INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

CARLOS EDUARDO MARTINS FACCIOLI

UMA ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DO OBJETO CIRCUNFERÊNCIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

São Paulo
2016

CARLOS EDUARDO MARTINS FACCIOLI

UMA ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DO OBJETO CIRCUNFERÊNCIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Amari Goulart.

IFSP
São Paulo
2016

F126a Faccioli , Carlos Eduardo Martins.

Uma análise da organização matemática do objeto circunferência nos livros didáticos do ensino médio / Carlos Eduardo Martins Faccioli. São Paulo: [s.n.], 2016.

90 f.

Orientador: Prof. Dr. Amari Goulart .

Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016.

1. Livro didático 2. Programa Nacional do Livro Didático 3. Teoria Antropológica do Didático 4. Matemática 5. Circunferência I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II Título

CDU 573.0

CARLOS EDUARDO MARTINS FACCIOLI

UMA ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DO OBJETO CIRCUNFERÊNCIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 02/12/2016 **CONCEITO:** 9,0 (nove)

Marcelo Rivelino Rodrigues

Prof. Me. Marcelo Rivelino Rodrigues
Membro da Banca

Prof. Me. Silvio De Liberal
Membro da Banca

Amari Goulart

Prof. Dr. Amari Goulart
Orientador

Carlos Eduardo M. Faccioli

Aluno: Carlos Eduardo Martins Faccioli

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus pais, aos professores, em especial ao Prof. Dr. Amari Goulart, pelo auxílio prestado durante a realização deste trabalho, e as amizades construídas ao longo da graduação no IFSP.

“Todas as leis da natureza são pensamentos matemáticos de Deus”

Johannes Kepler

“Na verdade, é quase um milagre que os métodos modernos de instrução não tenham exterminado completamente a sagrada sede de saber, pois essa planta frágil da curiosidade científica necessita, além de estímulo, especialmente de liberdade; sem ela, fenece e morre. É um grave erro supor que a satisfação de observar e pesquisar pode ser promovida por meio da coerção e da noção de dever”

Albert Einstein

RESUMO

O tema deste trabalho é o Livro Didático e sua utilização por *jovens* estudantes do Ensino Básico. Para colocá-lo em discussão, partiu-se, inicialmente, do contato direto com esses estudantes e seus livros, fato que motivou a realização do presente trabalho. Em seguida, desenvolve-se o estudo de questões relevantes associadas ao tema, como o Programa Nacional do Livro Didático, e prossegue-se com a *análise* do capítulo “A Circunferência” incluído em um livro pertencente a esse Programa. Essa *análise* foi estruturada na Teoria Antropológica do Didático, elaborada por Chevallard (1992,1999). Discute-se também, a *linguagem* presente nesses livros, e por fim a necessidade da inserção da contextualização do conhecimento e da interdisciplinaridade em seus textos, bem como a importância de se incluir a História da Matemática em livros *didáticos.* Ressalta-se que, procurar ter uma consciência sobre como criar mecanismos pedagógicos para conceber uma nova arquitetura desses livros, sem descaracterizar sua estrutura, são reflexões que visam contribuir para que os estudantes do Ensino Básico desenvolvam empatia com o estudo de seus livros, o que beneficiaria e facilitaria a qualidade de ensino desses jovens e as ações docentes na sala de aula.

Palavras chave: Livro Didático; Programa Nacional do Livro Didático; Teoria Antropológica do Didático; Matemática; Circunferência.

ABSTRACT

The theme of this work is the Didactic Book and its use by young students of Basic Education. In order to discuss this theme, the study began on direct contact with these students and their books, a fact that motivated the accomplishment of this work. Subsequently, the study of relevant issues associated with the theme is developed, such as the National Didactic Book Program, and the analysis of the "Circumference" chapter included in a book belonging to this Program is continued. This analysis was structured in the Anthropological Theory of Didactics, elaborated by Chevallard (1992,1999). It also discusses the language present in these books, and finally the need to insert the contextualisation of knowledge and interdisciplinarity in their texts, as well as the importance of including the History of Mathematics in didactic book. It should be pointed out that, in order to create a pedagogical mechanism to conceive a new architecture of these books, without disfiguring its structure, are reflections that aim to contribute to the students of the Basic Education develop empathy with the study of their books, which would benefit and facilitate the quality of teaching of these young people and the teaching actions in the classroom.

Keywords: Didactic Book; National Didactic Book Program; Anthropological Theory of Didactics; Mathematics; Circumference.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A escolha do tema: tópicos de circunferência e suas conexões, foi determinada devido a constante presença da circunferência no desenvolvimento de vários campos da Matemática, como por exemplo: Geometria Plana, Geometria Espacial, Trigonometria, Teoria dos Números Complexos e na Geometria Analítica, campo da matemática que foi o escolhido como tema para ser abordado neste trabalho.

Através da minha experiência como professor particular, percebi que a geometria analítica sempre gera muitas dúvidas nos estudantes. Ao procurar compreender quais são os motivos que geram estas dúvidas, observa-se, principalmente, a ausência de conceitos por parte dos alunos. Assim, ainda que o desenvolvimento desse conhecimento teórico seja realizado com o trabalho do professor em sala de aula, penso que a sua complementação e aprofundamento também deva ocorrer com o estudo do livro didático adotado, porque segundo Carvalho e Lima (2010) há uma complexa relação interligando o professor, o aluno, a matemática, o livro didático e o seu autor.

Uma reflexão sobre este cenário revela-se no estudo de Gérard e Roegiers (1998) que expõe as funções mais importantes que o livro didático deve ter em relação ao aluno e ao professor.

Segundo estes autores, com relação ao aluno destaca-se entre as suas funções a aquisição de saberes relevantes, integrando, ampliando e consolidando os conhecimentos, o desenvolvimento de competências e habilidades que contribuam para aumentar sua autonomia intelectual de modo a contribuir com sua formação cultural e social.

Com relação ao professor, o livro didático deve propiciar a aquisição de *saberes* profissionais pertinentes, favorecendo a formação didático-pedagógica, auxiliando o planejamento e a gestão da sala de aula, além de auxiliar o professor na avaliação da aprendizagem do aluno.

Outro papel do professor é a escolha crítica de um determinado livro didático, além de decidir quais são os conteúdos selecionados no livro e como complementá-los. Orientar os seus alunos de como ele deve ser estudado, também é uma atitude que não deve ser negligenciada pelo docente.

Observando os livros didáticos utilizados pelos meus alunos, constatei que apenas as páginas referentes aos exercícios apresentavam *sinais* de utilização. Todas as outras não apresentavam nenhuma anotação, tais como: grifos, setas, observações, registros, marcações, entre outros sinais de estudo.

Através da semiótica dessas páginas, levantei a hipótese de que elas não foram estudadas, porque segundo Fidalgo e Gradim (2004/2005), é *sinal*, tudo aquilo que possa servir para identificar uma coisa, no sentido de distingui-la das demais, como marcas distintivas.

Sendo assim, procurei averiguar a minha hipótese, investigando os porquês e as causas dessa pequena utilização dos livros por parte de meus alunos, questionando-os sobre como eles utilizavam seus livros. Ao questioná-los, confirmei que a grande maioria deles não estudava a parte teórica presente nesses livros. Eles limitavam-se apenas à consulta dos exercícios indicados pelos professores.

Indagando os alunos sobre essa falta de interesse, obtive como respostas: “não leio porque é chato”, “é cansativo”, “é difícil”. Segundo Dante (1996), a tendência de ênfase exagerada em algoritmos, procedimentos e regras limita a possibilidade de desenvolvimento da criatividade, da curiosidade intelectual e até mesmo do pensamento independente por parte do aluno. Segundo Machado (1995, p.1), “é possível utilizar uma linguagem bem cuidada, […] sem recorrer excessivamente a tecnicidades ou formalismos, mantendo-se, portanto, uma proximidade providencial entre a linguagem matemática e a linguagem corrente”.

Dentro deste contexto, é possível supor que a maioria dos livros didáticos de Matemática apresentam os conteúdos de forma pouco atrativa, contendo uma linguagem quase uniforme e distante da realidade de seu jovem leitor.

Em geral, os tópicos matemáticos são mostrados de uma forma fragmentada e linear, seguindo exageradamente a ideia de pré-requisito. Segundo Machado (2008, p.25), “A ideia de que alguns assuntos devem ser ensinados antes de outros é frequentemente superestimada, ignorando-se uma rica diversidade de contextos, de centros de interesse e de possibilidades de percursos”.

Observa-se também que, quando aparece algum dado histórico, este é relegado a um segundo plano, geralmente no final do capítulo, dissociando a matemática de sua evolução. Vianna (1995), por meio de categorizações, distingue quatro finalidades do uso da História da Matemática nos *livros didáticos*: motivar os alunos, informar os alunos, viabilizar estratégias didáticas e integrar o desenvolvimento do conteúdo.

Fatores como os citados acima contribuem para que os livros não sejam vistos por uma parcela dos professores como uma versão definitiva de uma determinada sequência de conteúdos. Como o aluno é um aprendiz, por si só não poderá atingir essa visão crítica sobre o livro didático. Segundo Castellani (1994), ao utilizar um livro didático, uma boa postura do professor é colocar em discussão a sua aura de infalibilidade.

Não se desenvolve o gosto pela pesquisa apenas com os livros didáticos coloridos. É preciso ter a preocupação de fornecer, ao jovem estudante, livros que, além de valorizarem a informação, despertem também a imaginação. Isso é essencial para que, efetivamente, o aluno se torne um bom leitor de livros de Matemática.

O principal objetivo deste trabalho é analisar a organização matemática do objeto circunferência no livro didático do ensino médio. Foi utilizado como base teórica ao longo deste trabalho a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1992,1999)

CAPÍTULO 1 - O LIVRO DIDÁTICO

Atualmente, as políticas públicas voltadas para o livro didático são organizadas pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). O PNLD foi criado pelo Decreto número 91.542, de 19 de agosto de 1985, em substituição ao programa anterior denominado Programa do Livro Didático (PLID).

Ele tem por objetivo a aquisição e distribuição universal e gratuita de livros didáticos para os alunos da rede pública da Educação Básica, sendo que, a política de planejamento, compra, avaliação e distribuição do livro didático é centralizada no governo federal.

Tais ações são realizadas por meio do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), autarquia federal vinculada ao MEC (Ministério da Educação) e responsável pela captação de recursos para o financiamento de programas voltados à Educação Básica.

Em 1993, o Brasil traçou o Plano Decenal de Educação para Todos. Esse plano, entre outras considerações, apontou estratégias para o livro didático. Dentre elas, deu prioridade às medidas para assegurar tanto a qualidade física do livro, quanto a qualidade de seu conteúdo.

Segundo Cassiano (2004), no mesmo ano da publicação do Plano Decenal de Educação para Todos, o MEC constituiu uma comissão para analisar a qualidade dos conteúdos programáticos e dos aspectos pedagógicos-metodológicos dos livros didáticos voltados para as séries iniciais do ensino fundamental que vinham sendo comprados por este Ministério. Esta comissão demonstrou que o MEC vinha comprando e distribuindo para a rede pública de ensino, livros didáticos contendo erros conceituais, visões preconceituosas e desatualizadas em relação aos conteúdos.

Como consequência, a partir de 1996 o MEC passou a submeter os livros didáticos a uma avaliação, feita pela então Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação, atualmente denominada Secretaria da Educação

Básica (SEB/MEC).

