Geometria Analítica:
Estudo de reta e circunferência no plano complexo

Douglas Alves Januário

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Professor Me. Lucas Casanova Silva.

IFSP
São Paulo
2018

DOUGLAS ALVES JANUÁRIO

GEOMETRIA ANALÍTICA: UM ESTUDO DE SEUS OBJETOS NO PLANO COMPLEXO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADO EM 05/12/2018

CONCEITO: Dez

Prof. Dr. Silvio De Liberal
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogerio Ferreira da Fonseca
Membro da Banca

Lucas Casanova Silva

Prof. Me. Lucas Casanova Silva
Orientador

Aluno: Douglas Alves Januário

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J33g Januário, Douglas Alves
Geometria analítica: estudo de reta e circunferência no plano complexo / Douglas Alves Januário. São Paulo: [s.n.], 2018.
51 f.

Orientador: Lucas Casanova Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Geometria Analítica. 2. Números Complexos. 3. Plano Complexo. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

“O amor não deixa de existir. Às vezes, ele muda de forma”.

(Mirosmar José de Camargo [1])

[1] Mirosmar José de Camargo, cantor sertanejo, cujo nome artístico – pseudônimo Zezé di Camargo.

Dedico este trabalho para as pessoas que mais amo, respeito e admiro: Deus, meu tio Gilberto Januário, meu orientador Lucas Casanova, meus Pais e irmãos, aos meus sobrinhos: Victor Enzo e Ívine, aos meus padrinhos: Antônio e Natércia, e toda sua família, ao meu primo Francisco e toda sua família, Renata Lima (prima), Professora Francisca, Maristela Bispo (Mary), Luana Caroline, aos meus vizinhos: Júlio César, Marcia Gardênia, Eugênio, Anderson César, Ariel, Gustavo, Silvano e Renata, à minha tia Nerci e toda sua família, aos meus tios: Nemilson e Cleonice e toda sua família, e ao meu cabeleireiro Rodney.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus pela proteção, fé, perseverança e confiança durante toda essa caminhada bastante complexa.

Ao meu tio, o professor doutor em matemática Gilberto Januário, pela confiança, incentivo e pela ajuda que me deu desde quando saí de um município bastante simples do interior do Ceará com pouquíssimas oportunidades para estudar e trabalhar, para vir a minha terra natal São Paulo com o propósito em estudar Licenciatura em Matemática no IFSP.

Aos meus Pais: José Januário Filho e Antônia Alves Bezerra Januário e meus irmãos: Hildernando Alves dos Santos, Antônio Erivando Alves dos Santos e Eridan Alves Januário, pelo apoio, incentivo e principalmente pelas orações.

Ao meu orientador, o professor mestre Lucas Casanova Silva, por aceitar desenvolver este trabalho, pela paciência e confiança.

Aos professores doutores, Rogério da Fonseca e Sílvio De Liberal, por aceitarem o convite para participarem da banca examinadora deste trabalho.

Ao Professores: Henrique Marins pela ajuda em algumas configurações neste trabalho e também pelo conhecimento obtido nas suas aulas, e Armando Traldi pela ajuda que me deu quando participei do Pibid.

Aos meus amigos da faculdade: Luiz Fernando Sena e Victor Hugo de Lemos, e aos meus vizinhos: Gustavo e Ariel por abrirem as portas de suas casas e deixarem utilizar seus computadores para elaboração deste trabalho.

Aos colegas: Cibele Rocha, Polion Barbosa, Luana Cristina, Edson Valero, Robson Tsukagoshi, Alex Marques, Messias Oliveira, Misael Brito, Nathália Lima, Augusto, Amanda, Ivan de Carvalho, Lucas Kenji, Zilda Macedo e Sérgio por aprender e também ensinar os conteúdos de algumas disciplinas que estudamos juntos no curso.

Às professoras de Comunicação e linguagem 3, Eliana e Maira, por olharem todo o texto deste trabalho, corrigindo alguns erros.

RESUMO

A Geometria Analítica possui aplicações tanto em Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. No Ensino Médio costumamos ver os objetos geométricos no plano cartesiano, e suas equações são tratadas nas variáveis reais. Este trabalho apresenta o conteúdo de uma forma ligeiramente diferente. Ele é apresentado com os objetos contidos no plano complexo e suas equações são tratadas nas variáveis complexas.

Palavras-chaves: Geometria Analítica, Números Complexos, Plano Complexo.

ABSTRACT

Analytical Geometry has applications in mathematics as well as other areas of knowledge. The geometric objects of it is usually seen, in high school, contained inside the Cartesian Plane and its algebraic equations treated in the real variables. This work presents a slightly different approach to that. It is presented with the objects contained in Complex Plane and the algebraic equations treated with complex variables.

