

MODELAGEM MATEMÁTICA E A ARTE DA FABRICAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS

Michele Cristiane Fagundes Boeno

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática,
orientada pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

IFSP
São Paulo
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Boeno, Michele Cristiane Fagundes

Modelagem matemática e a arte da fabricação de pães artesanais / Michele Cristiane Fagundes Boeno – São Paulo: IFSP, 2018.

XXf

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Marco Aurélio Granero Santos

1. XXXX. 2. XXXX. 3. XXXX. 4. XXXX. 5. XXXX I. Título do trabalho.

FOLHA DE APROVAÇÃO
CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

O feminismo é a sua voz. Através dele, as mulheres que vieram antes de você conquistaram todos os direitos e liberdade que hoje você desfruta. Muitas sofreram e tiveram que enfrentar o preconceito de uma sociedade machista para conquistarem o direito de estudar, trabalhar e até mesmo de serem respeitadas como pessoas.

Universo feminino

*Dedico Esse Trabalho Aos Meus Filhos
É Por Eles, Foi Por Eles.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus filhos Agatha e Ryan por estarem sempre ao meu lado incentivando, acreditando, por compreenderem que nem sempre foi possível contar histórias de dormir ou saber quem era o Goku Black. Desculpem-me por todas as vezes que tiveram como refeição macarrão instantâneo. Obrigado pelo carinho e pela cumplicidade. Vocês são as pessoinhas que me inspiram a viver. Vocês são os serzinhos que afagam o meu coração. Eu deveria ensinar muito a vocês, mas na verdade eu aprendo todos os dias com vocês, a ser mais amorosa, ter mais paciência, aprendo a ter Fé, a ter confiança. *あなたは私の太陽の光線です。* A minha mãe agradeço por sempre mostrar com seu exemplo que devemos dar o nosso melhor em qualquer coisa as quais nos prestamos fazer. Agradeço a minha querida avó, que em seus 99 anos ainda mostra que ser mulher não significa fragilidade. Aos meus irmãos Clara e Marcelo obrigada pelo amor de vocês. A minha cunhada Priscila que sempre me ouviu, por horas e horas, se não fosse assim eu teria enlouquecido agradeço por todo o carinho a mim dado, e me desculpe por todas as vezes que dormi durante as ligações. Ao meu marido Massatossi por aguentar o meu mau humor, muito obrigado.

Aos meus professores o meu muito obrigado, levarei um pouco de vocês na etapa seguinte da vida, desculpem-me qualquer choro, não foi por mal.

Ao meu orientador Marco Aurélio muito obrigado por ter aceitado me orientar, auxiliando em tudo no que foi necessário, por todo o esforço e tempo que dedicou para que esse trabalho fosse realizado, por ser paciente comigo em quase todas as horas, obrigada por tudo. EDO foi a disciplina mais linda do curso.

Aos professores Grazi, Vania (mãe), Valéria, Samuel, Tiago e Henrique, agradeço pelo incentivo, pelo apoio e estímulo que me deram para enfrentar tudo que viria no decorrer do curso, por serem prestativos, por acreditarem. Sou muito grata a vocês por toda ajuda e carinho que recebi em horários malucos que eu tirava dúvidas. Vocês são incríveis.

Aos professores Iracema, Luciano e Monica grata por comporem a banca mais perfeita do IFSP. A professora Iracema minha gratidão eterna, por me ouvir, por incentivar, por ser uma pessoa maravilhosa e uma professora incrível, terminei o curso, mas o seu incentivo fez muita diferença para dar continuidade e chegar até

aqui, nem consigo expressar a minha gratidão a você. Ao professor Luciano obrigado por entender as situações delicadas que os alunos passam, por mostrar que a docência vai além da sala de aula, que acima de tudo somos seres humanos, você é feito de bondade. A professora Monica obrigada por ser tão generosa e paciente e por dar ajuda quando pedida, mesmo sendo as sextas depois das 22h. A proposta deste trabalho foi dada por você nas aulas de laboratório obrigada por isso também. Sua gentileza é doce.

A professora Mariana o meu eterno obrigado. Sou grata pelo carinho, pela amizade, pelos conselhos, por todo o auxílio que me deste, pelas madrugadas e horários loucos, por ouvir, dar força, pois afinal “você é uma mulher ou saco de batatas?” Obrigada por sempre ter um tempinho para me responder, admiro você como pessoa e profissionalmente. Obrigada Gael.

Aos meus amigos Anyele, Augusto, Cibeles, Ivo, Jaqueline, Hugo, Natãna, Renata e Vinicius um OBRIGADO bem grande, vocês são maravilhosos, e a amizade de vocês foi essencial para eu encerrar esse ciclo. Foi bom rir com vocês, chorar com vocês, sentir a alegria de receber notas boas, comer para aliviar um dia de prova, comemorar o fim de um semestre para se renovar para o próximo que viria. Saibam que são momentos como esses que serão guardados no meu coração.

(...)

Oh I get by with a little help from my friends

Hm Gonna try with a little help from my friends

Oh I get high with a little help from my friends

Yes I get by with a little help from my friends

With a little help from my friends.

Beatles

Agradeço a Sheyla e ao professor Wellington por terem sido generosos, por disponibilizarem tempo e boa vontade no início deste trabalho.

Agradeço a Monica, a Gislene e a Irzangela por terem sido tão compreensivas, foi essencial o carinho e o respeito de vocês. Aos meus colegas da Escola Santa Marina obrigado por serem pessoas maravilhosas, vocês foram um presente em meio ao caos.

Por fim agradeço a Deus, pois nada disso seria possível sem ele.

A todos o meu muito obrigado.

RESUMO

A modelagem matemática é a iteração de um problema do “mundo real” e a matemática, podendo ser descrita por modelos matemáticos. Desta forma este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo analisar quais dos modelos de crescimento que possuem um regime assintótico, validam um modelo que descreva o crescimento de pães artesanais. Os modelos considerados são o Exponencial Assintótico e Logístico. Os dados extraídos foram obtidos por meio da realização de experimentos formados por um grupo de quatro pães, e ajuste de curvas aos modelos previamente definidos. Após a avaliação dos resultados concluímos que o modelo para este conjunto de dados é que descreve o crescimento de pães artesanais é o modelo logístico.

Palavras chaves: Modelagem matemática, modelo exponencial assintótico, modelo logístico, fabricação de pães.

ABSTRACT

The Mathematical Modeling is the interaction of a problem in the “real world” with mathematics; it can be described by mathematical models. Therefore, the objective of this term paper is to analyze which growth models, that have an asymptotic character, validate a model that describe the growth of a handmade bread. The considered models are asymptotic exponential model and logistic model. The data have been obtained through experiments formed by a group of four bread and curve fitting of the model previously defined. After evaluation of results we have concluded that the model for this data that describe the growth of handmade bread is the logistic model.

Keywords: Mathematical Modeling, asymptotic exponential model, logistic model, bread production

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 – Esquema do processo de Modelagem Matemática.	21
Figura 2.2 – Etapas de uma modelagem em sala de aula.	23
Figura 2.3 – Relação entre modelagem e situação real.	24
Figura 3.1 – Esquema representando a modelagem matemática.	32
Figura 3.2 – Processo de fermentação alcoólica das leveduras.	34
Figura 3.3 – a) Imagem coletada no início experimento e b) imagem coletada ao final do experimento após 60 minutos.	36
Figura 3.4 – a) Imagem coletada no experimento e b) imagem binarizada	36
Figura 4.1: Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso exponencial assintótico.	41
Figura 4.2: Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso logístico.	42
Figura 4.3: Dados experimentais (P1) x Modelos teóricos.	43
Figura 4.4: Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso exponencial assintótico.	44
Figura 4.5: Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso logístico.	45
Figura 4.6: Dados experimentais (P2) x Modelos teóricos.	45
Figura 4.7: Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso exponencial assintótico.	47
Figura 4.8: Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso logístico.	47
Figura 4.9: Dados experimentais (P3) x Modelos teóricos.	49
Figura 4.10: Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso exponencial assintótico.	49
Figura 4.11: Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso logístico.	49
Figura 4.12: Dados experimentais (P4) x Modelos teóricos.	50

LISTA DE QUADROS

Pág.

Quadro 2.1– "Matematização" do problema.	25
Quadro 3.1– Modelos matemáticos mais comuns.	33
Quadro 3.2 – Descrição de modelos para ajuste de curvas.	38

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	19
2. MODELAGEM MATEMÁTICA	21
2.1 O surgimento da Modelagem Matemática.....	22
2.2 Noções de modelagem matemática.....	23
2.3 Modelagem do crescimento de pães em processo artesanal de fabricação	27
2.4 História da modelagem no Brasil	28
3. MODELOS MATEMÁTICOS E A FABRICAÇÃO DE PÃES	31
3.1 Modelos mais comuns	32
3.2 O problema da fermentação de pães	34
3.3 A preparação do experimento e coleta de dados	35
3.4 Formulação de modelo matemático	36
3.4.1 Descrição dos modelos	38
3.4.1.1 Modelo Exponencial Assintótico.....	38
3.4.1.2 Modelo Logístico.....	39
3.4.1.3 Estimativa do ponto de estabilização	40
4. Discussão e Resultados.....	41
4.1 Pão 1	41
4.1.1 Ajuste Exponencial Assintótico	41
4.1.2 Ajuste Logístico.....	42
4.2 Pão 2	44
4.2.1 Ajuste Exponencial Assintótico	44
4.2.2 Ajuste Logístico.....	44
4.3 Pão 3	46
4.3.1 Ajuste Exponencial Assintótico	46
4.3.2 Ajuste Logístico.....	47
4.4 Pão 4	48
4.4.1 Ajuste Exponencial Assintótico	48
4.4.2 Ajuste Logístico.....	49
4.5 Validação do modelo matemático	50
4.6 Aplicação	51
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
REFERÊNCIAS	55
ANEXO A – RECEITA PARA A FABRICAÇÃO DE PÃES CASEIROS	57
ANEXO B – DADOS COLETADOS NO EXPERIMENTO.....	59

1. INTRODUÇÃO

Ao longo de sua história o ser humano tem procurado compreender o universo que o cerca através da busca por explicações para os diferentes fenômenos que o cerca visando atribuir significados a estes. Essa busca tem sido realizada sob diferentes abordagens e estratégias, dentre eles a modelagem matemática.

No Brasil a modelagem matemática apresenta como expoente os trabalhos de Rodney Carlos Bassanezi, segundo o qual a modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre sua *realidade*, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador, Bassanezi (2015, p. 15).

Ainda segundo Bassanezi (2004, p.24), a Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências, constituindo-se, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Em vista de tais considerações este trabalho apresenta como foco o estudo do processo de fabricação artesanal de pães enquanto situação problema, por meio da modelagem matemática.

Dentro do processo de fabricação de pães dois modelos, a saber, exponencial assintótico e logístico, serão testados para modelarem o processo de fermentação destes pães artesanais.

Deste modo, a questão central de pesquisa consiste em verificar qual dos modelos matemáticos em estudo descreve melhor o processo de fermentação durante a fabricação de pães artesanais, segundo as condições impostas nesse trabalho.

Para melhor entendimento do leitor o presente estudo está estruturado de modo que no capítulo 2 são apresentados os conceitos e as etapas envolvidas no processo de Modelagem Matemática, bem como um relato sobre seu surgimento, e sua história no Brasil.

O capítulo 3 descreve os principais modelos utilizados, destacando o problema da fermentação de pães artesanais, a preparação dos experimentos, bem como o processo de coleta e tratamento dos dados experimentais. Este capítulo também apresenta o referencial teórico dos modelos matemáticos estudados.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos e a discussão desses resultados.

Finalmente, no capítulo 5 tem-se as considerações sobre a temática em pauta e perspectivas futuras.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo aborda o conceito de Modelagem Matemática, seus significados, noções e problemas adjacentes. Vale ressaltar que neste capítulo é tratada também da História e da aplicação desta no Brasil.

Segundo Biembengut e Hein (2003, p. 12) a modelagem é um meio de interagir a matemática com a realidade. Deste modo, os autores apresentam um esquema, Figura 2.1, que faz compreender o local no qual se pode inserir a mesma hoje.