De acordo com Cassiano (2004):

> O governo federal, que até então se mantivera como comprador e distribuidor de livros didáticos, instituiu, dessa forma um *processo de avaliação* destes livros, redefinindo o papel do MEC no PNLD. Sendo assim, as obras inscritas pelas editoras e que não fossem aprovadas seriam excluídas da compra pelo PNLD (CASSIANO, 2004, p.38).

Ainda segundo Cassiano (2004), os critérios comuns de avaliação dos livros das diferentes disciplinas são:

> […] correção dos conceitos e informações; correção e pertinência metodológica; contribuição para a construção de cidadania; manual do professor; e aspectos gráficos e editoriais. […] Como critérios eliminatórios foram definidos que os livros: não poderiam expressar preconceito de qualquer origem; não poderiam apresentar erros conceituais (CASSIANO, 2004, p.38-39).

Na primeira década do século XXI ocorreu uma ampliação do PNLD, com a perspectiva de expandir a universalização da distribuição de livros. Em 2003 é criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e, em 2007 é criado o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA). Em 2009, o PNLEM e o PNLA foram incorporados ao Programa Nacional do Livro Didático, que passou a ser denominado de PNLD EJA e PNLD para a Educação Básica. A Tabela 1, no final deste capítulo nos fornece alguns números que traduzem as dimensões do PNLD.

Segundo Terrazzan e Zambon (2013), a operacionalização do PNLD ocorre de modo cíclico:

> […] a avaliação, a escolha e a aquisição das obras ocorrem de forma periódica. São garantidos, portanto, ciclos regulares trienais alternados, intercalando, a cada ano, o atendimento aos seguintes níveis de ensino: 1º ao 5º ano do ensino fundamental, 6º ao 9º ano do ensino fundamental e ensino médio (TERRAZZAN; ZAMBON, 2013, p.589).

Também de acordo com Terrazzan e Zambon (2013), podemos distinguir, atualmente, três etapas de procedimentos envolvidos na operacionalização do PNLD, descritas a seguir.

> […] na primeira ocorre a avaliação de obras didáticas, por componente curricular dos níveis de ensino fundamental e médio. A avaliação é realizada por equipes de especialistas, consultores *ad hoc*, a partir das obras inscritas em atendimento a edital específico do programa.

> Resulta desse processo de avaliação a recomendação de um conjunto de obras para cada componente curricular, as quais atendem ao mínimo de qualidade estabelecida no edital. Como produto final dessa etapa, cada equipe elabora um guia de livro didático, contendo resenhas avaliativas das obras recomendadas.
>
> Na segunda etapa, acontece a escolha dos livros didáticos pelos professores das escolas. [...] Espera-se um processo em que o conjunto de docentes de cada componente curricular discuta e decida sobre as obras didáticas que serão selecionadas, dentre aquelas recomendadas na 1ª etapa e constantes no guia. Espera-se que todos os professores tenham acesso ao guia, bem como exemplares dos volumes das obras didáticas recomendadas. Ao final, deve ser elaborada uma listagem de indicações dos livros mais adequados para o desenvolvimento das atividades previstas em cada componente curricular. Essas listagens são encaminhadas ao MEC por um responsável da escola que tem acesso à senha, para posterior recebimento das obras indicadas.
>
> Na terceira etapa, ocorre o envio das obras didáticas escolhidas pelos professores às escolas. Espera-se, nessa última fase, que os livros selecionados cheguem às escolas em tempo hábil para o início das atividades letivas previstas e na quantidade correta, e que só em último caso sejam enviadas obras não escolhidas (TERRAZZAN; ZAMBON, 2013, p.589).

De acordo com Silva (2012, p.806), na grande maioria das salas de aula do ensino básico o livro didático tornou-se o preferido entre os recursos didáticos utilizados: “Impulsionados por inúmeras situações adversas, grande parte dos professores brasileiros o transformaram no principal ou, até mesmo, o *único* instrumento a auxiliar o trabalho nas salas de aula.” (grifo nosso)

Segundo Fiorentini e Miorim (2001, p.89-91) “considerando que uma grande parcela das escolas públicas tende a adoção de livros didáticos, principalmente com a distribuição proporcionada pelo PNLD, (....) para muitos alunos e alunas, serão os *únicos livros* que terão oportunidade de ler em suas vidas.” (grifo nosso)

Tabela 1

Tabela 1 - Dados Estatísticos do PNLD - 2016

Atendimento	Exemplares	Valores (R$)	
-	-	Aquisição	Distribuição
Ensino Fundamental	85.481.207	646.280.478,32	133.443.057,08
Ensino Médio	35.337.412	336.775.830,99	34.513.659,62
Educação de Jovens e Adultos	6.998.019	82.651.540,13	16.113.584,34
Programa Brasil Alfabetizado	772.092	4.972.194,84	745.644,50
Total	128.588.730	1.070.680.044,28	184.815.945,54

Fonte: Dados obtidos do portal do FNDE- Dados estatísticos

Dados trabalhados pelo autor

CAPÍTULO 2 - A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Segundo Chevallard (1999), a Teoria Antropológica do Didático estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. O termo *antropológico* é utilizado devido a inserção da atividade matemática e, consequentemente, o estudo da Matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Na Teoria Antropológica do Didático, as noções de *tarefa*, *técnica*, *tecnologia* e *teoria* permitem modelizar as práticas sociais e, em particular, a atividade matemática. Essas noções são definidas por Almouloud (2007) da seguinte maneira:

> As *tarefas* são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracteriza um gênero de tarefa, por exemplo: *calcular, decompor, resolver, somar*; que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, *resolver uma equação fracionária* ou ainda *decompor uma fração racional em elementos simples* caracterizam tipos de tarefas (ALMOULOUD, 2007, p.115).

Para uma determinada tarefa existe, no mínimo, uma *técnica*, isto é, uma maneira de fazer ou realizar a tarefa. Considerando essas duas noções, forma-se o bloco prático-técnico, isto é, o *bloco do saber-fazer*.

Supõe-se que, para existir, uma técnica deva ser inteligível, eficiente e justificada. Isso implica na existência de um discurso justificativo e descritivo das técnicas, denominado *tecnologia*. A tecnologia garante que a técnica realize bem a tarefa. Além disso, toda tecnologia precisa também de uma justificação ou explicação, que foi denominado por Chevallard (1992,1999) de *teoria*.

A *teoria* torna compreensível o discurso tecnológico, retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica. Esses dois conceitos formam o bloco tecnológico-teórico, conhecido como *bloco do saber*.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma *organização praxeológica*. Segundo Almouloud (2007):

> A palavra praxeologia [...] reporta-se ao fato de que uma prática (*práxis*) humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha, e que lhe dá razão (ALMOULOUD, 2007, p.117).

Também sobre este tema trata Almouloud (2007):

> Um *saber* diz respeito a uma organização praxeológica particular, com certa "generalidade" que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento (ALMOULOUD, 2007, p.117).

Segundo Chevallard (1999), as organizações praxeológicas associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. De acordo com Almouloud (2007):

> As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira como se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática (ALMOULOUD, 2007, p. 123).

A noção de *momento* foi introduzida por Chevallard (1999) para descrever uma organização didática. Quando se pretende descrever esta organização didática relativa a um objeto matemático, qualquer que seja a escolha adotada, alguns tipos de situações, momentos do estudo ou momentos didáticos estão presentes obrigatoriamente. O autor define seis momentos didáticos, que podem ocorrer *simultaneamente* ou se *repetir* no decorrer do estudo.

A seguir temos as definições de momentos didáticos publicadas por Almouloud (2007).

> O primeiro momento refere-se ao encontro com a organização praxeológica por meio de tarefas; esse encontro vai orientar o desenvolvimento das relações institucionais e pessoais com o objeto. Estas relações serão construídas ao longo de todo o processo de estudo e têm papel importante na aprendizagem [...].
>
> No segundo momento tem-se a exploração das tarefas e a elaboração de uma técnica relativa a este tipo de tarefa. É nesse momento que o professor tem o papel de orientar os alunos para que seja constituída, pelo menos parcialmente, uma técnica que, a princípio, possa resolver o problema, que representa uma espécie do tipo de tarefa estudado [...].
>
> O terceiro momento diz respeito à construção do ambiente tecnológico/teórico que começa a se constituir desde o primeiro encontro, tornando-se mais preciso no decorrer do estudo. Em geral, esse momento começa por uma relação entre um ambiente tecnológico/teórico construído anteriormente e o início da criação de um novo ambiente, que se tornará mais preciso com a emergência da técnica [...].
>
> No quarto momento ocorre o trabalho com a técnica em diferentes tarefas, que pode, eventualmente, ser aperfeiçoada pela sua mobilização relativa a um conjunto de tarefas qualitativamente e quantitativamente representativas da organização matemática em jogo.
>
> No quinto momento, o da institucionalização, a organização matemática é definida. Elementos que fizeram parte do estudo em fases anteriores podem ser descartados e outros integrados definitivamente a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura da instituição ou da classe [...].

O sexto momento é considerado sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, da técnica construída, buscando verificar sua capacidade intelectual.

O momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquele no qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos.

[…] De acordo com Chevallard (1999), o modelo dos momentos de estudo, evidencia a importância que o professor deve dar para a elaboração de uma organização didática, que tem por objetivo o ensino e a aprendizagem de uma organização matemática. Ou seja, uma organização didática cujo objetivo é fazer existir uma relação pessoal com a organização matemática ou modificar a relação já existente com essa organização, por exemplo, pelo acréscimo de novas técnicas relacionadas ao tipo de tarefa estudado, ou pela ampliação do discurso teórico-tecnológico. Seu trabalho é complexo porque, além de colocar em ação a organização didática, ele é seu ator e, muitas vezes, o próprio criador (ALMOULOUD, 2007, p.124-127).

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS

Para determinar a organização matemática do objeto circunferência no âmbito da Geometria Analítica, analisamos um livro aprovado no PNLD. Foi escolhido o livro: *Matemática: ciência e aplicações- vol.3 -ensino médio,* de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida e de seu Manual do Professor.

O capítulo 3 refere-se à circunferência, tema deste trabalho. Neste capítulo são apresentados 76 exercícios propostos, abordando os seguintes conceitos:

- A equação reduzida da circunferência
- A equação geral da circunferência
- Posições relativas entre ponto e circunferência
- Inequação polinomial do 2º grau com duas incógnitas
- Posições relativas de reta e circunferência
- Tangência
- Interseção de circunferências
- Posições relativas de duas circunferências

Todos esses setenta e seis exercícios foram analisados segundo a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1992,1999). Será feita nas páginas seguintes uma análise que consiste em:

- Identificação dos tipos de tarefas propostas
- Técnicas empregadas para executar cada tipo de tarefa
- Discurso tecnológico-teórico utilizado

Essa análise é complementada pela Tabela 2, presente no final deste capítulo, que relaciona os tipos de tarefas com todos os exercícios e em quantos exercícios determinada tarefa se apresenta. Através dessa análise, pode-se ter uma visão da organização matemática desse capítulo.

A seguir, selecionamos os exercícios a serem abordados, seguindo o critério de incluir os que apresentam tipos diferentes de tarefas. Foram mantidas as numerações originais presentes na 6ª edição do livro.

