



Matemática e Música: a presença de fractais em composições de Vivaldi

Anyele Lima Araújo

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

IFSP

São Paulo

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Araújo, Anyele Lima.

Matemática e Música: a presença de fractais em composições de Vivaldi / Anyele Lima Araújo. - São Paulo: IFSP, 2016.

96 pg

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Henrique Marins de Carvalho

1. Fractais. 2. Vivaldi. 3. *Box-counting*.

ANYELE LIMA ARAÚJO

MATEMÁTICA E MÚSICA: A PRESENÇA DE FRACTAIS EM
COMPOSIÇÕES DE VIVALDI

Monografia apresentada ao Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em
cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do
grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 02 dez. 2016

CONCEITO: DEZ



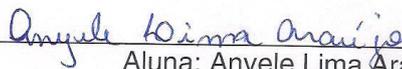
Prof. Dr. Anderson da Silva Vieira
Membro da Banca



Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Membro da Banca



Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Orientador



Aluna: Anyele Lima Araújo

“A música exprime a mais alta filosofia numa linguagem que a razão não compreende”.

(Arthur Schopenhauer)

A todos que lutam pelos seus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me guiar em meus caminhos e me prover de tudo o que era preciso para chegar até aqui.

Agradeço a minha família por ser meu alicerce, por me dar as condições de buscar meus objetivos e, principalmente, por estarem ao meu lado enquanto crescia, sem vocês eu não seria quem sou.

A Cris e Natãna por me apoiarem e estarem ao meu lado em momentos difíceis, um imenso obrigado e saibam que foram peças chaves em minha formação acadêmica e crescimento pessoal. Agradeço, também, a outros companheiros de curso que me ajudaram direta ou indiretamente nessa jornada.

Agradeço aos professores que foram intermediadores dos conhecimentos que adquiri até aqui, em especial ao meu orientador que me permitiu escolher meu tema livremente.

E por fim, agradeço a Vivaldi por ter presenteado o mundo com músicas de beleza ímpar e a Mandelbrot por apresentar à humanidade mais uma ferramenta para entender o mundo.

RESUMO

Matemática e música andam lado a lado, todavia de modo não evidente. Assim, por meio da interdisciplinaridade buscou-se evidenciar essa relação. O presente trabalho objetiva analisar se composições de Antonio Lucio Vivaldi possuem características fractais. Para isso escolheu-se duas composições de Vivaldi, as quais passaram por um processo chamado geometrização que transforma a notação musical em notação gráfica, a partir dessa nova forma de escrever música foi utilizado um algoritmo para matlab que usa o método *Box-counting* para indicar a dimensão fractal da curva. Os gráficos gerados pelo programa permitiram a análise da dimensão das peças escolhidas, bem como se elas possuem característica de autossimilaridade e complexidade infinita.

Palavras-chaves: Fractais. Vivaldi. *Box-counting*.

Matemática e Música: a presença de fractais em composições de Vivaldi

ABSTRACT

Mathematics and music go hand in hand, but not in an obvious way. Thus, through interdisciplinary, this relationship was evidenced. This work aims to analyze if compositions by Antonio Lucio Vivaldi have fractal characteristics. For this we chose two compositions by Vivaldi, which have undergone a process called geometrization, which transforms musical notation into a mathematical representation. From this new way of writing the songs an algorithm was used for matlab, which uses the Box-counting method to indicate the fractal dimension of the curve. The graphs generated by the program allowed the analysis of the dimension of the chosen pieces, as well as if they have autosimilarity and infinite complexity characteristics.

Keywords: Fractals. Vivaldi. Box-counting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Floco de Neve de Koch	29
Figura 2 – Conjunto de Mandelbrot	30
Figura 3 – Triângulo de Sierpinski	33
Figura 4 – Mapa da Grã Bretanha recoberto por malha quadriculada	37
Figura 5 – Curva de Koch recoberta por réguas r	38
Figura 6 – Antonio Lucio Vivaldi	41
Figura 7 – Asa Branca.....	43
Figura 8 – Pentagrama.....	44
Figura 9 – Linhas suplementares	44
Figura 10 – Claves	44
Figura 11 – Nome das notas musicais	45
Figura 12 – Claves de fá e dó	45
Figura 13 – Notas e suas pausas.....	46
Figura 14– Compasso	47
Figura 15 – Fórmula de Compasso	47
Figura 16 – Andamento.....	48
Figura 17 – Acidentes musicais.....	48
Figura 18 – Acidentes	49
Figura 19 – “Valoração” de notas.....	51
Figura 20– Compasso reescrito	52
Figura 21 – Malha de quadrados de dois centímetros de lado.....	54
Figura 22 – Malha de quadrados de um centímetro de lado	54
Figura 23 – Malha de quadrados de meio centímetro de lado	55
Figura 24– Ritornelo Outono	61
Figura 25 – Complexidade Infinita.....	61
Figura 26 – Gráficos de pontos, Outono C.....	62

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Geometrização Outono parte A	53
Gráfico 2– Gráfico log-log lado por quantidade	55
Gráfico 3 – Geometrização Outono parte A	58
Gráfico 4 – Concerto em Lá Menor parte 1, Violino 1	58
Gráfico 5 – Concerto em Lá Menor parte 1, violino 2	58
Gráfico 6 – Outono (log-log)	59
Gráfico 7 – Lado r por dimensão, Outono	59
Gráfico 8 – Concerto em Lá Menor, violino 1 (log-log)	59
Gráfico 9– Lado r por dimensão, violino 1 do Concerto em Lá Menor	59
Gráfico 10 – Concerto em Lá Menor, violino 2 (log-log)	59
Gráfico 11 - Lado r por dimensão, violino 2 do Concerto em Lá Menor	59

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Tabela de geometrização	53
Tabela 2– Lado por quantidade.....	55

Sumário

1. Introdução	27
2. Fractais	29
3. Cálculo da dimensão fractal.....	33
3.1. Método Massa-raio.....	35
3.2. Análise da intersecção acumulativa.....	36
3.3. Box-counting	36
3.4. Compass (ou Dividers)	38
4. Antonio Lucio Vivaldi: Vida e Obra.....	41
5. Um Pouco de Teoria Musical	43
6. Metodologia	51
7. Resultados	57
8. Considerações Finais	63
9. Referências.....	65
APÊNDICE A - Gráficos Geometrização Outono	67
A.1. Outono.....	67
A. 2. Outono, parte B.....	67
A. 3. Outono, parte C	68
APÊNDICE B - Gráficos Geometrização Concerto em Lá Menor	69
B. 1. Concerto em Lá Menor, violino 1.....	69
B. 2. Concerto em Lá Menor, violino 2.....	69
B.3. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2.....	70
B.4. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 3.....	70
B. 5. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 2.....	71
B. 6. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 3.....	71
APÊNDICE C - Gráficos Box-counting (log-log).....	73
C. 1. Outono A	73
C.2. Outono B	73
C.3. Outono C	73
C.4. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 1	73

C.5. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2	73
C.6. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 3	73
C.7. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 1	74
C.8. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 2	74
C.9. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 3	74
APÊNDICE D - Gráficos Box-counting (slope)	75
D.1. Outono A	75
D.2. Outono B	75
D.3. Outono C	75
D.4. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 1	75
D.5. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 2	75
D.6. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 3	75
D.7. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 1	76
D.8. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 2	76
D.9. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 3	76
APÊNDICE E - Gráficos log-log, teste com imagem	77
E.1. Outono	77
E.2. Outono A	77
E.3. Outono B	77
E.4. Outono C	77
E.5. Concerto em Lá menor, violino 1	77
E.6. Concerto em Lá menor, violino 2	77
E.7. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 1	78
E.8. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2	78
E.9. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 3	78
E.10. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 1	78
E.11. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 2	78
E.12. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 3	78
APÊNDICE F - Gráficos slope, segundo teste	79
F.1. Outono	79
F.2. Outono A	79
F.3. Outono B	79
F.4. Outono C	79
F.5. Concerto em Lá Menor, violino 1	79
F.6. Concerto em Lá Menor, violino 2	79

F.7. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 1	80
F.8. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2.....	80
F.9. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 3.....	80
F.10. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 1	80
F.11. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 2.....	80
F.12. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 3.....	80
ANEXO A - Partitura Outono	81
ANEXO B - Partitura Concerto em Lá Menor: violino 1	85
ANEXO C - Partitura Concerto em Lá Menor: violino 2	89
ANEXO D - Código Box-counting utilizado no Matlab	92

1. Introdução

Música, um elemento presente na vida de todos, meio de expressar alegrias, tristezas, amores, angústias e tantos outros sentimentos intrínsecos a humanidade. Matemática, importante ferramenta para a compreensão do mundo e, pelo senso comum, um monstro que amedronta e causa traumas na vida escolar de muitos, mas que, também, é presente no cotidiano de todos. Dois universos interligados de forma sutil, que aqui estarão intimamente ligados.

Sendo vastos os saberes de ambas as áreas de conhecimento acima mencionadas, o presente trabalho aborda apenas um objeto de cada área. Assim, no escopo musical se trabalhará com composições de Antonio Lucio Vivaldi e o elemento matemático elegido é o fractal. Aqui se tenta aproximar as obras de Vivaldi dos fractais, elemento relativamente novo na matemática.

Será que uma “descoberta” matemática com menos de meia década de idade se faz presente em obras compostas há pelo menos três séculos? Esta é a guia pela qual a presente pesquisa trilhará seus caminhos, pretendendo desbravar uma área pouco explorada do conhecimento humano.

Uma possível resposta para tal pergunta é sim, uma vez que os fractais foram “descobertos” a partir da observação de trabalhos de outros matemáticos e usados para resolver problemas em linhas telefônicas da IBM ou identificar certa ordem nos preços de algodão (Barbosa, 2002, pg. 13).

O objetivo principal é analisar se composições de Vivaldi possuem características dos fractais, as quais são autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão não-inteira. Para o alcance de tal propósito se delineiam os seguintes objetivos específicos: escolher as composições que serão analisadas, geometrizar as peças escolhidas, calcular a dimensão fractal das obras a partir dos gráficos de geometrização, analisar os resultados obtidos com o cálculo.

O trabalho se justifica por meio da interdisciplinaridade, a qual busca interligar duas áreas de maneira que suas semelhanças sejam evidenciadas. E, assim, ocorre aqui, por meio da interdisciplinaridade busca-se aproximar a música da matemática.

O trabalho está dividido em seis capítulos, além da presente introdução e as considerações finais, são eles: Fractais; Dimensão Fractal; Um Pouco de Teoria Musical; Antonio Lucio Vivaldi: vida e obra; Metodologia; Resultados. Os dois primeiros capítulos buscam apresentar e explicar os fractais. O terceiro pretende explicar, de modo sucinto, um pouco de teoria musical, elemento importante para entender a geometrização. O quarto, conforme seu título, discorre acerca da vida do compositor escolhido. Metodologia, quinto capítulo, descreve o procedimento usado para analisar as músicas. Resultados, expõe a análise feita a partir da execução da metodologia.

2. Fractais

Ainda hoje a geometria euclidiana é utilizada para descrever os fenômenos que permeiam a vida humana, todavia, com o avanço das ciências, verificou-se que essa geometria pode não ser a ferramenta adequada para tal propósito, uma vez que uma linha reta, por exemplo, não mensura com exatidão a distância entre São Paulo e Minas Gerais, ou um cone não representa o Pão de Açúcar. Para que montanhas, fronteiras e outros objetos pudessem ser descritos matematicamente, foi necessário desenvolver uma geometria diferente, a Geometria Fractal, ela destina-se ao estudo dos fractais.

O termo *fractal*, cunhado por Benoit Mandelbrot em 1975, vem da palavra latina *frangere*, que significa fragmentar, dividir em pequenos pedaços (Barbosa, 2002, pág.9). Logo, fractal é um ente geométrico que pode ser particionado em pedaços do tamanho que se queira.

Os fractais se definem a partir de suas propriedades: autossimilaridade (ou autossimilaridade), complexidade infinita e dimensão não inteira. A primeira diz respeito à relação entre as partes e o todo, ao se dar *zoom* num fractal ou recortar dele um pedaço, ter-se-á uma imagem reduzida do todo. Como pode ser observado na Figura 1:

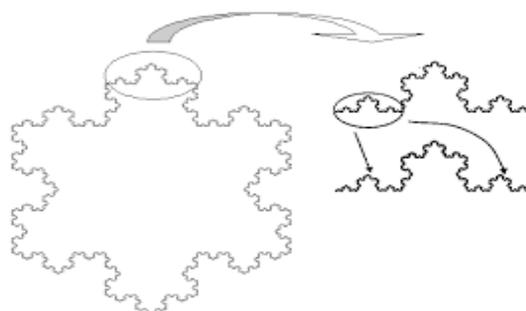


Figura 1 – Floco de Neve de Koch

Fonte: Foro Devenir de Los Tiempos¹

Cortando um pedaço do floco de neve de Koch e ampliando-o ter-se-á uma imagem parecida com os outros pedaços que compõem o floco. Fazendo um novo recorte,

¹ Disponível em: <<http://devenir.foroactivo.com/t2994-que-es-el-caos>> Acesso em: 12 jul. 16

Além da aplicação mencionada no início do capítulo, medir a fronteira entre estados, existem outras aplicações para fractais, tais aplicações são interessantes, entretanto o presente trabalho se atém a apenas umas das possíveis aplicações, a música.

Esta área pode ser dividida em dois vieses, composições fractais e análise de composições já existente. A primeira, de maneira simples, trata de fazer música a partir das características fractais. A segunda, foco deste trabalho, analisa se as obras já existentes possuem características fractais.

Por se tratar de algo novo, existem poucos estudos que abordam a manifestação dos fractais em peças já escritas, devido a isso os resultados aqui obtidos serão analisados com base nas informações sobre fractais apresentadas neste trabalho, bem como na metodologia aqui sugerida, ou seja, não se usará referências externas para responder à pergunta motivadora da pesquisa.

3. Cálculo da dimensão fractal

Na literatura existe uma variedade de métodos para se calcular a dimensão fractal, todos objetivam determinar o quanto do espaço o fractal ocupa, tais métodos são utilizados conforme a aplicação com a qual se trabalha. Este capítulo destina-se a descrever alguns desses métodos, todavia, antes de esmiuçá-los é importante entender melhor do que trata a dimensão fractal.

Na geometria euclidiana a dimensão de um objeto está associada às grandezas utilizadas para mensurá-lo. Um retângulo, por exemplo, possui comprimento e largura, portanto, tem dimensão dois. Já uma linha reta possui apenas comprimento, logo a sua dimensão é um. O mesmo ocorre com objetos de dimensão três, nesse caso são necessários comprimento, largura e altura para medi-los.

Em geral, ao se mensurar um objeto com as grandezas acima mencionadas, não há preocupação com a quantidade de espaço que ocupa, basta saber suas medidas para dar cabo de sua finalidade, por exemplo, ao colocar vidros em uma porta, não é preciso saber quanto de espaço ela ocupa, é suficiente conhecer o comprimento e a largura disponível para o vidro. Porém, existem objetos que não se encaixam em tal esquema de medição, pois, dependendo da medida que se usa, apresentam tamanhos diversos, e, nesses casos, é válido avaliar a ocupação espacial, em vez de seus tamanhos. E é aqui que se identifica a dimensão fractal. Observe a Figura 3:

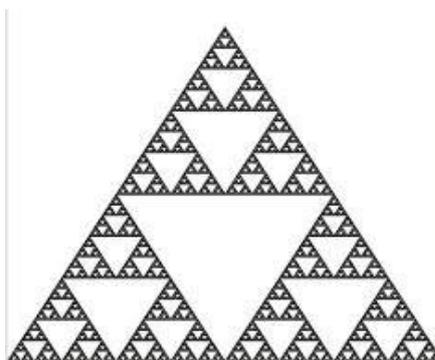


Figura 3 – Triângulo de Sierpinski
Fonte: Fotolog³

³ Disponível em: <<http://www.fotolog.com/renexvv/21718048/>> Acesso em: 18 jul. 2016

A Figura 3 mostra o triângulo de Sierpinski, que é obtido a partir da divisão de um triângulo em três triângulos menores e retirando o triângulo central. A tentativa de calcular a área da região restante desse triângulo resultaria em zero, pois quanto mais iterações são feitas menor é cada triângulo e mais “vazada” é a imagem, em contrapartida o perímetro dele tenderia ao infinito, já que é composto de infinitos segmentos cada vez menores. Logo para mensurá-lo não é possível usar as grandezas da Geometria Euclidiana.

