

## Os precursores

Grande parte das informações que temos hoje sobre a história da Geometria grega nos chegou através da obra de Proclus<sup>1</sup>, filósofo, matemático e historiador (410-485). Ele relata que, mesmo na época de Euclides, foram feitas tentativas de provar o quinto postulado como um teorema ou de livrar-se dele através da adoção de outra definição de retas paralelas. Ao longo dos séculos, estas tentativas continuaram com a participação de praticamente todos os grandes matemáticos, que viveram até o século XIX. Para dar um exemplo, o livro *Saggio di una bibliografia Euclidea*, Parte IV, Bolonha 1890, apresenta 24 páginas de títulos de monografias relativas ao quinto postulado publicadas entre os anos 1607 e 1887. Vamos apresentar a seguir algumas destas tentativas.

Antes de iniciar, esclarecemos que todas as informações históricas contidas neste volume foram obtidas das seguintes fontes:

- 1) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traduzido do texto de Heiberg, com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath, Dover Publications Inc., segunda edição (1956).
- 2) *Non-Euclidean Geometry*, a Critical and Historical Study of its Development, por Robert Bonola, Dover Publications Inc., (1955).
- 3) *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, por H. E. Wolfe, Holt Rinehart and Winston (1945).

Entretanto, em várias ocasiões, para benefício do leitor, estaremos mencionando, em notas de roda-pé ou mesmo no texto, referências que foram usadas como fontes nos livros a que nos referi-

---

<sup>1</sup> Edição de G. Friedlein: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, (Leipzig, Teubner, 1873).

mos.

### 3.1 Ptolomeu

Segundo Proclus, Euclides viveu durante o reinado do primeiro Ptolomeu que escreveu um livro sobre o quinto postulado, incluindo uma prova dele. Proclus, nos comentários sobre o livro I dos *Elementos*, afirma: *...ele (o quinto postulado) deveria ser retirado completamente da relação dos postulados, pois é um teorema difícil, o qual Ptolomeu propôs-se a demonstrar, .... Sua inversa foi, de fato, estabelecida por Euclides como um teorema.* Proclus não reproduz a prova de Ptolomeu, mas, por seus comentários, pode-se inferir que ela deve ter sido algo como a que apresentamos a seguir.

Inicialmente, considere duas retas cortadas por uma transversal, formando ângulos nomeados como na figura abaixo

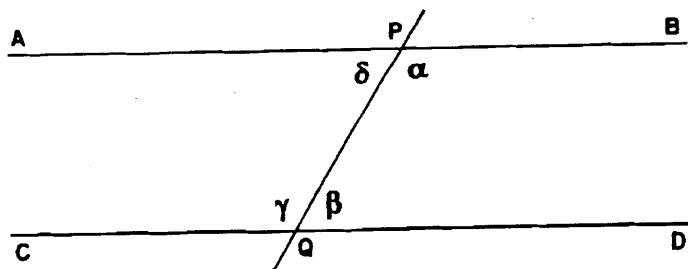


Figura 10

Se  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , então, também teremos  $\gamma + \delta = 180^\circ$ . É, então, fácil concluir que  $\alpha = \gamma$  e que  $\beta = \delta$ . Logo, a figura  $R_{\alpha\beta}$ , formada pelas semi-retas  $SP_B$  e  $SQ_D$  e pelo segmento  $PQ$ , é congruente à figura  $R_{\gamma\delta}$ , formada pelas semi-retas  $SP_A$  e  $SQ_C$  e pelo segmento  $PQ$ . Daí se segue que, se as duas retas se interceptam de um lado da reta que passa por  $PQ$ , então, também se interceptam do outro lado. Neste caso, teríamos duas retas distintas com dois pontos comuns, o que é absurdo.

Como vemos, esta parte do raciocínio de Ptolomeu é perfeita e oferece alternativa para provar a Proposição I, 28 sem fazer uso do teorema do ângulo externo. Agora, seguindo a mesma idéia, ele tentou oferecer a demonstração para o quinto postulado.