Keywords: Analytical Geometry, Complex Numbers, Complex Plane.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos Números Complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$z = x + yi$	Número Complexo, em que $x, y \in \mathbb{R}$
i	Unidade imaginária
$Im(z)$	Parte imaginária do Número Complexo z
$Re(z)$	Parte real do Número Complexo z
$\bar{z} = x - yi$	Conjugado do Número Complexo z
$\|z\|$	Módulo do Número Complexo z
$tg\theta$	Tangente trigonométrica do ângulo teta
m	Coeficiente angular de uma reta
α	Letra grega minúscula alfa
β	Letra grega minúscula beta
γ	Letra grega minúscula gama
θ	Letra grega minúscula teta
λ	Letra grega minúsculo lambda

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Tanto Geometria Analítica quanto Números Complexos estão no currículo da Educação Básica, conforme consta em orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2006, p.77), “O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra”. Acrescenta-se que “Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$”orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2006, p.71). No entanto estes dois conteúdos são abordados separadamente. Os Números Complexos são apresentados com foco nas manipulações algébricas, podendo considerar a geometria no contexto das fórmulas de De Moivre[2](1667-1754) e na forma trigonométrica, já o conteúdo de Geometria Analítica é focado nas equações dos objetos geométricos tratados no Plano Cartesiano.

Este tratamento dos dois tópicos, Geometria Analítica e Números Complexos, de forma isolada um do outro, trouxe-nos as seguintes questões: será que esses dois tópicos são necessariamente excludentes? Por que não estudar os objetos geométricos, a saber, reta e circunferência, de forma articulada com os Números Complexos?

Pensando sob esse ponto de vista, o objetivo deste trabalho é estudar os objetos da Geometria Analítica: reta e circunferência, tendo como universo o conjunto dos Números Complexos. Assim, as equações que descreverão esses objetos geométricos terão variável complexa e o plano que utilizaremos será o de Argand-Gauss (plano complexo). Isto nos permitirá investigar quais propriedades da Geometria Analítica Plana são acessíveis por meio dos complexos.

Alguns autores que abordaram a articulação entre esses objetos e os Números Complexos são: Kloster (2014), Feitosa (2013) e Caon (2013). Eles apresentam o estudo desse tema, focando nas manipulações algébricas e modificando as equações dos objetos do plano cartesiano para descrevê-las na variável complexa.

Os autores supracitados partem das equações algébricas nas variáveis reais. Este estudo tem uma abordagem ligeiramente diferente, posto que partimos dos objetos geométricos (no plano complexo) para obter suas respectivas equações algébricas.

---

[2] Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês. Dedicou boa parte de seus estudos à teoria das probabilidades. (PAIVA, 1995, p. 303).

Este trabalho está dividido em dois capítulos além desta Introdução e das Considerações finais.

No primeiro capítulo, partimos de uma reta contida no plano complexo para deduzirmos suas possíveis equações na variável complexa, assim como alguns elementos contidos nela (coeficiente angular e coeficiente linear).

No segundo, partimos da definição de circunferência no plano complexo, para descrever sua equação, e a partir dela obter seu centro e seu raio.

2. RETAS

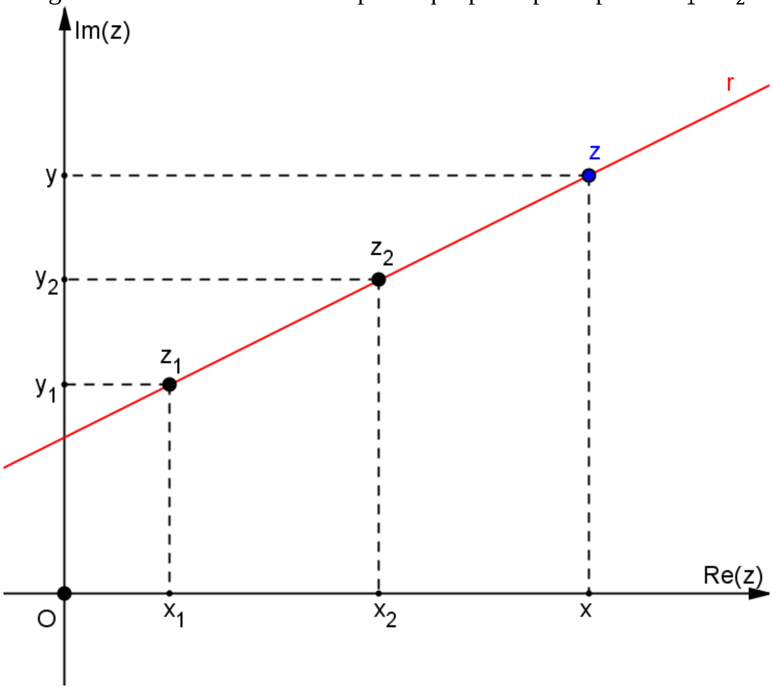
Neste capítulo faremos o estudo de alguns elementos algébricos de uma reta no plano complexo, tais como, sua equação, inclinação e coeficiente angular, e seu coeficiente linear.