O cálculo da dimensão fractal pode ser feito por meio da Dimensão de Hausdorff, proposta por Felix Hausdorff em 1918. A Dimensão de Hausdorff é a mais usada, apesar de existirem outros modos, pois se adapta tanto aos objetos da Geometria Euclidiana quanto aos da Geometria Fractal.

A Dimensão de Hausdorff pode ser deduzida da seguinte forma: considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento n , $L > n$. Ao recobrir a linha L com a linha n , serão necessários nQ segmentos para completar a extensão de L , ou seja, serão necessários Q linhas de tamanho n para cobrir a linha L . O comprimento da linha L pode ser expresso por $L = nQ$ ou $Q = \frac{L}{n}$. Considerando um quadrado de lado L e outro de lado n , $L > n$, serão necessários Qn^2 quadradinhos para recobrir a área L^2 , logo $Q = \left(\frac{L}{n}\right)^2$. Usando o mesmo raciocínio para um cubo de lado L , serão precisos $Q = \left(\frac{L}{n}\right)^3$ cubinhos de aresta n para completar todo o volume do cubo de lado L .

Repare que o expoente da equação, nos três casos, é igual ao número da dimensão euclidiana do objeto, logo o raciocínio pode ser expandido para dimensões euclidianas maiores que três, obtendo, assim, a equação $Q = \left(\frac{L}{n}\right)^d$.

Como o interesse para a Geometria Fractal está na determinação de d , pode-se isolá-lo na equação usando logaritmo.

$$Q = \left(\frac{L}{n}\right)^d \Rightarrow \log Q = \log \left(\frac{L}{n}\right)^d \Rightarrow \log Q = d \log \left(\frac{L}{n}\right) \Rightarrow d = \frac{\log Q}{\log \left(\frac{L}{n}\right)}$$

Depois de determinada a dimensão de Hausdorff, a abordagem dos métodos de aferição da dimensão fractal pode ser feita com mais clareza, pois utilizam o mesmo

raciocínio da Dimensão de Hausdorff. Aqui serão abordados quatro métodos – massa-raio, análise da intersecção acumulativa, *Box-counting* e *Dividers* (ou *Compass*) – tomando como base o artigo “Técnicas de estimativa da Dimensão Fractal: um estudo comparativo”, de André Ricardo Backes e Odemir Martinez Bruno.

3.1. Método Massa-raio

A determinação da dimensão fractal através do método massa-raio se dá por meio da cobertura de uma forma A por um círculo de raio r . Depois da forma A ser coberta pelo círculo de raio r , contam-se quantos pontos de A estão dentro do círculo. Chamando $M_r(A)$ a quantidade de pontos de A que estão no círculo de raio r , tem-se a relação $M_r(A) = r^d$. Tomando r cada vez menor, a dimensão fractal será obtida pela seguinte expressão:

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_r(A)}{\log(r)}.$$

É possível utilizar um ou mais círculos para cobrir a forma A . No caso de se usar apenas um, é adequado que o centro deste seja sobreposto ao centro de massa da forma. Quando utilizado mais de um círculo, pode-se lançar mão de sorteio para alocação dos seus centros e deve-se levar em consideração a massa média contida em cada um.

Um aspecto que também deve ser levado em consideração é o raio máximo do círculo ($r_{máx}$), que pode ser determinado por quem usa o método ou pelo raio de giro da imagem. A partir de então, os raios variarão entre $1 \leq r < r_{máx}$, a cada nível o raio é aumentado em 1 e o cálculo da massa contida em círculo é feito novamente.

Ao se traçar um gráfico log-log de $M_r(A)$, massa acumulada no círculo de raio r , e r , raio do círculo, obter-se-á uma aproximação de reta, na qual o seu coeficiente angular é a dimensão fractal d .

3.2. Análise da intersecção acumulativa

O método de análise da intersecção acumulativa procede da mesma maneira que o do massa-raio, com a diferença de serem contadas as intersecções da forma A quando coberta com o círculo de raio r , ao invés da massa contida no círculo.

Nesse método, todos os detalhes do anterior são válidos, então podem ser usados um ou mais círculos com $r \in [1; r_{máx} [$, sendo $r_{máx}$ o raio máximo escolhido pelo usuário ou o raio de giro da imagem, a cada nível as intersecções são contadas novamente. A dimensão fractal será obtida da expressão

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_r(A)}{\log (r)}$$

na qual $M_r(A)$ é a quantidade de intersecções e r , o raio do círculo.

Traçando um gráfico log-log entre o número de intersecções, $M_r(A)$, e o raio, r , de forma análoga ao método massa-raio, ter-se-á a aproximação de uma reta, sendo o seu coeficiente angular a dimensão fractal d da forma.

3.3. *Box-counting*

O *Box-counting* é um método muito utilizado para o cálculo da dimensão fractal, devido a sua simplicidade. O método *Box-counting* consiste em recobrir com uma malha quadriculada uma forma A e contar quantos quadradinhos da malha contêm partes de A . Como ilustrado na Figura 4:

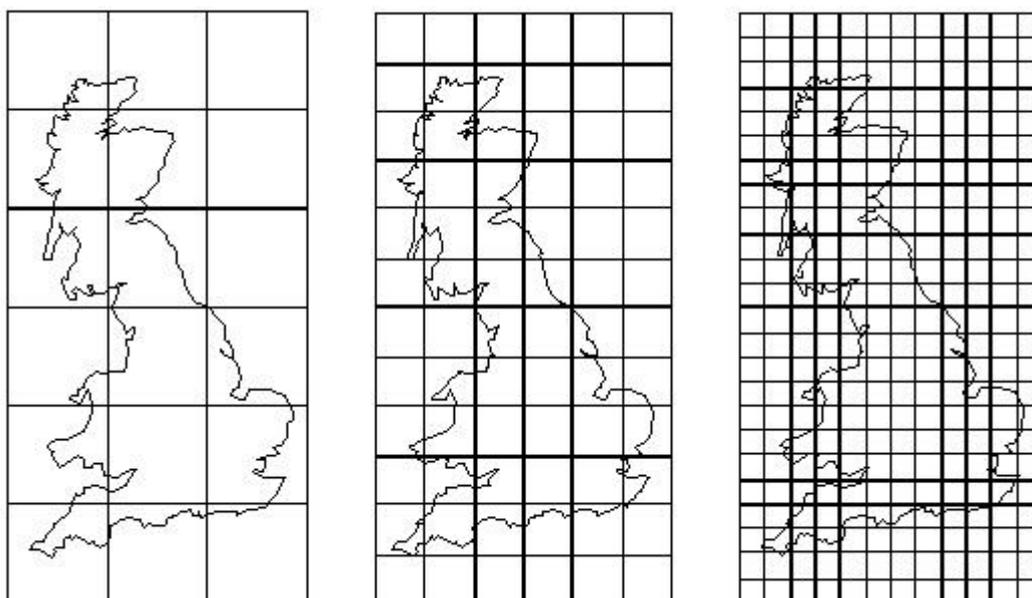


Figura 4 – Mapa da Grã Bretanha recoberto por malha quadriculada
Fonte: Fractal Explorer⁴

A Figura 4 mostra o mapa da Grã Bretanha coberto por três malhas quadriculadas. Para se determinar a dimensão fractal dessa imagem, seria necessário contar a quantidade de quadradinhos pelos quais a fronteira passa, saber o tamanho do lado do quadrado em cada caso e utilizar a relação $N_r(A) = \mu r^{-d}$, em que $N_r(A)$ é a quantidade de quadradinhos, r o lado do quadrado e μ uma constante. Fazendo r tender a 0, a dimensão fractal seria dada por:

$$d = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r(A))}{\log(r)}$$

O tamanho do lado dos quadrados pode ser determinado por quem usa o método, como, também, é possível usar uma regra de recorrência, de modo que o lado inicial (r_0) seja o máximo entre a largura e altura da imagem e os demais lados (r_i) sejam a metade do lado anterior.

Procedendo da mesma maneira dos métodos anteriores, traçando um gráfico log-log de $N_r(A)$, quantidade de quadradinhos de lado r , e r , lado do quadrado, obter-se-á a

⁴ Disponível em: <http://www.wahl.org/fe/HTML_version/link/FE4W/c4.htm> Acesso em: 19 jul. 2016

aproximação de uma reta, na qual o oposto do coeficiente angular deve ser a dimensão fractal ($-a = d$).

3.4. *Compass (ou Dividers)*

Compass é um dos métodos mais simples, não abrange fractais estatisticamente semelhantes, ou seja, é usado apenas para fractais autossimilantes. Consiste em usar uma régua r para medir o contorno do fractal.

A figura 5 mostra a curva de Koch recoberta por régua de tamanhos r , repare que, no segundo momento, a régua abrange mais detalhes do fractal, ou seja, quanto menor é a régua mais precisa será a aferição. Como no método *Box-counting*, seria preciso saber o tamanho das régua e a medida do contorno do fractal a partir dessas régua para calcular a dimensão fractal do objeto.

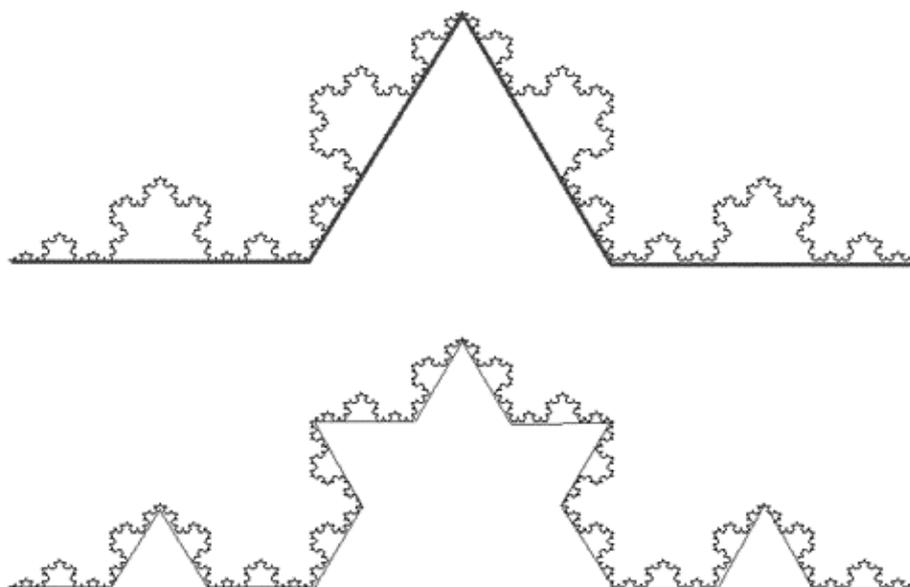


Figura 5 – Curva de Koch recoberta por régua r
Fonte: Elaborada pela autora

Baseado na relação $I_r(A) = \mu r^{1-d}$, em que $I_r(A)$ indica o comprimento de uma forma A medida com uma régua r , r o tamanho da régua e μ uma constante, fazendo r cada vez menor a dimensão fractal será dada por:

$$d = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(I_r(A))}{\log(r)}.$$

Fazendo o gráfico log-log de $I_r(A)$, o comprimento de uma forma A medida com uma régua r , e r , sendo o tamanho da régua, ter-se-á a aproximação de uma reta com coeficiente angular a , $1 - a$ será a dimensão fractal da forma A ($d = 1 - a$).

O artigo usado para explicar os métodos aqui abordados, além de descrevê-los, compara-os de forma a averiguar qual o melhor para o cálculo da dimensão fractal, levando em conta objetos que apresentam ou não irregularidades. Os autores concluíram que o método que melhor se adéqua a diferentes objetos é o *Box-counting*. Baseado nesta conclusão, o método que será utilizado para analisar os objetos de estudo deste trabalho será o *Box-counting*.

4. Antonio Lucio Vivaldi: Vida e Obra

Nascido em Veneza, Itália, no dia 04 de março de 1678, filho de pai barbeiro e violinista, desde pequeno mostrou vocação musical. Matriculado cedo na Capela de São Marcos para aprimoramento dos conhecimentos musicais adquiridos em casa.



Figura 6 – Antonio Lucio Vivaldi
Fonte: Blog Edukavita

Motivado a estudar teologia por seu pai, na mesma capela, foi ordenado padre aos 25 anos, passando a ser conhecido como Il Prete Rosso (o padre vermelho) devido aos seus cabelos ruivos. Em 1703, mesmo ano de ordenação, ingressou como professor de violino no “*Ospedale de Ila Pietà*”, lar para meninas órfãs que oferecia educação musical para as internas. Lugar onde compôs boa parte de suas obras, voltadas, em parte, para as alunas desse orfanato. Porém, não permaneceu no celibato por mais de um ano, tendo ido dedicar-se inteiramente à música.

Figura de grande nome no período barroco, tendo produzido centenas de obras característica do período. Junto com outros, como Joahnn Sebastiann Bach e Georg Friedrich Händel, instituiu a forma do concerto, rápido-lento-rápido, uma vez que antes do período de vivência de Vivaldi não havia estrutura para as composições e, depois desse período, as obras seguiam esse esqueleto.

Suas numerosas composições são cerca de 446 concertos⁵, 73 sonatas⁶, 44 motetos⁷, entre outros estilos de peças e outras partituras que se perderam ao longo dos séculos. O violino era instrumento importante em suas obras, já que Vivaldi era violinista. Entre as composições, 223 eram para violinos que em geral exploravam a virtude e a capacidade de interpretação (toque pessoal) do musicista.

Vivaldi dedicou sua vida à música, mesmo tendo enfrentado a antítese da fama ao final de sua vida. Viveu seus últimos anos na pobreza, vendendo seus manuscritos para sobreviver e, devido a uma doença bronco-respiratória que o acompanhou por toda sua existência, morreu em Veneza no dia 28 de julho de 1741.

⁵Obra ou peça musical composta para instrumentos individuais ou para uma orquestra.

⁶Obra ou peça musical para um ou dois instrumentos musicais.

⁷Composição polifônica sacra.

5. Um Pouco de Teoria Musical

Música, segundo dicionário Aurélio, é a arte e ciência de combinar os sons de modo agradável à audição. Para que isso ocorra, há uma estrutura bem organizada, desenvolvida ao longo do tempo, que permite reproduzir músicas escritas há séculos e, ainda, abre margem para diferentes interpretações, conforme toque pessoal do interprete. Essa estrutura chama-se Teoria Musical, alguns de seus elementos básicos, necessário ao desenvolvimento, serão brevemente explicados a seguir.

A música é composta por melodia, ritmo e harmonia. A melodia é a sequência de notas que dá sentido à música. Ritmo, sucessão de notas com diferentes durações, que busca organizar o tempo. E, por fim, harmonia é a combinação de sons simultâneos (PRIOLLI, 2012, pág. 6).