3.1 Exercício 1

Encontre a equação reduzida da circunferência de centro na origem e raio 4

Tarefa: Encontrar a equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e raio r

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro C(a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=4$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x-0)^2+(y-0)^2=4^2 \Rightarrow x^2+y^2=16$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O (a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.2 Exercício 5

Uma circunferência passa pela origem e tem centro em (-4,-3). Determine sua equação reduzida

Tarefa: Determinar a equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e que passa pelo ponto P(x,y)

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro C(a,b) da circunferência: $a=-4$ e $b=-3$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do ponto P(x,y): $x=0$ e $y=0$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do ponto o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(0+4)^2+(0+3)^2}=\sqrt{25}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x+4)^2+(y+3)^2=25$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.3 Exercício 7

Sendo A(-2,-6) e B(2,4), escreva a equação reduzida de uma circunferência que passa por A e B

Tarefa: Determinar uma equação reduzida de uma circunferência que passa pelos pontos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto A(-2,-6) são: $x_1 = -2$ e $y_1 = -6$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto B(2,4) são: $x_2 = 2$ e $y_2 = 4$

Substituir as coordenadas dos pontos na fórmula da distância dos pontos ao centro da circunferência: $d = \sqrt{(-2 - x_C)^2 + (-6 - y_C)^2} = \sqrt{(2 - x_C)^2 + (4 - y_C)^2}$

Desenvolver a equação: $x_C^2 + y_C^2 + 4x_C + 12y_C + 40 = x_C^2 + y_C^2 - 4x_C - 8y_C + 20 \Rightarrow 8x_C + 20y_C + 20 = 0 \Rightarrow 2x_C + 5y_C + 5 = 0$

Determinar que $x_C = 5$

Substituir $x_C = 5$ na equação da mediatriz de $\overline{AB}: 2 \cdot 5 + 5y_C + 5 = 0$

Concluir que $y_C = -3$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do ponto A(-2,-6) o valor do raio da circunferência:

$$r = \sqrt{(-2 - 5)^2 + (-6 + 3)^2} = \sqrt{58}$$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x-5)^2+(y+3)^2=58$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre os pontos A e B é igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Conclui-se que: $d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (JULIANELLI, 2008, p.21).
>
> Se M é o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$, pode afirmar que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Assim, pode escrever que:
>
> $$M-A=B-M \Rightarrow M=\frac{A+B}{2}=\frac{(x_1, y_1)+(x_2, y_2)}{2}=\frac{(x_1+x_2, y_1+y_2)}{2}.$$
>
> Portanto, $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ou ainda $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$ e $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$ (JULIANELLI, 2008, p.25).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r$. Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.4 Exercício 8

Determine os valores de k de modo que a circunferência de equação $(x-k)^2+(y-4)^2=25$ passe pelo ponto (2k,0)

Tarefa: Determinar os valores de k de modo que a circunferência de equação $(x-k)^2+(y-4)^2=25$ passe pelo ponto (2k,0)

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do ponto (2k,0): $x=2k$ e $y=0$

Substituir as coordenadas do ponto (2k,0) na equação reduzida da circunferência: $(2k-k)^2+(0-4)^2=25$

Desenvolver a inequação: $k^2-9=0$

Concluir que $k=3$ ou $k=-3$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.5 Exercício 10

Uma circunferência λ tem equação reduzida $(x-5)^2+(y-1)^2=4$ Determine:

a) o ponto de λ mais próximo do eixo das abscissas

b) o ponto de λ mais afastado do eixo das ordenadas

Tarefa: Determinar o ponto da circunferência de equação $(x-5)^2+(y-1)^2=4$ mais próximo do eixo das abscissas e o ponto mais afastado do eixo das ordenadas

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado a abscissa do centro da circunferência: $a=5$

Substituir a abscissa do centro na equação reduzida da circunferência: $(5-5)^2+(y-1)^2=4$

Desenvolver a equação: $y^2-2y-3=0$

Encontrar os valores de y: $y=3$ ou $y=-1$

Concluir que o ponto mais afastado do eixo das abscissas é: (5,3)

b) Determinar a partir do enunciado a ordenada do centro da circunferência: $b=1$

Substituir a ordenada do centro na equação reduzida da circunferência: $(x-5)^2+(1-1)^2=4$

Desenvolver a equação: $x^2-10x+21=0$

Encontrar os valores de x: $x=7$ ou $x=3$

Concluir que o ponto mais afastado do eixo das ordenadas é: (7,1)

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.6 Exercício 14

Ache a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos (3,0), (-6,-3) e (1,4)

Tarefa: Determinar a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$

Técnica:

Determinar as coordenadas do centro (a,b) da circunferência são: $a = x_C$ e $b = y_C$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (3,0) são: $x_1 = 3$ e $y_1 = 0$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (-6,-3) são: $x_2 = -6$ e $y_2 = -3$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (1,4) são: $x_3 = 1$ e $y_3 = 4$

Substituir as coordenadas dos pontos na fórmula da distância dos pontos ao centro da circunferência: $\sqrt{(3 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2} = \sqrt{(-6 - x_C)^2 + (-3 - y_C)^2} = \sqrt{(1 - x_C)^2 + (4 - y_C)^2}$

Desenvolver as equações: $x_C^2 + y_C^2 - 6x_C + 9 = x_C^2 + y_C^2 + 12x_C + 6y_C + 45 \Rightarrow -18x_C - 6y_C - 36 = 0 \Rightarrow 3x_C + y_C + 6 = 0$ e $x_C^2 + y_C^2 + 12x_C + 6y_C + 45 = x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 8y_C + 17 \Rightarrow 14x_C + 14y_C + 28 = 0 \Rightarrow x_C + y_C + 2 = 0$

Subtrair $x_C + y_C + 2 = 0$ das duas equações: $2x_C + 4 = 0$

Concluir que $x_C = -2$

Substituir $x_C = -2$ na segunda equação: $-2 + y_C + 2 = 0$

Concluir que $y_C=0$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do ponto (3,0) o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(3+2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x+2)^2+y^2=25$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre os pontos A e B é igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Conclui-se que: $d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (JULIANELLI, 2008, p.21).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r$. Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.7 Exercício 18

Apresente as coordenadas do centro e o raio de cada circunferência:

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=6$

b) $x^2+y^2+2x+4y-1=0$

Tarefa: Determinar as coordenadas do centro e o raio das circunferências de equações $(x-1)^2+(y-2)^2=6$ e $x^2+y^2+2x+4y-1=0$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=1$ e $b=2$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{6}$

b) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=\frac{-2}{2}=-1$ e $b=\frac{-4}{2}=-2$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-(-1)}=\sqrt{6}$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.8 Exercício 20

Ache a equação geral da circunferência que passa:

a) pela origem e tem centro C(-1,-4)

b) por (-1,-4) e tem centro na origem

Tarefa: Determinar a equação geral da circunferência de centro C(a,b) e que passa pelo ponto P(x,y)

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=-1$ e $b=-4$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas da origem: $x=0$ e $y=0$

Determinar a partir das coordenadas do centro e da origem o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(0+1)^2+(0+4)^2}=\sqrt{17}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x+1)^2+(y+4)^2=17$

Desenvolver as potências: $x^2+2x+1+y^2+8y+16=17$

Subtrair 17 da equação: $x^2+2x+1+y^2+8y+16-17=0$

Agrupar os termos na forma geral da equação da circunferência: $x^2+y^2+2x+8y=0$

b) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do ponto (-1,-4): $x=-1$ e $y=-4$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do ponto (-1,-4) o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(-1-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{17}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x-0)^2+(y-0)^2=17 \Rightarrow x^2+y^2-17=0$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.9 Exercício 22

Encontre os valores de k que tornam $x^2+y^2-2x+10y-k+28=0$ uma equação de circunferência

Tarefa: Encontrar os valores de k que tornam $x^2+y^2-2x+10y-k+28=0$ uma equação de circunferência

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência

$a=\frac{-(-2)}{2}=1$ e $b=\frac{-10}{2}=-5$

Estabelecer a condição de existência do raio da circunferência: $r^2=1^2+(-5)^2-(-k+28)>0$

Desenvolver a inequação: $k-2>0$

Concluir que $k>2,$ com $k\in R$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.10 Exercício 26

Determine o único valor de p que faz com que as circunferências $\lambda_1: x^2+y^2+px-6y-17=0$ e $\lambda_2: x^2+y^2+4x-(p+2)y-10=0$ sejam concêntricas

Tarefa: Determinar o único valor de p que faz com que as circunferências de equações $x^2+y^2+px-6y-17=0$ e $x^2+y^2+4x-(p+2)y-10=0$ sejam concêntricas

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência

$\lambda_1: a=\frac{-p}{2}$ e $b=\frac{-(-6)}{2}=3$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (c,d) da circunferência

$\lambda_2: c=\frac{-4}{2}=-2$ e $d=\frac{-(-p-2)}{2}=\frac{p+2}{2}$

Determinar a partir do enunciado que $a=c$ e $b=d$

Concluir que $p=4$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.11 Exercício 28

Dadas as circunferências $\lambda_1: x^2+y^2-8x+4y+11=0$ e $\lambda_2: x^2+y^2+6x-4y+12=0$ encontre as coordenadas:

a) do ponto de maior abscissa de λ_1

b) do ponto de menor ordenada de λ_2

Tarefa: Encontrar as coordenadas do ponto de maior abscissa da circunferência de equação $x^2+y^2-8x+4y+11=0$ e do ponto de menor ordenada da circunferência de equação $x^2+y^2+6x-4y+12=0$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado a ordenada do centro da circunferência:

$$b=\frac{-4}{2}=-2$$

Substituir a ordenada do centro na equação geral da circunferência: $x^2+(-2)^2-8x+4(-2)+11=0$

Desenvolver a equação: $x^2-8x+7=0$

Encontrar os valores de x: $x=7$ ou $x=1$

Concluir que o ponto de maior abscissa é: (7,-2)

b) Determinar a partir do enunciado a abscissa do centro da circunferência:

$$a=\frac{-6}{2}=-3$$

Substituir a abscissa do centro na equação geral da circunferência:

$(-3)^2+y^2+6(-3)-4y+12=0$

Desenvolver a equação: $y^2-4y+3=0$

Encontrar os valores de y: $y=3$ ou $y=1$

Concluir que o ponto de menor ordenada é: (-3,1)

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.12 Exercício 30

Em relação à circunferência $\lambda:(x+2)^2+(y+1)^2=9$ dê a posição dos pontos D(-1,2), E(0,1) e F(-5,-1)

Tarefa: Determinar a posição dos pontos D(-1,2), E(0,1) e F(-5,-1) em relação à circunferência de equação $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto D(-1,2) são:

$x=-1$ e $y=2$

Substituir as coordenadas do ponto D(-1,2) na equação reduzida da circunferência: $(-1+2)^2+(2+1)^2-9=1$

Verificar que a igualdade é maior que zero

Concluir que o ponto D(-1,2) é exterior à circunferência

b) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto E(0,1) são: $x=0$ e $y=1$

Substituir as coordenadas do ponto E(0,1) na equação reduzida da circunferência: $(0+2)^2+(1+1)^2-9=-1$

Verificar que a igualdade é menor que zero

Concluir que o ponto E(0,1) é interior à circunferência

c) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto F(-5,-1) são: $x=-5$ e $y=-1$

Substituir as coordenadas do ponto F(-5,-1) na equação reduzida da circunferência: $(-5+2)^2+(-1+1)^2-9=0$

Verificar que a igualdade é igual a zero

Concluir que o ponto F(-5,-1) pertence à circunferência

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas entre ponto e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$

Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.13 Exercício 32

O ponto (3,-3) pertence à circunferência de equação $x^2+y^2-2x-4y+k=0$ Determine o valor de k