2.1 Equação da reta no plano complexo

Dada uma reta no plano cartesiano, da Geometria Analítica plana, temos que sua equação pode ser dada na forma geral, ou seja, $ax + by + c = 0$. Pensando agora no plano complexo, será que uma reta contida nele tem sua equação escrita de forma parecida com a do plano cartesiano?

Consideremos, para tentar responder tal pergunta, no plano complexo dois pontos, z_1 e z_2 distintos, tais que $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, afixos, dos respectivos números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Figura 1: Reta r no Plano Complexo que passa pelos pontos z_1 e z_2



Fonte: próprio autor

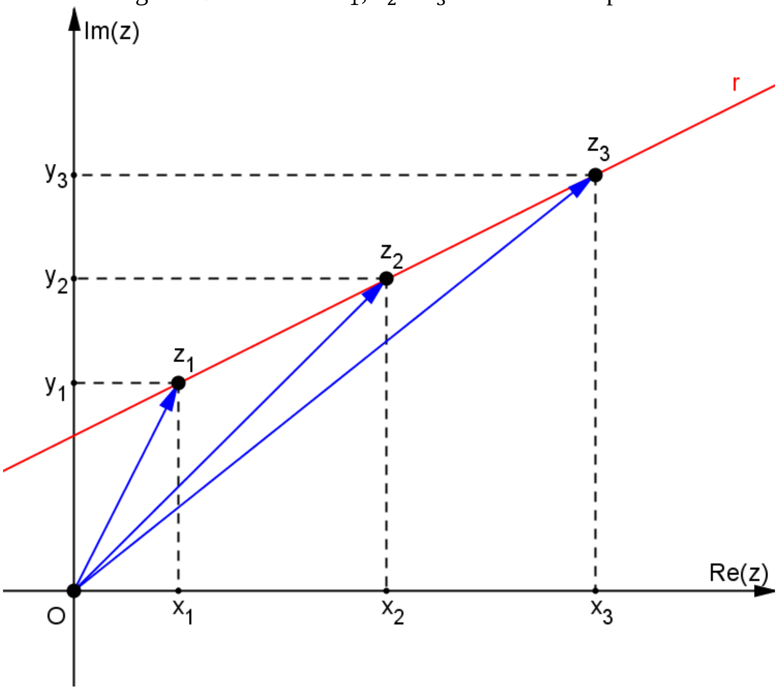
Pelo primeiro postulado de Euclides (sobre Geometria), a partir de dois pontos distintos podemos traçar uma única reta, ou seja, a reta que contém estes dois pontos, como mostra a Figura 1.

Chamaremos essa reta de r. Tomando-se agora um ponto arbitrário dessa reta da forma $z = (x, y)$, afixo do número complexo $z = x + yi$, este será colinear a z_1 e z_2.

Sabendo que os três pontos distintos são colineares, qual será a consequência para este caso?

Antes de darmos continuidade ao estudo da equação da reta, vamos responder a esta pergunta, considerando inicialmente três pontos distintos e colineares no plano complexo, como mostrado na figura 2.

Figura 2: Colineares z_1, z_2 e z_3 no Plano Complexo



Fonte: próprio autor

Observa-se, ainda, na figura 2, que os três números complexos contidos no Plano, podem ser representados também pelos vetores, cada um com origem coincidindo com a origem do plano de Argand-Gauss, e extremidade nos seus respectivos afixos. “Três pontos distintos z_1, z_2 e z_3 são colineares se, e somente se, $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.” (FEITOSA, 2013, p.40).

Para a demonstração dessa afirmação, consideremos primeiramente como hipótese que os três pontos z_1, z_2 e z_3 no Plano Complexo são colineares. A nossa tese será $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

Pela figura 2, podemos observar que:

$$\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1 z_3} = \overrightarrow{Oz_3} \Leftrightarrow z_1 + \overrightarrow{z_1 z_3} = z_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{z_1 z_3} = z_3 - z_1 \quad (*)$$

$$\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow z_1 + \overrightarrow{z_1z_2} = z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{z_1z_2} = z_2 - z_1 \quad (**)$$

O vetor $\overrightarrow{z_1z_3}$ tem origem em z_1 e extremidade em z_3, e o vetor $\overrightarrow{z_1z_2}$ tem origem em z_1 e extremidade em z_2. Como z_3 é um ponto da reta r que contém z_1 e z_2, podemos também observar da figura 2, que o vetor $\overrightarrow{z_1z_3}$ é um múltiplo real de $\overrightarrow{z_1z_2}$, ou seja, existe um número real que chamaremos de k, tal que $\overrightarrow{z_1z_3} = k \cdot \overrightarrow{z_1z_2}$.