A melodia e o ritmo bastam para haver música, assim a teoria musical abordada será referente a esses elementos. Para tanto, as explicações serão feitas com base no exemplo abaixo:

Asa Branca

Luiz Gonzaga / Humberto teixeira

♩ = 105

Figura 7 – Asa Branca
Fonte: Adriano Dozol⁸

A Figura 7 se refere a uma parte da melodia popular brasileira composta para acompanhar a música Asa Branca de Luiz Gonzaga. Como em outros textos, o nome da composição e seu autor aparecem no topo, precedendo os pentagramas.

⁸ Disponível em: <<http://adrianodozol.blogspot.com.br/2011/04/asa-branca-luiz-gonzaga-partitura-para.html>>
Acesso: 20 dez. 2016

Pentagrama é o conjunto de cinco linhas e quatro espaços usado para que sejam dispostas as notas musicais, conforme sua altura. Usam-se tanto as linhas como os espaços para que as notas sejam representadas.

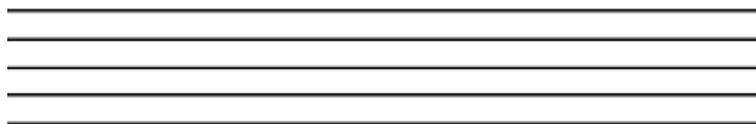


Figura 8 – Pentagrama
Fonte: Angels Guitar⁹

Altura refere-se à frequência de propagação da nota, notas com frequências mais altas são ditas agudas, já as de baixas frequências são graves. Dependendo da altura da nota, as cinco linhas e os quatro espaços do pentagrama não são suficientes, quando isso ocorre é comum utilizar linhas suplementares, que podem ser inferiores ou superiores, como na figura 9:



Figura 9 – Linhas suplementares
Fontes: Elaborada pela autora

O pentagrama, por si só, não é suficiente para designar a altura de cada nota e nem a identificar. Para nomear a nota e indicar sua respectiva altura usa-se um dos sinais apresentados na Figura 10 no início de cada pentagrama, estes símbolos são chamados claves.



Figura 10 – Claves
Fonte: Blog Teoria Musical¹⁰

⁹ Disponível em: <<https://angelsguitar.com/conceptos-basicos-de-teoria-musical-parte-i/>> Acesso em 20 dez. 2016

¹⁰ Disponível em: <<http://teoria-de-musica.blogspot.com.br/search?updated-max=2012-08-13T08:47:00-07:00&max-results=10>> Acesso em 20 dez.2016

Cada uma delas é usada conforme a altura do instrumento ou da voz para o qual a peça foi criada. A clave de Sol é para instrumentos/vozes mais agudas, a de Fá, mais graves e, por fim, a de Dó é usada atualmente para instrumentos específicos, como a viola.

O nome de cada nota é dado a partir da clave. Se, por exemplo, usar-se a clave de sol, a nota da segunda linha, contando de baixo para cima, seria um sol, a nota do espaço acima da segunda linha, um lá, a do espaço abaixo um fá. Como Figura 11:



Figura 11 – Nome das notas musicais
Fonte: Consulta Musical¹¹

No caso da clave de fá e dó, a nomeação depende da linha que a clave é escrita, conforme Figura 12. As outras notas são nomeadas como na clave de sol, seguindo a ordem natural (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó).

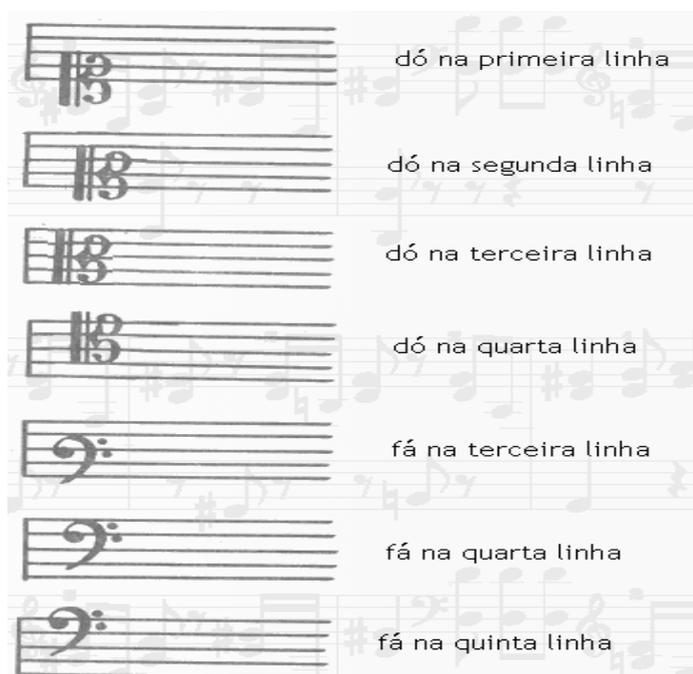


Figura 12 – Claves de fá e dó
Fonte: Conservatório Musical¹²

¹¹ Disponível em: <<https://consultamusical.wordpress.com/category/informacoes/pauta-notas-claves-e-linhas-suplementares/>> Acesso em 20 dez. 2016

¹² Disponível em: <http://conservatorio0.tripod.com/comp_pentag_.htm> Acesso em 20 dez. 2016

O tempo é um fator importante para a música, para organizá-lo, há as figuras musicais e as fórmulas de compasso. Existem dois tipos de figuras musicais, as que simbolizam a duração da nota e as que indicam o tempo de pausa, já que a música é feita de sons e silêncios. As figuras representadas na Figura 13 são as usadas atualmente, existem outras que caíram em desuso.



Figura 13 – Notas e suas pausas

Fonte: Só Tutorial¹³

Com o intuito de facilitar a escrita das fórmulas de compasso, cada figura musical possui um número que a identifica, começando pela semibreve, representada por um, o próximo valor será o dobro do anterior, logo a mínima é simbolizada por dois, a semínima por quatro e assim sucessivamente.

Em termos de duração da nota, cada figura musical vale a metade da que a precede. Por exemplo, se a semibreve durar um segundo a mínima durará meio segundo, a semínima, um quarto de segundo e assim por diante.

Quando houver um ponto ao lado da figura musical significa que a duração dela foi aumentada em sua metade, por exemplo, uma semínima que dure um segundo, quando acompanhada de um ponto durará um segundo e meio. Esse ponto chama-se ponto de aumento.

A regra para identificação das notas bem como sua duração pode ser associada com progressão geométrica (PG), sendo uma PG com razão dois para a identificação e outra de razão meio para a duração, essa associação pode ser explorada em sala de aula com exemplificação.

¹³ Disponível em: < <http://www.sotutorial.com/index.php/tutoriais-teorial-musical/teoria-musical-010-a-figura-da-pausa/> > Acesso em 20 dez. 2016

Compasso é uma subdivisão do pentagrama. É representado por duas barras, como na Figura 14:

Asa Branca

Luiz Gonzaga / Humberto teixeira

♩ = 105

Figura 14– Compasso
Fonte: Elaborada pela autora

Fórmulas de compasso se referem à quantidade de notas que cabem em um compasso. Ela é escrita ao lado da clave. Na partitura de Asa Branca, no primeiro pentagrama, há dois números sobrepostos ao lado do símbolo da clave de sol, veja abaixo na Figura 15:

Asa Branca

Luiz Gonzaga / Humberto teixeira

♩ = 105

Fórmula de Compasso

Figura 15 – Fórmula de Compasso
Fonte: Elaborada pela autora

O número de cima (dois, nesse caso) indica a quantidade de notas por compasso. O número de baixo indica a figura musical (semínima). Logo, cada compasso da música comporta apenas duas semínimas ou quatro colcheias ou uma mínima ou qualquer outra divisão que equivalha a duas semínimas. Esse é outro aspecto da notação musical que pode ser utilizado em sala de aula, como exercício para fixação de relação de equivalência.

Outro elemento que indica organização de tempo é o andamento, em geral aparece logo antes do primeiro pentagrama, não é um elemento trivial, o compositor pode indicar ou não o andamento da música. Na partitura de Asa Branca, há uma semínima igualada a cento e cinco, como mostra a Figura 16, abaixo:

Asa Branca

♩ = 105 — Andamento Luiz Gonzaga / Humberto teixeira

Figura 16 – Andamento
Fonte: Elaborada pela autora

Isso quer dizer que por minuto devem ser tocadas cento e cinco semínimas. Algumas composições indicam o andamento por intervalos com 60-80, por exemplo, que significa que qualquer quantidade de batidas por minuto no intervalo dado é adequada à música.

Outro elemento relevante para o trabalho é o acidente musical. Acidentes musicais indicam mudanças na altura da nota. Existem dois tipos o que aumenta, sustenido, e o que diminui, bemol, a altura, representados pelos símbolos abaixo. O bequadro é o símbolo que anula os acidentes.



Figura 17 – Acidentes musicais
Fonte: O clarinetista¹⁴

Eles podem ser fixos, ou seja, a nota que sofrer o acidente será tocada em toda a música da maneira indicada, ou podem ocorrer esporadicamente. No caso de serem fixos, são indicados entre a clave e a fórmula de compasso na respectiva posição da nota. Quando ocorrentes, aparecem ao lado da figura musical e, dentro do compasso, alteram toda nota que for igual àquela. Por exemplo, na Figura 18 há um sustenido na nota lá, no segundo compasso, se houvesse mais notas lá's nesse compasso elas seriam todas sustenidos.

¹⁴ Disponível em: <o-clarinetista.blogspot.com> Acesso em 20 dez. 2016



Figura 18 – Acidentes

Fonte: Elaborada pela autora

Tanto o bemol quanto o sustenido aumentam a nota em meio tom. Tom pode ser compreendido como o espaço entre duas notas, ou seja, tendo um sol e um lá, por exemplo, a distância entre eles é um tom ou dois semitons (meio tom).

Existem outros elementos que compõem a teoria musical e não foram explicados, todavia esses elementos não são fundamentais para o entendimento deste trabalho, uma vez que dizem respeito à intenção de interpretação proposta pelo autor ou se referem a instrumentos específicos, ou, ainda, tem por objetivo aprofundar a teoria aqui explicada.

6. Metodologia

Em busca de alcançar os objetivos deste trabalho serão escolhidas, dentro do universo de composições de Vivaldi, apenas duas obras para análise. As partituras das obras escolhidas serão submetidas a um processo chamado geometrização, que é a tradução da linguagem musical para a linguagem matemática, e a partir deste procedimento será calculada a dimensão fractal de cada uma através do método *Box-counting*.

A geometrização se dá através, primeiramente, da observação da tessitura da música, que é a organização das notas segundo o instrumento. Por exemplo, em uma partitura para violino a nota mais grave que pode ser escrita é o sol do segundo espaço suplementar inferior, pois é a nota equivalente a corda Sol, corda mais grave do violino. Já a nota mais aguda depende da música, pois o violino pode alcançar notas muito altas.

Após a observação, são atribuídos valores às notas, de meio em meio tom. No caso do violino, a nota de valor um é a nota sol do espaço inferior, a de valor dois é o sol sustenido, e assim sucessivamente até a nota mais aguda. As pausas recebem o valor zero, uma vez que não possuem altura.

Para melhor ilustrar o procedimento, observe a Figura 19:



Figura 19 – “Valoração” de notas
Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 19 mostra dois compassos de Outono, concerto que compõe as Quatro Estações de Vivaldi. As notas que estão em destaque são as notas mais baixa e mais alta em toda a partitura, respectivamente. Sol¹⁵ é a nota mais grave do violino.

¹⁵ O número que acompanha a nota se refere a oitava a qual ela pertence. Oitava é a sucessão de oito notas, que começa e termina na “mesma” nota, com uma diferença de altura. No caso de Outono, foram necessárias três oitavas de sol a sol.

Sol1 recebe o valor um e Fá3, trinta e cinco, logo entre elas há outras trinta e três notas, com valores de dois a trinta e quatro.

Num segundo momento os compassos serão divididos igualmente, preservando a estrutura inicial, isto é, a música não se alterará, apenas será escrita de uma forma diferente. Para isso, é necessário observar a fórmula de compasso e a menor figura musical na partitura. Por exemplo, num compasso 4/4 e a colcheia representante da menor divisão de tempo, cada compasso pode ser dividido em oito colcheias, duas para cada semínima, como na Figura 20:

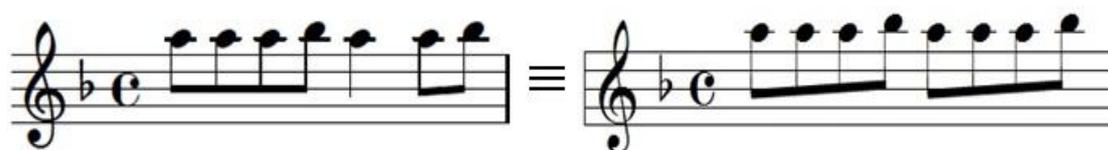


Figura 20– Compasso reescrito

Fonte: Elaborada pela autora

Feito essas duas observações, o próximo passo é criar uma tabela com essas informações. Essa tabela conterá quatro colunas, são elas: Compasso, indica o número¹⁶ do compasso; Tempo, um auxiliar para localizar a nota dentro do compasso; Localização aponta o lugar da nota, por exemplo, o valor 1,25 representa a nota que começa no tempo 2/8 do primeiro compasso; Nota indica o valor da nota, conforme a tessitura descrita acima, nesse caso o compasso, Figura 20, é composto por três notas Lá's (de valor 27) seguida de um Lá# (Si bemol, valor 28), na primeira e segunda metade do compasso.

Tendo como exemplo o primeiro compasso de Outono, Figura 20, a tabela dele fica da seguinte maneira:

¹⁶ Partituras, em geral, vem com compassos enumerados de 1 a n, esse número aparece no começo do pentagrama.

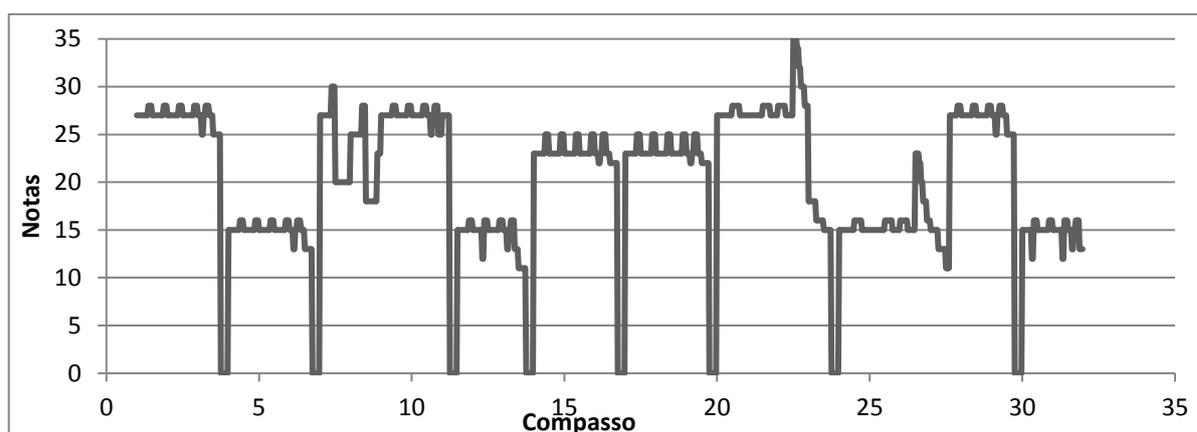
Tabela 1 – Tabela de geometrização

Compasso	Tempo	"Localização"	Nota
1	0,00	1,00	27
1	0,13	1,13	27
1	0,25	1,25	27
1	0,38	1,38	28
1	0,50	1,50	27
1	0,63	1,63	27
1	0,75	1,75	27
1	0,88	1,88	28

Fonte: Elaborada pela autora

O processo de geometrização pode ser convertido em um exercício de tratamento de dados, uma vez que se utiliza de recursos de organização de informações e requer/desenvolve a habilidade de comparar se o resultado obtido é coerente com a realidade.