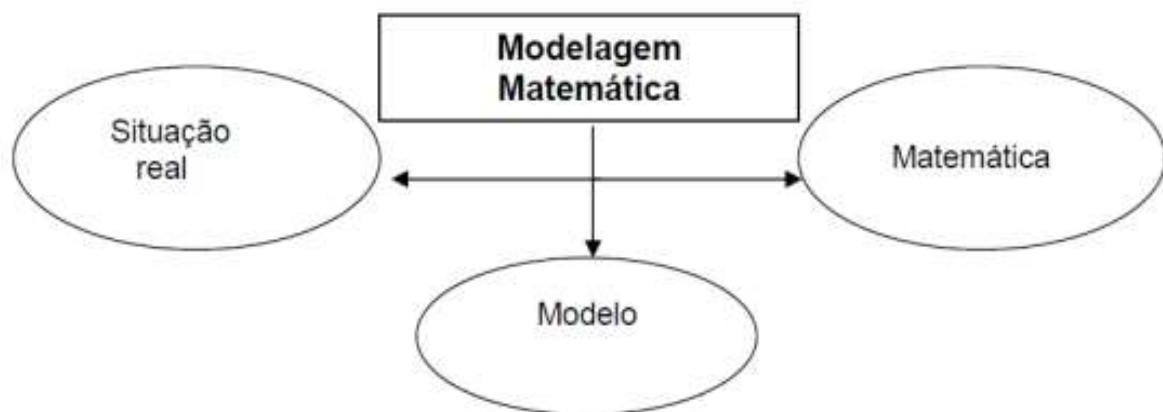


Figura 2.1 – Esquema do processo de Modelagem Matemática.
Fonte: Extraído de Biembengut e Hein (2003, p. 13).

A Figura 2.1 apresenta um esquema no qual mostra que a modelagem matemática é um encontro da realidade com a matemática, resultando em um modelo para descrever esta “realidade”, como uma espécie de intermediador dessa relação.

Este esquema representa a análise do problema a ser estudado, estudo sobre o assunto, elaboração do modelo, resultando num modelo e validando o mesmo para ver se é cabível em sua proposta e resultados.

Desse modo, estabelecendo os alicerces iniciais do que seria a modelagem matemática, podemos começar a compreendê-la melhor enquanto técnica ou artifício de uma ciência exata, para abarcar a realidade de maneira prática e que torne a própria matemática acessível, ainda consoante com Bassanezi (2011, p. 18) que diz que:

O objetivo fundamental do uso de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

2.1 O surgimento da Modelagem Matemática

O ser humano tem por necessidade tentar compreender o universo que o cerca, buscar explicações e, a partir de diferentes abordagens e estratégias, atribuir significados para os diferentes fenômenos ao seu redor.

Neste contexto, a Modelagem Matemática surge como uma forma de representar problemas e processos reais. Por isso é importantíssimo que se tenha em vista um modelo de “ensino em relação à eficiência da aplicação desse modelo como técnica situacional da matemática dentro da realidade” (BASSANEZI, 2011, p. 18). Emergindo também como alternativa e como aprimoramento da relação “mundo-Ciência exata, contribuindo em processos industriais, etc, resolvendo problemas reais” (BASSANEZI, 2011, pg. 36).

Como diz Ubiratan D’Ambrósio (Prefacio-Bassanezi, 2006) a Modelagem Matemática é a matemática por excelência e propõe a simplificação através do entendimento de situações reais.

Assim, é possível dizer que a Modelagem Matemática vem sendo utilizada para diversos fins, como fizeram Pitágoras e Platão, utilizando-a como modelo para construção de modos de vida e resolução de problemas. Outro exemplo é a obra magna de Platão, *A República*, na qual ele se baseia na organização de uma matemática do Cosmos para imaginar a “cidade justa” (PLATÃO, 1993).

Noutro exemplo, temos a experiência de Thomas Malthus, famoso na História e na Sociologia por ter traçado um cálculo para planejar matematicamente um modelo de bem estar na Terra a partir da relação de controle entre produção alimentícia e taxa de natalidade. Segundo ele:

A população, quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Uma ligeira familiaridade com números mostrará a imensidade da primeira capacidade comparativamente à segunda (MALTHUS, 1982, p. 56).

Assim, a história da humanidade proporcionou diversos momentos nos quais as ciências exatas, atuando como Modelagem Matemática, foram utilizadas para compor um panorama político-social, não só em Pitágoras, Platão ou Malthus, como também é visto na indústria hoje, em grande ou pequena escala.

2.2 Noções de modelagem matemática

Pesquisadores como Biembengut e Hein (2003) sinalizam as etapas de uma modelagem em sala de aula a partir do esquema apresentado na Figura 2.2.

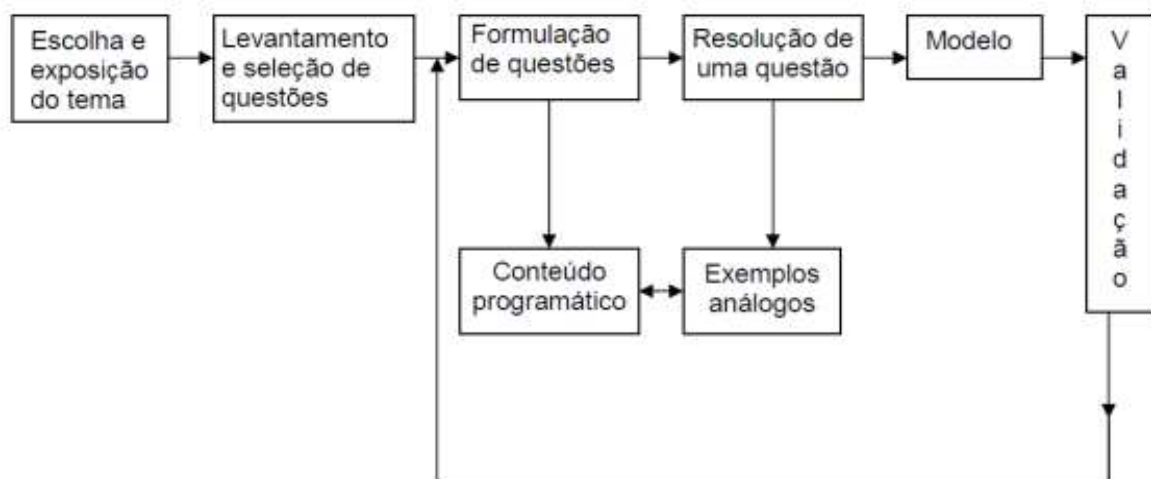


Figura 2.2 – Etapas de uma modelagem em sala de aula.

Fonte: Extraído de Biembengut e Hein (2003, p. 22).

Estabelecer métodos, gráficos ou não, de solução de problemas e aplicação dos mesmos à realidade é comum. No entanto, há que se tomar cuidado com a maneira como se procura solucionar tais problemas, haja vista o fato de que, se o desenvolvimento de um problema abarca todos os processos mentais do homem, é preciso então compreender esses processos, de modo que a resolução e a modelação matemática não se tornem reféns de uma construção paradoxal ou de

uma “forma de resolver problemas que incorra em falácias ou desenvolvimentos e conduções errôneas do pensamento” (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.70).

Destarte, a modelagem matemática se apresenta em etapas. Bassanezi (2011, p. 27) apresenta um esquema, Figura 2.3, para a relação entre uma situação real e a modelagem, no qual define as etapas envolvidas no processo de modelagem de uma situação-problema, isto é, são problemas reais desvinculados da matemática, mas que podem ser descritos por uma “matematização” em forma de modelos válidos.

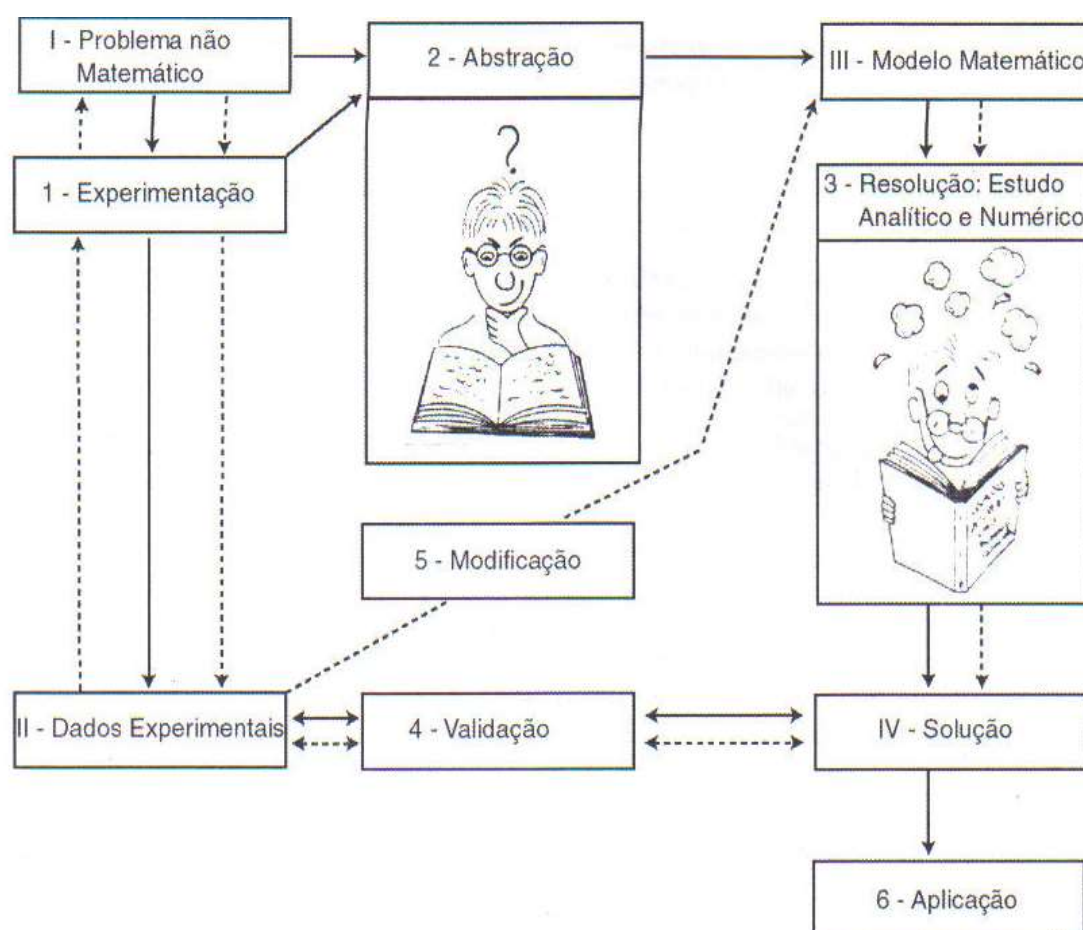


Figura 2.3 – Relação entre modelagem e situação real.
Fonte: Extraída de Bassanezi (2011, p. 27).

Estas etapas define como realizar o trabalho de modelagem em uma situação problema e são caracterizadas por:

Etapa 1: Experimentação

Nesta fase, realiza-se a coleta e análise de dados do objeto de pesquisa com o auxílio de um supervisor matemático (um especialista na situação-problema) a fim de direcionar o objetivo da pesquisa. Calculam-se estatisticamente os parâmetros envolvidos do fenômeno, de modo que se tenha um alto grau de confiabilidade dos resultados.

Etapa 2: Abstração

O processo de abstração consiste em alguns itens para a formulação dos modelos matemáticos, que podem ser organizados segundo o Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – “Matematização” do problema. Adaptado de Bassanezi (2011, p. 27).

Seleção de variáveis	Os conceitos do objeto de pesquisa devem estar bem definidos, por isso, separam-se as variáveis. Quando as variáveis descrevem a evolução do sistema, são chamadas variáveis de estado. Caso as variáveis sejam aquelas que agem sobre o sistema, são chamadas variáveis de controle.
Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que está trabalhando	Trata-se do que se quer resolver. O enunciado desse problema deve estar apresentado de forma clara, compreensível e operacional, explicitando a relação entre as variáveis e o objeto de pesquisa.
Formulação de hipóteses	São formulações gerais que dirigem a investigação, permitindo deduções de manifestações empíricas e específicas. É possível gerar as hipóteses de diferentes modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.
Simplificação	Em geral, os estudos das investigações matemáticas em seus fenômenos são apresentados de forma complexa. Para que seja possível o entendimento, é necessário fazer a simplificação do problema trabalhado. É preciso ser cauteloso em relação a quanto simplificar, nem tão pouco, ao ponto de continuar complexo e de difícil resolução, nem muito, para que não se percam informações relevantes.

