anteriormente. Fazendo assim o aluno terá em mente uma estratégia a ser seguida e conseguirá resolver qualquer outro problema.

Com todas essas crenças e fundamentações nós aplicamos a teoria e analisaremos os seus resultados.

3 APLICAÇÃO DA TEORIA

Para aplicarmos a teoria, escolhemos alunos da disciplina de Fundamentos para o Ensino de Matemática – Combinatória e Probabilidade do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – *Campus* São Paulo.

A escolha por uma turma de formação de professores teve como objetivo analisar o que futuros professores pensam sobre essa estratégia, pois segundo Romanatto (2008) para o professor adotar esse tipo de estratégia deveria ter contato com ela em sua formação, só assim poderia aplicar a teoria de forma a aproveitá-la em toda sua essência. De fato, Polya defende que a participação do professor é essencial para que o trabalho seja bem desenvolvido.

A pesquisa foi realizada com a solicitação de respostas a dois questionários, intercalada com uma exposição sobre as estratégias de resolução de problemas, de acordo com as ideias de Polya.

O primeiro questionário conta com três questões (Anexo A), nesse primeiro momento, nós queríamos saber qual era a concepção da turma sobre resolução de problemas. Esse questionário foi respondido e entregue no momento da apresentação, 29 alunos estavam presentes.

A turma analisada, no período da realização da pesquisa, cursava o 2° semestre do curso de licenciatura em matemática, o professor que ministra as aulas tem uma abordagem desprendida de fórmulas, ou seja, um de seus objetivos é fazer com que seus alunos consigam resolver qualquer exercício da disciplina sem que seja necessário decorá-las.

Posteriormente fizemos a exposição com projetor, onde mostramos aos alunos a teoria de Polya, suas crenças e as suas quatro fases. Em seguida solicitamos que os alunos resolvessem cinco exercícios, de análise combinatória, seguindo a teoria de Polya. Demos uma semana para que os alunos entregassem o segundo questionário (Anexo B). Sendo que 13 dos participantes responderam e entregaram os questionários.

A escolha dos exercícios seguiu um raciocínio de quão fácil ou difícil o exercício era. Segundo Ponte[3] (2003) os exercícios são classificados de acordo com o número de tarefas que são necessárias para resolvê-lo. Seguimos essa estrutura só que, ao invés de tarefas, usamos a denominação de pré-requisitos. Desta forma os exercícios apresentados na pesquisa seguiram o pressuposto de Polya de utilizar ideias já vistas e compreendidas para auxiliar a próxima resolução.

3.1. Resolução de problemas como estratégia de ensino e aprendizagem

A aplicação do primeiro questionário foi feita antes da exposição da teoria de Polya, queríamos saber o que os alunos conheciam dessa teoria, como eles definem resolução de problemas e se houve contato com alguma estratégia de ensino de matemática diferenciada. Com os dados coletados nesse questionário de respostas abertas, fizemos uma relação com o segundo questionário pós-apresentação, levantando se houve alguma mudança de pensamento do tema proposto.

Questionamos a principio o que era resolução de problemas para eles, com o intuito de verificar se nas respostas encontraríamos interseções com a teoria de Polya, observamos que para muitos dos alunos resolução de problemas é simplesmente chegar à solução do mesmo. Obtivemos respostas diversas salientando que para se resolver um problema é necessário interpretação e utilizar ferramentas matemáticas. Pudemos perceber que o conhecimento sobre resolução que tinham era de senso comum, pois em nenhuma das respostas aparecem os preceitos de Polya.

Verificamos que os alunos em sua maioria nunca tiveram uma aula diferente do tradicional (aula expositiva), e os que tiveram foi somente no nível superior, então analisando o primeiro questionário podemos afirmar que a utilização de resolução de problemas em um curso de formação de professores é condição importante para que esses profissionais possam aplicar a mesma estratégia em suas aulas futuras. Esperamos a comprovação desta análise no segundo questionário.

[3] João Pedro da Ponte é Doutor em matemática pela Universidade de Georgia (EUA). Atualmente é diretor do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

3.2. Aplicação de teoria

A segunda parte da aplicação consistiu na apresentação da teoria de Polya, transmitimos aos alunos a ideia de que a resolução do problema não termina quando se chega à resposta e que por trás da resolução sempre há uma chance de aperfeiçoamento como defende Polya. Além das quatro fases apresentadas deixamos claro que Polya não teve uma formação específica em educação matemática, mas se preocupou bastante com as dificuldades de aprendizagem de seus alunos e procurou desenvolver métodos durante sua vida em sala de aula, e realmente acreditava que, ao aplicar as quatro fases de sua teoria de forma plena, o aluno conseguirá resolver qualquer problema.