Findo o procedimento para a música toda, a última etapa é criar um gráfico de Localização por Nota. Esse gráfico representará a música de forma geométrica. Continuando com Outono como exemplo, o Gráfico 1 mostra a parte¹⁷ A do primeiro movimento já geometrizada:

Gráfico 1 – Geometrização Outono parte A

Fonte: Elaborado pela autora

¹⁷ O primeiro movimento é dividido em três partes, A, B e C. Essa divisão indica uma mudança de temática dentro do movimento.

Tendo o gráfico, a geometrização está concluída, o procedimento seguinte é a execução do *Box-counting*. Como foi explicado no capítulo Dimensão Fractal, esse método requer que a curva seja coberta por malhas de quadrados de lado r , r tendendo a zero.

Recobrando o gráfico da parte A de Outono com malhas de quadrados de lado dois, um e meio centímetro (a regra para determinação do lado do quadrado foi feita como descrita no capítulo Dimensão Fractal, porém o lado inicial foi escolhido aleatoriamente), como nas Figuras 21, 22 e 23 abaixo, se obtêm a quantidade necessária para recobrir a curva toda:

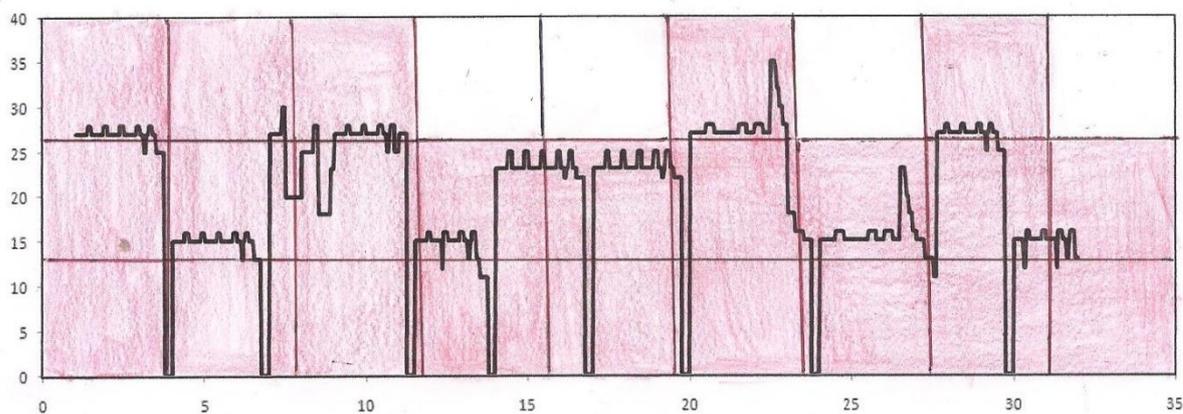


Figura 21 – Malha de quadrados de dois centímetros de lado
Fonte: Elaborada pela autora

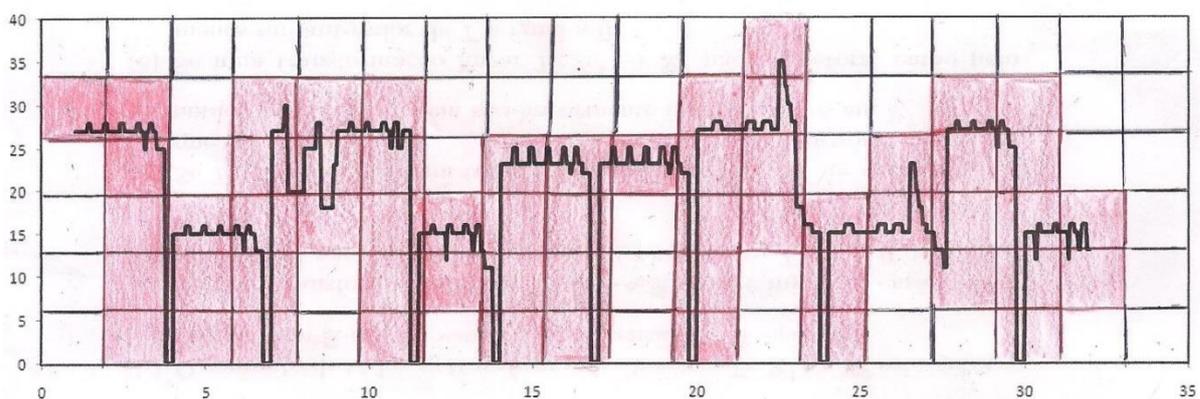


Figura 22 – Malha de quadrados de um centímetro de lado
Fonte: Elaborada pela autora

Ao ajustar uma reta entre os pontos do gráfico, como acima, se obtém a dimensão fractal da curva, que é o oposto do coeficiente angular da reta. No caso de Outono parte A, $d=1,226$.

Como o procedimento do *Box-counting* é trabalhoso, a execução dele nas obras escolhidas será feita através de um código para matlab, desenvolvido por Frederick Moisy da *University Paris Sud*. O algoritmo usa a ideia do *Box-counting* exemplificado acima, divide o objeto em caixas cada vez menores, seleciona aquelas que tem conteúdo e conta-as. Pode ser executado para objetos de uma, duas ou três dimensões. Sua execução se dá através do comando $[N, R] = \text{BOXCOUNT}(C, \text{'plot'})$, no qual C representa o objeto D -dimensional, N é a variável para contagem das caixas que recobrem o objeto, nessa variável só é contabilizado as caixas que contém partes de C , R é a variável que indica o tamanho da caixa, ela equivale a potências de dois, ou seja, $R = 1, 2, 4 \dots 2^P$, P é o menor inteiro tal que o tamanho máximo de C seja menor ou igual a 2^P . Se C for menor que alguma potência de dois, o objeto é preenchido de espaços vazios até que fique do “tamanho” da menor potência de dois imediatamente maior que os lados de C . Esse comando resulta num gráfico log-log de lado por quantidade de caixas.

Outro comando importante é o $\text{BOXCOUNT}(C, \text{'slope'})$, que indica as inclinações locais, ou seja, ele indica as dimensões para cada tamanho da caixa, a partir da relação $DF = -d\ln N/d\ln R$.

Os resultados obtidos a partir da execução da metodologia acima descrita estão no próximo capítulo.

7. Resultados

Como foi descrito no capítulo Metodologia, dentro da gama de concertos disponíveis, escolheu-se duas peças para análise. São elas Outono e Concerto em Lá menor para dois violinos. A primeira faz parte dos concertos mais famosos de Vivaldi, As Quatro Estações. A segunda é um dos doze concertos que fizeram a fama do compositor na Europa de 1711.

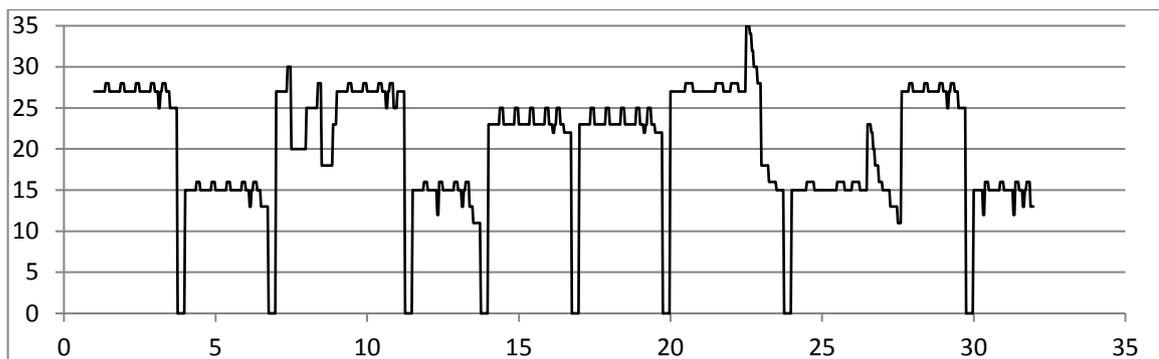
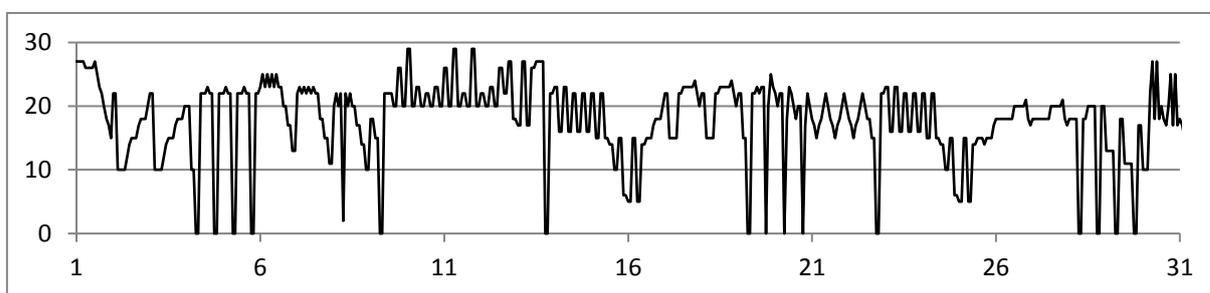
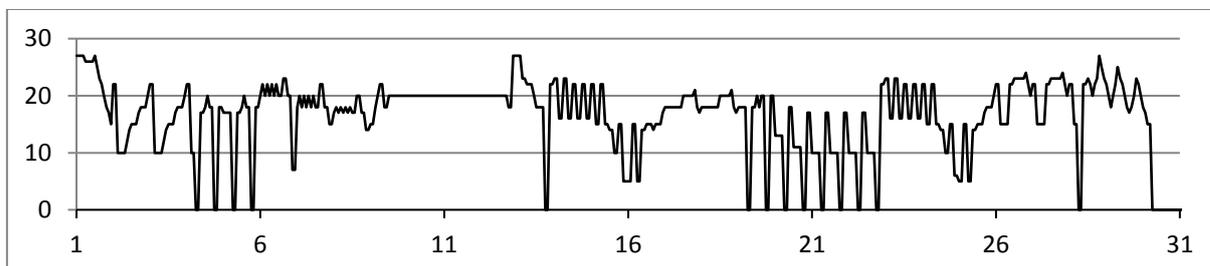
Devido ao processo de geometrização demandar tempo e as músicas serem longas – cada uma possui três movimentos que somam, aproximadamente, dez minutos de execução – se optou por analisar apenas o primeiro movimento de cada, os quais possuem o mesmo andamento.

Ao iniciar os procedimentos para geometrização da partitura de Outono, percebeu-se que a mesma estava dividida em três partes A, B e C, essa divisão foi mantida durante todos os processos. Uma divisão análoga foi usada para o Concerto em Lá Menor, mesmo ele não tendo divisões. O método para determinação da dimensão fractal foi usado tanto nas partes quanto no todo das músicas.

Para geometrização de Outono, foi utilizado a semicolcheia¹⁸ como menor figura musical num compasso 4/4, logo todos os compassos foram divididos em 32. No Concerto em Lá Menor foi utilizada uma divisão menor, 16, já que a menor figura era uma colcheia num compasso 4/4, para ambos os violinos.

Findo a geometrização de Outono e do Concerto em Lá Menor, se obteve os Gráficos 3, 4 e 5 abaixo, para a parte A e partes 1, respectivamente. Fazendo uma comparação entre a partitura e a representação gráfica da música, percebe-se que o processo preservou os elementos básicos da partitura, como tempo e altura, além de mostrar com mais clareza o “desenho” feito quando a música é executada.

¹⁸ A menor figura que aparece na partitura é a fusa, se ela fosse adotada como a menor divisão o compasso ficaria dividido em 64, porém diante da quantidade de notas que a música toda possui, as fusas que aparecem não são tão significativas.

Gráfico 3 – Geometrização Outono parte A**Gráfico 4 – Concerto em Lá Menor parte 1, Violino 1****Gráfico 5 – Concerto em Lá Menor parte 1, violino 2**

Fontes: Elaborados pela autora

O *Box-counting* executado no matlab para cada um dos gráficos das partituras geometrizadas gerou outros dois gráficos. Em ambos os casos os resultados não foram discrepantes tanto para as partes quanto o todo de ambas as músicas. Como pode ser visto nos Gráficos 6 a 11 abaixo das peças sem as partições, os demais gráficos estão no apêndice, tanto os gerados pelo *Box-counting* quanto os de geometrização:

Gráfico 6 – Outono (log-log)

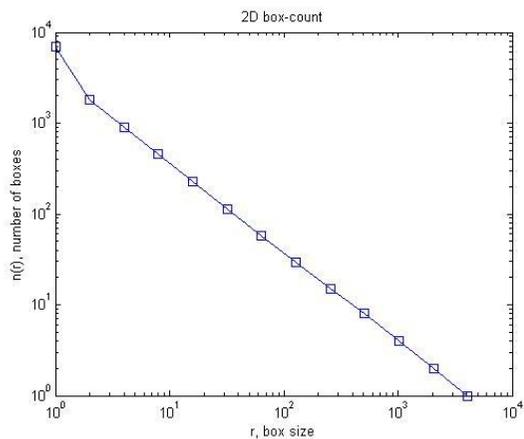


Gráfico 8 – Concerto em Lá Menor, violino 1 (log-log)

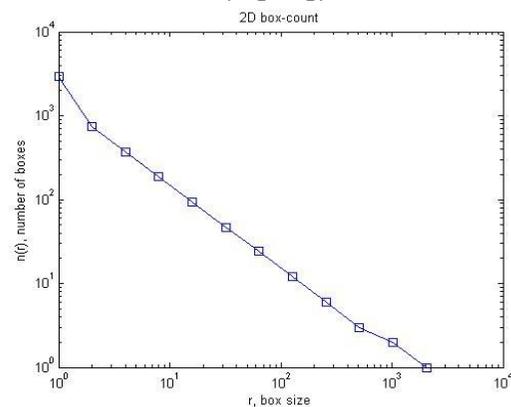


Gráfico 10 – Concerto em Lá Menor, violino 2 (log-log)

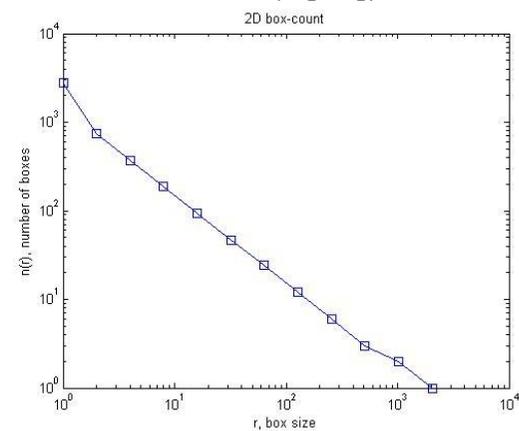


Gráfico 7 – Lado r por dimensão, Outono

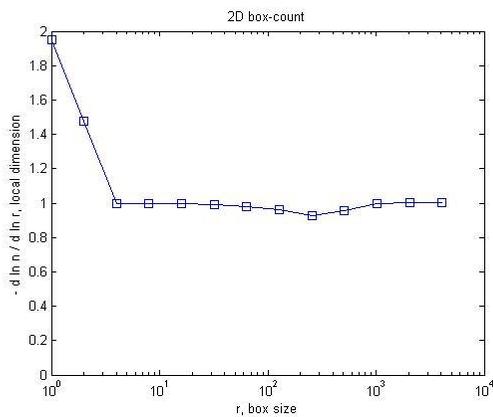


Gráfico 9 – Lado r por dimensão, violino 1 do Concerto em Lá Menor

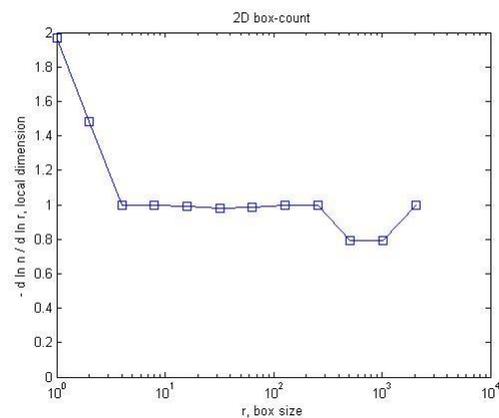
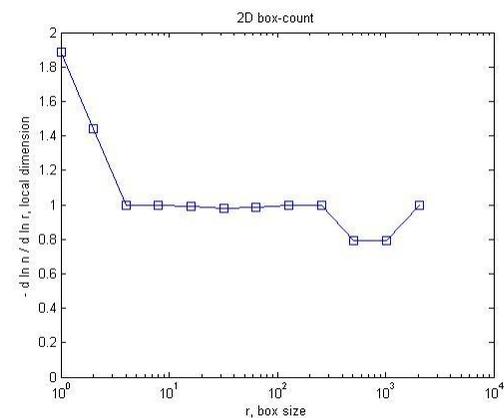


Gráfico 11 - Lado r por dimensão, violino 2 do Concerto em Lá Menor



Fontes: Elaborados pela autora

O primeiro tipo de gráfico, log-log, indica a relação do tamanho do lado pela quantidade de quadrados da malha, quanto mais reta é a curva apresentada no gráfico mais autossimilar é o objeto analisado, como afirma ALVES, Lucas Máximo, em “Métodos para determinação das dimensões de um objeto na geometria fractal”, pg. 20. O segundo, semilog, se refere ao lado do quadrado pela dimensão, ou seja, ele mostra a dimensão do objeto analisado conforme a variação do tamanho do lado da caixa.