Etapas 3: Resolução – Estudo Analítico e Numérico

A Modelagem Matemática só é possível quando conseguirmos transformar um problema do cotidiano em linguagem matemática, sem mudar suas características. A resolução do modelo é atividade própria de um matemático, podendo ser desvinculada da realidade modelada e ser obtida através de métodos analíticos ou numéricos, dependendo do grau de complexidade do modelo.

Nesta fase, é possível que novas técnicas e teorias matemáticas sejam desenvolvidas, uma vez que os argumentos conhecidos não sejam suficientemente para solucionar o modelo.

Etapas 4: Validação

No processo de validação são realizados testes no modelo proposto, através da comparação entre os dados reais e os dados encontrados através do modelo, considerando suas hipóteses, a fim de levar à aceitação ou não do modelo encontrado.

Etapas 5: Modificação

Alguns modelos podem levar a soluções que não conduzem a previsões corretas do objeto que está sendo modelado, pois existe uma série de razões que podem interferir na rejeição do modelo. São elas: hipóteses falsas ou pressupostos de partida incorretos, dados obtidos de modo incorreto, hipóteses insuficientes, variáveis da situação real não consideradas no modelo teórico, ou algum erro cometido no desenvolvimento matemático formal. Ajustes e alterações se tornam, nesses casos, necessários.

Etapas 6: Aplicação

A aplicação é uma das etapas das quais mostram o quanto o modelo condiz com a realidade, podendo ser reformulado. Assim, afirmar que um modelo é ideal para um determinado fenômeno, definindo-o como o modelo definitivo, pode induzir o leitor a conclusão de que o modelo deve ser utilizado apenas para aquele problema em questão.

Vale ressaltar que modelos bem formulados podem proporcionar a construção de novos modelos e a generalização para a descrição de um determinado fenômeno.

2.3 Modelagem do crescimento de pães em processo artesanal de fabricação

Nesse sentido, o processo de panificação artesanal poderia ser estabelecido em um modelo matemático. Esse processo ocorre com a fermentação nos pães artesanais e é realizada através de uma reação bioquímica entre as leveduras *Saccharomyces cerevisiae* e o açúcar presente nos pães.

Essas leveduras alimentam-se do açúcar presente na farinha e na receita do pão se assim o tiver, produzindo álcool e gás carbônico, sem a presença de oxigênio. O álcool é evaporado durante o cozimento e o gás carbônico fica preso dentro da massa criando alvéolos no interior do pão. Essa reação é que faz com que o pão cresça, fique fofo e tenha um sabor mais agradável.

Sabe-se que a fermentação é um processo químico que transforma as cadeias de açúcar ($C_6H_{12}O_6$) contidas na massa em gás carbônico ($2CO_2$), álcool etílico ($2C_2H_6O$) e substâncias aromáticas (ácidos orgânicos), objetivando provocar o crescimento da massa e o surgimento e a incorporação de sabores aos produtos produzidos. (BASSANEZI, 2015, p.209).

Com isto, através da observação do crescimento do pão e por meio do processo de fermentação, esse trabalho tem por objetivo modelar e validar um modelo matemático no processo de fermentação/crescimento de pães produzidos artesanalmente. A validação de tal modelo consiste na observação, interpretação e compreensão dos resultados produzidos, à luz das etapas descritas por Bassanezi (2011), Figura 2.3.

Vale destacar que a modelagem matemática também pode ser entendida como um meio de aprendizagem, pois permite ao aluno uma participação direta neste processo, no qual é possível fazer uma aproximação das situações cotidianas através da tradução do pensamento abstrato por meio da extração de suas partes essenciais. Assim, como forma de apontar para o desenvolvimento da modelagem matemática, abordaremos brevemente o panorama histórico da mesma no Brasil, especialmente na área de Ensino.

2.4 História da modelagem no Brasil

Neste tópico será abordada a questão da modelagem tal como é concebida no Brasil e a forma como ela se desenvolveu desde seu pontapé inicial.

Segundo Burak (2004, p. 1), a Modelagem Matemática começou a ser trabalhada na década de 80 na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte de um processo e pesquisa sobre “modelos de crescimento cancerígenos”. Essas pesquisas evoluíram e passaram a integrar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do professor Rodney Carlos Bassanezi, do curso de Engenharia de Alimentos, (BURAK, 2004, p. 1).

Importante mencionar também Cipriano (2013), quando diz que nos anos 60 o professor pesquisador da *Brown University*, da *University of Rhode Island*, e da *State University of New York*, chamado Ubiratan D’Ambrósio, implantou melhorias significativas na matemática no Brasil. Tais mudanças eram advindas da Europa e dos EUA em 1972, e contaram com o apoio da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) e da Organização dos Estados Americanos (OEA).

Ainda segundo Cipriano (2013), ressalta-se a criação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP, em 1974. Após a criação do curso de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática (mestrado) fundado por D’Ambrósio, um destaque é Rodney Carlos Bassanezi, que na condição de orientando de D’Ambrósio, é hoje professor titular aposentado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp e da Universidade Federal do ABC (UFABC), tendo coordenado cursos de Modelagem Matemática na Universidade de Trento, na Itália, e em uma dezena de universidades brasileiras.

Para Cipriano (2013), no Brasil, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D’Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastini, são pesquisadores que iniciaram os estudos sobre ensinar matemática por meio da modelagem. A autora destaca o professor Aristides Camargo Barreto como sendo, possivelmente, o primeiro docente/pesquisador que realizou experiências em sala de aula. Aristides tomou conhecimento sobre o tema durante o curso de engenharia na década de 60. Quando ele se tornou professor da Pontifícia

Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RJ, em meados da década de 70, pensou nessa aplicação utilizando Modelagem Matemática em sala de aula.

Segundo Burak (2004), a modelagem na educação teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava. Posteriormente, a modelagem passa a contar cada vez mais com adeptos após migrar e ganhar espaço no Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Estadual Paulista - UNESP, de modo que era preciso encontrar novas alternativas para o ensino de Matemática a partir de “situações vivenciadas pelos então alunos de 1° e 2° graus” (BURAK, 2004, p. 1). Já a produção de artigos e dissertações sobre o assunto, começou no de 1987, segundo o mesmo artigo de Burak.

No intuito de alcançar ao problema de pesquisa e objetivo do estudo, a seguir serão abordados os principais modelos matemáticos utilizados no processo de modelagem e o problema da fermentação de pães, visto que a fabricação de pães pode ser descrita com um modelo matemático que mais se adequa a realidade e à necessidade do experimento.

3. MODELOS MATEMÁTICOS E A FABRICAÇÃO DE PÃES

Seguindo pelo que concerne a questão das situações-problemas nas quais se pode exemplificar ou requisitar o uso da Modelagem Matemática, este capítulo trata dos chamados modelos matemáticos, nos quais a prática se assenta, relacionando-os a situação problema proposta neste trabalho.

A Modelagem Matemática procura validar um modelo. Mas um modelo, segundo Bassanezi (2002, p. 30) “deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram”. Isto porque um modelo matemático é um conjunto “de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma, o modelo-objeto estudado” (BASSANEZI, 2002, p. 19).

Os modelos, certamente, ao mesmo tempo em que conferem legitimidade à discussão sobre Modelagem Matemática, corroboram para outra questão, que é a possibilidade de previsibilidade da matemática. O modelo, no entanto, participa de uma rede de relações em uma teoria. No caso da matemática, entrelaçada de maneira interdisciplinar com outras Ciências, o modelo cabe, tal qual já dito de outros modos, “como uma maneira de assegurar a existência ou a previsibilidade de X ou Y acontecimentos” (BASSANEZI, 2002, p. 37).

Se o modelo, seja ligado a questões sociais ou biológicas, recai ou não sobre o problema da indução, ou seja, se a partir de considerações particulares de fatos que não se repetem, chega-se a uma conclusão geral, “pode ser considerado verdadeiro ou não suficientemente comprovável, de acordo com alguns cientistas” (BASSANEZI, 2002, p. 65). Porém, a discussão sobre a oposição entre indução e dedução não é exatamente nosso ponto neste trabalho, que tem como foco a descrição e exposição da questão, mesmo quando trata do que significam os modelos.

A matemática, nesse sentido, estaria condicionada como verdade ontológica. Conforme mostra a Figura 3.1, a ideia de que há, de um modo ou de outro, uma relação de conexão entre matemática e realidade, sempre pôde ser explorada, mesmo quando não se é viável ou possível afirmar a existência de números ou algarismos enquanto entidades abstratas que compõe a parte fundamental do tecido

da realidade, esta figura representa o esquema de Edwards e Hamson (1990), sobre essa relação paradoxal em uma das leituras sobre o papel da matemática.

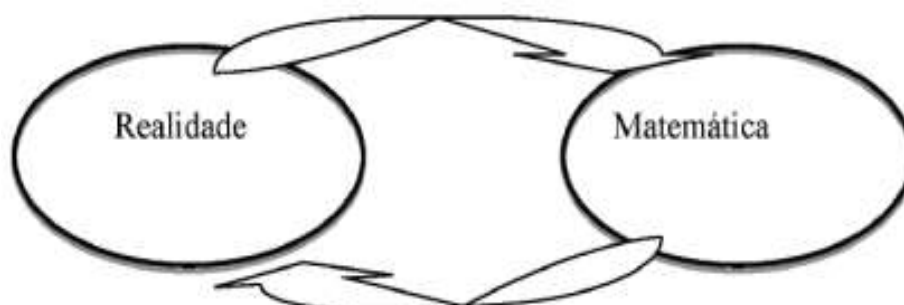


Figura 3.1 – Esquema representando a Modelagem Matemática.
Fonte: Adaptado de Edwards e Hamson (1990, p.31).

Esse problema da matemática como indispensável enquanto possibilidade para qualquer coisa que se queira na vida, já estava presente, como dito, entre os gregos, mas se tomamos outro exemplo, veremos que ali mesmo, nos tempos de Sócrates e Platão, segundo Jaeger (2001, p. 107), já se ostentava no Oráculo de Delos a famosa frase: “não entre aqui quem não for geômetra”.

Desta feita, o papel de um modelo na educação e na pesquisa científica parece que conseguiu um lugar comum. No entanto, a questão toda é que ele é fundamental na prática de ensino, porque eles se tornam justamente, mais que instrumentos, se tornam parte do exercício pedagógico.

3.1 Modelos mais comuns

Dentre os modelos mais comuns, o Quadro 3.1 apresenta aqueles apontados por Bassanezi (2011, p. 45), os quais podem ou não ser aplicados em relação a determinada situação-problema.

Quadro 3.1- Modelos matemáticos mais comuns.

Linear ou não linear	O modelo tem equações com a característica linear, ou seja, a taxa de variação não é constante.
Estático	Quando se molda ao formato do objeto que o constitui – por exemplo, a forma geométrica do favo de mel, ou dinâmico: quando simula variações diferentes do fenômeno estudado. Por exemplo, crescimento populacional.
Educacional	É um modelo que se exclui algumas variações para que se possa compreender o processo de modelagem matemática. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo de tais modelos. Assim, usam-se apenas poucas variáveis para que compreensões do fenômeno possam ser feitas. Geralmente, podem-se encontrar soluções analíticas. É importante ter cuidado, pois estas simplificações quase sempre resultam modelos matemáticos que não descrevem a realidade investigada; ou Aplicativo: é um modelo matemático que utiliza, geralmente, muitas variáveis e sistemas de equações com numerosos parâmetros. Assim, é praticamente impossível o tratamento analítico, sendo importante o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para encontrar soluções;
Determinístico	É baseado na hipótese de que se há informações sobre um determinado instante ou um estágio do processo, então previsões podem ser feitas de modo preciso;
Estocástico	É aquele que descreve a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

Fonte: Adaptado de Bassanezi (2006, pg. 20 e 21).

Deste modo, levando em consideração esses modelos, tal qual elencados por Bassanezi (2006), podemos ponderar que a modelagem matemática, muito mais do que reduzida à forma e ao discurso da Ciência enquanto palavra final pode auxiliar em diversas esferas da vida, compreendendo, na educação, seja ela voltada à indústria ou ao ensino Fundamental e Médio de Química, Sociologia, Biologia, dentro de uma perspectiva ampla de interdisciplinaridade.