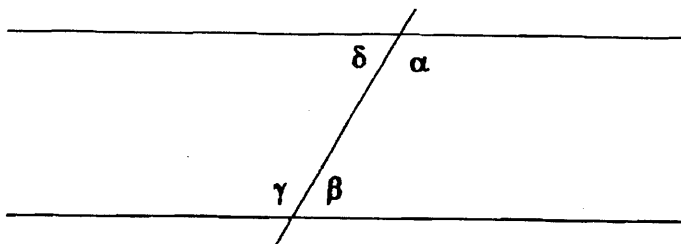


Figura 11

Considere duas retas cortadas por uma transversal, como na figura acima, mas, agora, suponha que as duas retas são paralelas. Segue-se daí que as figuras  $R_{\alpha\beta}$  e  $R_{\gamma\delta}$  são congruentes, já que não pode haver diferença entre o paralelismo em uma direção do paralelismo na outra direção. Como consequência, concluiu-se que  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$  e daí, trivialmente, que qualquer uma destas somas vale  $180^\circ$ .

De fato, assumindo a congruência entre as duas figuras, o leitor não terá dificuldade de escrever todos os detalhes desta demonstração. O erro de Ptolomeu foi exatamente assumir que paralelismo acarreta na congruência das duas figuras. Como veremos, isto só ocorre na Geometria Euclidiana.

## 3.2 Proclus

O próprio Proclus indicou a falácia no argumento de Ptolomeu e propôs uma demonstração. Sua idéia era provar que, se uma transversal corta uma de duas paralelas, então, corta também a segunda. O leitor é desafiado a demonstrar como exercício que esta afirmação é um substituto para o quinto postulado. O argumento de Proclus era o seguinte.

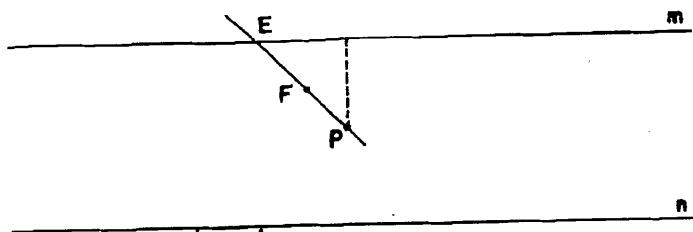


Figura 12

Sejam duas retas paralelas  $m$  e  $n$ . Considere uma reta que corta  $m$  no ponto  $E$ , e seja  $F$  um ponto desta reta na região limitada pelas duas retas paralelas. Seja  $P$  um ponto da semi-reta  $SEF$ . Designe por  $d(P, m)$  a distância deste ponto à reta  $m$ . Esta é uma função do ponto  $P$ , que cresce à proporção que  $PE$  cresce. De fato, esta distância pode tornar-se maior do que qualquer número prefixado e, portanto, eventualmente, torna-se maior do que a distância entre as retas  $m$  e  $n$ . Mas, então,  $SEF$  corta  $n$ .

Como o leitor pode verificar, o raciocínio de Proclus está correto, desde que admitamos que retas paralelas são equidistantes. Mas, vimos que a existência de retas equidistantes é equivalente à adoção do quinto postulado.

### 3.3 Nasiredin

Os árabes sucederam os gregos como líderes nas descobertas matemáticas. Como eles, também investigaram o quinto postulado. Nasiredin (Nasir-Edin), (1201-1274), astrônomo e matemático persa, editor de uma versão dos *Elementos* de Euclides, em árabe, escreveu um tratado sobre os Postulados de Euclides<sup>2</sup>, no qual observou pela primeira vez a importância do teorema da soma dos ângulos de um triângulo em relação ao quinto postulado. Em sua

<sup>2</sup>Conforme: *Euclidis elementorum libri XII studii Nassiredini*, Roma (1594). Este trabalho foi escrito em árabe, republicado em 1657 e 1801, mas, infelizmente, nunca foi traduzido para qualquer outra língua.

tentativa de prova, encontramos o gene de idéias importantes que seriam desenvolvidas muito depois de seu tempo.

Nasiredin primeiramente supôs, sem demonstração, a validade da seguinte afirmação:

**AXIOMA:** *Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A$  um ponto de  $m$ ,  $B$  um ponto de  $n$ , tais que  $AB$  é perpendicular a  $n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ . Então as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ , do lado do ângulo agudo, são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ .*

Nasiredin usou, então, este axioma para deduzir o quinto postulado<sup>3</sup>. Para isto, utilizou-se de uma figura que veio a se tornar famosa, associada ao nome de outro matemático.