Após a apresentação da teoria de Polya, pedimos que a turma resolvesse cinco exercícios (Anexo C), sendo que a resolução seguiu a proposta de Polya, resolvemos todos em sala, ponderando os questionamentos, trazendo a tona discussões sobre a metodologia. Não cobramos dos alunos a resolução correta e sim queríamos que eles entendessem a teoria apresentada.

Ao terminar a resolução dos exercícios deixamos o segundo questionário, composto de cinco questões. As analisarmos o segundo questionário buscamos a essência que apresentação da teoria deixou nos alunos, se eles aceitaram nossa ideia e se aplicariam essa teoria em sala de aula.

A teoria de Polya causou muitas surpresas nos alunos, o que chamou a atenção de muitos deles foi que a estratégia de Polya é bem dividida e que sua primeira fase preza pela interpretação e compreensão do problema e que muitas vezes nós partimos direto para a resolução sem ao menos termos compreendido o que se pede. Um dos alunos respondeu: "*Na verdade o fato de levar o aluno a pensar sobre o problema proposto, analisar todos os fatos relevantes para só então começar a resolver*", essa resposta justifica claramente a primeira fase de Polya e o quanto ela é relevante. No entanto, outros responderam que a teoria era importante na disciplina de Análise Combinatória porque era desprendida de fórmulas e que havia uma "facilidade" em aplicá-la, essa resposta teve influência de como o professor da disciplina apresentava o conteúdo para eles.

Em nossa apresentação, deixamos claro que para o professor aplicar a teoria deveria ter ciência de que no decorrer da resolução de um exercício poderia ocorrer a inserção de assuntos de outras áreas da matemática e foi o que constatamos ao apresentar um exercício que poderíamos permear pela geometria, por exemplo. Houve por parte de alguns essa percepção: “Ousada bagagem de conhecimento como recurso” e “mistura de temas propostos pela teoria”. Sendo assim, o professor para trabalhar com resolução de problemas deve ter um preparo ou ao menos um contato com a teoria em sua formação. Portanto essa primeira questão nos fez acreditar ainda mais que a teoria de Polya é uma ferramenta importante dentro da sala de aula.

Uma das alunas frisou a importância da classificação dos exercícios de fáceis para difíceis, direcionando assim a resolução dos problemas, o que também justificou a classificação adotada, pois acreditamos que com uma linha de resolução as fases de Polya ficam mais completas.

Queríamos saber também se usariam o método de Polya em sala de aula, as respostas foram quase todas positivas, uma delas que nos chamou atenção foi a seguinte: “*sim, pois é muito importante desenvolver o senso critico dos alunos, levá-los a pensar sobre o que estão aprendendo*”, logo com esse desenvolvimento critico o aluno se envolve com aquilo que está fazendo e nesse processo os alunos, não resolvem os problemas no “automático”.

Outra resposta interessante foi “*sim, pois seria uma forma de ver as dificuldades dos alunos e com isso dependendo do que aparecer pode-se retomar o processo de aprendizagem*”, pois acreditamos que as fases de Polya podem fazer com que o professor saiba exatamente onde está a dificuldade do seu aluno se no tema abordado ou em conceitos anteriores. Apenas um dos colegas não usaria em sala de aula, pois, para ele não era seguro permear por diversos temas, por não ser de conhecimento de todos os alunos.

Por ser uma aplicação em uma turma de futuros professores, queríamos saber se há alguma coisa a acrescentar nessa metodologia, pois, nosso trabalho não é uma verdade absoluta, pode haver contestações, criticas ou ideias partidas dos colegas, que acrescentem mais à nossa pesquisa. Na verdade não houve criticas, mas sim sugestões as quais poderíamos trazer problemas com relação ao cotidiano. Um dos colegas sugeriu um estudo mais profundo, comparando a estratégia de Polya com a usual mostrando a peculiaridade de cada uma delas. No entanto poucos deram sugestões, os demais deixariam do jeito que está mostrando para nós que receberam bem a teoria de Polya.

No primeiro questionário nós constatamos que nas respostas não havia conexões com a teoria de Polya. Logo, após apresentar a teoria saberíamos se sua visão inicial sobre resolução de problemas havia mudado, o que ocorreu. A resposta que ilustra bem a mudança foi: "*na verdade essa metodologia, ou algo parecido, eu utilizava, de forma não usual, por exemplo, para achar uma solução de cabeça fiquei admirado em ver esse método descrito e estudado como foi apresentado*". "*Não basta resolver o problema e sim compreender*", foi o que mudou para outro colega, na realidade a teoria de Polya trouxe para eles uma organização para resolver qualquer exercício e não partir direto para resolução.