Tarefa: Determinar o valor de k para que o ponto (3,-3) pertença à circunferência de equação $x^2+y^2-2x-4y+k=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (3,-3) são: $x=3$ e $y=-3$

Substituir as coordenadas do ponto (3,-3) na equação geral da circunferência: $3^2+(-3)^2-2\cdot 3-4(-3)+k=0$

Desenvolver a equação: $k+24=0$

Concluir que $k=-24$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}| = r.$ Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x - a, y - b),$ então $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$ Fazendo: $-2a = D, -2b = E, a^2 + b^2 - r^2 = F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.14 Exercício 33

A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 55 = 0$ passa por (-6,-k). Determine k

Tarefa: Determinar o valor de k para que a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 55 = 0$ passe pelo ponto (-6,-k)

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (-6,-k) são: $x = -6$ e $y = -k$

Substituir as coordenadas do ponto (-6,-k) na equação geral da circunferência: $(-6)^2 + (-k)^2 - 2(-6) + 6(-k) - 55 = 0$

Desenvolver a equação: $k^2 - 6k - 7 = 0$

Concluir que $k = 7$ ou $k = -1$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de equação da circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto

> qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}| = r.$ Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x-a, y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$ Fazendo: $-2a = D, -2b = E, a^2 + b^2 - r^2 = F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.15 Exercício 35

Forneça o intervalo de variação de p para que o ponto (-3,p) seja interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

Tarefa: Fornecer o intervalo de variação de p para que o ponto (-3,p) seja interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (-3,p) são: $x = -3$ e $y = p$

Substituir as coordenadas do ponto (-3,p) na inequação do interior da circunferência: $(-3)^2 + p^2 + 2(-3) - 6p + 5 < 0$

Desenvolver a inequação: $p^2 - 6p + 8 < 0$

Concluir que o intervalo é $2 < p < 4,$ com $p \in R$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas entre ponto e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, podemos escrever que: $|\overrightarrow{OP}| = r.$ Como

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F$, a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.16 Exercício 37

Para que valores de m o ponto (m,0) é externo à circunferência de equação $x^2+y^2-4x+5y-5=0$?

Tarefa: Determinar os valores de m para que o ponto (m,0) seja externo à circunferência de equação $x^2+y^2-4x+5y-5=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (m,0) são: $x=m$ e $y=0$

Substituir as coordenadas do ponto (m,0) na inequação do exterior da circunferência: $m^2+0^2-4m+5\cdot 0-5>0$

Desenvolver a inequação: $m^2-4m-5>0$

Concluir que o intervalo é $m<-1$ ou $m>5$, com $m \in R$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas entre ponto e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.17 Exercício 38

Resolva graficamente as seguintes inequações:

a) $x^2+y^2 \leqslant 1$

b) $x^2+y^2<1$

c) $x^2+y^2 \geqslant 1$

d) $x^2+y^2>1$

Tarefa: Resolver graficamente as inequações $x^2+y^2 \leqslant 1; x^2+y^2<1; x^2+y^2 \geqslant 1; x^2+y^2>1$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{1}=1$

Indicar graficamente o conjunto dos pontos interiores e pertencentes à circunferência de centro (0,0) e raio 1

b) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{1}=1$

Indicar graficamente o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro (0,0) e raio 1

c) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{1}=1$

Indicar graficamente o conjunto dos pontos exteriores e pertencentes à circunferência de centro (0,0) e raio 1

d) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{1}=1$

Indicar graficamente o conjunto dos pontos exteriores à circunferência de centro (0,0) e raio 1

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de inequação polinomial do 2º grau com duas incógnitas, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.18 Exercício 40

Resolva graficamente os sistemas de inequações:

a) $x^2+y^2>4 \wedge x^2+y^2 \leqslant 9$

b) $x^2+y^2 \geqslant 2 \wedge x^2+y^2<4$

Tarefa: Resolver graficamente os sistemas de inequações

$x^2+y^2>4 \wedge x^2+y^2 \leqslant 9 ; x^2+y^2 \geqslant 2 \wedge x^2+y^2<4$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1 : a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1 : r=\sqrt{4}=2$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (c,d) da circunferência $\lambda_2 : c=0$ e $d=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_2 : r=\sqrt{9}=3$

Indicar graficamente a intersecção do conjunto dos pontos exteriores à circunferência de centro (0,0) e raio 2 com o conjunto dos pontos interiores e pertencentes à circunferência de centro (0,0) e raio 3

b) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1 : a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1 : r=\sqrt{2}$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (c,d) da circunferência $\lambda_2 : c=0$ e $d=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_2 : r=\sqrt{4}=2$

Indicar graficamente a intersecção do conjunto dos pontos exteriores e pertencentes à circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt{2}$ com o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro (0,0) e raio 2

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de inequação polinomial do 2º grau com duas incógnitas, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou

> $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.19 Exercício 42

É dada a sentença $x^2+y^2>16 \vee x^2+y^2<20$ Qual é a sua representação gráfica no plano cartesiano?

Tarefa: Resolver graficamente o sistema de inequações $x^2+y^2>16 \vee x^2+y^2<20$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1: a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1: r=\sqrt{16}=4$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (c,d) da circunferência $\lambda_2: c=0$ e $d=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_2: r=\sqrt{20}$

Indicar graficamente a união do conjunto dos pontos exteriores à circunferência de

centro (0,0) e raio 4 com o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt{20}$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de inequação polinomial do 2º grau com duas incógnitas, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, podemos ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Com $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b),$ então

> $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.20 Exercício 44

Resolva graficamente o sistema: $3x-y-2 \leqslant 0 \wedge x^2+y^2 \leqslant 1$

Tarefa: Resolver graficamente o sistema de inequações $3x-y-2 \leqslant 0 \wedge x^2+y^2 \leqslant 1$

Técnica:

Determinar que as coordenadas do ponto (0,0) são: $x=0$ e $y=0$

Substituir as coordenadas do ponto (0,0) na equação geral da reta: $3 \cdot 0-0-2=-2$

Verificar que a igualdade é menor que zero

Concluir que o ponto (0,0) pertence ao semiplano $3x-y-2 \leq 0$

Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=3x-2$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{1}=1$

Indicar graficamente a intersecção do semiplano contendo o ponto (0,0) e a reta $y=3x-2$ com o conjunto dos pontos interiores e pertencentes à circunferência de centro (0,0) e raio 1

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de inequação polinomial do 2º grau com duas incógnitas, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r (JULIANELLI, 2008, p.76).
>
> A reta r: $ax+by+c=0$ também divide o plano em duas regiões, chamadas de semiplanos, cujos pontos satisfarão as inequações $ax+by+c<0$ ou $ax+by+c>0$ (JULIANELLI, 2008, p.70).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.21 Exercício 46

Em cada caso, isole uma das variáveis na equação da reta r e, substituindo esse valor na equação da circunferência λ , dê a posição relativa entre r e λ

a) $r: x-y=0; \lambda: x^2+y^2+2x-2y+1=0$

b) $r: x-y+1=0; \lambda: (x+1)^2+(y-2)^2=5$

c) $r: x+y-2=0; \lambda: x^2+y^2-4x-4y+6=0$

Tarefa: Determinar a posição relativa entre as retas de equação $x-y=0; x-y+1=0; x+y-2=0$ e as circunferências de equação $x^2+y^2+2x-2y+1=0; (x+1)^2+(y-2)^2=5; x^2+y^2-4x-4y+6=0,$ respectivamente

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=x$

Substituir $y=x$ na equação geral da circunferência: $x^2+x^2+2x-2x+1=0$

Desenvolver a equação: $2x^2+1=0$

Determinar o discriminante da equação obtida: $0^2-4\cdot2\cdot1=-8$

Verificar que o discriminante é negativo

Concluir que a reta e a circunferência são exteriores

b) Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=x+1$

Substituir $y=x+1$ na equação reduzida da circunferência: $(x+1)^2+(x+1-2)^2=5$

Desenvolver a equação: $2x^2-3=0$

Determinar o discriminante da equação obtida: $0^2-4\cdot2\cdot(-3)=24$

Verificar que o discriminante é positivo

Concluir que a reta e a circunferência são secantes

c) Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=-x+2$

Substituir $y=-x+2$ na equação geral da circunferência: $x^2+(-x+2)^2-4x-4(-x+2)+6=0$

Desenvolver a equação: $2x^2-4x+2=0$

Determinar o discriminante da equação obtida: $(-4)^2-4\cdot2\cdot2=0$

Verificar que o discriminante é nulo

Concluir que a reta e a circunferência são tangentes

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r (JULIANELLI, 2008, p.76).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$
>
> Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106).
>
> Uma reta r: $ax+by+c=0$ e uma circunferência C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ podem apresentar três posições no plano: r secante a C, r tangente a C e r exterior a C. É possível determinar a posição entre uma reta e uma circunferência resolvendo o sistema do 2º grau formado pelas equações da reta e da circunferência. Este sistema poderá apresentar duas soluções distintas (reta secante), apenas uma solução (reta tangente) ou então ser impossível (não há ponto de interseção) (JULIANELLI, 2008, p.113-114).

3.22 Exercício 47

Obtenha, em cada caso, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência λ

a) $r: 3x+4y-35=0; \lambda: x^2+y^2-4x-2y-20=0$

b) $r: y=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}; \lambda: x^2+y^2-4x-6y-12=0$

c) $r: x=1+t \wedge y=1-t; \lambda: x^2+y^2-8x-6y+24=0, t \in \mathbb{R}$

Tarefa: Obter os pontos de intersecção entre as retas de equação

$3x+4y-35=0; y=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}; x=1+t, y=1-t$ e as circunferências de equação

$x^2+y^2-4x-2y-20=0; x^2+y^2-4x-6y-12=0; x^2+y^2-8x-6y+24=0,$ respectivamente

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=\frac{-3x+35}{4}$

Substituir $y=\frac{-3x+35}{4}$ na equação geral da circunferência:

$$x^2+\left(\frac{-3x+35}{4}\right)^2-4x-2\left(\frac{-3x+35}{4}\right)-20=0$$

Desenvolver a equação: $25x^2-250x+625=0$

Encontrar o valor de x: $x=5$

Substituir o valor de x na equação reduzida da reta: $y=\frac{-3\cdot 5+35}{4}$

Obter o valor de y: $y=5$

Concluir que o ponto de intersecção é: (5,5)

b) Substituir a partir do enunciado $y=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}$ na equação geral da circunferência:

$$x^2+\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2-4x-6\left(\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}\right)-12=0$$

Desenvolver a equação: $5x^2-10x-75=0$

Encontrar os valores de x: $x=5$ ou $x=-3$

Substituir os valores de x na equação reduzida da reta: $y=\frac{-5}{2}+\frac{3}{2}$ ou $y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$

Obter os valores de y: $y=-1$ ou $y=3$

Concluir que os pontos de intersecção são: (5,-1) e (-3,3)

c) Substituir a partir do enunciado $x=1+t$ e $y=1-t$ na equação geral da circunferência: $(1+t)^2+(1-t)^2-8(1+t)-6(1-t)+24=0$

Desenvolver a equação: $2t^2-2t+12=0$

Determinar o discriminante da equação obtida: $(-2)^2-4\cdot 2\cdot 12=-92$

Verificar que o discriminante é negativo

Concluir que não há pontos de interseção entre a reta e a circunferência

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de interseção de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira:
> $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará
> $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r (JULIANELLI, 2008, p.76).
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como
> $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então
> $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma:
> $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$
> Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
> (JULIANELLI, 2008, p.105-106)
> Uma reta r: $ax+by+c=0$ e uma circunferência C:
> $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ podem apresentar três posições no plano: r secante a C, r tangente a C e r exterior a C. É possível determinar a posição entre uma reta e uma circunferência resolvendo o sistema do 2º grau formado pelas equações da reta e da circunferência. Este sistema poderá apresentar duas soluções distintas (reta secante), apenas uma solução (reta tangente) ou então ser impossível (não há ponto de interseção) (JULIANELLI, 2008, p.113-114).