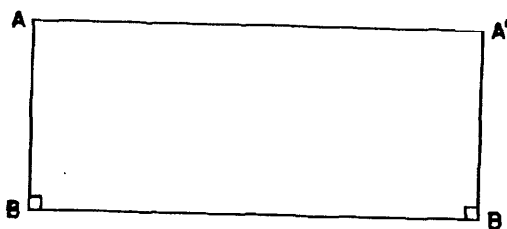


Figura 13

Ele considerou um quadrilátero  $ABB'A'$  em que os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  são retos e em que  $AB = A'B'$ . Utilizando o método de *reductio ad absurdum* e, sem muito cuidado, o axioma acima, ele concluiu que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  são também retos. Para isto, supôs inicialmente que o ângulo  $\hat{A}$  fosse agudo, deduzindo, então, que  $AB > A'B'$ , o que é absurdo. O mesmo tipo de prova mostra que este ângulo não pode ser obtuso. Daí o resultado.

<sup>3</sup>A demonstração de Nasiredin é reproduzida no volume II da obra de J. Wallis: *De Postulato Quinto; et Definizione Quinta; Lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica*, Opera Math. Oxford, 1693.

Observe que aqui Nasiredin usou, sem se aperceber, que se o ângulo  $\hat{A}$  for agudo, então, o ângulo  $\hat{B}$  deve ser obtuso. De fato, como veremos, é uma conseqüência dos quatro primeiros postulados o fato de estes dois ângulos serem congruentes. Continuando o argumento de Nasiredin, o quadrilátero  $ABB'A'$  tem os quatro ângulos internos retos e os lados opostos congruentes. É, portanto, um retângulo. Traçando uma diagonal, o dividimos em dois triângulos retângulos congruentes. Daí ele conclui pela existência de um triângulo cuja soma dos ângulos é  $180^\circ$  fato que sabemos acarretar a validade do quinto postulado.

### 3.4 Wallis

As primeiras versões dos *Elementos* feitas nos séculos XII e XIII, baseadas em textos árabes, e as elaboradas no século XV e início do século XVI, com base em textos gregos, não continham qualquer nota crítica relativa ao quinto postulado. Tais críticas apareceram somente depois do ano 1550, principalmente sob a influência dos *Comentários de Proclus*<sup>4</sup>. Nos séculos XVI e XVII, entre os que escreveram trabalhos críticos sobre o quinto postulado, e que tentaram prová-lo, deve-se citar F. Comandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537-1612), P. A. Cataldi (?-1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), e J. Wallis (1616-1703). Todos eles, excetuando Wallis, trabalharam a idéia de retas eqüidistantes.

J. Wallis abandonou a idéia de eqüidistância, empregada sem sucesso pelos matemáticos que o precederam, e apresentou nova demonstração do quinto postulado. Ele baseou seus argumentos no seguinte axioma: dado um triângulo, é possível construir-se um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes.

Foi a seguinte a prova de Wallis. Dados segmentos  $AB$  e  $CD$  cortados pela transversal  $EF$  em pontos  $G$  e  $H$ , respectivamente,

---

<sup>4</sup>Os *Comentários de Proclus* foram impressos pela primeira vez em Basle (1533), e, posteriormente, em Padua (1560) na tradução latina de Barozzi.

suponha que

$$\hat{B}\hat{G}H + \hat{G}\hat{H}D < 180^\circ.$$

Devemos provar que as retas que passam por  $A$  e  $B$ , e por  $C$  e  $D$  se encontram. É fácil ver que

$$\hat{E}\hat{G}B > \hat{G}\hat{H}D.$$

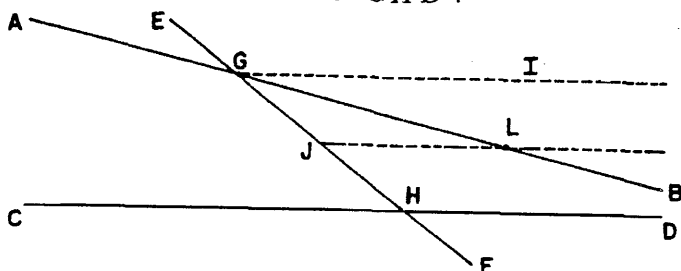


Figura 14

Se o segmento  $HG$  for deslocado ao longo da reta que passa por  $E$  e  $F$ , mantendo  $HD$  rigidamente a ele ligado, até que  $H$  coincida com a posição inicial de  $G$ , então  $HD$  tomará uma posição  $GI$  ficando inteiramente acima de  $GB$ . Portanto, durante este movimento,  $HD$  deve, em algum momento, cortar  $GB$  em um ponto, digamos  $L$ . Seja  $J$  a posição do ponto  $G$  neste instante. Formamos, assim, um triângulo  $GJL$ . Agora construa um triângulo semelhante a  $GJL$ , tendo  $GH$  como lado correspondente a  $GJ$ . É evidente, agora, que as duas retas devem se encontrar.