Com todas essas respostas restaria saber qual das fases eles mais se interessaram, ao analisar as respostas observamos que eles ficaram divididos em três grupos de resposta. Uma parte deles achou todas quatro fases interessantes, pois uma complementa a outra, pois se escolher somente uma delas a teoria não está completa e com isso pode não ocorrer o efeito esperado. Outra parte achou a primeira fase porque é normalmente onde se tem mais problemas, é preciso identificar o que se pede para nortear a resolução, porque sem compreender o que se pede fica mais difícil de chegar à resposta. Por fim, outros acharam importante a segunda fase principalmente o questionamento que Polya propõe: "*Conhece um problema correlato?",* porque com um exercício parecido chega-se mais perto de resolver o problema atual.

Na próxima seção faremos um comparativo dos dois questionários e o que foi mais relevante para nós na pesquisa realizada.

3.3. Comparação dos questionários

Considerando os dois questionários, nós achamos muito proveitoso, a aplicação da teoria de Polya, porque os alunos no momento da apresentação se mostraram bem atentos e interessados em conhecer essa estratégia de ensino.

As respostas do primeiro questionário ficaram dentro da nossa expectativa, não obtivemos nenhuma surpresa, os alunos de fato não conheciam Polya e seus métodos de resolução, o que enriqueceu a segunda fase da pesquisa.

O enriquecimento ocorreu porque as respostas corresponderam com as nossas expectativas nesse trabalho, que é o fato de que tendo contato com a teoria em um curso de formação de professores a estratégia os auxiliará em sala de aula e vimos também que eles em parte compreenderam a ideia e a receberam com muito interesse. Alguns até esperam poder aplicar logo em sala de aula.

Uma consideração importante a fazer diz respeito à quarta fase de Polya o retrospecto, pois nenhum dos respondentes sequer citou essa fase a qual Polya define como uma fase importante para que ocorra o aperfeiçoamento do aluno em resolução de problemas, e que muitos professores partem para o próximo exercício quando se chega à solução.

Nenhum dos alunos percebeu a importância da quarta fase, que para nós também é importante e concordamos quando Polya diz “um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que problemas matemáticos tem pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação tem com qualquer outra coisa” (2006, p.13). É no retrospecto que temos a oportunidade de reexaminar o problema e fixar todos os conceitos utilizados em sua resolução.

Ainda, a participação na pesquisa deu aos alunos a oportunidade de conhecer uma teoria formulada ao longo de uma vida em sala de aula observando as reações de seus alunos ao colocar suas indagações. Podemos assim fazer as nossas considerações finais sobre todo este trabalho.

4 CONSIDERAÇÔES FINAIS

Neste trabalho procuramos apresentar aos leitores uma estratégia que foi desenvolvida por um professor ao longo da sua vida profissional. Apresentamos sua teoria de forma detalhada e junto a isto colocamos também alguns pontos que acreditamos. Pontos estes que nos fizeram escolher uma turma de formação de professores.

Os resultados obtidos nesta pesquisa reforçaram nossas crenças, de que o professor para aplicar a estratégia de Polya deve ter contato com a mesma em sua formação e que resolução de problemas é um caminho diferente para se “ensinar” matemática.

Os alunos em sua grande maioria não tiveram contato com outro tipo de metodologia de ensino de matemática, sempre foi aula expositiva. A proposta que apresentamos foi que antes de partir para resolver um exercício o professor em conjunto com os alunos deveria compreender o problema e só depois partir para resolução.

Foi uma proposta de dar autonomia aos alunos e dinamizar a aula do professor, pois ao apresentar o exercício 4, por exemplo foi sugerido aos alunos trabalhar com eixo cartesiano, isso chamou atenção deles porque ao se trabalhar o conteúdo de análise combinatória poderíamos percorrer diversas áreas da Matemática deixando assim a aula mais dinâmica.

De fato, o professor que quiser trabalhar com essa estratégia deve ter plena consciência de onde se quer chegar com determinado exercício e que poderá ter perguntas inesperadas em sala de aula.

Os alunos que responderam à pesquisa compreenderam a teoria de Polya, e aplicariam em sala de aula. Cada um se identificou com uma fase da teoria, o que ficou comprovado em nossa pesquisa é que em nossa formação não estamos acostumados a retomar exercícios já resolvidos, tivemos essa comprovação nas respostas, pois nenhum dos alunos frisou a importância da quarta fase de Polya o retrospecto, onde devemos reexaminar a resolução.

Com este trabalho foi possível perceber que o tema é muito vasto e o interessante seria verificar outras aplicações da teoria como, por exemplo, um levantamento estatístico do aproveitamento de atividades de resolução de problemas em sala de aula. O que podemos afirmar tal como acreditam Onuchic(2008), Romanatto (2008) e Polya (2006) resolução de problemas é um ótimo caminho para se ensinar e aprender matemática, e que o professor pode colher muitos frutos se dedicando junto de seus alunos a compreender, estabelecer um plano, executá-lo e reexaminá-lo.