3.23 Exercício 48

Sabendo que a reta r passa por (1,0), verifique a posição de r em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

Tarefa: Verificar a posição da reta que passa por (1,0) em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (1,0) são: $x=1$ e $y=0$

Substituir as coordenadas do ponto (1,0) na equação geral da circunferência: $1^2+0^2-4\cdot 1-6\cdot 0-12-0=-15$

Verificar que a igualdade é menor que zero

Concluir que o ponto (1,0) é interior à circunferência

Concluir que a reta que passa por (1,0) intercepta a circunferência em dois pontos, sendo portanto secante

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, poe ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).
> Uma reta r: $ax+by+c=0$ e uma circunferência C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ podem apresentar três posições no plano: r secante a C, r tangente a C e r exterior a C. É possível determinar a posição entre uma reta e uma circunferência calculando a distância d do centro O da circunferência à reta e comparando o valor encontrado com o raio r da circunferência: se $d<r,$ a reta é secante; se $d=r,$ a reta é tangente e se $d>r,$ a reta é exterior à circunferência (JULIANELLI, 2008, p.113-114).

3.24 Exercício 50

Determine os valores de k de modo que a reta de equação $x+y+k=0$ em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ seja:

a) tangente

b) secante

c) externa

Tarefa: Determinar os valores de k de modo que a reta de equação $x+y+k=0$ em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ seja ou tangente ou secante ou externa

Técnica:

Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=-x-k$

Substituir $y=-x-k$ na equação geral da circunferência: $x^2+(-x-k)^2-4x-6(-x-k)-5=0$

Desenvolver a equação: $2x^2+2(k+1)x+k^2+6k-5=0$

a) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $2^2(k+1)^2-4\cdot 2(k^2+6k-5)=0$

Desenvolver a equação: $-4k^2-40k+44=0$

Concluir que $k=-11$ ou $k=1$

b) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $2^2(k+1)^2-4\cdot 2(k^2+6k-5)>0$

Desenvolver a equação: $-4k^2-40k+44>0$

Concluir que $-11<k<1$, com $k\in R$

c) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $2^2(k+1)^2-4\cdot 2(k^2+6k-5)<0$

Desenvolver a equação: $-4k^2-40k+44<0$

Concluir que $k<-11$ ou $k>1$, com $k\in R$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r (JULIANELLI, 2008, p.76).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$
>
> Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106).
>
> Uma reta r: $ax+by+c=0$ e uma circunferência C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ podem apresentar três posições no plano: r secante a C, r tangente a C e r exterior a C. É possível determinar a posição entre uma reta e uma circunferência resolvendo o sistema do 2º grau formado pelas equações da reta e da circunferência. Este sistema poderá apresentar duas soluções distintas (reta secante), apenas uma solução (reta tangente) ou então ser impossível (não há ponto de interseção) (JULIANELLI, 2008, p.113-114).

3.25 Exercício 55

Determine os valores de k de modo que a reta de equação $3x-4y-18=0$ em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-2x+k=0$ seja:

a) tangente

b) externa

c) secante

Tarefa: Determinar os valores de k de modo que a reta de equação $3x-4y-18=0$

em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-2x+k=0$ seja ou tangente ou externa ou secante

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$a=\frac{-(-2)}{2}=1$ e $b=0$

Estabelecer a condição de existência do raio da circunferência: $r^2=1^2+0^2-k>0$

Desenvolver a inequação: $1-k>0 \Rightarrow k<1,$ com $k \in R$

Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=\frac{3x-18}{4}$

Substituir $y=\frac{3x-18}{4}$ na equação geral da circunferência: $x^2+\left(\frac{3x-18}{4}\right)^2-2x+k=0$

Desenvolver a equação: $25x^2-140x+324+16k=0$

a) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $(-140)^2-4\cdot 25(324+16k)=0$

Desenvolver a equação: $-1600(8+k)=0$

Concluir que $k=-8$

b) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $(-140)^2-4\cdot 25(324+16k)<0$

Desenvolver a inequação: $-1600(8+k)<0$

Concluir que $-8<k<1,$ com $k \in R$

c) Substituir os coeficientes da equação obtida na fórmula do discriminante: $(-140)^2-4\cdot 25(324+16k)>0$

Desenvolver a inequação: $-1600(8+k)>0$

Concluir que $k<-8$, com $k \in R$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0$, é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$. Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q$, que é denominada equação reduzida da reta r (JULIANELLI, 2008, p.76).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$
>
> Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F$, a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).
>
> Uma reta r: $ax+by+c=0$ e uma circunferência C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ podem apresentar três posições no plano: r secante a C, r tangente a C e r exterior a C. É possível determinar a posição entre uma reta e uma circunferência resolvendo o sistema do 2º grau formado pelas equações da reta e da circunferência. Este sistema poderá apresentar duas soluções distintas (reta secante), apenas uma solução (reta tangente) ou então ser impossível (não há ponto de interseção) (JULIANELLI, 2008, p.113-114).

3.26 Exercício 58

Ache o ponto de $\lambda:(x-4)^2+(y-2)^2=9$ mais próximo da reta $r: x+y+11=0$

Tarefa: Determinar o ponto da circunferência de equação $(x-4)^2+(y-2)^2=9$ mais próximo da reta de equação $x+y+11=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=4$ e $b=2$

Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=-x-11$

Concluir que o coeficiente angular da reta é: $m_r=-1$

Determinar o coeficiente angular da reta perpendicular à reta: $m_p=\frac{-1}{m_r}=1$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do coeficiente angular na equação da reta perpendicular $y-2=1(x-4)\Rightarrow y=x-2$

Substituir $y=x-2$ na equação reduzida da circunferência: $(x-4)^2+(x-2-2)^2=9$

Desenvolver a equação: $2x^2-16x+23=0$

Encontrar os valores de x: $x=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $x=4-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Substituir os valores de x na equação da reta perpendicular: $y=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$ ou $y=4-\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$

Obter os valores de y: $y=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $y=2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Concluir que o ponto mais próximo da reta é: $\left(4-\frac{3\sqrt{2}}{2},2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Discurso teórico-tecnológico:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira:
> $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Assim, dados os pontos $A(x_0, y_0)$ e B(x,y) da reta r temos:
> $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$ (JULIANELLI, 2008, p.76-77).
> Para que duas retas r e s sejam perpendiculares, a tangente do ângulo formado entre elas deve ser inexistente. Portanto, a fórmula do ângulo entre duas retas deverá expressar uma impossibilidade:
> $\nexists \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s \cdot m_r}\right|.$ Isso ocorrerá quando o denominador da fração for igual a zero. Assim, $1+m_s \cdot m_r=0 \Rightarrow m_r=\frac{-1}{m_s}$ (JULIANELLI, 2008, p.83).
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.27 Exercício 59

Determine o ponto de $\lambda: x^2+y^2-6x-2y+9=0$ mais distante de (5,3)

Tarefa: Determinar o ponto da circunferência de equação $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ mais distante de (5,3)

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$a=\frac{-(-6)}{2}=3$ e $b=\frac{-(-2)}{2}=1$

Determinar o coeficiente angular da reta: $m=\frac{5-3}{3-1}=\frac{2}{2}=1$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do coeficiente angular na equação da reta: $y-1=1(x-3)\Rightarrow y=x-2$

Substituir $y=x-2$ na equação geral da circunferência: $x^2+(x-2)^2-6x-2(x-2)+9=0$

Desenvolver a equação: $2x^2-12x+17=0$

Encontrar os valores de x: $x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Substituir os valores de x na equação da reta: $y=3+\frac{\sqrt{2}}{2}-2$ ou $y=3-\frac{\sqrt{2}}{2}-2$

Obter os valores de y: $y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Concluir que o ponto mais distante do ponto (5,3) é: $\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Discurso teórico-tecnológico:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira**:** $by=-ax-c\Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q,$ que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Assim, dados os pontos $A(x_0,y_0)$ e B(x,y) da reta r temos: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$ (JULIANELLI, 2008, p.76-77).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma

circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.28 Exercício 63

Determine a equação da reta tangente a $\lambda:(x-1)^2+(y-2)^2=9$ que é paralela a $r:x-3y+3=0$

Tarefa: Determinar a equação da reta tangente à circunferência de equação $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ e que é paralela a reta $x-3y+3=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=1$ e $b=2$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{9}=3$

Determinar a parir do enunciado a equação do feixe de ratas paralelas: $x-3y+k=0$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na fórmula da distância do

feixe de retas paralelas ao centro da circunferência: $d=\frac{|1\cdot 1-3\cdot 2+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=3$

Desenvolver a fórmula: $k^2-10k-65=0$

Concluir que $k=5+3\sqrt{10}$ ou $k=5-3\sqrt{10}$

Concluir que as equações das retas são: $x-3y+5+3\sqrt{10}=0$ e $x-3y+5-3\sqrt{10}=0$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0$, é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira**:** $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$. Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q$, que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Duas retas r e s serão paralelas se possuírem a mesma inclinação. Segue que a tangente da inclinação também é igual: $\tan(\alpha_r)=\tan(\alpha_s) \Rightarrow m_r=m_s$ (JULIANELLI, 2008, p.76-79)
>
> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0, y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a, b\rangle$, da seguinte forma:
> $d=\left|\frac{\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x, y_0-y\rangle\cdot\langle a, b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim,
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Como $c=-ax-by$, então:
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r$. Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106)

3.29 Exercício 64

Determine as equações das tangentes a $\lambda: x^2+y^2-4x-6y-12=0$ que são:

a) horizontais

b) verticais

c) perpendiculares a $r: 3x-4y=0$

Tarefa: Determinar as equações das tangentes à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ que são ou horizontais ou verticais ou, então, perpendiculares a reta $3x-4y=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$a=\frac{-(-4)}{2}=2$ e $b=\frac{-(-6)}{2}=3$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{2^2+3^2-(-12)}=\sqrt{25}=5$

a) Determinar a partir da ordenada do centro e do valor do raio a maior ordenada da circunferência: $y-3=5\Rightarrow y=8$

Determinar a partir da ordenada do centro e do valor do raio a menor ordenada da circunferência: $3-y=5\Rightarrow y=-2$

Concluir que as equações das retas são: $y-8=0$ e $y+2=0$

b) Determinar a partir da abscissa do centro e do valor do raio a maior abscissa da circunferência: $x-2=5\Rightarrow x=7$

Determinar a partir da abscissa do centro e do valor do raio a menor abscissa da circunferência: $2-x=5\Rightarrow x=-3$

Concluir que as equações das retas são: $x-7=0$ e $x+3=0$

c) Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=\frac{3}{4}x$

Concluir que o coeficiente angular da reta é: $m_r=\frac{3}{4}$

Determinar o coeficiente angular das retas perpendiculares: $m_p=\frac{-1}{m_r}=\frac{-4}{3}$

Determinar a equação das retas perpendiculares: $y=\frac{-4}{3}x-k\Rightarrow 4x+3y+k=0$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na fórmula da distância das retas perpendiculares ao centro da circunferência: $d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 3+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$

Desenvolver a fórmula: $k^2+34k-336=0$

Concluir que $k=8$ ou $k=-42$

Concluir que as equações das retas são: $4x+3y+8=0$ e $4x+3y-42=0$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0$, é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira**:** $by=-ax-c\Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$. Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q$, que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Duas retas r e s serão paralelas se possuírem a mesma inclinação. Segue que a tangente da inclinação também é igual: $\tan(\alpha_r)=\tan(\alpha_s)\Rightarrow m_r=m_s$ (JULIANELLI, 2008, p.76-79).
>
> Para que duas retas r e s sejam perpendiculares, a tangente do ângulo formado entre elas deve ser inexistente. Portanto, a fórmula do ângulo entre duas retas expressará uma impossibilidade: $\nexists \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s\cdot m_r}\right|$. Isso ocorrerá quando o denominador da fração for igual a zero. Assim, $1+m_s\cdot m_r=0\Rightarrow m_r=\frac{-1}{m_s}$ (JULIANELLI, 2008, p.83).
>
> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0,y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a,b\rangle$, da seguinte forma: $d=\left|\frac{\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x,y_0-y\rangle\cdot\langle a,b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim, $d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Como $c=-ax-by$, então:
>
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).

Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $\left|\overrightarrow{OP}\right| = r.$ Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x-a, y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

Fazendo: $-2a = D, -2b = E, a^2 + b^2 - r^2 = F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b) = \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.30 Exercício 67

Determine, em cada caso, as equações das tangentes a λ traçadas por P:

a) $\lambda : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ e P (1,6)

b) $\lambda : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ e P(0,0)

c) $\lambda : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ e P(2,1)

Tarefa: Determinar as equações das tangentes as circunferências de equação $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9 ; x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 ; x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ e os pontos P(1,6), P(0,0) e P(2,1), respectivamente

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto P(1,6) são: $x = 1$ e $y = 6$

Substituir as coordenadas do ponto na equação reduzida da circunferência: $(1+2)^2 + (6-3)^2 - 9 = 9$

Verificar que a igualdade é maior que zero

Concluir que o ponto P(1,6) é externo à circunferência

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a=-2$ e $b=3$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{9}=3$

Substituir as coordenadas do ponto e do centro, assim como o valor do raio na fórmula da distância das retas tangentes ao centro da circunferência:

$$d=\frac{|m(-2)-m.1-3+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

Desenvolver a fórmula: $-18m=0$

Concluir que $m=0$

Substituir as coordenadas do ponto e o valor do coeficiente angular na equação da reta tangente: $y-6=0(x-1)\Rightarrow y-6=0$ e $x-1=0$

b) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto P(0,0) são: $x=0$ e $y=0$

Substituir as coordenadas do ponto na equação geral da circunferência: $0^2+0^2-6\cdot 0-8\cdot 0=0$

Verificar que a igualdade é igual a zero

Concluir que o ponto P(0,0) pertence à circunferência

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$$a=\frac{-(-6)}{2}=3 \text{ e } b=\frac{-(-8)}{2}=4$$

Determinar o coeficiente angular da reta perpendicular à reta tangente:

$$m_p=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$$

Determinar o coeficiente angular da reta tangente: $m_t = \frac{-1}{m_P} = \frac{-3}{4}$

Substituir as coordenadas do ponto e o valor do coeficiente angular na equação da reta tangente: $y - 0 = \frac{-3}{4}(x - 0) \Rightarrow \frac{3}{4}x + y = 0$

c) Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto P(2,1) são: $x = 2$ e $y = 1$

Substituir as coordenadas do ponto na equação geral da circunferência: $2^2 + 1^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -2$

Verificar que a igualdade é menor que zero

Concluir que o ponto P(2,1) é interno à circunferência

Concluir que não há reta tangente à circunferência traçada pelo ponto (2,1)

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax + by + c = 0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by = -ax - c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}.$ Chamando $\frac{-a}{b} = m$ e $\frac{-c}{b} = q$ ficará $y = mx + q,$ que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Assim, dados os pontos $A(x_0, y_0)$ e B(x,y) da reta r temos:
>
> $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ (JULIANELLI, 2008, p.76-77).
>
> Para que duas retas r e s sejam perpendiculares, a tangente do ângulo formado entre elas deve ser inexistente. Portanto, a fórmula do ângulo entre duas retas expressará uma impossibilidade: $\nexists \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|.$
>
> Isso ocorrerá quando o denominador da fração for igual a zero. Assim,
>
> $1 + m_s \cdot m_r = 0 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$ (JULIANELLI, 2008, p.83).

Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0,y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a,b\rangle$, da seguinte forma:

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x,y_0-y\rangle\cdot\langle a,b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.\ \text{Assim,}$$

$$d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$ Como $c=-ax-by$, então:

$$d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).

Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D,-2b=E,a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}.$ As inequações do tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$ ou $x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$ representam os pontos que não pertencem à circunferência de equação $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ No primeiro caso, serão considerados os pontos interiores à circunferência; no segundo caso, consideram-se os pontos exteriores (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.31 Exercício 68

Qual é a equação reduzida da circunferência de centro (-3,1) e tangente a $5x-2y-8=0$?

Tarefa: Determinar a equação reduzida da circunferência de centro (-3,1) e tangente a $5x-2y-8=0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$a=-3$ e $b=1$

Substituir as coordenadas do centro na fórmula da distância da reta tangente ao centro da circunferência: $d=\frac{|5(-3)-2\cdot 1-8|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|-25|}{\sqrt{29}}=\frac{25}{\sqrt{29}}$

Concluir que o valor do raio da circunferência é: $r=\frac{25}{\sqrt{29}}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{625}{29}$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0, y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a, b\rangle$, da seguinte forma:
> $d=\left|\frac{\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x, y_0-y\rangle\cdot\langle a, b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim,
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Como $c=-ax-by$, então:
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r$. Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.32 Exercício 69

Ache a equação reduzida da circunferência que passa por (3,0) e (5,0) e é tangente a $y+10=0$

Tarefa: Determinar a equação reduzida da circunferência que passa por (3,0) e (5,0) e é tangente a $y+10=0$

Técnica:

Determinar as coordenadas do cento (a,b) da circunferência são: $a=x_C$ e $b=y_C$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (3,0) são: $x_1=3$ e $y_1=0$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (5,0) são: $x_2=5$ e $y_2=0$

Substituir as coordenadas dos pontos na fórmula da distância dos pontos ao centro da circunferência: $d=\sqrt{(3-x_C)^2+(0-y_C)^2}=\sqrt{(5-x_C)^2+(0-y_C)^2}$

Desenvolver a equação: $x_C^2+y_C^2-6x_C+9=x_C^2+y_C^2-10x_C+25\Rightarrow 4x_C-16=0$

Concluir que $x_C=4$

Determinar a partir do enunciado que a equação reduzida da reta é: $y=-10$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (4,-10) são: $x_1=4$ e $y_1=-10$

Determinar a partir do enunciado que as coordenadas do ponto (5,0) são: $x_2=5$ e $y_2=0$

Substituir as coordenadas dos pontos na fórmula da distância dos pontos ao centro da circunferência: $d=\sqrt{(4-4)^2+(-10-y_C)^2}=\sqrt{(5-4)^2+(0-y_C)^2}$

Desenvolver a equação: $y_C^2+20y_C+100=y_C^2+1\Rightarrow 20y_C+99=0$

Concluir que $y_C = \frac{-99}{20}$

Substituir as coordenadas do centro na fórmula da distância da reta tangente ao

centro da circunferência: $d = \frac{\left|\frac{-99}{20} + 10\right|}{\sqrt{1^2}} = \frac{\left|\frac{101}{20}\right|}{1} = \frac{101}{20}$

Concluir que o valor do raio da circunferência é $r = \frac{101}{20}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da

circunferência: $(x-4)^2 + \left(y + \frac{99}{20}\right)^2 = \left(\frac{101}{20}\right)^2$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre os pontos A e B é igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Conclui-se que: $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (JULIANELLI, 2008, p.21).
>
> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax + by + c = 0$ e $S(x_0, y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n} = \langle a, b \rangle$, da seguinte forma: $d = \left|\frac{\overrightarrow{RS} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{\langle x_0 - x, y_0 - y\rangle \cdot \langle a, b\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{a(x_0 - x) + b(y_0 - y)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. Assim, $d = \left|\frac{ax_0 + by_0 - ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. Como $c = -ax - by$, então: $d = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}| = r$. Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x - a, y - b)$, então $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.33 Exercício 70

Encontre as equações das retas que tangenciam a circunferência $x^2+y^2-4x-12=0$ e formam ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo

Tarefa: Encontrar as equações das retas que tangenciam a circunferência de equação $x^2+y^2-4x-12=0$ e formam ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência:

$a=\frac{-(-4)}{2}=2$ e $b=0$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{2^2+0^2-(-12)}=\sqrt{16}=4$

Determinar o coeficiente angular do feixe de retas que formam ângulo de 60°:

Determinar a equação do feixe de retas que formam ângulo de 60°: $\sqrt{3}x-y+k=0$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na fórmula da distância do feixe de retas ao centro da circunferência: $d=\frac{|\sqrt{3}\cdot 2-1\cdot 0+k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=4$

Desenvolver a fórmula: $k^2+4\sqrt{3}k-52=0$

Concluir que $k=-2\sqrt{3}+8$ ou $k=-2\sqrt{3}-8$

Concluir que as equações das retas são: $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+8=0$ e $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-8=0$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0$, é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira: $by=-ax-c \Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$. Chamando $\frac{-a}{b}=m$ e $\frac{-c}{b}=q$ ficará $y=mx+q$, que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Duas retas r e s serão paralelas se possuírem a mesma inclinação. Segue que a tangente da inclinação também é igual: $\tan(\alpha_r)=\tan(\alpha_s) \Rightarrow m_r=m_s$ (JULIANELLI, 2008, p.76-79)
>
> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0, y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\vec{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a, b\rangle$, da seguinte forma:
> $d=\left|\frac{\vec{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x, y_0-y\rangle\cdot\langle a, b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim,
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Como $c=-ax-by$, então:
> $d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).
>
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\vec{OP}|=r$. Como $\vec{OP}=P-O=(x-a, y-b)$, então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F$, a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

3.34 Exercício 71

Seja λ uma circunferência com centro sobre a reta $y=3x$ Sendo λ tangente à reta de equação $y=x$ no ponto de ordenada 4, determine a equação de λ

Tarefa: Determinar a equação da circunferência que possui centro sobre a reta $y=3x$ e é tangente à reta de equação $y=x$ no ponto de ordenada 4

Técnica:

Determinar a partir do enunciado o coeficiente angular da reta tangente: $m_t=1$

Determinar o coeficiente angular da reta perpendicular à reta tangente: $m_p=\frac{-1}{m_t}=-1$

Determinar a partir do enunciado a abscissa do ponto de tangência: $4=x$

Substituir as coordenadas do ponto de tangência e o valor do coeficiente angular na equação da reta perpendicular: $y-4=-1(x-4)\Rightarrow x+y-8=0$

Substituir $y=3x$ na equação da reta perpendicular: $x+3x-8=0$

Desenvolver a equação: $4x-8=0$

Encontrar o valor de x: $x=2$

Substituir $x=2$ na equação da reta que passa pelo centro: $y=3\cdot 2$

Obter o valor de y: $y=6$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do ponto de tangência o valor do raio da circunferência: $r=\sqrt{(4-2)^2+(4-6)^2}=\sqrt{8}$

Substituir as coordenadas do centro e o valor do raio na equação reduzida da circunferência: $(x-2)^2+(x-6)^2=8$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dada a equação geral de uma reta r, $ax+by+c=0,$ é possível determinar o valor de y em função de x, da seguinte maneira:

$by = -ax - c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. Chamando $\frac{-a}{b} = m$ e $\frac{-c}{b} = q$ ficará $y = mx + q$, que é denominada equação reduzida da reta r. Como m é o coeficiente angular, então m é a tangente da inclinação da reta. Assim, dados os pontos $A(x_0, y_0)$ e B(x,y) da reta r temos:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ (JULIANELLI, 2008, p.76-77).