Os gráficos log-log apresentam poucos pontos fora da reta, mas isso não interfere no resultado geral, o qual é a autossimilaridade das curvas analisadas. Ou seja, o procedimento revelou que as músicas são quase autossimilares. Já o gráfico semilog mostrou que a dimensão de ambas as peças está em torno de um 1.

A autossimilaridade pode ser interpretada musicalmente como a repetição de parte da música ao longo da execução/partitura. Em outras palavras, pode se fazer analogia a ritornelo, que é um recurso de composição que indica que um determinado trecho deve ser repetido. Por se tratar de uma criação humana, a analogia a ritornelo abre margem para justificar os pontos que estão desalinhados, uma vez que um compositor, em geral, não repete o mesmo trecho indefinidamente em sua composição.

Sua representação na partitura pode ser através destes símbolos |: e :|, todas as notas que estiverem entre eles devem ser repetidas ao menos uma vez, ou, como é o caso das composições analisadas, o trecho é reescrito quantas vezes o autor desejar.

Ritornelo pode ser entendido, também, como o refrão da música, que é tocada a cada final de frase. Esse refrão pode sofrer alterações, como é o caso de Outono e o Concerto em Lá Menor para dois violinos. Vivaldi usa, em Outono, como refrão a estrutura de um compasso, que sofre leves modificações ao longo da obra, tanto de tonalidade quanto de tempo. Já no Concerto em Lá Menor as estruturas que se repetem com maior frequência são em maior quantidade, como é possível identificar no gráfico de geometrização da peça.

Antonio Vivaldi (1678-1741)

Allegro

Mudança de Tonalidade (no compasso 4 as notas estão uma oitava abaixo do que no primeiro)

Celebra il Vilanel con balli e Canti Del felice raccolto il bel piacere
Ballo e Canto dè Villanelli

Violino
Principale

Allegro

Piano

Figura 24– Ritornelo Outono
Fonte: Elaborada pela autora

O uso de refrão nas composições de Vivaldi é mencionado em suas biografias, como é o caso de uma análise das Quatro Estações¹⁹, na qual o autor escreve que “outra grande contribuição de Vivaldi para o gênero foi a consolidação do formato de *ritornelo*”, JÚNIOR (2010). Ou seja, a autossimilaridade indicada pela metodologia utilizada reafirma um aspecto já conhecido por especialistas que estudam as obras de Vivaldi.

A complexidade infinita, uma das três características dos fractais, pode ser interpretada como a movimentação dos instrumentos durante a execução. Em outras palavras, quando a peça é executada em sua totalidade, solo e orquestra, há momentos que o instrumento solo se sobressai em outros a orquestra. No caso do Concerto em Lá menor, por exemplo, que é para dois violinos, é possível perceber isso com clareza por meio dos gráficos de geometrização, veja abaixo:

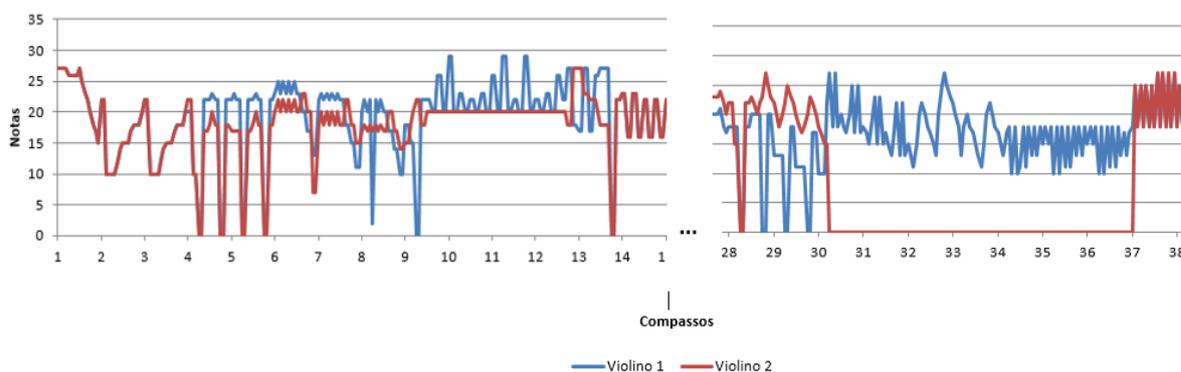


Figura 25 – Complexidade Infinita
Fonte: Elaborada pela autora

Nos compassos de 9 a 12 o violino 2 “estaciona” na nota 20 (Ré2), enquanto o violino 1 permuta em notas mais agudas, já nos compassos de 31 a 36, o violino 2

¹⁹ Disponível em: < <http://euterpe.blog.br/analise-de-obra/vivaldi-o-outono> > Acesso em 12/10/2016 às 13h34

deixa de tocar para o 1 solar. Essa observação para os dois violinos seria o “zoom” de primeiro nível, os demais níveis de detalhamento ficariam a cargo da observação do movimento da orquestra, todavia aqui não se pode fazer grandes apontamentos nesse aspecto, nem expandir a analogia para Outono, pois a metodologia adotada se ateve aos instrumentos solos das peças escolhidas.

Devido à dimensão fractal ter resultado em um valor inteiro para ambas as músicas, foi realizado um novo teste, com uma abordagem diferente. No primeiro teste usou-se as tabelas geradas pelo processo de geometrização, elas foram inseridas no matlab e depois foi dado o comando para execução do *Box-counting*. No segundo teste foi utilizado os gráficos de pontos gerados pelo excel salvos como um arquivo jpg, como o da imagem abaixo:

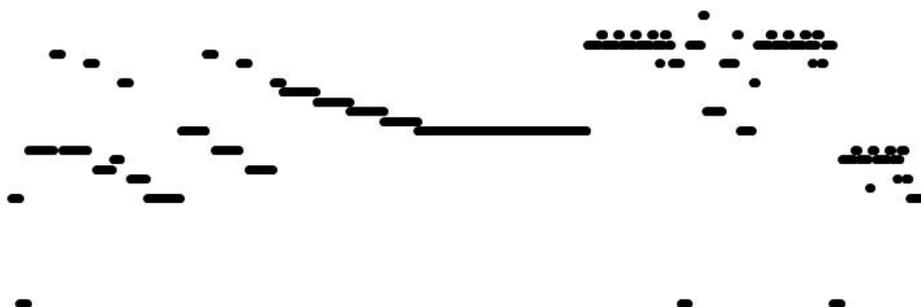


Figura 26 – Gráficos de pontos, Outono C

Fonte: Elaborada pela autora

Os gráficos log-log, que estão no APÊNDICE E e indicam a autossimilaridade, gerados da execução do *Box-counting* para as imagens não teve alterações, ou seja, continuou se aproximando de uma reta, com exceção de alguns pontos, logo o segundo teste confirmou o resultado do primeiro.

Já os gráficos slope, que estão no APÊNDICE F e indicam as dimensões para cada malha de quadrados de lado r , resultaram diferentes do primeiro teste. Nesse segundo momento, como no primeiro, os gráficos para todas as partes são parecidos, todavia a dimensão agora está em torno de dois, assim ele contradiz e reafirma o primeiro teste, reafirma a dimensão inteira mas contradiz o valor dela.

Em vista disso, não é possível afirmar que a dimensão é uma ou outra, pode-se apenas manter as analogias e em momentos futuros buscar averiguar a questão da dimensão, com alguma outra abordagem para a metodologia aqui usada ou, ainda, fazendo uso de outra metodologia.

8. Considerações Finais

No trabalho foram analisadas duas composições de Antonio Lucio Vivaldi segundo as características dos fractais, que são autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão não-inteira. Para isso, geometrizou-se as partituras das peças escolhidas, ou seja, se transcreveu a linguagem musical para a linguagem matemática, de maneira que as músicas fossem representadas por um gráfico de linhas.

Posterior a geometrização, usou-se de um algoritmo que calcula a dimensão fractal por meio do método *Box-counting*. Tal procedimento resultou em duas espécies de gráficos para cada peça/parte analisada, um de lado por quantidade de caixas e o outro de lado por dimensão.

O primeiro tipo indicou o quão as músicas eram autossimilares, permitindo a conclusão de que elas são quase autossimilares, contendo poucos pontos desalinhados, e que esse aspecto pode ser interpretado como o recurso de composição musical intitulado ritornelo, o qual representa o refrão da música. Já os gráficos de lado por dimensão apontam que as dimensões das peças escolhidas estão em torno de um ou dois, tanto das partes como do todo da música.

Por último fez-se analogia da complexidade infinita com a movimentação da música, porém apenas para o Concerto em Lá menor para dois violinos, uma vez que tal correspondência necessita de ao menos dois instrumentos para ser verificada.

As conclusões, acima mencionadas, respondem afirmativamente à pergunta motivadora da pesquisa, ou seja, as composições escolhidas possuem características fractais, mesmo sendo uma área recente na matemática, apesar da dimensão de ambas girarem em torno de um número inteiro. E, além de dar resposta à pergunta, abre margem para mais questionamento como: será que outras ou, sendo mais abrangente, todas as composições do autor escolhido possuem as mesmas dimensões? Será que a dimensão encontrada pode ser associada a outros compositores contemporâneos de Vivaldi, tendo o período musical barroco uma única dimensão e, por conseguinte, outros períodos têm, cada um, a sua? Essas questões são apenas acerca da dimensão fractal, tantas outras podem ser levantadas em relação a autossimilaridade e a complexidade infinita. E, para respondê-las, seriam necessárias outras pesquisas.

9. Referências

ALVES, Lucas Máximo. **Métodos para determinação das dimensões de um objeto na geometria fractal.** Disponível em: <<http://www.portalsaberlivre.com.br/manager/uploads/publicacoes/1332864903.pdf>> acesso em: 16 nov. 2016.

Antonio Lucio Vivaldi. Biografías y Vidas. Disponível em: <<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vivaldi.htm>> Acesso em: 31 março 2016.

Antonio Lucio Vivaldi. Blog Edukavita. Disponível em: <<https://edukavita.blogspot.com.br/2015/06/biografia-de-antonio-vivaldi-compositor.html>> Acesso em: 03 julho 2016.

BACKES, André Ricardo; BRUNO, Odemir Martinez. **Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal:** Um Estudo Comparativo. São Paulo, 2005.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal:** para a sala de aula. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BAROQUE COMPOSERS AND MUSICIANS. Baroque Music. Disponível em: <<http://www.baroquemusic.org/bqxivivaldi.html>> Acesso em: 31 março 2016.

CAPELLUTO, Mario; ARANHA, Ilda. **Antonio Lucio Vivaldi.** Disponível em: <<http://www.sabercultural.com/template/musicas/VivaldiAntonio3.html>> Acesso em: 06 abril 2016.

Folha Online. Música Clássica. Disponível em: <<http://musicaclassica.folha.com.br/cds/14/biografia-2.html>> Acesso em: 31 março 2016.

GOMES, Cristina Cardoso. **II Prete Rosso.** Disponível em: <<https://prezi.com/xdhkwew7f9tj/il-prete-rosso/>> Acesso em: em 26 março 2016.

HOGWOOD, Christopher. **L'Estro Armonico.** Disponível em: <<http://www.hoasm.org/VIIIA/VivaldiLEstroArmonico.html>> Acesso em 28 ago. 2016.

ISAACS, Alan; MARTIN, Elizabeth (Org.). **Dicionário de Música**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1985.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

JÚNIOR, Francisco Clovis de Sousa. **Estudo da Dimensão Fractal de Esferas de Papel Amassado e Arruela**. 2002.

MOISY, Frederic. **Pacote Box-counting**. 2008. Disponível em <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13063-boxcount/content/boxcount/html/demo.html>> acesso em 13 nov. 2016.

Partitura Concerto em Lá Menor para dois violinos: Violino 1. IMSLP. Disponível em: <http://petrucci.mus.auth.gr/imglnks/usimg/0/01/IMSLP06118-Violino_I_solo.pdf>. Acesso em: 17 junho 2016.

Partitura Concerto em Lá Menor para dois violinos: Violino 2. IMSLP. Disponível em: <http://ks.imslp.info/files/imglnks/usimg/e/eb/IMSLP06119-Violino_II_solo.pdf> Acesso em: 17 junho 2016.

Partitura Outono. Cantorion. Disponível em: <<http://d.cdn2.semplicewebsites.com/download/4658/42e387c935e1e50bb58bcd04568815e2/Outono%20%28Concerto%20No.%203%20%2526quot%3BL%2526%23039%3Bautunno%2526quot%3B%29%20Solo%20violin%20-%20Violin.pdf>> Acesso em: 23 fev. 2016.

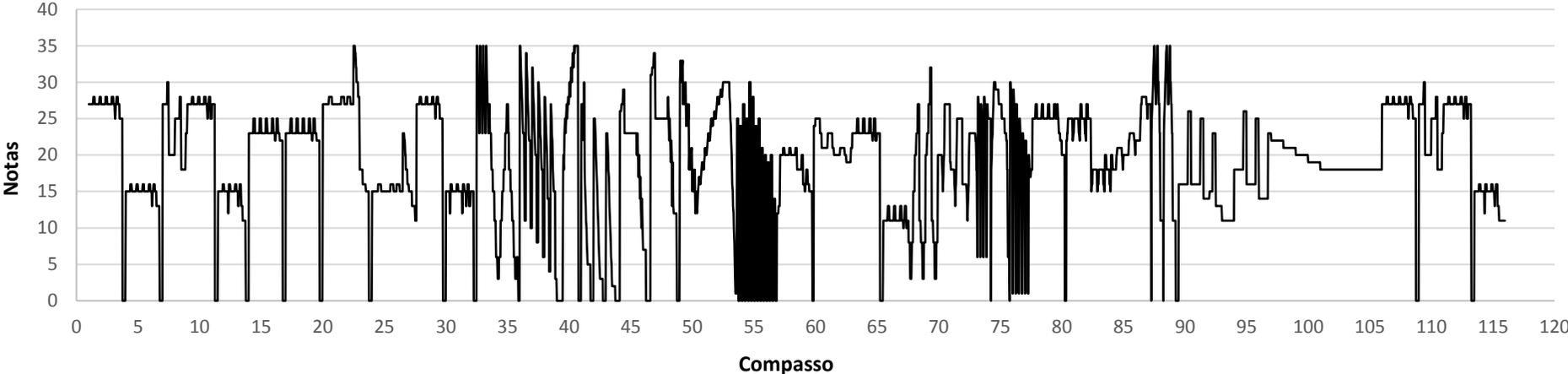
PRIOLLI, Maria Luiza de Mattos. **Princípios Básicos da Música Para a Juventude**. 53ed. Rio de Janeiro: Casa Oliveira de Músicas Ltda, 2012.