REFERÊNCIAS

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Trad.: Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência. São Paulo. 2006

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Palestra de Encerramento: Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo In**: ANAIS DO I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 30 e 31 de outubro de 2008, São Paulo. UNESP - Rio Claro.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de Problemas Na Formação de Professores Pesquisadores** In: ANAIS DO I SEMINÁRIO EM RESOLUÇAO DE PROBLEMAS – I SERP, 30 e 31 de outubro de 2008, São Paulo. UNESP - Rio Claro.

POMBO, Olga. **Breves dados históricos sobre Pólya**. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/biografia.htm>. Acessado em: 18 abr. 2012.

School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland <*http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Polya*>*. Acessado em: 15 mar 2012.*

PONTE, João Pedro Mendes. **Investigar, ensinar e aprender**. (2003) Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf> Acesso em 18 abr. 2012.

ANEXO A – Resolução de Problema como Estratégia de Ensino e Aprendizagem – Primeiro Questionário.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

1- Para você o que é resolução de problemas?

2- Já ouviu falar deste tema como metodologia de ensino e aprendizagem?

3- Em sua vida escolar você teve contato com alguma metodologia de ensino da matemática diferente do tradicional (aula expositiva)?

ANEXO B – Questionário pós-apresentação de Resolução de Problemas – Segundo Questionário.

1. O que mais lhe chamou atenção sobre o tema proposto?

2. Você usaria essa metodologia em sala de aula? Por que?

3. O que você tem a acrescentar sobre a metodologia trabalhada?

4. Sua visão inicial sobre o que é resolução de problemas foi modificada? Como?

5. Dos quatro passos da teoria apresentada qual foi o mais interessante?

ANEXO C – Aplicação da Teoria – Exercícios apresentados

EXERCÍCIO - 1.

Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos distintos de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

(fundamentos matemática elementar vol.5, Samuel Hazzan)

EXERCÍCIO - 2.

(FAAP 68) Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo salão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve dirigir-se ao 6º andar utilizando-se de um dos elevadores de quantas formas poderá fazer?

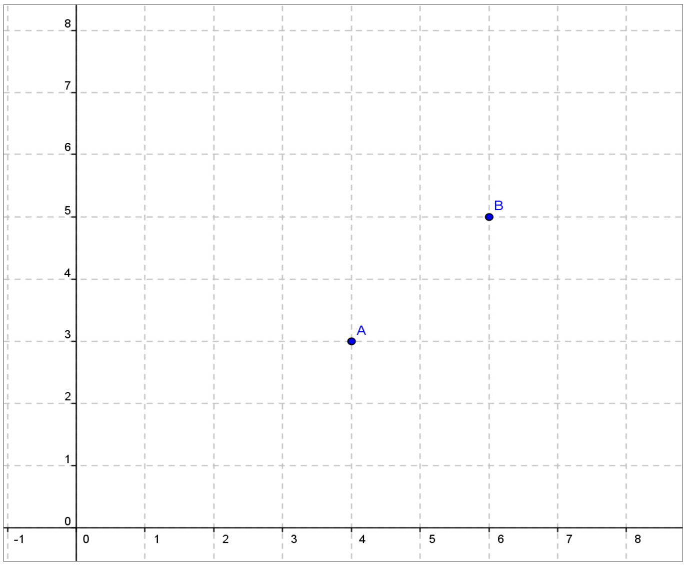
EXERCÍCIO - 3.

Quantas são as diagonais de um hexágono?

(1984 – matemática volume II, 2º grau Scipione di Pierro Neto)

EXERCÍCIO – 4.

Um sistema cartesiano foi associado a uma região plana de modo que o eixo Ox esta orientado do oeste para o leste, o eixo Oy esta orientado do sul para o norte, e a unidade adotada nos dois eixos é km, conforme a figura:



a) Pedro de ir do ponto O (0,0) até A (4,3) deslocando-se 1 km de cada vez para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes ele pode percorrer?

b) Luis deve ir de O (0,0) a B (6,5) passando por A (4,3) deslocando-se 1 km de cada vez para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes ele pode percorrer?

EXERCICIO – 5.

(FUVEST-SP) O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso entro numero 1,....a 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis sendo premiados aquelas que acertaram quadra, quina e sena números sorteados. Um apostador dispõe de muito dinheiro para jogar 20 números e faz todos os $\binom{20}{6}$ = 38760 jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além da aposta premiada com a sena.

a) Quantas apostas premiadas com a quina ele conseguiu?

b) Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?