Em relação à panificação, cabe lembrar que esta perspectiva de problema é tratada como experimento dentro da Modelagem Matemática. Desta forma, caso se queira levar a experiência da fermentação artesanal de pães como exemplo de estudo de caso de uma situação real, este trabalho apresenta uma proposta de etapas para esta modelagem.

3.2 O problema da fermentação de pães

O pão é um alimento tradicional e um dos mais consumidos mundialmente. Não há um consenso quanto ao seu surgimento, mas sabe-se que o pão fermentado se originou no Egito, sendo passado aos gregos e propagado ao mundo pelos romanos.

De acordo com Ribeiro (2006), para que a panificação ocorra com sucesso, alguns ingredientes são importantes, ou seja, fundamentais no processo, como: farinha, água, sal, açúcar, gordura, leite, ovos, fermento. Para o autor, do ponto de vista prático, existem três tipos de fermento biológico que são comercializados: o fermento fresco, fermento seco e fermento seco instantâneo.

A fermentação tratada neste trabalho tem como agente as leveduras *Saccharomyces cerevisiae*, que se caracteriza como fermento biológico seco. Quando estes microrganismos se alimentam da glicose liberam gás carbônico e álcool, de tal modo que, quanto maior for a temperatura ambiente mais rápido será esse processo.

A Figura 3.2 apresenta o processo de fermentação alcoólica realizado pelas leveduras contidas no fermento biológico seco.

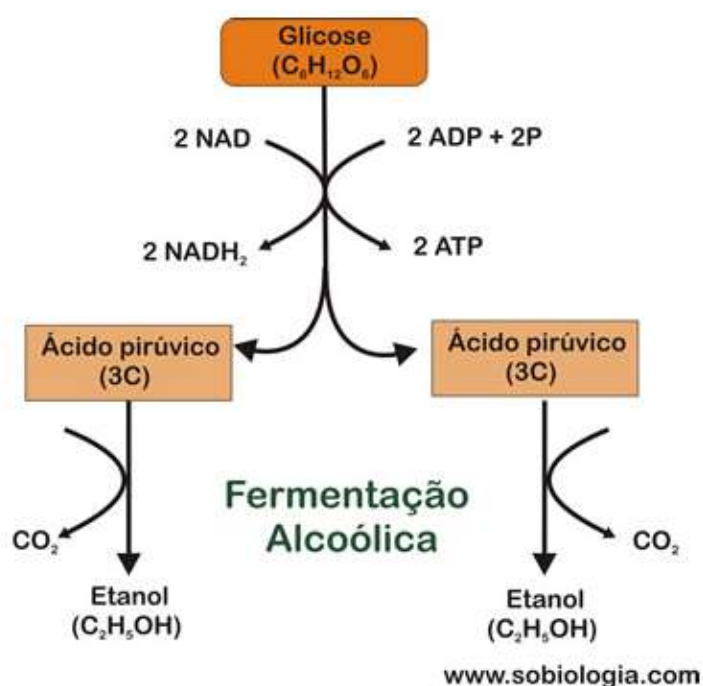


Figura 3.2 – Processo de fermentação alcoólica das leveduras.
Fonte: Site Só Biologia- Portal de Biologia e Ciências.

3.3A preparação do experimento e coleta de dados

Os pães foram preparados com uma receita familiar que se encontra no Anexo A. Cada ingrediente foi pesado e medido para que a coleta pudesse ser a mais fiel possível dentro do contexto ao qual estava submetido o experimento.

O preparo da massa acontece em duas etapas: a primeira tem como objetivo a mistura dos ingredientes conforme a receita, uma sova da massa para homogeneizar os ingredientes com o fermento e o descanso da massa por 20 minutos.

Após o descanso, ocorre à segunda etapa: uma nova sova da massa para ativar os fungos e modelar o pão, que deverá mais uma vez descansar. É nesta segunda etapa que ocorre a coleta de dados experimentais.

Os dados experimentais são compostos por imagens, fotografias, cujo objetivo é acompanhar o processo de fermentação dos pães. Estas imagens foram obtidas em ambiente doméstico, todas no mesmo local e sob as mesmas condições, variando-se apenas o horário no qual as coletas ocorreram.

Para isto, uma câmera fotográfica comum foi ajustada a uma distância de 30 cm da forma do pão que foi colocada em um estúdio cuja cor de fundo corresponde à mesma cor da forma do pão, Figura 3.3.

As imagens foram adquiridas com intervalos de 1 minuto entre cada imagem e, o tempo de captura das imagens de cada pão variou entre 60 minutos a 80 minutos.

A Figura 3.3 apresenta um exemplo de imagem inicial e imagem final de um pão após esse processo.

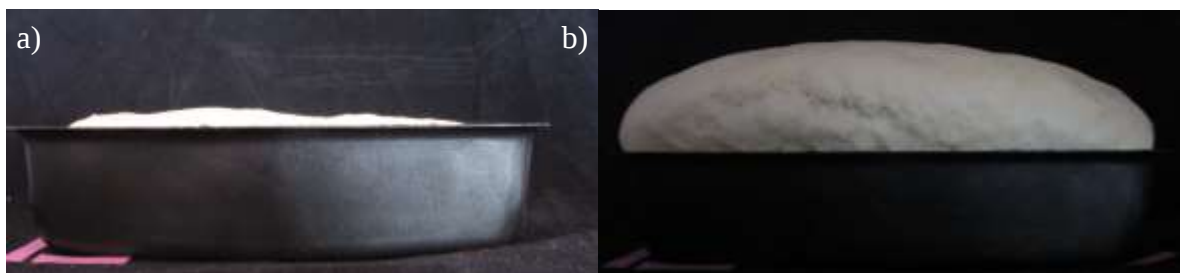


Figura 3.3 – a) Imagem coletada no início experimento e b) imagem coletada ao final do experimento após 60 minutos.

Afim de que as imagens obtidas sejam convertidas em valores numéricos que reflitam o crescimento dos pães e consequentemente representem o processo de fermentação, estas foram binarizadas, Figura 3.4, de modo que a região clara represente a área do pão.

Esta área do pão é a variável a ser considerada para avaliar o processo de fermentação de pães artesanais.

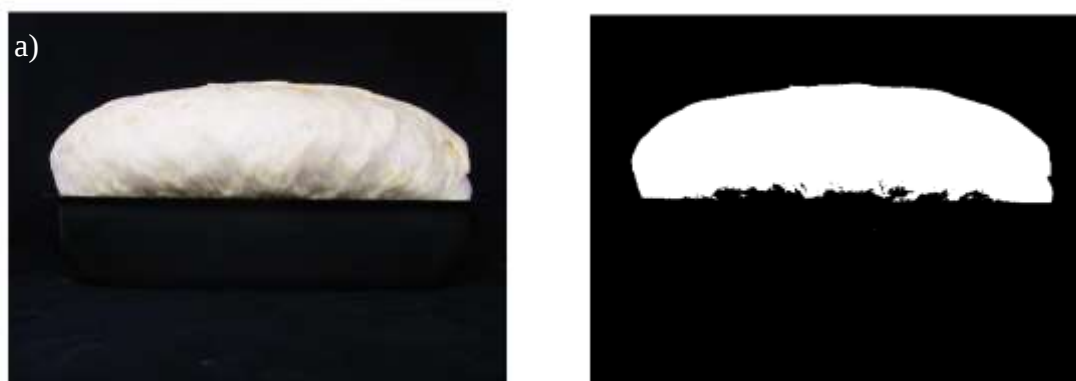


Figura 3.4 – a) Imagem experimental e b) Imagem experimental binarizada.

Ao processo descrito nesta seção, corresponde a primeira etapa definida por Bassanezi (2011): Experimentação.

3.4 Formulação de modelo matemático

Analisando a coleta graficamente, através dos gráficos de dispersão tempo (s) x área do pão (pixel^2), é possível observar a dinâmica de crescimento da área do pão em relação ao tempo, Figura 3.5.

Nesta figura, observa-se além da dinâmica crescente já esperada para o processo de fermentação, um proeminente comportamento assintótico, evidenciado principalmente no caso do experimento Pão 1 (P1).

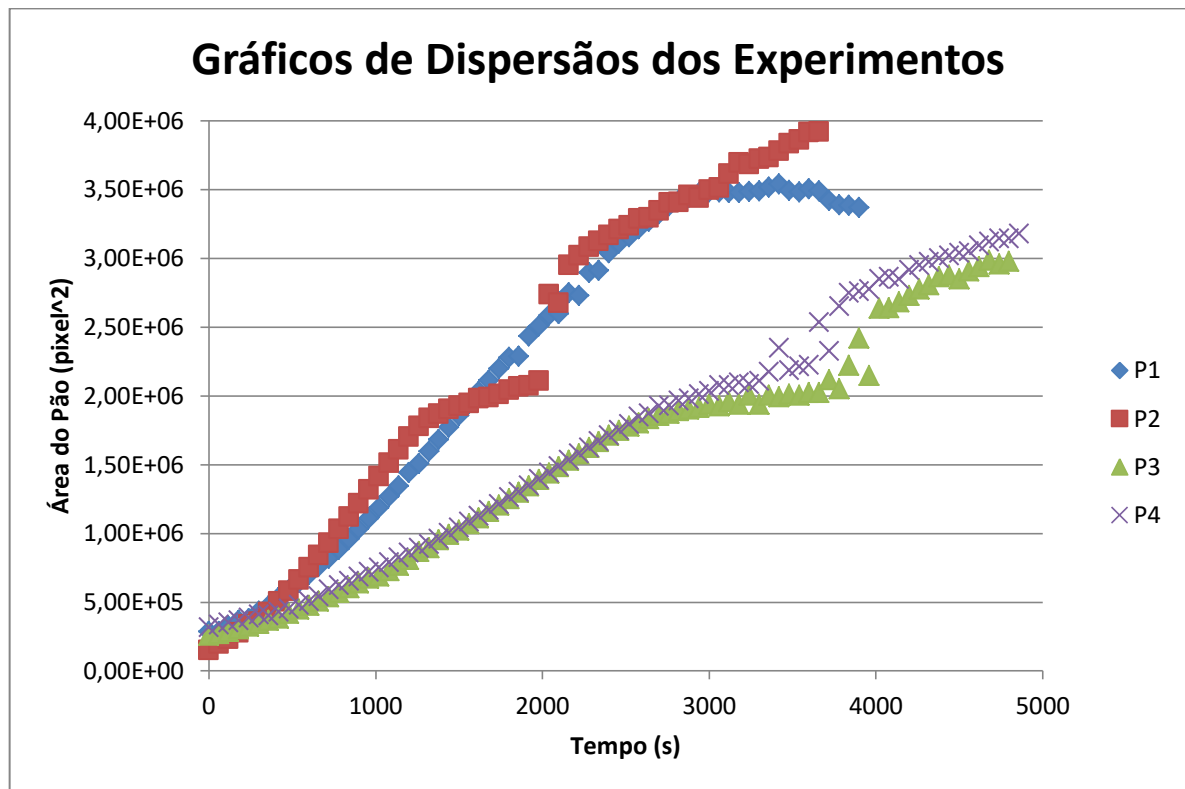


Figura 3.5 – Gráfico de dispersão dos dados experimentais.

Assim, os modelos escolhidos para modelar esta dinâmica são aqueles que apresentam características com perfil de crescimento assintótico. Entre os modelos estudados como possíveis para essa modelagem serão utilizados o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico.

Dessa forma, ao estabelecer os possíveis modelos para a descrição da dinâmica de crescimento de pães, pode-se dizer que a etapa 2 de abstração, segundo Bassanezi está concluída.

3.4.1 Descrição dos modelos

O ajuste de curvas trata-se de métodos usualmente empregados para obter uma função (modelo) que se aproxima de um determinado conjunto de pontos tabelados e/ou extraídos de um determinado fenômeno, natural ou não. O ajuste de curvas, em geral, realiza uma aproximação da função do modelo previsto, $\varphi(x)$, aos dados experimentais, $f(x)$, de forma que $\varphi(x)$ seja ajustada de modo a minimizar o desvio entre o modelo e os dados experimentais.

Como mencionado anteriormente, os modelos escolhidos para o ajuste aos dados, foram: o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico, que são descritos no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Descrição de modelos para ajuste de curvas.

