

## Atividades para o Geogebra

### Elementos da Geometria Hiperbólica no disco de Poincaré

Entregar um arquivo .ggb para cada um dos quatro itens.

#### No Geogebra clássico:

##### I) Construção de retas paralelas

1) Dados uma reta hiperbólica  $r$  e um ponto  $P$  fora dela, construa:

- a) As duas (únicas) retas paralelas à  $r$ , e que passam por  $P$ .
- b) Pelo menos três retas ultraparalelas a  $r$ , passando por  $P$

No “Disco de Poincaré” do Geogebra disponível em  
<https://www.geogebra.org/classic/f5bpfpk9>

Neste ambiente há ferramentas prontas para a construção de elementos da geometria hiperbólica. Você pode usa-las para os próximos exercícios.

##### II) Triângulos e suas propriedades

2) Construa um triângulo hiperbólico ABC no disco de Poincaré.

3) Construa os ângulos internos deste triângulo e suas medidas. (Use a ferramenta – h-ângulo e selecione os vértices do triângulo no sentido horário). Varie os pontos A, B e C para verificar como os valores dos ângulos se alteram, verificando a propriedade - *já conhecida da geometria hiperbólica* - que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo não é constante, e é sempre menor que  $180^\circ$ .

4) Aproxime um dos vértices do triângulo da fronteira do Disco de Poincaré. Observe e registre o que acontece com o ângulo do vértice correspondente. Como a medida angular varia com a medida do lado do triângulo?

5) A **diferença angular** ou “**defeito**” do triângulo é a diferença entre  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ) e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico. Meça/Observe a diferença angular do triângulo ABC. Observe e registre como esse valor se relaciona com o “tamanho” do triângulo.

##### III) Medidas no Disco de Poincaré

Vimos que a medida que nos aproximamos da fronteira do disco de Poincaré, figuras de mesma medida hiperbólica parecem menores aos nossos “olhos euclidianos”. A função que mede a distância de segmentos testifica esse fato, mas ele pode ser explorado na prática, a partir da construção de segmentos de mesma medida no disco hiperbólico.

6) Faça isso, construindo um segmento PQ e transportando-o na direção da fronteira do disco:

a) Construa um segmento hiperbólico  $\overline{PQ}$ .

b) Determine o ponto  $Q_1$ , tal que  $\overline{QQ_1}$  seja congruente a  $\overline{PQ}$ . (Essa é a construção do transporte de segmento, tal como na geometria Euclidiana. Essa construção é válida na geometria hiperbólica? Por quê?)

c) Construa uma sequência de pontos  $Q_n$  sobre a reta PQ, tais que  $\overline{Q_{n-1}Q_n}$  sejam congruentes a PQ. Observe e registre o que acontece.

d) Movimente os pontos P e Q e observe como os tamanhos dos segmentos  $\overline{Q_{n-1}Q_n}$  mudam, em função do tamanho de  $\overline{PQ}$ .

7) Com base nos exercícios 5 e 6, tente justificar o fato de que dentro de pequenas regiões, isto é, localmente, a geometria euclidiana substitui satisfatoriamente a geometria hiperbólica.

#### IV) Reflexões e ladrilhamentos no disco de Poincaré

Através da ferramenta de **reflexão** em torno de uma h-reta, podemos construir outros triângulos congruentes a um triângulo dado. De modo geral, a reflexão em torno A de uma reta r produz um ponto A', tal que r é a mediatriz do segmento AA'. É possível construir mediatrizes de segmentos hiperbólicos e construir, neste modelo, uma reflexão.

8) Construa uma h-reta e faça a reflexão de um ponto com relação a ela (ferramenta de reflexão hiperbólica por uma reta hiperbólica). Verifique que a distância hiperbólica do ponto e de seu reflexo à reta são iguais.

9) Podemos usar a reflexão para construir pavimentações no disco hiperbólico. Siga os passos a seguir, para ladrilhar o plano com triângulos equiláteros.

a) Construa um triângulo equilátero hiperbólico.

b) Faça a reflexão dos vértices do triângulo, com relação ao segmento do lado oposto.

c) Construa novos triângulos com a ferramenta (triângulo hiperbólico) até que você enxergue o ladrilhamento do disco. (Dica: use cores diferentes para cada “passo” da pavimentação)

OBS.: Para os registros, você pode usar a ferramenta “Texto” do Geogebra.

Mais atividades no disco de Poincaré podem ser vistas no artigo publicado na revista Professor de Matemática: “Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra”, de Ricardo Ribeiro, disponível em