### 3.5 Saccheri

Em 1889, foi descoberto um livro que havia sido publicado em Milão em 1733, escrito por Girolamo Saccheri (1667-1733), um padre jesuíta professor da Universidade de Pavia. O livro era intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus*<sup>5</sup>. Nele, Saccheri apresentava uma

<sup>5</sup>O título completo do livro era: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Postulate*. O livro era

tentativa de prova do quinto postulado. Sua contribuição é considerada mais importante do que todas as anteriores, por ter sido a primeira a contemplar a possibilidade de hipóteses outras que a de Euclides e trabalhar um grande número de suas conseqüências. Por isto, Saccheri é considerado o precursor de Legendre, Lobachewsky e Riemann.

Enquanto ensinava Gramática e estudava Filosofia em Milão, Saccheri leu os *Elementos* de Euclides tendo ficado particularmente impressionado pelo seu uso do método de prova pela redução a um absurdo. Este método consiste em assumir, como hipótese, que a proposição a ser demonstrada é falsa; se uma contradição resultar ao longo das deduções feitas utilizando esta hipótese, conclui-se que a proposição é verdadeira. Posteriormente, antes de ir para Pavia, Saccheri lecionou Filosofia na Universidade de Turim. Como fruto desta experiência, publicou, em 1697, um tratado de lógica - *Logica Demonstrativa* - cuja inovação era a aplicação do método usado por Euclides no tratamento da Lógica Formal.

Foi, então, muito natural que ele tivesse utilizado o seu conhecimento de Lógica, e nesta, o seu método favorito, na tentativa de demonstrar o quinto postulado. Segundo se tem notícia, foi o primeiro que tentou demonstrá-lo através de sua substituição por um outro que lhe fosse contraditório. Saccheri estava bem preparado para efetuar esta tentativa. Por um lado, ele dominava muito bem a ferramenta lógica necessária. Por outro, tinha familiaridade com o trabalho dos que haviam tentado provar o quinto axioma, tendo, inclusive, indicado as falhas nas provas de Nasiredin e de Wallis.

Saccheri considerou um quadrilátero  $ABCD$ , em que os lados  $AB$  e  $DC$  são congruentes e perpendiculares ao lado  $BC$ . Usando apenas os quatro primeiros postulados, provou que os ângulos em  $C$  e  $D$  são congruentes. A validade do quinto postulado é equivalente a assumir que estes ângulos são retos. Em geral, existem três hipóteses

---

dividido em duas partes: a primeira e mais importante, foi traduzida para o inglês: *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicated* (Halsted, Chicago, 1920).



para estes ângulos. São:

1. retos,
2. obtusos,
3. agudos.

Saccheri assumiu a negação da hipótese (1) e estudou as conseqüências das duas outras, na busca por contradições. Entre suas conclusões, devemos destacar as seguintes:

1. *se uma das hipóteses é verdadeira para um único quadrilátero do tipo considerado, então, é verdade para todos tais quadriláteros;*
2. *nas hipóteses (1), (2) e (3) consideradas, a soma dos ângulos dos triângulos é, respectivamente, igual, maior e menor do que  $180^\circ$ ;*
3. *se existe um único triângulo para o qual a soma dos ângulos é igual a, maior do que, ou menor do que  $180^\circ$ , então, vale, respectivamente, a hipótese (1), (2) ou (3);*
4. *duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas.*

Assumindo, como Euclides, que a reta é ilimitada, Saccheri não teve dificuldade de descartar a hipótese (2). Entretanto, ao procurar uma contradição no caso da hipótese (3), provou uma longa série de resultados, alguns dos quais viriam a se tornar teoremas clássicos da Geometria não euclidiana. No final Saccheri concluiu que aquela hipótese acarretava a existência de duas retas assintóticas possuidoras de uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito. Aparentemente, Saccheri não estava convencido de que havia chegado realmente a uma contradição, tanto que tentou uma segunda prova, também sem sucesso.