Para que duas retas r e s sejam perpendiculares, a tangente do ângulo formado entre elas deve ser inexistente. Portanto, a fórmula do ângulo entre duas retas expressará uma impossibilidade: $\nexists \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|$.

Isso ocorrerá quando o denominador da fração for igual a zero. Assim, $1 + m_s \cdot m_r = 0 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$ (JULIANELLI, 2008, p.83).

Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}| = r$. Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x - a, y - b)$, então $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência (JULIANELLI, 2008, p.105-106).

3.35 Exercício 72

Uma circunferência é tangente, simultaneamente, às retas de equação $x + 2y + 1 = 0$ e $x + 2y - 3 = 0$ Forneça a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência

Tarefa: Fornecer a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência, sendo esta tangente, simultaneamente, às retas de equação $x + 2y + 1 = 0$ e $x + 2y - 3 = 0$

Técnica:

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência: $a = x_c$ e $b = y_c$

Substituir as coordenadas do centro na fórmula da distância das retas tangentes ao centro da circunferência: $d=\frac{|x_c+2y_c+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|x_c+2y_c-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

Desenvolver a equação: $x_c+2y_c+1=-(x_c+2y_c-3)\Rightarrow 2x_c+4y_c-2=0$

Concluir que a equação da reta é: $x+2y-1=0$

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de tangência de reta e circunferência, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo R(x,y) um ponto qualquer de uma reta r: $ax+by+c=0$ e $S(x_0,y_0)$ um ponto que não pertence a reta r, a distância d do ponto S à reta r é igual ao módulo da projeção escalar de $\overrightarrow{RS}$ sobre o vetor normal $\vec{n}=\langle a,b\rangle$, da seguinte forma: $d=\left|\frac{\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\langle x_0-x,y_0-y\rangle\cdot\langle a,b\rangle}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a(x_0-x)+b(y_0-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim, $d=\left|\frac{ax_0+by_0-ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Como $c=-ax-by$, então: $d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (JULIANELLI, 2008, p.69-70).

3.36 Exercício 74

Obtenha a intersecção das circunferências $\lambda_1: x^2+y^2=100$ e $\lambda_2: x^2+y^2-12x-12y+68=0$

Tarefa: Obter a intersecção das circunferências de equação $x^2+y^2=100$ e $x^2+y^2-12x-12y+68=0$

Técnica:

Substituir a partir do enunciado $x^2+y^2=100$ na equação da circunferência

$\lambda_2: 100 - 12x - 12y + 68 = 0$

Desenvolver a equação: $y = 14 - x$

Substituir $y = 14 - x$ na equação geral da circunferência $\lambda_1: x^2 + (14 - x)^2 = 100$

Desenvolver a equação: $2x^2 - 28x + 96 = 0$

Encontrar os valores de x: $x = 8$ ou $x = 6$

Substituir os valores de x na equação de y: $y = 14 - 8$ ou $y = 14 - 6$

Obter os valores de y: $y = 6$ ou $y = 8$

Concluir que os pontos de intersecção são: (8,6) e (6,8)

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de interseção de circunferências, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}| = r.$ Como $\overrightarrow{OP} = P - O = (x - a, y - b)$, então $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$ Fazendo: $-2a = D, -2b = E, a^2 + b^2 - r^2 = F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (JULIANELLI, 2008, p.105-106)
> Dadas duas circunferências de raios R e r, com $r < R,$ e sendo d a distância entre os seus centros O e O', há seis casos a serem considerados. As circunferências são: exteriores, se $d > R + r;$ tangentes exteriormente, se $d = R + r;$ secantes, se $R - r < d < R + r;$ tangentes interiormente, se $d = R - r;$ interiores, se $d < R - r;$ concêntricas, se $d = 0$ (JULIANELLI, 2008, p.116).

3.37 Exercício 76

Determine, em cada caso, a posição relativa de λ_1 e λ_2

a) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 16; \lambda_2: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $\lambda_1: x^2+y^2=18; \lambda_2: x^2+y^2+20x-10y+124=0$

c) $\lambda_1: x^2+y^2-4x-6y+12=0; \lambda_2: x^2+y^2+4x-12y+24=0$

d) $\lambda_1: x^2+y^2=81; \lambda_2: x^2+y^2-6x+8y+9=0$

Tarefa: Determinar a posição relativa das circunferências de equações $\lambda_1: x^2+y^2=16$ e $\lambda_2: x^2+y^2+6x-4y+4=0; \lambda_1: x^2+y^2=18$ e $\lambda_2: x^2+y^2+20x-10y+124=0; \lambda_1: x^2+y^2-4x-6y+12=0$ e $\lambda_2: x^2+y^2+4x-12y+24=0; \lambda_1: x^2+y^2=81$ e $\lambda_2: x^2+y^2-6x+8y+9=0$

Técnica:

a) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1: a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1: R=\sqrt{16}=4$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (e,f) da circunferência

$\lambda_2: e=\frac{-6}{2}=-3$ e $f=\frac{-(-4)}{2}=2$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência $\lambda_2: r=\sqrt{(-3)^2+2^2-4}=\sqrt{9}=3$

Determinar a distância entre os centros das circunferências: $d=\sqrt{(-3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}$

Determinar a diferença dos raios: $R-r=4-3=1<\sqrt{13}$

Determinar a soma dos raios: $R+r=4+3=7>\sqrt{13}$

Verificar que a distância é maior que a diferença dos raios e menor que a soma dos raios

Concluir que as circunferências são secantes

b) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1 : a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1 : R=\sqrt{18}$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (e,f) da circunferência

$\lambda_2 : e=\frac{-20}{2}=-10$ e $f=\frac{-(-10)}{2}=5$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência $\lambda_2 : r=\sqrt{(-10)^2+5^2-124}=\sqrt{1}=1$

Determinar a distância entre os centros das circunferências: $d=\sqrt{(-10-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{125}$

Determinar a soma dos raios: $R+r=\sqrt{18}+1<\sqrt{125}$

Verificar que a distância é maior que a soma dos raios

Concluir que as circunferências são exteriores

c) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1 : a=\frac{-(-4)}{2}=2$ e $b=\frac{-(-6)}{2}=3$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência $\lambda_1 : r=\sqrt{2^2+3^2-12}=\sqrt{1}=1$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (e,f) da circunferência

$\lambda_2 : e=\frac{-4}{2}=-2$ e $f=\frac{-(-12)}{2}=6$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência $\lambda_2 : R=\sqrt{(-2)^2+6^2-24}=\sqrt{16}=4$

Determinar a distância entre os centros das circunferências:

$d=\sqrt{(-2-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{25}=5$

Determinar a soma dos raios: $R+r=4+1=5$

Verificar que a distância é igual a soma dos raios

Concluir que as circunferências são tangentes exteriores

d) Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (a,b) da circunferência $\lambda_1 : a=0$ e $b=0$

Determinar a partir do enunciado o valor do raio da circunferência $\lambda_1 : R=\sqrt{81}=9$

Determinar a partir do enunciado as coordenadas do centro (e,f) da circunferência

$\lambda_2 : e=\frac{-(-6)}{2}=3$ e $f=\frac{-8}{2}=-4$

Determinar a partir das coordenadas do centro e do termo independente o valor do raio da circunferência $\lambda_2 : r=\sqrt{3^2+(-4)^2-9}=\sqrt{16}=4$

Determinar a distância entre os centros das circunferências: $d=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{25}=5$

Determinar a diferença dos raios: $R-r=9-4=5$

Verificar que a distância é igual à diferença dos raios

Concluir que as circunferências são tangentes interiores

Discurso teórico-tecnológico:

O conhecimento matemático envolvido é o conceito de posições relativas de duas circunferências, definido por Julianelli (2008) da seguinte maneira:

> Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre os pontos A e B é igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Conclui-se que: $d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (JULIANELLI, 2008, p.21).
> Sendo O(a,b) o centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) um ponto

qualquer dessa circunferência, pode ser escrito que: $|\overrightarrow{OP}|=r.$ Como $\overrightarrow{OP}=P-O=(x-a,y-b),$ então $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$ A expressão obtida é chamada de equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo a equação reduzida encontrada anteriormente, ficará desta forma: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$ Fazendo: $-2a=D, -2b=E, a^2+b^2-r^2=F,$ a equação geral de uma circunferência fica da seguinte forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$ As igualdades citadas nos levam a determinar o centro $O(a,b)=\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r=\sqrt{a^2+b^2-F}$ (JULIANELLI, 2008, p.105-107).

Dadas duas circunferências de raios R e r, com $r<R,$ e sendo d a distância entre os seus centros O e O', há seis casos a serem considerados. As circunferências são: exteriores, se $d>R+r;$ tangentes exteriormente, se $d=R+r;$ secantes, se $R-r<d<R+r;$ tangentes interiormente, se $d=R-r;$ interiores, se $d<R-r;$ concêntricas se $d=0$ (JULIANELLI, 2008, p.116).

Tabela 2

Esta tabela relaciona todos os diferentes tipos de tarefas que se apresentam nos exercícios propostos do capítulo 3, em quantos exercícios determinada tarefa comparece (N) e o respectivo percentual de comparecimento (P) da tarefa em destaque na tabela.