Exponencial Assintótico	$\varphi(t) = y^* - be^{\lambda t} (y^* > 0 \text{ e } \lambda < 0)$	(3.1)
Logístico	$\varphi(x) = \frac{y^*}{be^{-\lambda x} + 1}$	(3.2)

3.4.1.1 Modelo Exponencial Assintótico

Em algumas situações há uma tendência monótona de valores, apresentando um comportamento assintótico, ou seja, possui uma tendência de estabilização dos dados, sendo descrito pela função:

$$y = y^* - be^{\lambda x}$$

onde: b e $\lambda < 0$ são os parâmetros do modelo a ser ajustado e, $y^* > 0$ é chamado de valor assintótico dos dados.

O valor assintótico y^* nada mais é que o limite de tendência de y quando t tende a infinito, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} (y^* - be^{\lambda t}) = y^*.$$

Os valores dos parâmetros b e λ , são obtidos através da equação (3.1), com o auxílio dos dados experimentais y .

Linearizando a equação (3.1) e tomando $f(t) = y$, obtêm-se a reta $z = at + c$, onde:

$$z = \ln(y - y^*) \quad (3.3)$$

$$a = -\lambda \quad (3.4)$$

$$c = \ln(-b) \text{ ou } e^c = -b \quad (3.5)$$

De posse destes parâmetros, a função ajustada $\varphi(t)$ está completamente determinada. Neste trabalho, os valores t_k correspondem a variável tempo dos dados coletados e os resultados são apresentados nas próximas seções.

3.4.1.2 Modelo Logístico

O modelo logístico, também conhecido por modelo de Verhurst, considera que uma população inserida em um determinado local por um determinado tempo, tenderá até um limite denominado capacidade suporte.

As características fundamentais da curva logística são (Bassanezi, 2012):

1. Tendência a estabilidade, apresentando assim um valor de capacidade suporte;
2. A curva é crescente até próximo do valor da capacidade suporte, e decrescente após este valor;
3. A taxa de crescimento relativo é linear, isto é, $\lambda_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$ e pode ser ajustada por uma reta;
4. A curva apresenta um ponto de inflexão.

Linearizando a equação (3.2), obtém-se a equação $z = ay + c$ para os parâmetros z , λ e b , tais que:

$$z = \ln\left(\frac{y^* - y}{y}\right) \quad (3.6)$$

$$a = -\lambda \quad (3.7)$$

$$c = \ln(b) \text{ ou } e^c = b \quad (3.8)$$

Com os valores dos parâmetros encontrados, calcula-se a função ajustada $y(t)$ utilizando os valores de $y(t_k)$. Neste trabalho, os valores t_k correspondem a variável tempo dos dados coletados.

A seguir, apresentamos os resultados referentes aos modelos escolhidos e os dados coletados, que se encontram no Anexo B.

3.4.1.3 Estimativa do ponto de estabilização

O ponto de estabilização, isto é, o valor assintótico (y^*), pode ser estimado de diferentes maneiras.

Para este trabalho a metodologia escolhida foi utilizar o fato de que um ponto de estabilização é tal que $y_{i+1} \simeq y_i$, ou seja, a um ponto no qual sua derivada tende a zero.

Deste modo, para cada um dos pães em estudo foram calculadas as derivadas discretas dos valores de $y(t)$ e, o valor cuja derivada foi o mais próximo de zero, em valores absolutos, foi considerado como valor assintótico, y^* .

4. Discussão e Resultados

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados obtidos da fabricação de 4 pães artesanais. Os resultados obtidos para o crescimento desses pães serão utilizados para determinar os parâmetros dos modelos considerados, que ao final serão avaliados.

Prosseguindo com as etapas da modelagem segundo Bassanezi (2011), em cada experimento foram analisados os dois modelos que representam crescimento e possuem estabilização, isto é, $y_{k+1} - y_k = 0$.

4.1 Pão 1

Neste experimento o valor assintótico obtido foi de $y^* = 3.477.738$.

4.1.1 Ajuste Exponencial Assintótico

A Figura 4.1 mostra o gráfico da curva $z = at + c$, de tal modo que os coeficientes a e c são utilizados para a obtenção dos parâmetros λ e b do modelo, conforme equações (3.4) e (3.5) respectivamente.

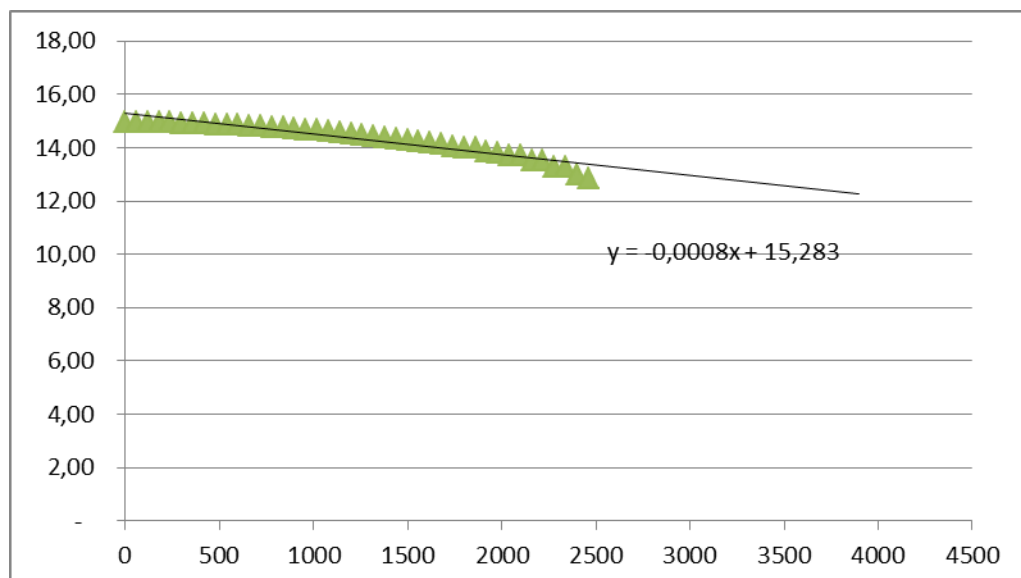


Figura 4.1: Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso exponencial assintótico.

A reta de regressão linear fornece para os valores de $a = -0,0008$ e $c = 15,283$, resultando em $\lambda = 0,0003$ e $b = -3.242.970$.

Com base nos valores obtidos acima a curva ajusta para o modelo exponencial assintótico para o crescimento do pão 1 é dada por:

$$y(t) = 3.477.738 - 3.242.970e^{-0,0003 t} \quad (3.9)$$

4.1.2 Ajuste Logístico

A Figura 4.2 mostra a curva de ajuste linear para o modelo logístico, tal que os coeficientes angular e linear estão relacionados aos coeficientes deste modelo através das equações (3.7) e (3.8).

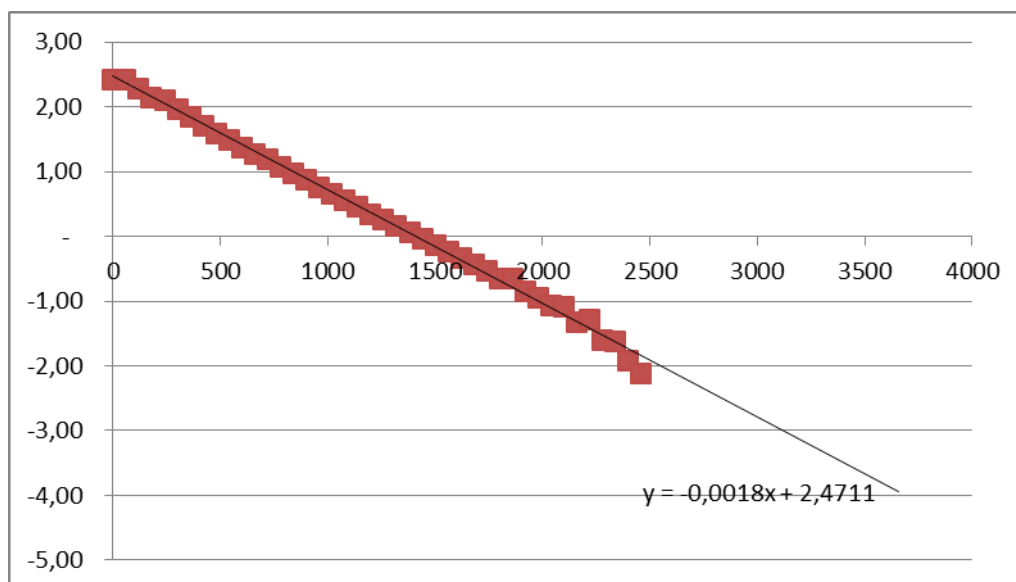


Figura 4.2: Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso logístico.

Para este ajuste obtém-se de $a = -0,0018$ e $c = 2,4711$ resultando em $\lambda = 0,0018$ e $b = 11,8355$ e, como curva de ajuste logístico:

$$y(t) = \frac{3.477.738}{1 + 11,8355e^{-0,0018 t}} \quad (3.10)$$

A Figura 4.3 mostra as curvas ajustadas em comparação com os dados experimentais.

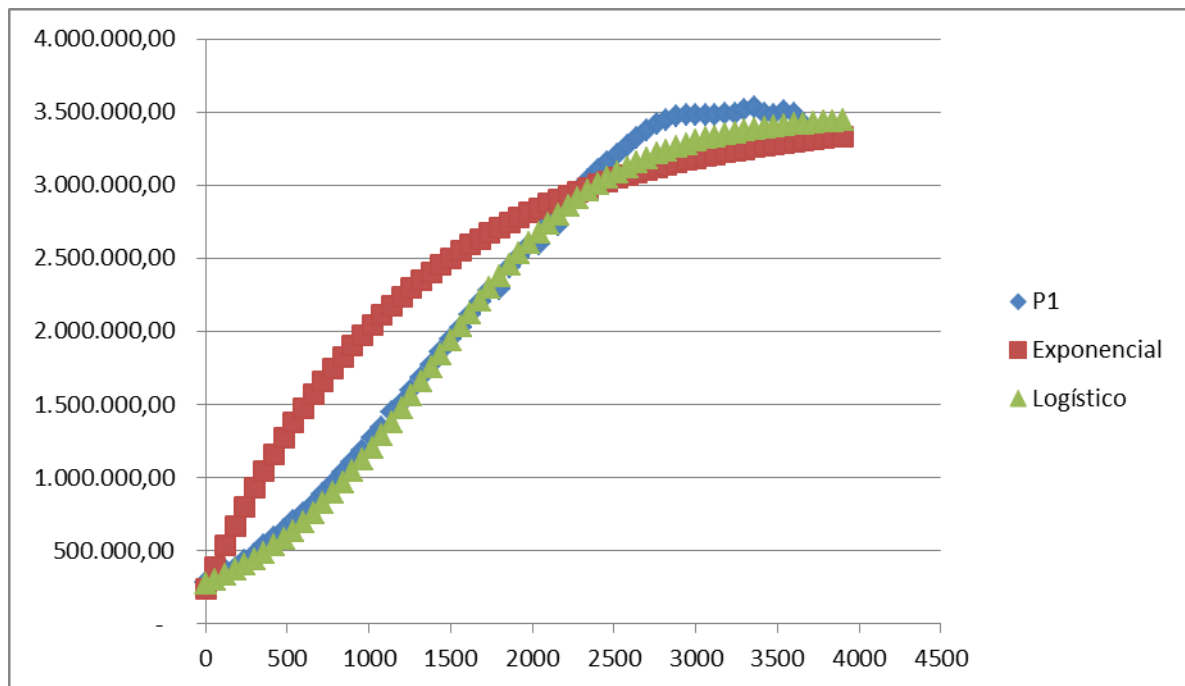


Figura 4.3: Dados experimentais (P1) x Modelos teóricos.

Para o modelo exponencial assintótico assim como para o modelo logístico foi necessário fazer o cálculo do y^* como mostrado na seção 3.4.1.3. Os modelos foram ajustados de acordo com as seções 4.1.1 e 4.1.2 para a obtenção dos valores dos parâmetros e assim ajustando-se aos dados as curvas dos modelos estudados neste trabalho.

O modelo exponencial assintótico juntamente com o modelo logístico foi avaliado como mostra a Figura 4.3, porem o modelo logístico se adequou melhor aos dados, mas para saber se o que é visto nos gráficos faz jus aos dados, as quatro características do modelo logístico foram avaliadas.

