

SPOGEOA GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

PROF^a DANIELA PASSOS MAIA MOURA

daniela.passos@ifsp.edu.br

O que é uma teoria axiomática?

É uma teoria construída a partir de **axiomas** (ou postulados).

Axiomas : são verdades assumidas sem necessidade de demonstração, a partir dos quais se constrói (e se demonstra) os resultados da teoria. Os axiomas relacionam e caracterizam os **conceitos primitivos** de uma teoria.

Conceitos primitivos: Elementos ("objetos básicos" ou ideias) de uma teoria, que não são definidos e precisam ser aceitos, tomados como "sabidos". Eles são entendidos de forma intuitiva e a rigor, são caracterizados pelos axiomas da teoria.

A partir desses elementos, também se constroem **definições** e **teoremas**.

Conceitos Primitivos

Axiomas (ou postulados)

Definições

Teoremas

Exemplos de teorias axiomáticas

Geometria Euclidiana

Conceitos de **ponto**, **reta** e **plano** são considerados **conceitos (ou elementos) primitivos**, assim como as noções de "pertencer a", "estar entre" e de congruência.

Todos eles são caracterizados pelos axiomas.

Postulados:

I. Por quaisquer dois pontos distintos passa uma única reta.

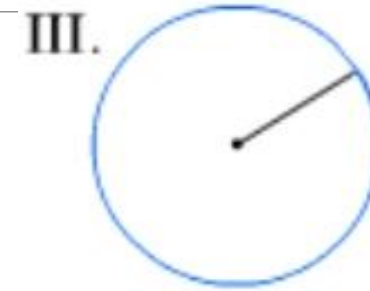
II. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.



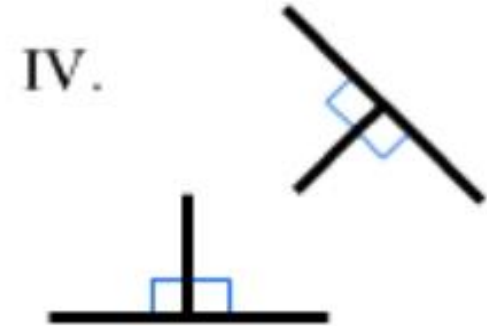
Exemplos de teorias axiomáticas

Geometria Euclidiana

III. Pode-se traçar um círculo com quaisquer centro e raio dados.



IV. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.



V. Dados uma reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a a reta que passa pelo ponto. (J. Playfer).



Exemplos de teorias axiomáticas

Álgebra Linear - Teoria dos espaços vetoriais

Conceitos de **vetor e escalar** são considerados **conceitos primitivos**. As operações válidas entre os objetos de um espaço vetorial (soma e multiplicação por escalar) são caracterizadas pelos axiomas da teoria, isto é, pelas propriedades que elas satisfazem.

Fechamento das operações;

Comutativa, associativa, elemento neutro e oposto da adição;

Associativa, distributivas e elemento neutro da multiplicação por escalar.

Exemplos de teorias axiomáticas

Álgebra Linear - Teoria dos espaços vetoriais

Conceitos de **vetor** e **escalar** são considerados **conceitos primitivos**. As operações válidas entre os objetos de um espaço vetorial (soma e multiplicação por escalar) são caracterizadas pelos axiomas da teoria, isto é, pelas propriedades que elas satisfazem.

Exemplos de espaços vetoriais:

Espaço euclidiano ($\mathbb{R}^3$),

Conjunto das matrizes,

Conjunto das funções contínuas, etc..



Modelos: exemplos de objetos que satisfazem os axiomas da teoria, eles dão significado aos conceitos primitivos .

Geometria Euclidiana



Encyclopædia Britannica

- *Euclides de Alexandria* foi um matemático grego, discípulo de Platão, famoso por sua obra "*Os elementos*", escrita por volta do ano 300 a.C.
- *Euclides* organizou e compilou em "*Os Elementos*", 13 livros/capítulos com resultados e teoremas já conhecidos na época, sobre geometria e aritmética.
- "*Os Elementos*" é considerado o primeiro tratado científico, um modelo para outros ramos da ciência, devido a sua escolha axiomática de organização.

"Os Elementos" de Euclides



Organizado em "Definições",
Postulados e Noções Comuns, a partir dos quais
uma série de proposições (teoremas) são
demonstrados.

É diferente da maneira que organizamos a geometria
axiomáticamente, hoje.

Depois da bíblia, é o livro de maior número de
edições.

Tradução direta do grego, feita pelo profº Irineu Bicudo.

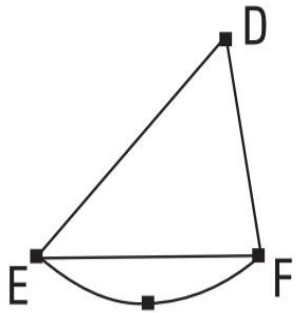
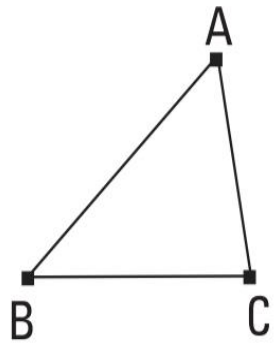
Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- [4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.



Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela;

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Tentativas de demonstração do 5º postulado

Surgem a partir da negação do 5º postulado de Euclides como um postulado, isto é, da tentativa demonstra-lo a partir dos demais postulados.

Hipótese: Os 4 primeiros postulados de Euclides

Tese: Vale o 5º Postulado.

- Diversas tentativas de demonstrações direta foram feitas, as que pareciam estar correta, na verdade, usavam equivalências do 5º postulado.
- As tentativas de demonstração que mais "deram fruto" foram as ***demonstrações por absurdo***, partindo portanto da negação da tese.

Outras geometrias axiomáticas

-Duas maneiras de negar a tese:

❖ *Dados uma reta r e um ponto P fora dela não existe reta paralela a r passando por P (C. F. Gauss e G. Riemman)*

❖ *Existem pelo menos duas retas paralelas a r passando por P (J. Bolyai e N. Lobachevski).*

Nenhum absurdo foi obtido, pelo contrário, novas teorias (geometrias) consistentes foram desenvolvidas: Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Ementa e Objetivos

- Abordar o estudo da geometria de um ponto de vista axiomático, buscando reconhecer relações e propriedades comuns a vários modelos de geometrias.
- Calcular e modelar situações através do modelo de Semiplano de Poincaré na geometria hiperbólica.
- Reconhecer outros modelos de geometrias não euclidianas, identificando suas particularidades.
- Comparar Geometria Euclidiana e não euclidianas, a partir de seus conceitos e modelos fim de verificar semelhanças e diferenças.
- Realizar ações de extensão constantes do Programa de Extensão da Licenciatura em Matemática (Projeto de Extensão Práticas Docentes ou Projeto de Extensão Formação Inicial-Continuada)

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Conteúdo Programático

I - Geometria Euclidiana

1. Axiomas;
2. Demonstrações.

II - Quinto Postulado de Euclides e suas equivalências

III - Geometria Neutra

1. Axiomas de Incidência;
2. Postulado da Régua;
3. Postulado da Separação do Plano,
4. Postulado da Medida Angular;
5. Postulado LAL.

IV - Geometria hiperbólica: Modelo do Semiplano de Poincaré

V - Modelo do Semiplano de Poincaré

1. Distâncias;
2. Medida Angular;
3. Triângulos

VI - Outras geometrias não euclidianas

VII - Ações de extensão, de acordo com o Programa de Extensão

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Bibliografia Básica

BARBOSA, João. **Geometria hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 2001.

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. v. 9. Geometria Plana. São Paulo. 9 ed. São Paulo: Atual editora. 2013.

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Bibliografia Complementar

BIANCONI, Ricardo. **Geometria e Desenho Geométrico I - Notas do curso MAT 230 - IME USP**. São Paulo. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~piccione/Downloads/geo-paolo.pdf>. Acesso em 15 fev. 2017.

COXETER, Harold Scott MacDonald. **Non-Euclidean Geometry**. 6. ed. The Mathematical Association of America. 1998.

EUCLIDES, Os Elementos. **Tradução de Irineu Bicudo**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean e Non Euclidean Geometries: Development and History**. 4. ed. W.H. Freeman & Company, 2007.

NONEUCLID. **Software livre de geometria dinâmica para os modelos do disco e do semiplano de Poincaré para a geometria hiperbólica**. Disponível em: <http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/>. Acesso em 17 de dezembro de 2017.

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Instrumentos e Critérios de avaliação

- Atividades diversas (listas de exercícios, atividades em sala de aula, etc) (35%)
- Trabalho (T) (35%)
- Atividades de extensão (E) (30%)

Média Final (MF): Sendo MA a média das atividades solicitadas, a média final será calculada como segue:

$$MF=0,35*MA+0,35*T+0,30E ; \text{ se } E \leq 6,0$$

$$MF=4,0 ; \text{ se } E < 6,0$$

- **Avaliação substitutiva:** Prevista para o final do semestre. Destinada ao estudante que apresentar justificativa protocolada no SUAP.

GEOMETRIAS AXIOMÁTICAS

Atendimentos e comunicação

- Comunicação via suap ou moodle
- Atendimento: Quarta –feira , 12h – 13h (Sala D201)

Aprovação e IFA

Estará aprovado(a) o(a) estudante com frequência superior a 75% e com média final (MF) maior ou igual a 6,0. Terá direito a realizar o Instrumento Final de Avaliação (IFA) o(a) estudante com 75% de frequência cuja média final (MF) for maior ou igual a 4,0 e estritamente menor que 6,0. No IFA será abordado todo o conteúdo da disciplina.