Superinteressante. Como surgiu o nome das notas musicais. Disponível em: <<http://super.abril.com.br/comportamento/como-surgiram-os-nomes-das-notas-musicais>> Acesso em: 04 julho 2016.

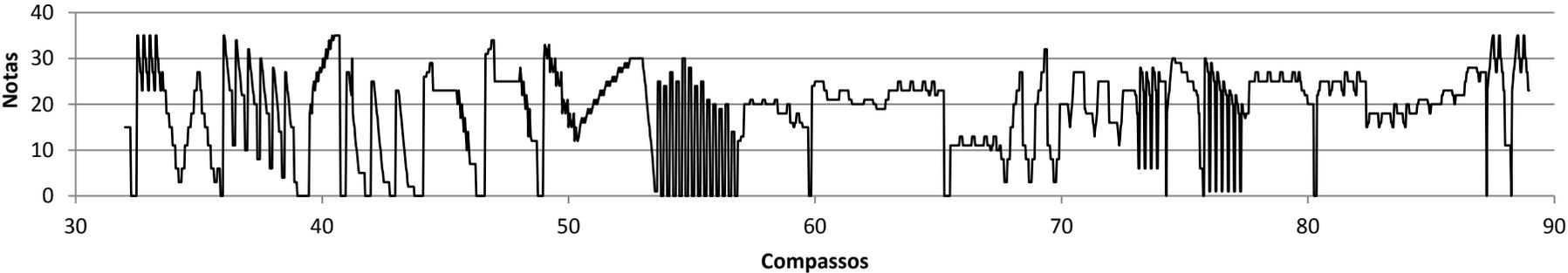
Tom e semitom. Descomplicando a Música. Disponível em: <<http://www.descomplicandoamusica.com/tom-semitom/>> Acesso em: 21 ago. 2016.

APÊNDICE A - Gráficos GeometrizaçãO Outono

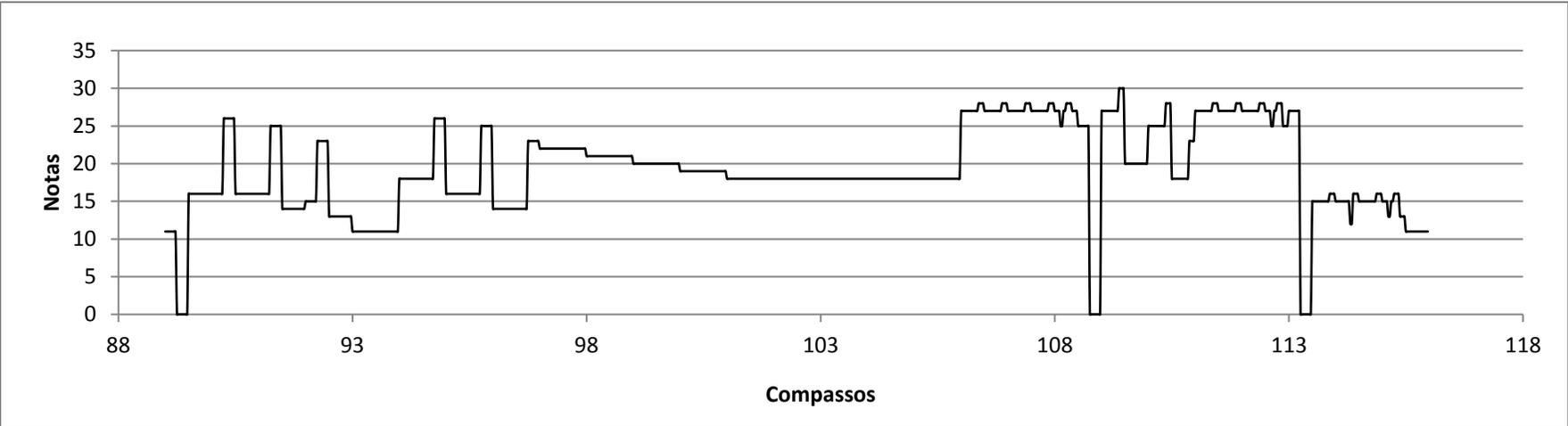
A.1. Outono



A. 2. Outono, parte B

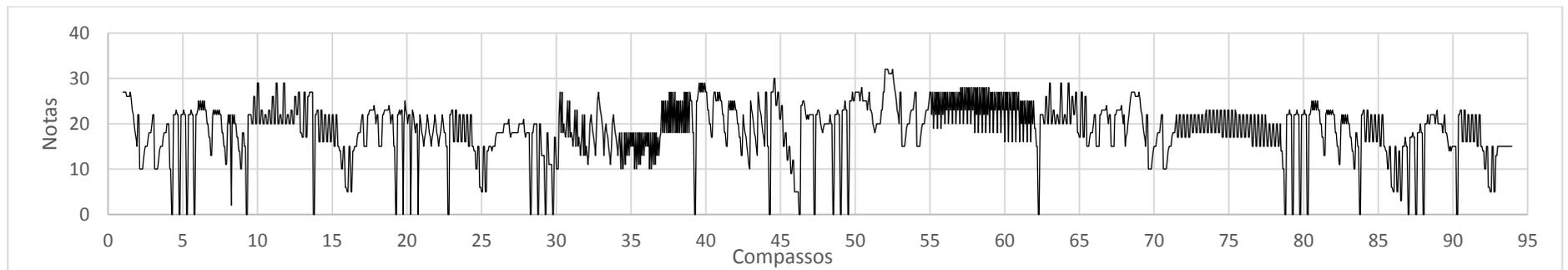


A. 3. Outono, parte C

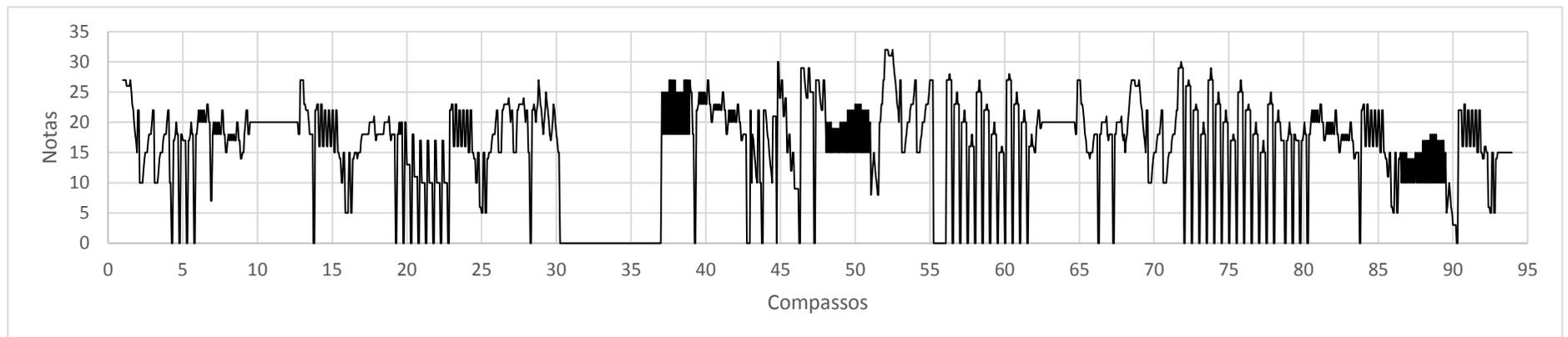


APÊNDICE B - Gráficos Geometrização Concerto em Lá Menor

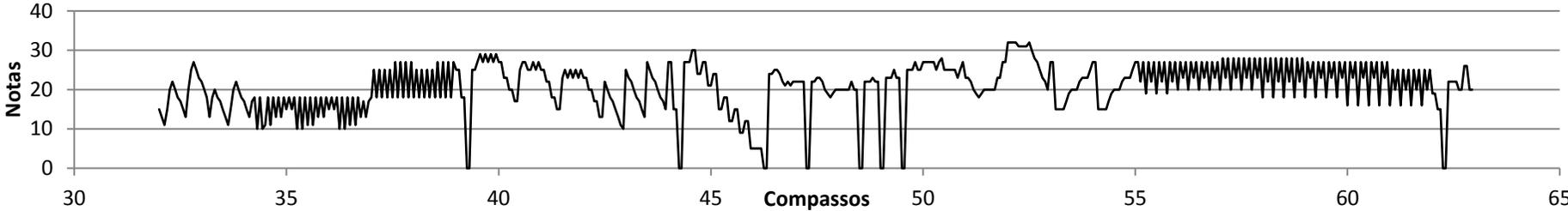
B. 1. Concerto em Lá Menor, violino 1



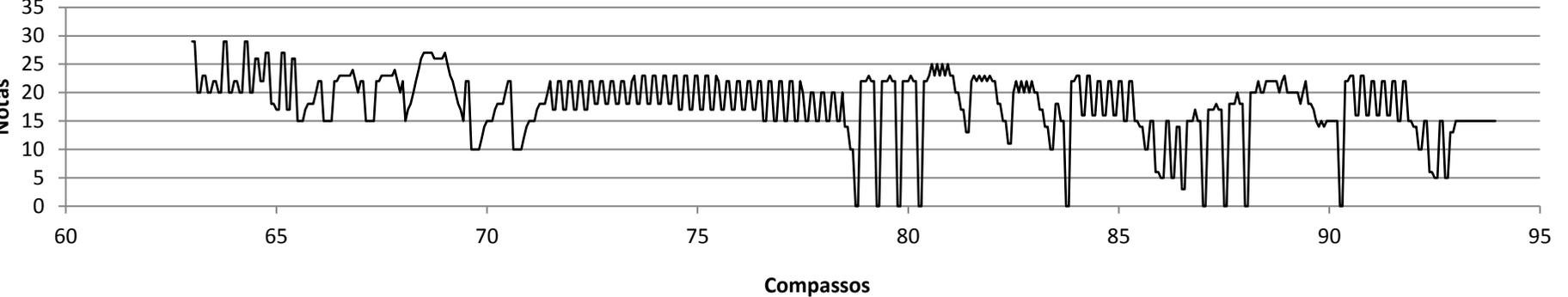
B. 2. Concerto em Lá Menor, violino 2



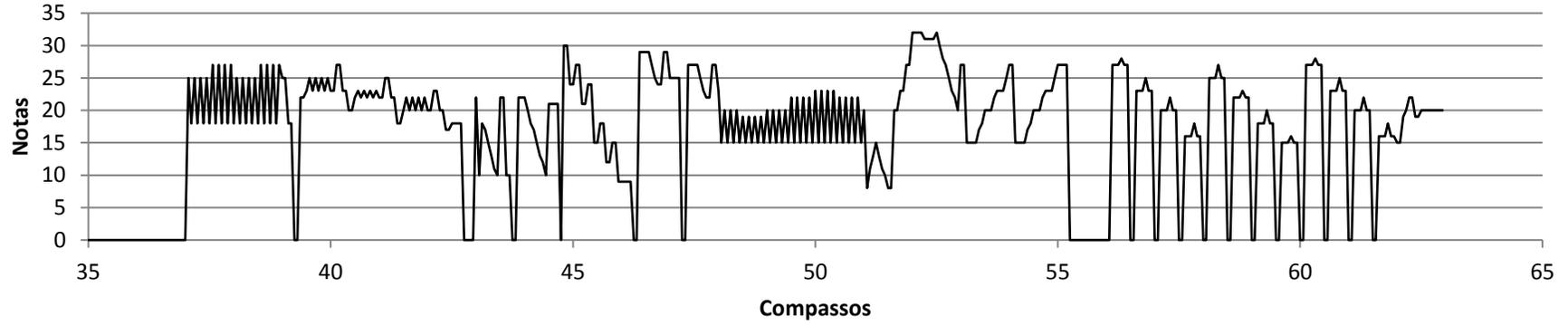
B.3. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2



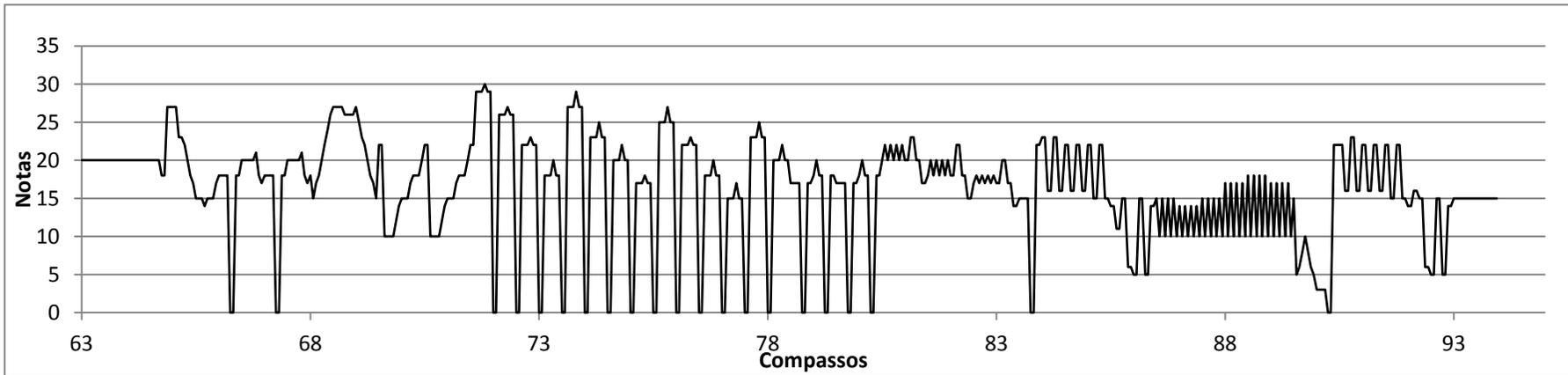
B.4. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 3



B. 5. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 2

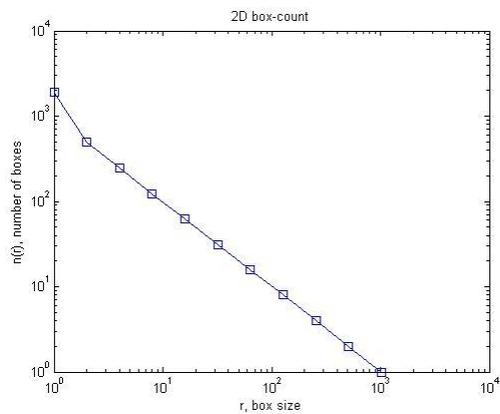


B. 6. Concerto em Lá Menor, violino 2 parte 3

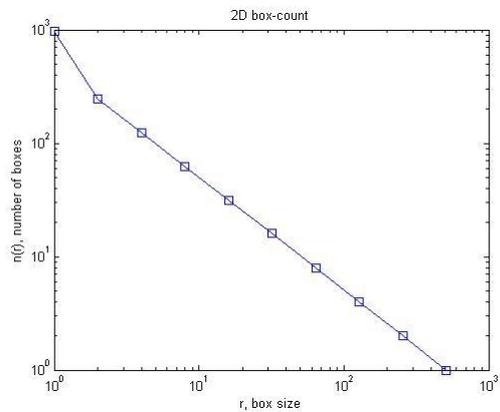


APÊNDICE C - Gráficos *Box-counting* (log-log)