Tabela 2 – Descrição dos tipos de tarefas presentes no livro didático analisado

Tipos de Tarefas	**N**	**P**
Encontrar a equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e raio r	5	6,6
Determinar a equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e que passa pelo ponto P(x,y)	2	2,6
Determinar uma equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	1	1,3
Determinar os valores de k de modo que a circunferência de equação $(x-k)^2+(y-4)^2=25$ passe pelo ponto (2k,0)	2	2,6
Determinar o ponto da circunferência de equação $(x-5)^2+(y-1)^2=4$ mais próximo do eixo das abscissas e o ponto mais afastado do eixo das ordenadas	2	2,6
Determinar a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$	4	5,3
Determinar as coordenadas do centro e o raio das circunferências de equações $(x-1)^2+(y-2)^2=6$ e $x^2+y^2+2x+4y-1=0$	8	10,5
Determinar a equação geral da circunferência de centro C(a,b) e que passa pelo ponto P(x,y)	1	1,3
Encontrar os valores de k que tornam $x^2+y^2-2x+10y-k+28=0$ uma equação da circunferência	2	2,6
Determinar o valor de p para que as circunferências de equações $x^2+y^2+px-6y-17=0$ e $x^2+y^2+4x-(p+2)y-10=0$ sejam concêntricas	1	1,3

(Continuação)

Tipos de Tarefas	N	P
Encontrar as coordenadas do ponto de maior abscissa da circunferência de equação $x^2+y^2-8x+4y+11=0$ e do ponto de menor ordenada da circunferência de equação $x^2+y^2+6x-4y+12=0$	1	1,3
Determinar a posição dos pontos A(-2,2), B(-5,1), D(-1,2), E(0,1) e F(-5,-1) em relação à circunferência de equação $(x+2)^2+(y+1)^2=9$	2	2,6
Determinar o valor de k para que o ponto (3,-3) pertença à circunferência de equação $x^2+y^2-2x-4y+k=0$	1	1,3
Determinar o valor de k para que a circunferência de equação $x^2+y^2-2x+6y-55=0$ passe pelo ponto (-6,-k)	2	2,6
Fornecer o intervalo de variação de p para que o ponto (-3,p) seja interno à circunferência de equação $x^2+y^2+2x-6y+5=0$	1	1,3
Determinar os valores de m para que o ponto (m,0) seja externo à circunferência de equação $x^2+y^2-4x+5y-5=0$	2	2,6
Resolver graficamente as inequações $x^2+y^2\leqslant 1; x^2+y^2<1; x^2+y^2\geqslant 1; x^2+y^2>1$	2	2,6
Resolver graficamente os sistemas de inequações $x^2+y^2>4 \wedge x^2+y^2\leqslant 9; x^2+y^2\geqslant 2 \wedge x^2+y^2<4$	3	3,9
Resolver graficamente o sistema de inequações $x^2+y^2>16 \vee x^2+y^2<20$	1	1,3
Resolver graficamente o sistema de inequações $3x-y-2\leqslant 0 \wedge x^2+y^2\leqslant 1$	2	2,6

(Continuação)

Tipos de Tarefas	N	P
Determinar a posição relativa entre as retas de equação $x-y=0; x-y+1=0; x+y-2=0$ e as circunferências de equação $x^2+y^2+2x-2y+1=0; (x+1)^2+(y-2)^2=5; x^2+y^2-4x-4y+6=0,$ respectivamente	3	3,9
Obter os pontos de intersecção entre as retas de equação $3x+4y-35=0; y=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}; x=1+t, y=1-t$ e circunferências de equação $x^2+y^2-4x-2y-20=0; x^2+y^2-4x-6y-12=0; x^2+y^2-8x-6y+24=0,$ respectivamente	4	5,3
Verificar a posição da reta que passa por (1,0) em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-12=0$	1	1,3
Determinar os valores de k de modo que a reta de equação $x+y+k=0$ em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ seja ou tangente ou secante ou externa	2	2,6
Determinar os valores de k de modo que a reta de equação $3x-4y-18=0$ em relação à circunferência de equação $x^2+y^2-2x+k=0$ seja ou tangente ou secante ou externa	4	5,3
Determinar o ponto da circunferência de equação $(x-4)^2+(y-2)^2=9$ mais próximo da reta de equação $x+y+11=0$	1	1,3
Determinar o ponto da circunferência de equação $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ mais distante de (5,3)	1	1,3
Determinar a equação da reta tangente à circunferência de equação $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ e que é paralela a reta $x-3y+3=0$	2	2,6
Determinar as equações das tangentes à circunferência de equação $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ que são ou horizontais ou verticais ou, então, perpendiculares a reta $3x-4y=0$	2	2,6

(Continuação)

Tipos de Tarefas	N	P
Determinar as equações das tangentes as circunferências de equação $(x+2)^2+(y-3)^2=9;x^2+y^2-6x-8y=0;x^2+y^2-6x+5=0$ e os pontos P(1,6), P(0,0) e P(2,1), respectivamente	2	2,6
Determinar a equação reduzida da circunferência de centro (-3,1) e tangente a $5x-2y-8=0$	2	2,6
Determinar a equação reduzida da circunferência que passa por (3,0) e (5,0) e é tangente à $y+10=0$	1	1,3
Encontrar as equações das retas que tangenciam a circunferência de equação $x^2+y^2-4x-12=0$ e formam ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo	1	1,3
Determinar a equação da circunferência que possui centro sobre a reta $y=3x$ e é tangente à reta de equação $y=x$ no ponto de ordenada 4	1	1,3
Fornecer a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência, sendo esta tangente, simultaneamente, às retas de equação $x+2y+1=0$ e $x+2y-3=0$	1	1,3
Obter a intersecção das circunferências de equação $x^2+y^2=100$ e $x^2+y^2-12x-12y+68=0$	2	2,6
Determinar a posição relativa das circunferências de equações $\lambda_1: x^2+y^2=16$ e $\lambda_2: x^2+y^2+6x-4y+4=0;\lambda_1: x^2+y^2=18$ e $\lambda_2: x^2+y^2+20x-10y+124=0;\lambda_1: x^2+y^2-4x-6y+12=0$ e $\lambda_2: x^2+y^2+4x-12y+24=0;\lambda_1: x^2+y^2=81$ e $\lambda_2: x^2+y^2-6x+8y+9=0$	1	1,3
Total	76	100

Fonte: Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando a Teoria Antropológica do Didático, foi realizada uma análise no capítulo “A Circunferência”, presente no livro didático referenciado no capítulo 3 deste trabalho. Através dessa análise, foi possível identificar a organização matemática presente nesse capítulo, e como essa organização interliga-se com a totalidade desse mesmo capítulo.

Com relação aos setenta e seis exercícios propostos (*bloco do saber-fazer*) averígua-se que há um desequilíbrio quantitativo na distribuição dos tipos de tarefas, o que pode ser verificado na Tabela 2. Em termos qualitativos, observa-se que tarefas presentes em um maior número de exercícios são realizadas por poucas técnicas, ao passo que tarefas presentes em um menor número de exercícios são realizadas por um número maior de técnicas, conforme o estudo da organização matemática deste trabalho.

No que se refere ao discurso teórico-tecnológico (*bloco do saber*) do capítulo analisado, ele é insuficiente para a resolução de alguns tipos de tarefas propostas. Portanto, para atingir esse objetivo, poderia ser mais abrangente, com a inserção de alguns exercícios resolvidos relacionados a essas tarefas, o que promoveria maior integração entre os *blocos do saber* e do *saber-fazer.*

Destaca-se a presença de alguns tópicos da Geometria Plana do Ensino Fundamental, que fazem parte do discurso teórico-tecnológico, servindo como revisão desses conteúdos e como suporte para realização de algumas tarefas.

Observa-se ausência de informações históricas envolvendo o objeto “circunferência”, o que poderia servir como um valioso recurso didático. É importante destacar a presença da História da Matemática em livros chamados paradidáticos. Porém como esses livros não estão incluídos no PNLD, ficam restritos a poucos estudantes.

A presença de um ambiente contextualizado nas práticas sociais e interligado à outras disciplinas permite que os alunos, orientados por seus professores, obtenham uma visão das aplicações práticas de seu estudo, servindo de motivação, despertando novos interesses, como também preparando-os para processos de avaliação com ênfase nesses aspectos.

Verifica-se conjuntamente, ausência de contextualização e interdisciplinaridade do objeto matemático em estudo no capítulo analisado: no *bloco do saber*, nos exercícios resolvidos e nos setenta e seis exercícios propostos. Apresentam-se somente em dois exercícios no final do capítulo, classificados como Exercícios Complementares.

Sobre essa temática, podemos encontrar no artigo 8 da resolução 3/98 da CEB/CNE, inciso I: “A interdisciplinaridade, nas suas mais variadas formas, partirá do princípio de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos”. Também no artigo 9 da resolução 3/98, inciso II: “A relação entre teoria e prática requer a concretização dos conteúdos curriculares em situações mais próximas e familiares do aluno”. No inciso III desse mesmo artigo, nos deparamos com a afirmação: “A aplicação de conhecimentos constituídos na escola às situações da vida cotidiana e da experiência espontânea permite seu entendimento, crítica e revisão”.

Dentro desse quadro, caberia então, ao professor, suprir essa falta. Porém, dada a limitação de tempo em sala de aula (a maioria das escolas adotam a carga horária legal mínima) essa possibilidade na prática, torna-se inviável.

O livro didático pode (e deve) transformar-se em um grande aliado do professor para dirigir e orientar seus alunos. Um bom livro, com seu uso adequado, torna-se um suporte e complemento das aulas, um recurso constante de seu estudante, elementos referidos na introdução deste trabalho: Carvalho e Lima (2010) e Gérard e Roegiers (1998)

Por outro lado, seria necessário, principalmente, se considerar que o leitor dos livros didáticos é um jovem estudante. Isso demanda uma linguagem mais envolvente, atrativa e que seja mais adequada à sua idade e realidade.

Esse fato não significa que seus autores tenham que abdicar de sua base científica. Mas, seria indispensável uma reestruturação na linguagem presente na maioria dos livros. Há necessidade de se repensar sobre a arquitetura desses livros, ainda que seja necessário romper determinados paradigmas, alguns citados na Introdução deste trabalho: Machado (1995) e Dante (1996).

Evidentemente, a idealização de uma obra didática destinada a jovens leitores, exigiria que se extrapolasse um trabalho puramente científico, possivelmente tornando essa missão muito mais laboriosa, porém muito mais significativa. A produção de livros didáticos mais acessíveis, criativos e interessantes para os alunos, provavelmente os tornariam mais lidos, consultados e utilizados em todos os seus aspectos, cumprindo assim sua real e verdadeira função.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007

BRASIL(Ministério da Educação). **Resolução 3/98 CEB/CNE**.1998.Disponível em: <portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf>. Acesso em: 04 outubro 2016

CARVALHO, J.B.; LIMA, P.F. **Escolha e uso do livro didático**. In: BRASIL. Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. Disponível em: <portal.mec.gov.br/component/docman/?task=doc_download&gid=7842>. Acesso em: 18 setembro 2016

CASSIANO, C. C. F. **Aspectos políticos e econômicos da circulação do livro didático de História e suas implicações curriculares**. História, São Paulo, v.23, p.1-2, 2014

CASTELLANI, B. R. Biologia e cidadania In: SÃO PAULO (Estado). **Escola em movimento.** Secretaria da Educação. São Paulo: SE/CENP 1994 (Argumento)

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1999

DANTE, L.R. **Livro didático de matemática: uso ou abuso**. Em aberto, Brasília, v.16, n.69, p.83-90, jan./mar. 1996. Disponível em: <www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraDownload.do?select_action=&co_obra=19510>. Acesso em: 09 outubro 2016

FIDALGO, A.;GRADIM, A. **Manual de semiótica**. 2005. Disponível em www.bocc.ubi.pt/pag/fidalgo-antonio-manual-semiotica-2005.pdf. Acesso: 26 outubro 2016

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Por trás da porta, que matemática acontece?** Campinas: Editora Gráfica FE/UNICAMP-CEMPEM, 2001

GERARD, F.M.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. 1ª edição.

Porto. Porto Editora, 1998

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações, 3: ensino médio.** 6ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2010

JULIANELLI, J.R. **Calculo Vetorial e Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008

MACHADO, N. J. Apresentação do livro Curvas Notáveis. In: MARKUCHEVITCH, A. I. **Curvas notáveis**. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995

MACHADO, N. J. **Imagens do conhecimento e ação docente no Ensino Superior**. São Paulo: Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação (FEUSP), 2008

SILVA, M.A. **A fetichização do livro didático no Brasil**. Educação & Realidade, Porto Alegre, v.37, n.3, p.803-821, set./dez. 2012

TERRAZAN, E.A.; ZAMBON, L.B. **Políticas de material didático no Brasil: organização dos processos de escolha de livros didáticos em escolas públicas de educação básica**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v.94, n.237, p.585-602, maio/ago 2013

VIANNA, C. R. **Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas**. São Paulo: Universidade de São Paulo. Faculdade de educação, USP, 1995