1. Possui capacidade de suporte, uma vez que o valor assintótico é coerente aos dados;
2. Visualmente é crescente até a capacidade de suporte, mostrando uma possibilidade de estabilidade após este valor;
3. A taxa de crescimento relativo tem característica linear;
4. A curva de dados do P1 parece visualmente ter ponto de inflexão.

Assim podemos dizer que o modelo logístico corresponde à dinâmica dos dados.

4.2 Pão 2

No caso do experimento Pão 2 ou P2, o valor assintótico obtido foi $y^* = 3.918.073$.

4.2.1 Ajuste Exponencial Assintótico

Na Figura 4.4 temos o ajuste linear da equação (3.1), tal que os parâmetros λ e b do modelo exponencial assintótico, obtidos através das equações (3.4) e (3.5), resultam respectivamente em $-0,0006$ e $4.533.478$, ou seja, na curva ajusta por:

$$y(t) = 3.918.073 - 4.533.478e^{-0,0006 t} \quad (3.11)$$

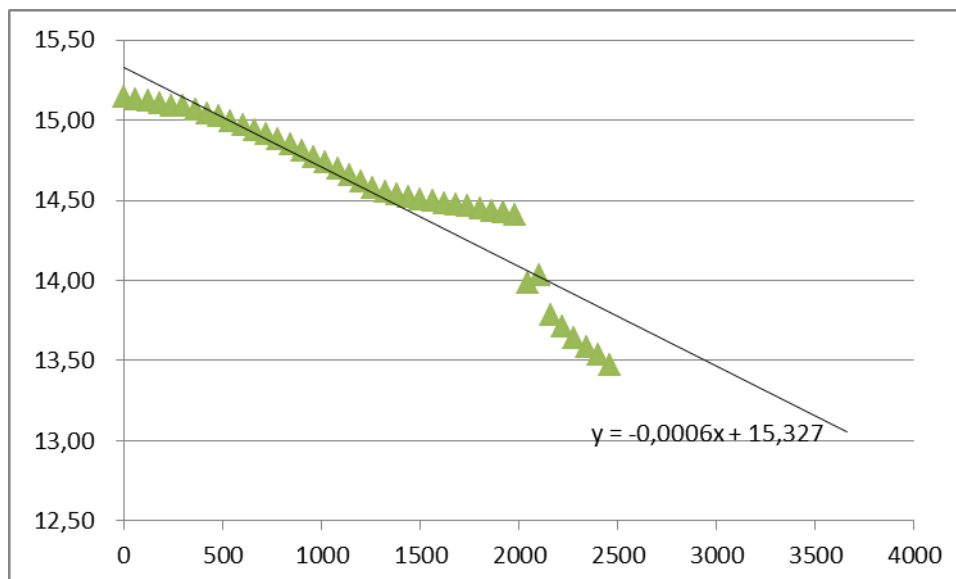


Figura 4.4: Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso exponencial assintótico.

4.2.2 Ajuste Logístico

Os coeficientes do ajuste linear para o modelo logístico, Figura 4.5, permitem obter os coeficientes do modelo logístico, $\lambda = 0,0017$ e $b = 13,8087$, tal que:

$$y(t) = \frac{3.477.738}{1 + 11,8355e^{-0,0018 t}} \quad (3.12)$$

é a curva de ajuste do modelo logístico.

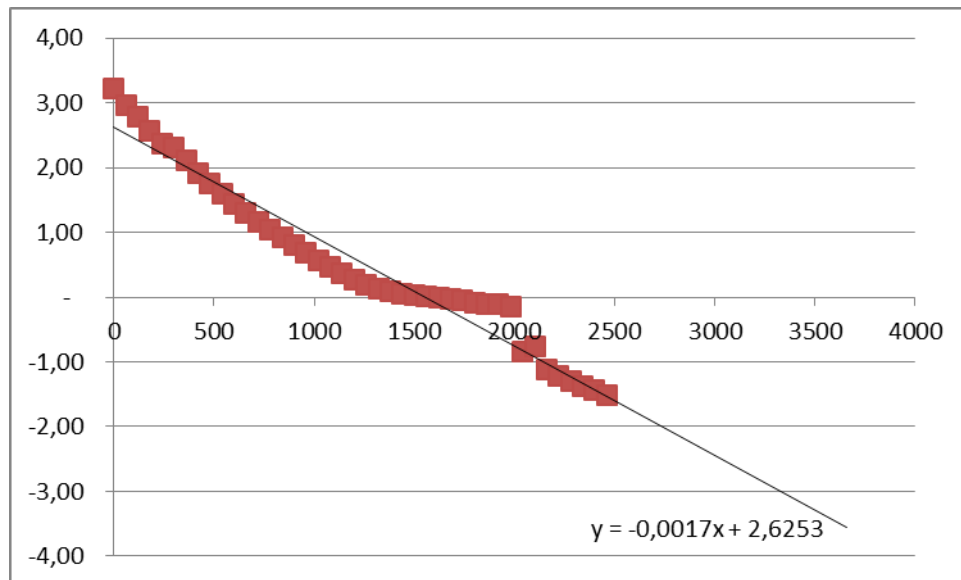


Figura 4.5: Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso logístico.

A Figura 4.6 apresenta as curvas ajustadas em comparação com os dados experimentais para o pão 2.

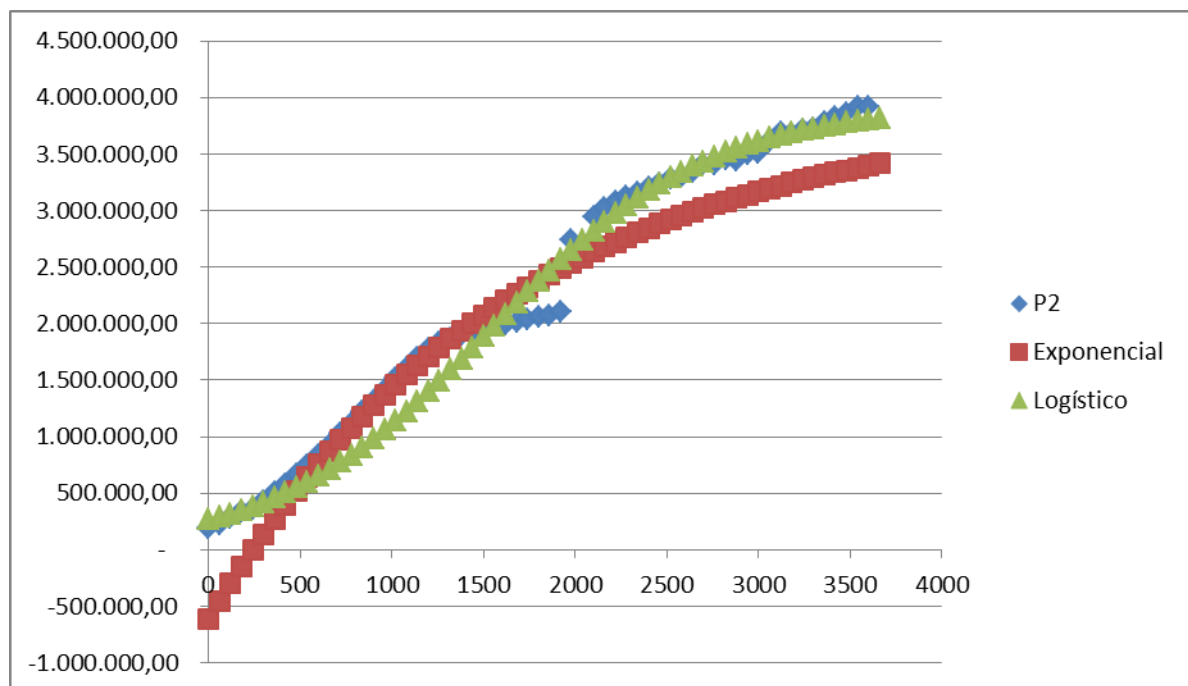


Figura 4.6: Dados experimentais (P2) x Modelos teóricos.

Assim como foi feito no P1, para o P2 também foi calculado o valor assintótico pelo mesmo método. Desta forma, é possível prosseguir com a modelagem dos dados utilizando os modelos exponencial assintótico e logístico.

Na Figura 4.6 se pode ver os dados reais e os modelos ajustados a esse conjunto de dados. O modelo exponencial assintótico não apresenta um ajuste adequado, principalmente nos instantes iniciais, gerando inclusive valores negativos para a área do pão, fazendo com esse modelo fosse descartado.

Por outro lado, o modelo logístico possui uma curva que descreve melhor o conjunto de pontos dos dados reais.

Para avaliar o modelo logístico, antes é analisado se as características fundamentais estão presentes nos dados do experimento:

1. Possui capacidade de suporte, uma vez que o valor assintótico é coerente aos dados;
2. Visualmente é crescente até a capacidade de suporte, mostrando uma possibilidade de estabilidade após este valor;
3. A taxa de crescimento relativo tem característica linear;
4. Devido a alguns ruídos na coleta, não se pode afirmar se há ponto de inflexão.

A Figura 4.6 apresenta o resultado para o modelo logístico, que corresponde bem à dinâmica dos dados.

4.3 Pão 3

Para o Pão 3 (P3), o valor assintótico obtido foi $y^* = 2.023.803$.

4.3.1 Ajuste Exponencial Assintótico

O ajuste linear do modelo exponencial assintótico, Figura 4.7, mostra que os valores de $\lambda = -0,0007$ e $b = 2.305.942$ e, a curva ajustada por:

$$y(t) = 2.023.803 - 2.305.942e^{-0,0006 t} \quad (3.13)$$

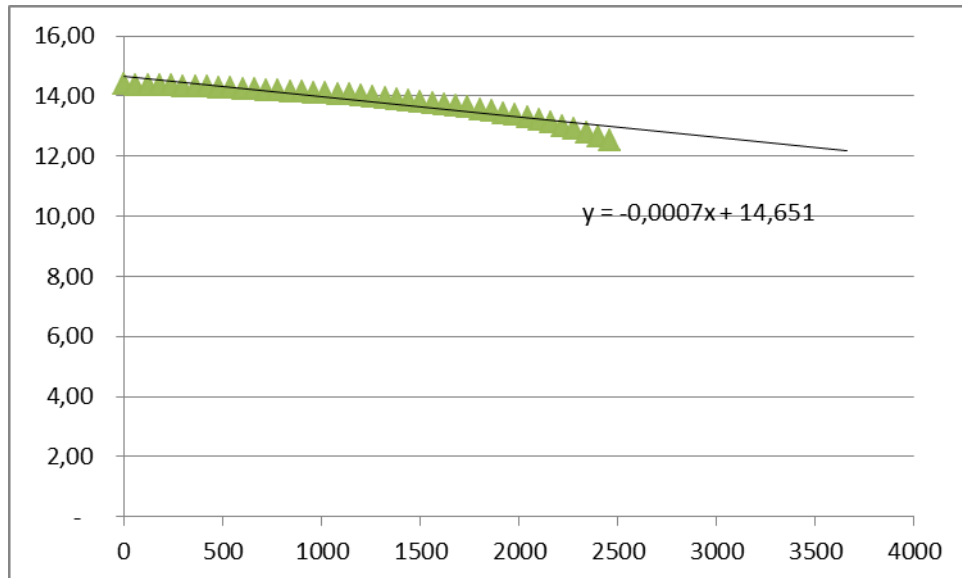


Figura 4.7: Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso exponencial assintótico.

4.3.2 Ajuste Logístico

Para o modelo logístico, Figura 4.8, os coeficientes foram: $\lambda = 0,0015$ e $b = 7,9885$ e:

$$y(t) = \frac{2.023.803}{1 + 7,9885e^{-0,0015 t}} \quad (3.14)$$

representa a curva de ajuste deste modelo.