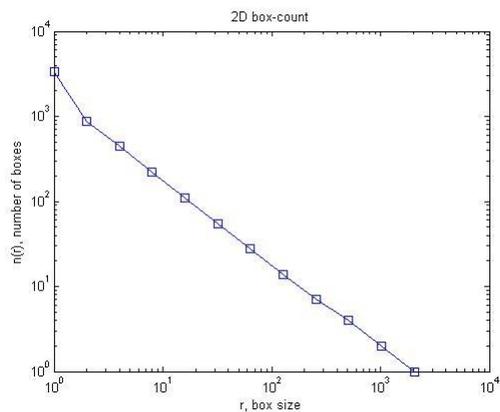
C.1. Outono A



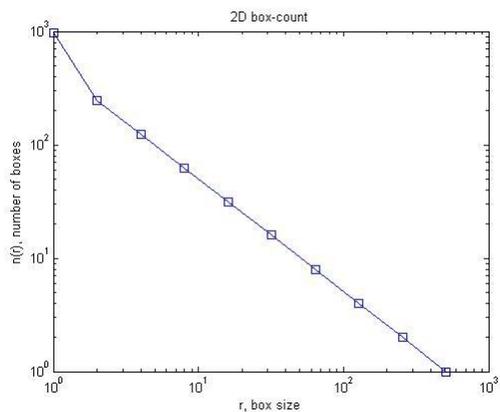
C.4. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 1



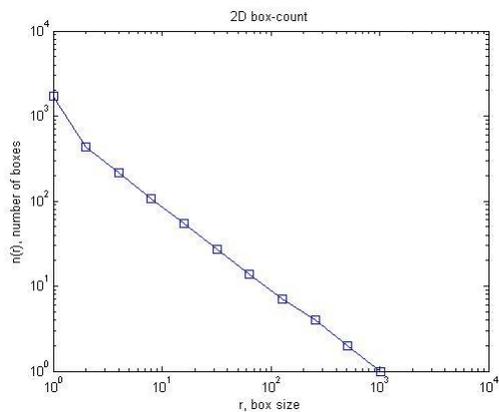
C.2. Outono B



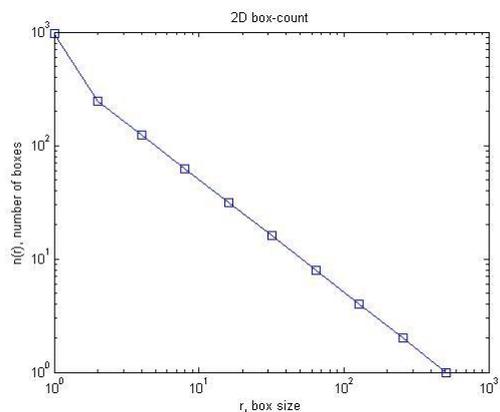
C.5. Concerto em Lá Menor, violino 1 parte 2



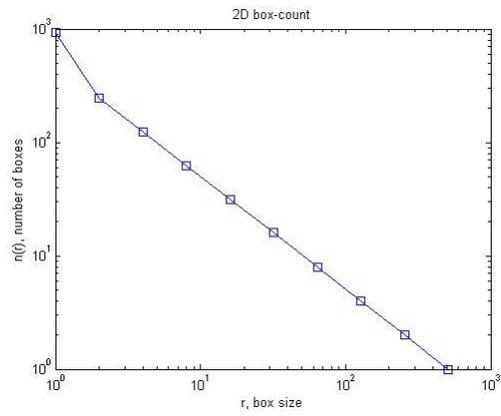
C.3. Outono C



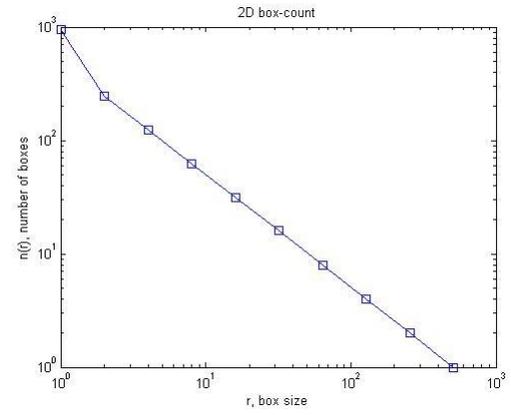
C.6. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 3



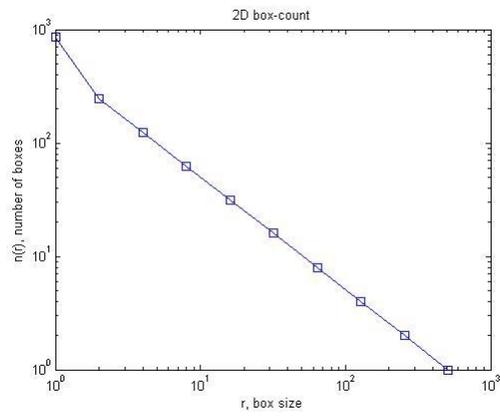
C.7. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 1



C.9. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 3

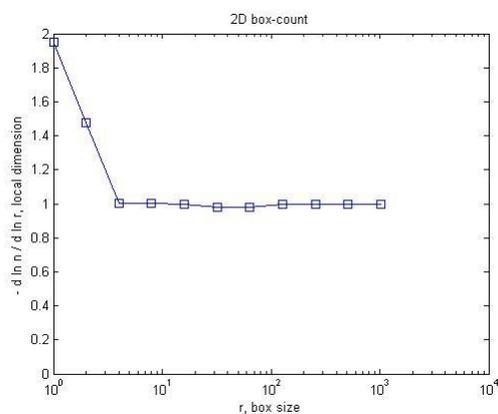


C.8. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 2

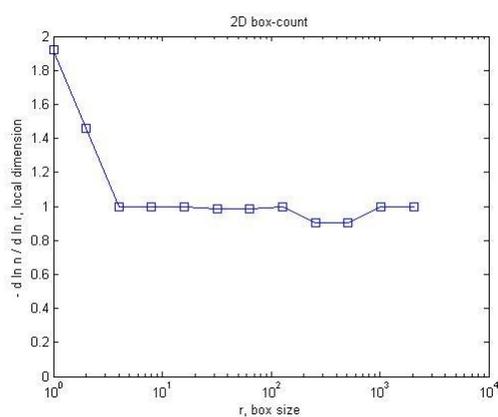


APÊNDICE D - Gráficos *Box-counting* (slope)

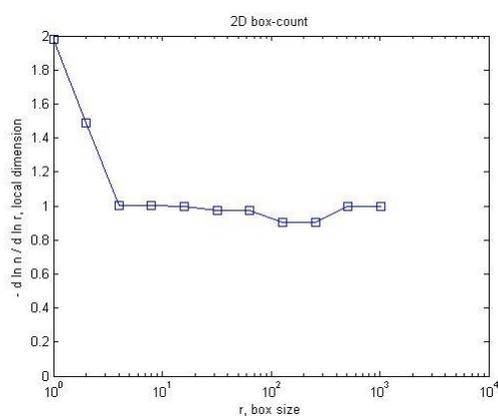
D.1. Outono A



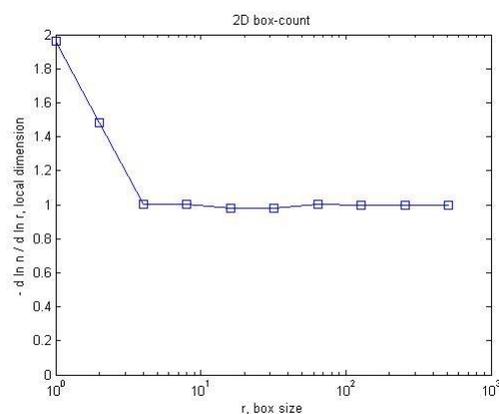
D.2. Outono B



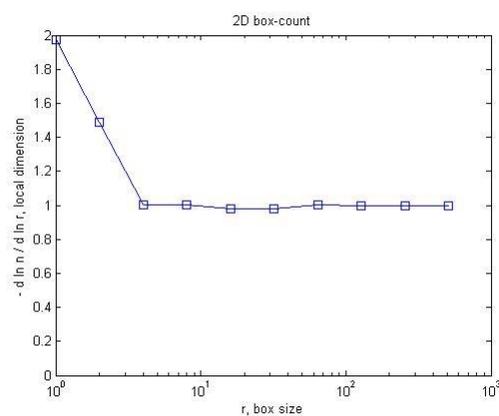
D.3. Outono C



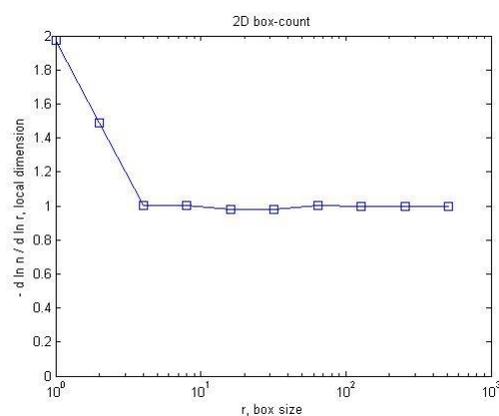
D.4. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 1



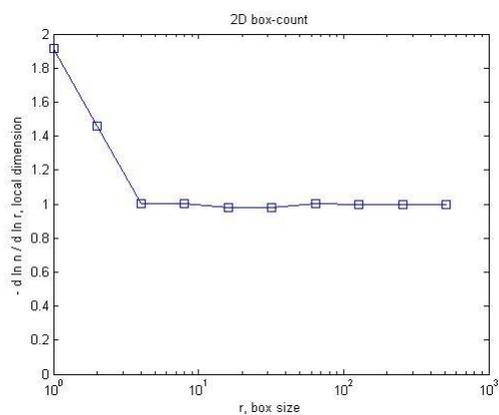
D.5. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 2



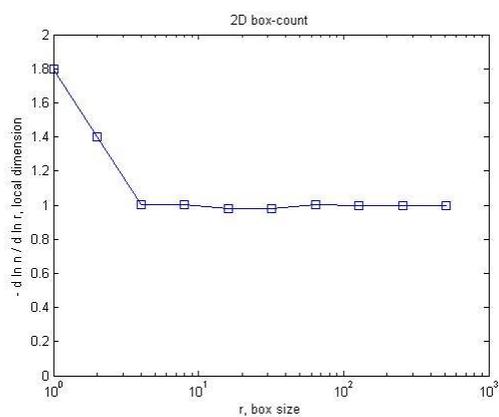
D.6. Concerto em Lá menor, violino 1 parte 3



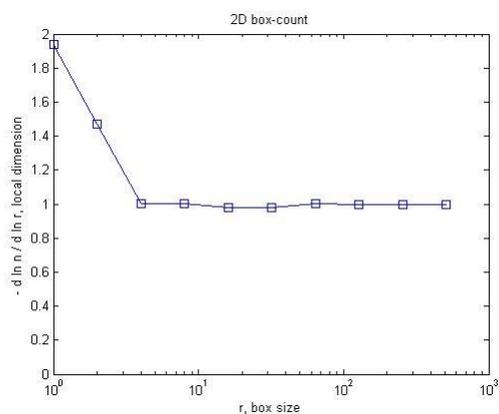
D.7. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 1



D.8. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 2

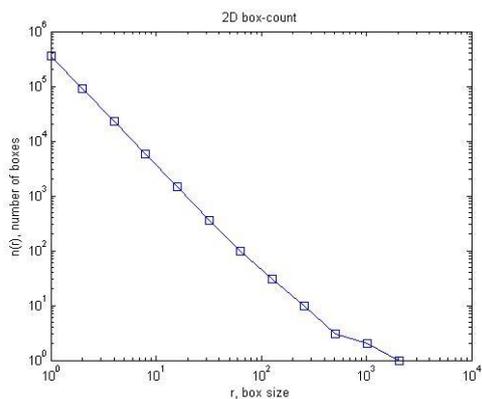


D.9. Concerto em Lá menor, violino 2 parte 3

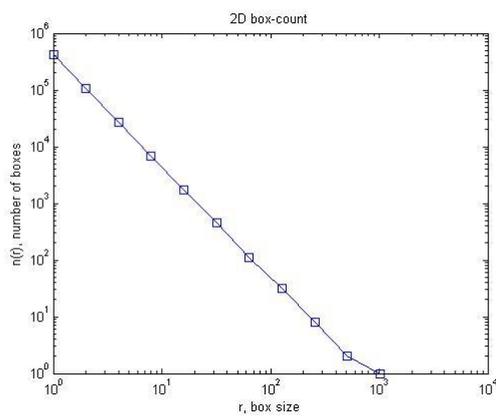


APÊNDICE E - Gráficos log-log, teste com imagem

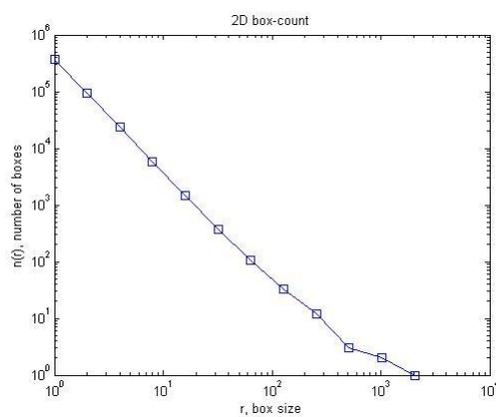
E.1. Outono



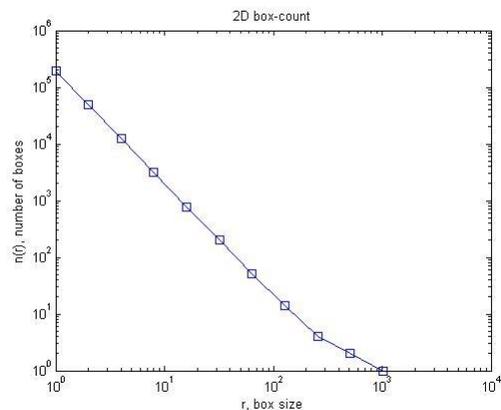
E.2. Outono A



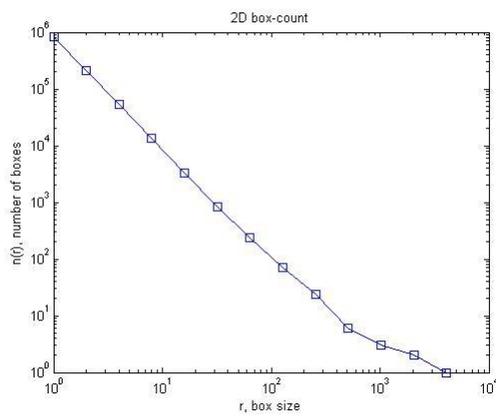
E.3. Outono B



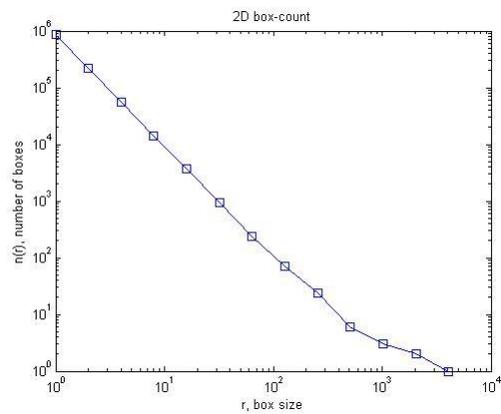
E.4. Outono C



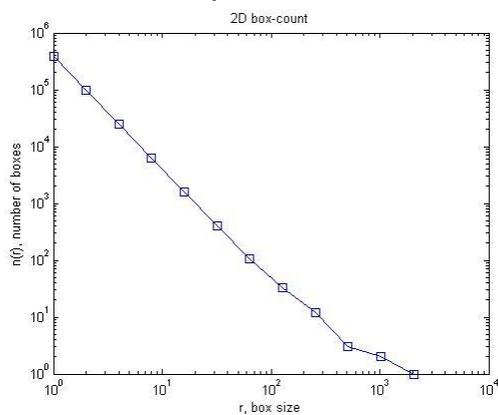
E.5. Concerto em Lá menor, violino 1



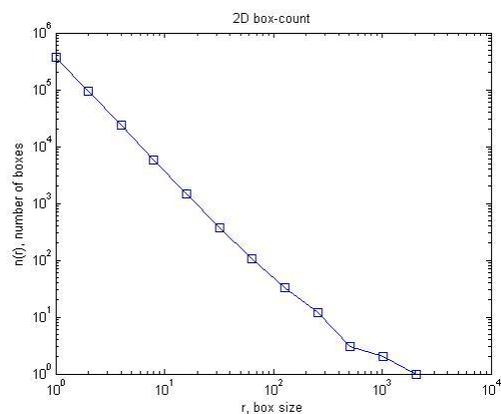
E.6. Concerto em Lá menor, violino 2



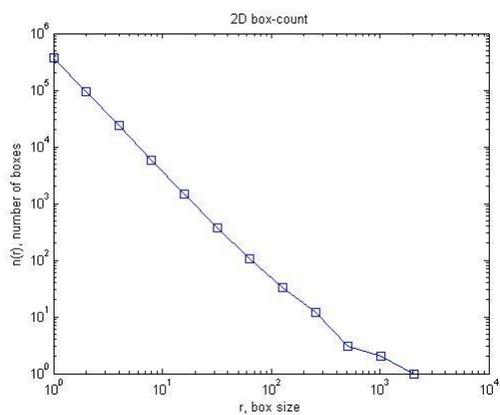
E.7. Concerto em Lá Menor, violino 1
parte 1