Se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia uma contradição para ser encontrada, a descoberta da Geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes. Seu trabalho é admirável e, retirados o final e alguns pequenos defeitos, o resto é uma prova inequívoca de que Saccheri possuiu grande intuição geométrica e profundo conhecimento de Lógica. Ele foi, sem dúvida, o primeiro a ter um vislumbre das geometrias possíveis, mesmo sem saber disto.

### 3.6 Lambert

G.S.Klügel publicou, em 1763, um trabalho<sup>6</sup> em que examinava trinta pseudo-demonstrações do quinto postulado. Este trabalho é interessante, principalmente por sua conclusão, expressando, talvez pela primeira vez, dúvidas sobre a possibilidade de se obter uma demonstração do famoso postulado, e observando que a certeza que se tinha, naquela época, da validade da hipótese Euclidiana não provinha de uma série de deduções rigorosas e sim de observações experimentais.

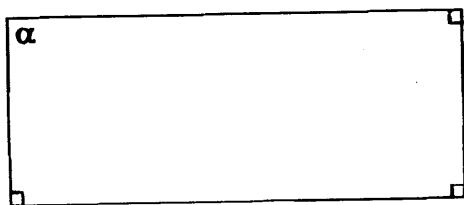


Figura 15

Esta obra teve o grande mérito de ter chamado a atenção de Johann Heinrich Lambert (1728-1777) para a teoria das paralelas. Seu trabalho *Theorie der Parallellinien* foi escrito em 1766 e publicado,

<sup>6</sup>O trabalho de Klügel era denominado *Conatuum praecipuorum theoriarum parallelarum demonstrandi recensio*.

após sua morte, por G. Bernoulli e C.F.Hindenburg<sup>7</sup>.

Há uma grande semelhança entre este trabalho e o de Saccheri. Lambert escolheu para sua figura fundamental um quadrilátero com três ângulos retos. Ele considerou três hipóteses a respeito do quarto ângulo: (1) hipótese do ângulo reto, (2) hipótese do ângulo obtuso e (3) hipótese do ângulo agudo. Como a hipótese (1) é equivalente ao quinto postulado, estudou as conseqüências das outras duas, tendo ido muito mais longe do que Saccheri na dedução de novas proposições. Entre elas, devemos destacar a seguinte:

*A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos.*

Portanto, a expressão numérica da área  $\Delta$  de um triângulo  $ABC$  é, sob a hipótese do ângulo agudo:

$$\Delta = k(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}),$$

e, sob a hipótese do ângulo obtuso:

$$\Delta = k(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi),$$

onde  $k$  é uma constante positiva.

Além disto, ele fez algumas observações profundas as quais apresentamos em tradução livre:

*Em conexão com estas fórmulas, devemos observar que a hipótese do ângulo obtuso vale se considerarmos triângulos esféricos ao invés de triângulos planos, porque, neste último caso, também a soma dos ângulos é maior do que dois ângulos retos e a área do triângulo é proporcional ao excesso.*

---

<sup>7</sup> Este tratado, bem como o tratado de Saccheri, foram reproduzidos por Engel e Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895).

*Parece ainda mais interessante que o que aqui afirmo sobre triângulos esféricos, pode ser demonstrado independentemente da dificuldade das paralelas.*

*Estou inclinado a concluir que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário.*

As observações de Lambert foram confirmadas posteriormente pelos matemáticos Riemann e Lobachewsky. Como Saccheri, ele foi capaz de eliminar a hipótese do ângulo obtuso ao assumir que a reta é ilimitada. Todavia, suas conclusões finais sobre a hipótese do ângulo agudo são insatisfatórias. Ele pareceu perceber que os argumentos contra a Geometria baseada nesta hipótese eram muito mais resultado de noções preconcebidas sobre a validade da Geometria euclidiana.

Não podemos deixar de notar que, embora os geômetras daquele tempo ainda estivessem tentando provar o quinto postulado, no entanto, o estavam fazendo com mentes muito mais abertas. Os velhos preconceitos estavam começando a desaparecer. A época das grandes descobertas estava quase chegando!

## Exercícios

1. Considere a afirmação:  $V_{12}$ . *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta a outra.* Prove que esta afirmação é um substituto do quinto postulado.
2. Complete a prova de Nasiredin, provando que o seu axioma é um substituto do quinto postulado.
3. Discuta o argumento de Wallis apresentado neste capítulo e indique o seu erro.