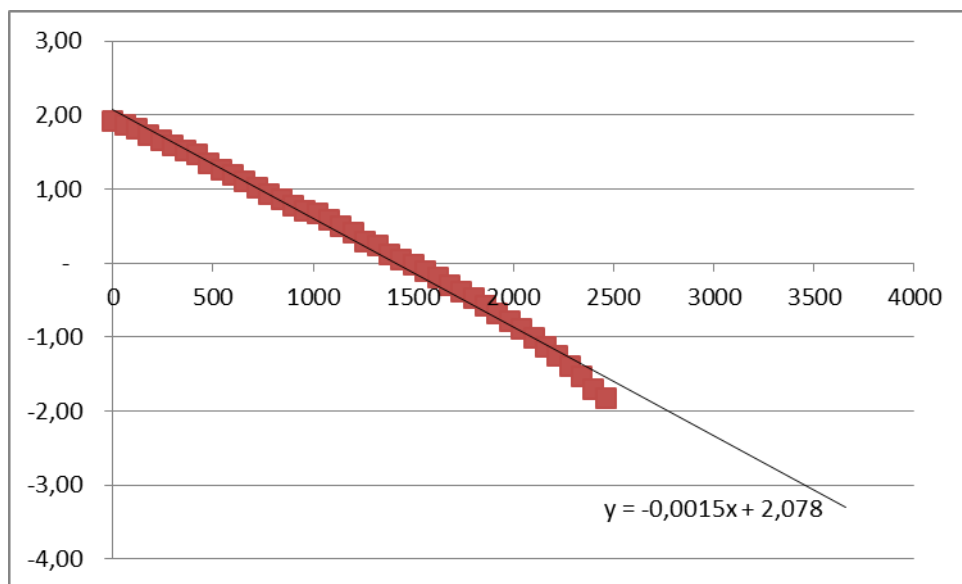


Figura 4.8: Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso logístico.

A Figura 4.9 tem-se as curvas ajustadas para comparação com os dados experimentais para o pão 3.

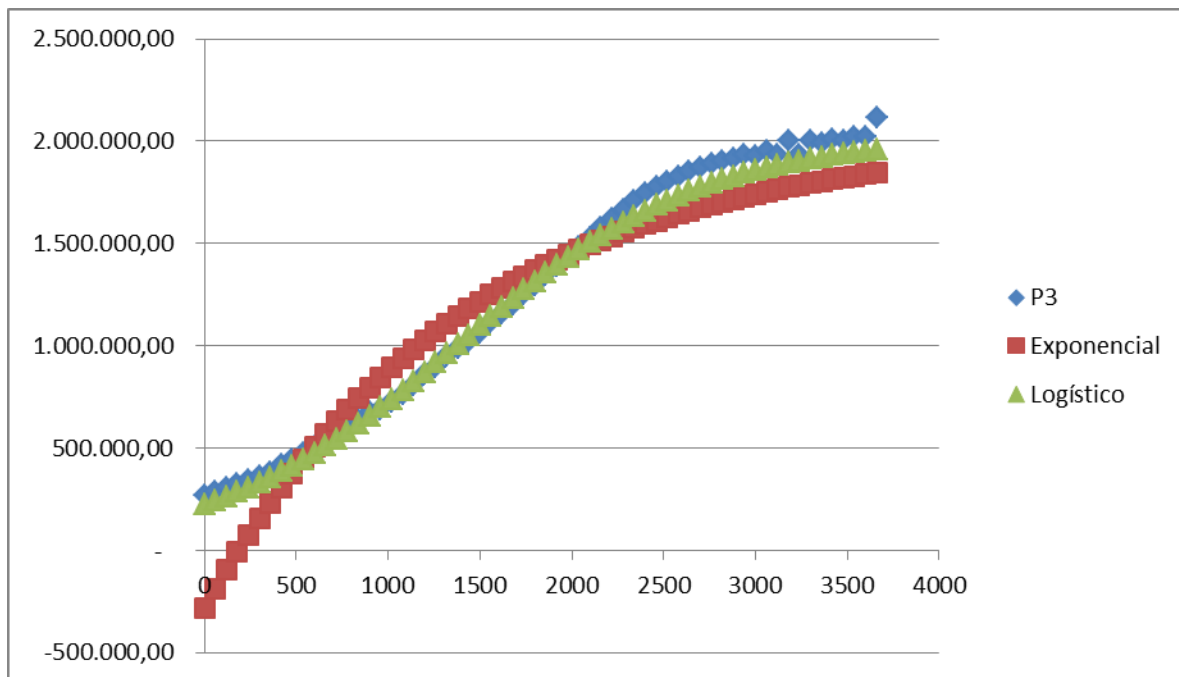


Figura 4.9: Dados experimentais (P3) x Modelos teóricos.

O modelo exponencial assintótico em seus pontos iniciais apresenta área negativa, sendo descartado pelo mesmo motivo do P(2), também é possível ver que esse modelo não é o modelo que melhor pode representar os dados reais. Enquanto que o modelo logístico adequa-se aos dados, visualmente.

4.4 Pão 4

No experimento Pão 3 (P4), tem-se $y^* = 3.141.874$ como valor assintótico.

4.4.1 Ajuste Exponencial Assintótico

Para o ajuste linear do modelo exponencial assintótico, Figura 4.10, os valores de λ e b obtidos são, respectivamente, $-0,0003$ e $3.081.725$.

$$y(t) = 3.141.874 - 3.081.725e^{-0,0003 t} \quad (3.15)$$

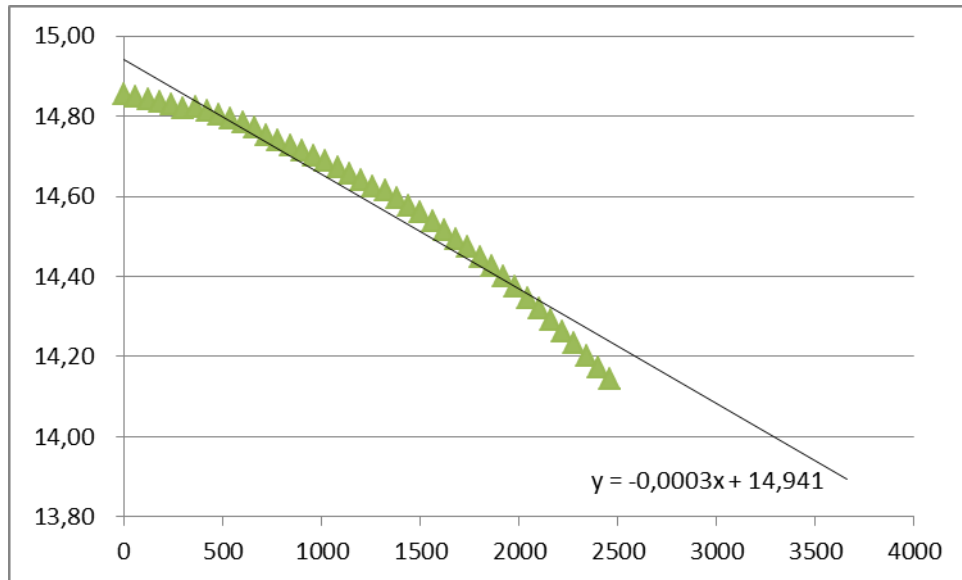


Figura 4.10: Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso exponencial assintótico.

4.4.2 Ajuste Logístico

No modelo logístico, Figura 4.11, os coeficientes foram: $\lambda = 0,0010$ e $b = 9,0993$ e:

$$y(t) = \frac{3.141.874}{1 + 9,0993e^{-0,0010 t}} \quad (3.14)$$

é a curva de ajuste deste modelo.

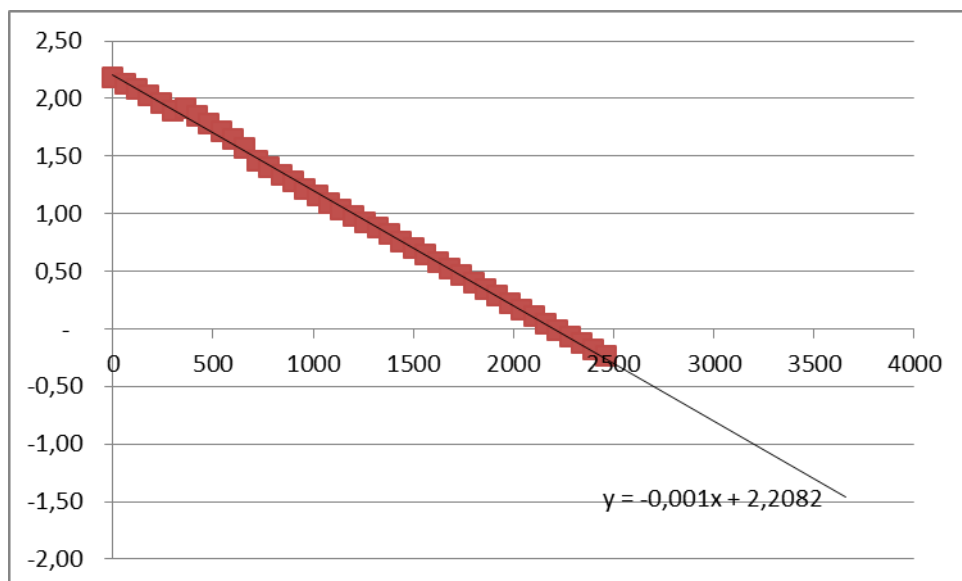


Figura 4.11: Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso logístico.

As curvas ajustadas para comparação com os dados experimentais para o pão 4 estão representadas na Figura 4.12.

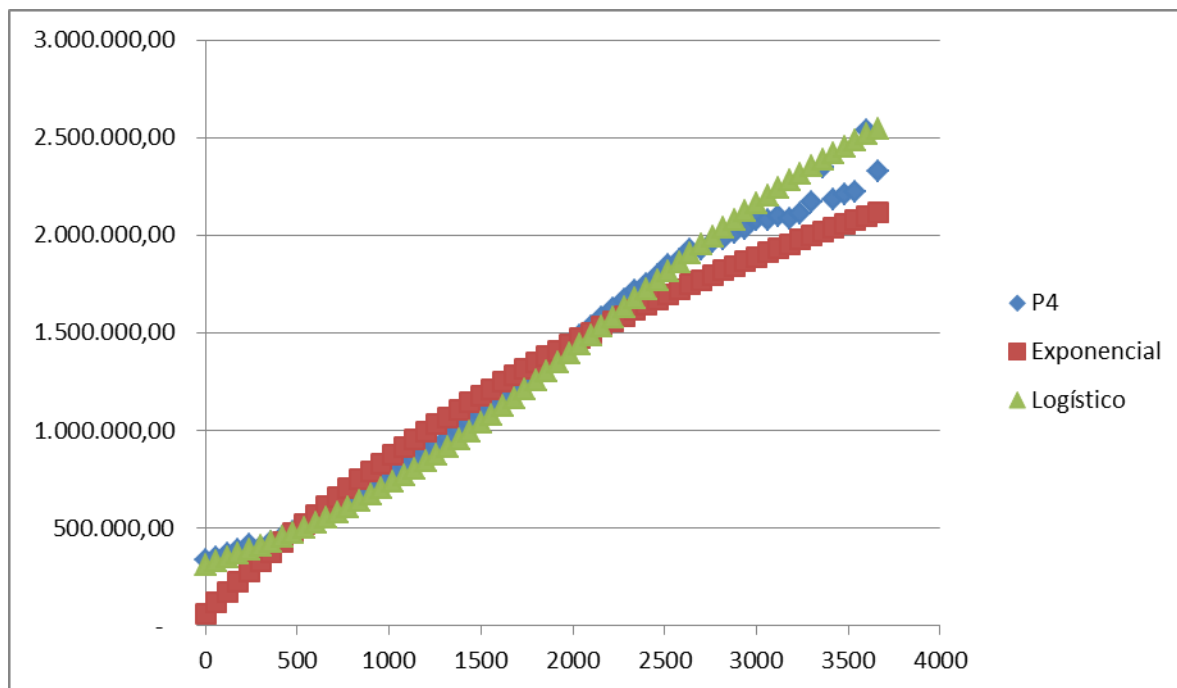


Figura 4.12: Dados experimentais (P4) x Modelos teóricos.

O modelo exponencial assintótico apresenta um valor para os dados iniciais com área negativa, sendo isto improvável, e analisando a Figura 4.12 pode se ver que este modelo não representa os dados reais.

O modelo logístico é coerente com os dados, como pode ser verificado na Figura 4.12.

Dessa forma, concluímos a etapa 3 de Bassanezi (2011): o estudo analítico e numérico do modelo, utilizando também da etapa 4, a validação, e da etapa 5, modificação, tentando outros modelos ajustados aos dados.

4.5 Validação do modelo matemático

O pão não cresce infinitamente, e em um determinado momento esse crescimento estaciona, indicando uma dinâmica assintótica, o que pode ser mais bem representado pelos modelos exponencial assintótico e logístico.