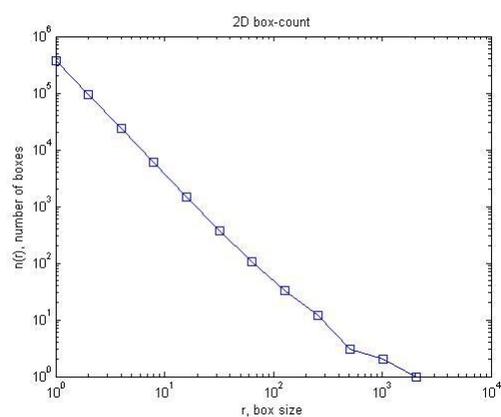
E.10. Concerto em Lá Menor, violino 2
parte 1



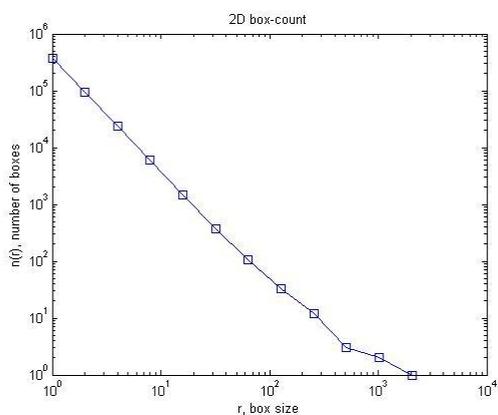
E.8. Concerto em Lá Menor, violino 1
parte 2



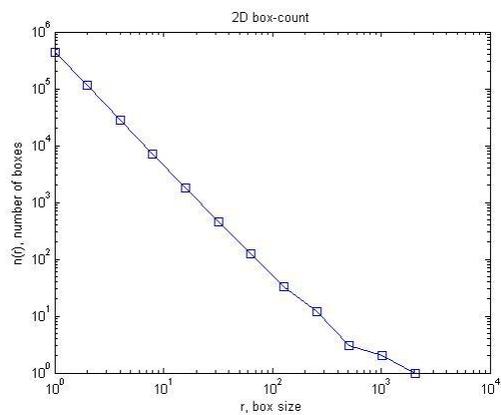
E.11. Concerto em Lá Menor, violino 2
parte 2



E.9. Concerto em Lá Menor, violino 1
parte 3

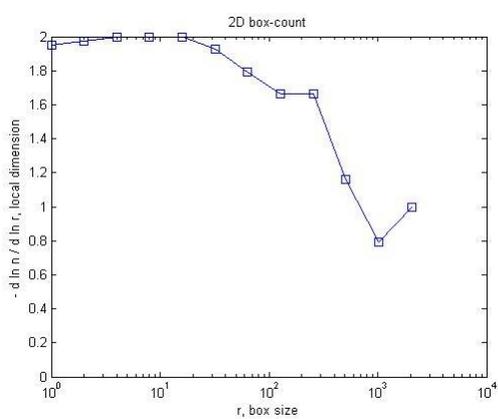


E.12. Concerto em Lá Menor, violino 2
parte 3

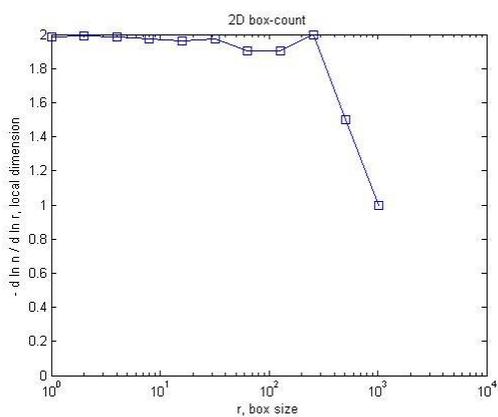


APÊNDICE F - Gráficos slope, segundo teste

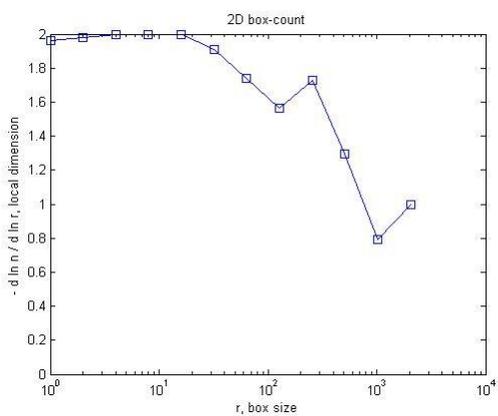
F.1. Outono



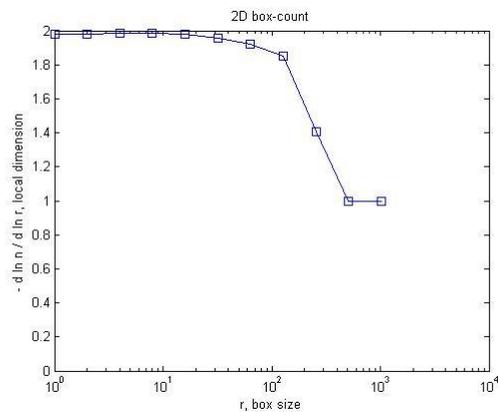
F.2. Outono A



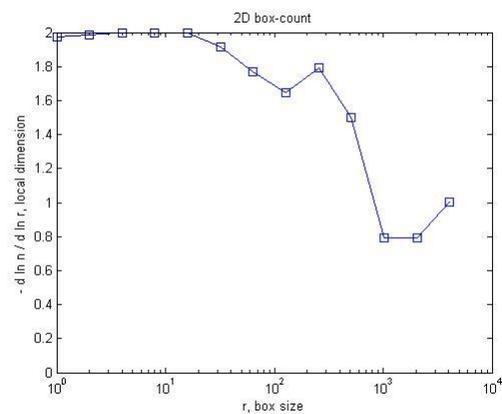
F.3. Outono B



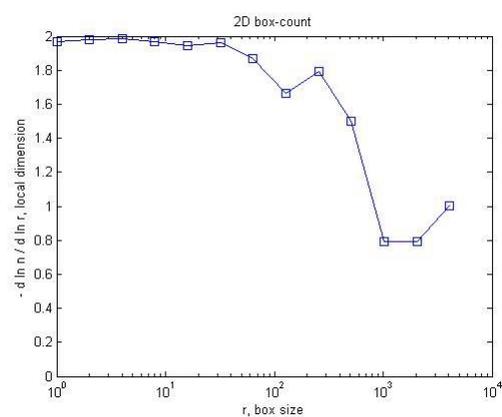
F.4. Outono C



F.5. Concerto em Lá Menor, violino 1



F.6. Concerto em Lá Menor, violino 2



ANEXO A - Partitura Outono

Autumno / Autumn

Il Cimento dell' Armonia e dell' Inventione -- Concerto III

Antonio Vivaldi (1678-1741)

Allegro

Celebra il Vilanel con balli e Canti Del felice raccolto il bel piacere
Ballo e Canto de Villanelli

Violino Principale

Allegro

Piano

5 Forte

10 Piano Solo

15 Piano

20 Forte Piano

25 Tutti

E del liquor di Bacco accesi tanti
E Vbriaco

30 Piano Solo

34

37

40

2

43

47

50

54

Tutti

59

63

Piano

67

Vbriaco
Solo

70

73

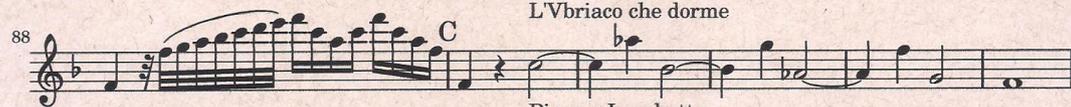
76

Tutti

80



Finiscono col Sonno il lor godere.
L'Vbriaco che dorme



Piano e Larghetto



Più Piano

Pianissimo



Allegro Assai



Adagio Molto

Fà ch'ogn'uno tralasci e balli canti L'aria che temperata dà piacere, E la Staggion ch'invita tanti e tanti



Piano

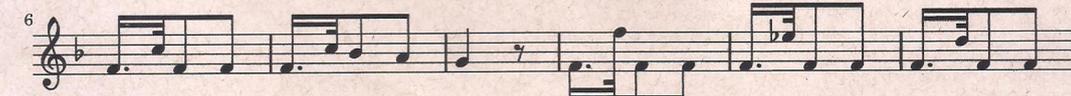


Più Piano

Pianissimo

Allegro

I cacciator alla nov'alba à caccia Con corni, Schioppi, e canni escono fuore
La Caccia



2

Violino II solo

37 *f*

40

43 *[ff]*

45 *f*

48 *p*

50 *f*

53

56 *p*

59

Violino II solo

3

62 *f* 19 22 19 20 20 20 19 27 27 25 22 19 15 14 15 17 20 20 *tr*

67 *f* 18 18 19 19 22 22 24 26 27 26 22 20 18 17 15 19 20 21 21 14

70 17 19 18 22 14 17 20 22 29 29 30 29 26 26 27 26 22 22 22

73 22 23 29 27 23 23 23 23 22 18 25 25 27 25

76 22 22 22 22 20 17 23 23 25 23 22 22 17

79 20 20 20 22 22 22 23 20 20 20 20

82 18 21 18 19 19 18 18 20 22 23 23 22 22 27 22 14

86 14 15 15 15 15 14 14 14 14 15 15 15 15

88 17 17 17 17 18 18 19 18 17 17 17 17 15

90 22 22 22 22 22 22 22 14 14

ANEXO D - Código *Box-counting* utilizado no Matlab

```

function [n,r] = boxcount(c,varargin)

% Revision: 2.10, Date: 2008/07/09

% History:

% 2006/11/22: v2.00, joined into a single file boxcountn (n=1,2,3).
% 2008/07/09: v2.10, minor improvements

% control input argument
error(nargchk(1,2,nargin));

% check for true color image (m-by-n-by-3 array)
if ndims(c)==3
    if size(c,3)==3 && size(c,1)>=8 && size(c,2)>=8
        c = sum(c,3);
    end
end

warning off

c = logical(squeeze(c));

warning on

dim = ndims(c); % dim is 2 for a vector or a matrix, 3 for a cube
if dim>3
    error('Maximum dimension is 3.');
```

```

end

% transpose the vector to a 1-by-n vector
if length(c)==numel(c)
    dim=1;
    if size(c,1)~=1
```

```
    c = c';
end
end
width = max(size(c)); % largest size of the box
p = log(width)/log(2); % nbre of generations
% remap the array if the sizes are not all equal,
% or if they are not power of two
% (this slows down the computation!)
if p~=round(p) || any(size(c)~=width)
    p = ceil(p);
    width = 2^p;
    switch dim
        case 1
            mz = zeros(1,width);
            mz(1:length(c)) = c;
            c = mz;
        case 2
            mz = zeros(width, width);
            mz(1:size(c,1), 1:size(c,2)) = c;
            c = mz;
        case 3
            mz = zeros(width, width, width);
            mz(1:size(c,1), 1:size(c,2), 1:size(c,3)) = c;
            c = mz;
    end
end
```

```

end
n=zeros(1,p+1); % pre-allocate the number of box of size r
switch dim
    case 1 %----- 1D boxcount -----%
n(p+1) = sum(c);
for g=(p-1):-1:0
siz = 2^(p-g);
    siz2 = round(siz/2);
    for i=1:siz:(width-siz+1)
        c(i) = ( c(i) || c(i+siz2));
    end
    n(g+1) = sum(c(1:siz:(width-siz+1)));
end
case 2 %----- 2D boxcount -----%
n(p+1) = sum(c(:));
for g=(p-1):-1:0
    siz = 2^(p-g);
    siz2 = round(siz/2);
    for i=1:siz:(width-siz+1)
        for j=1:siz:(width-siz+1)
c(i,j) = ( c(i,j) || c(i+siz2,j) || c(i,j+siz2) || c(i+siz2,j+siz2) );
        end
    end
    n(g+1) = sum(sum(c(1:siz:(width-siz+1),1:siz:(width-siz+1))));
end
end

```

```

case 3      %----- 3D boxcount -----%

n(p+1) = sum(c(:));
for g=(p-1):-1:0
    siz = 2^(p-g);
    siz2 = round(siz/2);
    for i=1:siz:(width-siz+1),
        for j=1:siz:(width-siz+1),
            for k=1:siz:(width-siz+1),
c(i,j,k)=( c(i,j,k) || c(i+siz2,j,k) || c(i,j+siz2,k) ...
|| c(i+siz2,j+siz2,k) || c(i,j,k+siz2) || c(i+siz2,j,k+siz2) ...
|| c(i,j+siz2,k+siz2) || c(i+siz2,j+siz2,k+siz2));
            end
        end
    end
    n(g+1) = sum(sum(sum(c(1:siz:(width-siz+1),1:siz:(width-siz+1),1:siz:(width-
siz+1)))));
end
end
n = n(end:-1:1);
r = 2.^(0:p); % box size (1, 2, 4, 8...)
if any(strncmpi(varargin,'slope',1))
s=-gradient(log(n))./gradient(log(r));
semilogx(r, s, 's-');
ylim([0 dim]);
xlabel('r, box size'); ylabel('- d ln n / d ln r, local dimension');

```

```
title([num2str(dim) 'D box-count']);  
elseif nargout==0 || any(strncmpi(varargin,'plot',1))  
loglog(r,n,'s-');  
xlabel('r, box size'); ylabel('n(r), number of boxes');  
    title([num2str(dim) 'D box-count']);  
end  
  
if nargout==0  
    clear r n  
end
```