A fermentação é resultante de um processo bioquímico realizado por leveduras que no início do experimento apresenta poucos fungos e muito alimento, assim gerando um crescimento rápido, tudo isso associado ao calor. Logo, a taxa de crescimento é crescente, mas em um determinado momento (ponto de inflexão) as taxas de crescimento podem começar a diminuir (mesmo sendo grandes há um decrescimento) devido a quantidade de alimento disponível e ao número de leveduras presentes na massa.

Observou-se que os pães apresentam o seguinte resultado de melhor ajuste aos modelos de crescimento:

1. P1: modelo logístico;
2. P2: modelo logístico;
3. P3: modelo logístico;
1. P4: modelo logístico.

Os pães apresentaram mais coerência com a dinâmica esperada para a fermentação: um comportamento assintótico. Neste caso também, a variação do tempo de coleta de dados, que se deu devido a temperatura observada no momento e a observação do crescimento dos pães, contribui para se observar a dinâmica assintótica de um modelo logístico.

Neste sentido e observando os resultados obtidos, podemos dizer que obtemos resultados de acordo com a literatura, e o modelo que pode ser utilizado para descrever a fermentação de pães artesanais é o **modelo logístico**.

Desta forma encerram-se as etapas 4 e 5 da Modelagem Matemática de acordo com as etapas descritas por Bassanezzi (2011).

4.6 Aplicação

O experimento retratado neste trabalho avalia qual modelo valida a fermentação em pães caseiros. No entanto, podemos verificar dinâmica parecida em outros tipos de pães ou produtos que use uma massa fermentada, como caso de alguns tipos de massas de pizzas, pães doces, roscas, e bolinhos assados. Para que seja feita essa

verificação é necessário que no preparo da massa seja utilizado fermento biológico, que tem como agentes as leveduras.

Essa proposta pode ainda ser utilizada como exemplo para etapas de Modelagem Matemática, em especial quando estuda-se funções exponenciais.

Uma sugestão de atividade para o ensino é: preparar a receita do pão com os alunos, separar os alunos em grupos, dividir a massa em pequenas porções, colocar uma amostra dentro de uma proveta, e então tomar notas a cerca de seu crescimento por aproximadamente 20 a 30 minutos. Após isto, construir o diagrama de dispersão dos dados coletados.

Pode-se também fazer uma atividade interdisciplinar com os professores das disciplinas de biologia e química, enquanto um retrata o ciclo de vida das leveduras, o outro ficaria responsável por explicar o processo químico envolvendo o processo de fermentação alcoólica.

Uma segunda sugestão de atividade para o ensino consiste na utilização de placas de acrílico, uma malha quadriculada, colocando no centro da placa um pedaço de massa e cobri-la com outra placa, anotando a área dessa massa em intervalos de tempo regulares.

Esta atividade permite explorar conteúdos de geometria e funções dentro de um mesmo experimento.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho resultou em um estudo de validação dos modelos exponencial assintótico e logístico a quatro conjuntos de dados analisando o crescimento de pães, por meio da fermentação. Sabendo que a matemática pode ser entendida dentro de um processo de modelagem, descrevendo fenômenos físicos e situações problemas do cotidiano, verificou-se qual desses modelos representa melhor esse conjunto de dados.

Neste sentido, evidenciamos que a matemática pode transformar situações-problema de nosso cotidiano em linguagem própria agregando expansão do conhecimento, fazendo com que as perspectivas dos fenômenos reais, tenham uma interpretação matemática simplificada obtendo como resultado um modelo.

Em relação ao questionamento - qual é o modelo matemático, que melhor se ajusta na fabricação de pães artesanais? – lançado nesta pesquisa notamos que o modelo logístico descreve melhor a fermentação nos pães artesanais.

No intuito de validar um modelo matemático para descrever o processo de crescimento por meio da fermentação na panificação artesanal, notamos que apesar de os dados apresentarem ruídos mais do que o esperado, dentre os modelos verificados para descrever o crescimento do pão, o modelo logístico é o mais adequado.

Não encontramos uma literatura que pudesse confirmar este estudo, contudo para Bassanezi (2015) o modelo que descreve a fermentação é o modelo exponencial assintótico, que nos quatro conjuntos de dados deste trabalho não foi a resposta obtida.

Apesar disso, o modelo logístico assim como o modelo exponencial assintótico, possui um limitante, logo o crescimento de pão caseiro pode ser representado pelo modelo logístico. Porém, para uma coleta mais significativa é necessário adquirir os dados em um ambiente com temperatura e iluminação controlada, diminuindo assim a quantidade de ruídos. Tais condições podem ser relacionadas a possíveis trabalhos futuros neste tema.

Dentro dessa concepção também, evidenciamos que o objetivo geral deste trabalho foi alcançado, constatando que dentro de uma realidade cuja matemática é essencial a Modelagem Matemática pode descrever uma situação real por meio de um modelo matemático, em específico no processo de fabricação e fermentação na panificação artesanal, que foi o foco deste estudo.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. 3. ed., 3ª reimpressão. São Paulo: Contexto. 2011.
- BASSANEZI, R. C. *Temas e Modelos*. Santo André: UFABC, 2012.
- BASSANEZI, R. C. *Modelagem Matemática: Teoria e Prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BASSANEZI, R. C. *Introdução ao Cálculo e Aplicações*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. *Modelagem Matemática no ensino*. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- BURAK, D. *Modelagem Matemática e a Sala de Aula*. In: I EPEM-Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática. 2004, Londrina.
- CURY, H.N. *Uma leitura crítica de Robbie Case: considerações para a educação matemática*. Educação, v. 15, n.22, p. 73-89, 1992.
- EDWARDS, D. e HAMSOM, M. *Guide to Mathematical Modelling*. Boca Raton. CRC Press, 1990. Tradução nossa.
- JAEGER, W. *Paidéia: a formação do homem grego*. Trad. Artur M. Parreira. São Paulo: Martins Fontes, 2001.
- MALTHUS, T. *Coleção Grandes Cientistas Sociais*, São Paulo: Ática, 1982.
- PLATÃO. *A República*. 7. ed. Trad. Maria Helena da Rocha Pereira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1993.
- QUINTO, T. e FERRACIOLI, L. Modelos e modelagem no contexto do ensino de ciências no Brasil: uma revisão de literatura de 1996-2006. Revista Didática Sistêmica, Rio Grande, v. 8, p. 80-100, julho a dezembro de 2008.
- Só Biologia- Fermentação. Disponível na Internet em: <<https://www.sobiologia.com.br/conteudos/bioquimica/bioquimica3.php>>. Acesso e janeiro/2018.

ANEXO A – RECEITA PARA A FABRICAÇÃO DE PÃES CASEIROS

Ingredientes:

- 480g de farinha
- 50g de açúcar
- 200 ml de leite morno
- 50g de manteiga ou nata em temperatura ambiente
- 1 pitada de sal
- 1 ovo
- 10g de fermento biológico seco
- 1 gema

Preparo:

Coloque o leite morno em uma bacia, adicione o fermento biológico seco e mexa para “hidratar” o fermento, então acrescente o ovo e a manteiga e misture bem até ficar quase homogêneo, em seguida pode colocar os secos junto à mistura e sove bem por 10 minutos, pois a massa precisa incorporar todos os ingredientes até soltar das mãos.

Após a primeira sova, coloque a massa num recipiente e cubra, deixando descansar por 20 minutos ou até dobrar de tamanho, em um local que não seja frio (ex: forno micro ondas, forno convencional, sem ligá-los).

Feito isso, sove novamente para ativar o fermento, modele o pão, coloque numa forma para pão, deixe crescer por 40 minutos, pincele a gema em cima do pão, mas com cuidado para não apertar a massa, leve para assar em forno pré-aquecido a 180 °C por aproximadamente 30 minutos.

ANEXO B – DADOS COLETADOS NO EXPERIMENTO

DADOS OBTIDOS NA COLETA

T	P1	P2	P3	P4
0	284779,5	150720,875	257783,5	317381,375
60	283934,5	193997,375	269298,375	335524,75
120	322105	229131,25	285095,25	348868
180	364665,875	278833,25	303251,75	365829,25
240	379819,5	334735,875	323869,75	386801,125
300	431571,875	355662,125	343563,75	410877,5
360	471330,875	423267,5	365425	401467,125
420	533440,25	503117,625	379930,125	427043,25
480	587494	580492,75	417983,625	452598,875
540	639695,75	662127,625	445993,875	478995,375
600	701229,75	748511,875	474753,625	506107
660	757492,625	839467,625	504030,625	541018,25
720	815035,625	929715,5	537475,375	592103,25
780	883936,625	1027912,625	569356,375	621620,25
840	955526,25	1118991	602893,75	653106,875
900	1030458,875	1217396,25	637425,25	685410,5
960	1106801	1317245,875	672725,125	718183,25
1020	1183010,875	1414231	687086,875	751420,125
1080	1266744	1511007,25	728653,375	787147,25
1140	1342195,375	1608514,875	765935,25	822982,75
1200	1441754,5	1699670,625	807566,875	857636,75
1260	1508222,5	1776421,75	865524,875	894529,25
1320	1594052,5	1834460,25	892244,25	919386

1380	1679714,125	1867990,125	950106	958210,375
1440	1769521	1901376,375	991614,125	1000333,375
1500	1855438,375	1926230,25	1020576	1039660,125
1560	1942260,375	1943204,625	1066289,375	1083406,875
1620	2027881,75	1977864,75	1112402,25	1125983,25
1680	2112531,125	1988966,75	1159223,5	1170349,875
1740	2197232,75	2011764,5	1203400,25	1210800,5
1800	2279706,125	2040900,625	1249535,25	1260688,25
1860	2285851,75	2064037	1297048	1302608,25
1920	2434365,75	2073703,375	1344225,875	1346954,875
1980	2508354,75	2107557	1390198,25	1393391,5
2040	2586062,125	2737252,625	1436777	1440906,75
2100	2596354,5	2673171,5	1484424	1486611,75
2160	2746241,25	2949128,25	1529678,875	1534665,125
2220	2728576,625	3019706	1576384,25	1579232,625
2280	2895269,5	3080178	1621867	1623657,25
2340	2909082,625	3122923,625	1666380,875	1668817,5
2400	3036934,125	3164432,625	1710296,625	1713332,25
2460	3106835,125	3208740,5	1744813,75	1751501,875
2520	3156012,125	3236246,75	1778362,5	1791492,625
2580	3210722	3287106,25	1801984,875	1846475,125
2640	3265798,25	3292600,125	1830132,875	1871996
2700	3322507,875	3343647,875	1854568,625	1926372,125
2760	3378800,5	3402574,25	1872309,375	1928316,875
2820	3416370,75	3405453	1889568,875	1963804,125
2880	3440189	3455197,625	1900509	1980988,75

2940	3472161	3438478,25	1914995,125	2012020,25
3000	3478906,375	3494959,875	1936122,875	2032868,75
3060	3480013,25	3509530,625	1925344,625	2075880,875
3120	3477697	3610791,875	1955914	2076303
3180	3477738,125	3693006	1935319,125	2096804,875
3240	3484127,625	3680430,125	2003656,625	2082872,875
3300	3486660,5	3719405,5	1935584,625	2106903,125
3360	3514797,5	3730098,625	2001555	2172367,125
3420	3536238,125	3779417,625	1992525,5	2347652,125
3480	3491756,125	3832872,5	2009081,75	2182971
3540	3479909,125	3861478,25	2004497,5	2210642,125
3600	3501541	3915880,375	2022869,125	2223512,375
3660	3486986,375	3918073,375	2023803,125	2534418,25
3720	3417501		2115897,375	2324676,625
3780	3388564,125		2048137,625	2650058,5
3840	3383953,5		2220760,375	2747115,375
3900	3367516,375		2417600,625	2760113,625
3960			2146236	2773576,375
4020			2635372,5	2846644,75
4080			2637693,75	2865165
4140			2679976,375	2847711,125
4200			2727632,625	2912537,75
4260			2775550,5	2950167,75
4320			2805328,75	2973603
4380			2864848	2998034,375
4440			2874751	3017246,75

4500			2846300,75	3036648
4560			2907675,5	3048305,125
4620			2936626,5	3093915,375
4680			2984122,375	3117461,875
4740			2958302,625	3141873,75
4800			2974340,875	3142708,375
4860				3175981