Substituindo $(*)$ e $(**)$ nessa igualdade, teremos:

$$z_3 - z_1 = k \cdot (z_2 - z_1)$$

Como z_1 e z_2 são distintos, $z_2 - z_1 \neq 0$. Podemos dividir os dois membros da última igualdade por $z_2 - z_1$.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k, k \in \mathbb{R}$$

Conclui-se então que $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ é um número real. Como queríamos demonstrar.

Reciprocamente,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k, \text{ ou seja,}$$

$$z_3 - z_1 = k \cdot (z_2 - z_1)$$

Isso nos diz que $(z_3 - z_1)$ é paralelo a $(z_2 - z_1)$. Como ambos têm a mesma origem, a saber, z_1, então $(z_3 - z_1)$ e $(z_2 - z_1)$ são colineares. Conclui-se que z_1, z_2 e z_3 são colineares.■

Voltemos ao estudo da equação de uma reta no Plano Complexo. Conforme considerado, z é um ponto arbitrário de r e colinear a z_1 e a z_2, logo, a seguinte condição deve ocorrer

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$$

Como $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ é um número real, podemos escrever $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)}$. Assim, utilizando as propriedades do conjugado dos números complexos, vem que:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z} - \bar{z_1}}{\bar{z_2} - \bar{z_1}}$$

Portanto,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z_1}}{\bar{z_2} - \bar{z_1}}$$

Desenvolvendo essa igualdade, temos:

$$(z - z_1)(\bar{z_2} - \bar{z_1}) = (z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z_1}) \Rightarrow (\bar{z_2} - \bar{z_1})(z - z_1) - (\bar{z} - \bar{z_1})(z_2 - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z_2}z - \bar{z_2}z_1 - \bar{z_1}z + \bar{z_1}z_1 - \bar{z}z_2 + \bar{z}z_1 + \bar{z_1}z_2 - \bar{z_1}z_1 = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{z_2} - \bar{z_1})z - (z_2 - z_1)\bar{z} + \bar{z_1}z_2 - \bar{z_2}z_1 = 0$$

Multiplicando por -1, ambos os membros da equação, obtemos:

$$-(\bar{z_2} - \bar{z_1})z + (z_2 - z_1)\bar{z} - \bar{z_1}z_2 + \bar{z_2}z_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z_2} - \bar{z_1})z + \bar{z_2}z_1 - \bar{z_1}z_2 = 0 \qquad (***)$$

Tomando-se $\gamma = (\bar{z_2} - \bar{z_1})$ e $\beta = \bar{z_2}z_1 - \bar{z_1}z_2$, obtém-se $\bar{\gamma} = (z_2 - z_1)$, pois,

$\bar{\gamma} = \overline{(\bar{z_2} - \bar{z_1})} = (\bar{\bar{z_2}} - \bar{\bar{z_1}}) = (z_2 - z_1)$. Assim, temos a seguinte equação

$$\bar{\gamma}\bar{z} - \gamma z + \beta = 0 \qquad (1)$$

Porém, se tivéssemos tomado $\gamma = (z_2 - z_1)$ e $\beta = \bar{z_2}z_1 - \bar{z_1}z_2$, obteríamos $\bar{\gamma} = (\bar{z_2} - \bar{z_1})$, pois,

$\bar{\gamma} = \overline{(z_2 - z_1)} = (\bar{z_2} - \bar{z_1})$. Logo, chegaríamos à equação a seguir:

$$\gamma\bar{z} - \bar{\gamma}z + \beta = 0 \qquad (2)$$

E essas são duas possibilidades de equações da reta no Plano Complexo que passa pelos pontos z_1 e z_2, em que $\gamma \in \mathbb{C}$, β é um imaginário puro e $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Multiplicando-se agora, os dois membros da equação $(***)$ pela unidade imaginária i, vem que:

$$i(z_2 - z_1)\bar{z} - i(\bar{z_2} - \bar{z_1})z + i(\bar{z_2}z_1 - \bar{z_1}z_2) = 0$$

Tomando-se $\alpha = -i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$ e $\delta = i(\bar{z}_2 z_1 - \bar{z}_1 z_2)$, obtém-se $\bar{\alpha} = i(z_2 - z_1)$, pois,

$\bar{\alpha} = -\overline{\iota(\overline{z_2} - \overline{z_1})} = \overline{-\iota}\overline{(\overline{z_2} - \overline{z_1})} = \overline{-\iota}(\overline{\overline{z_2}} - \overline{\overline{z_1}}) = i(z_2 - z_1)$. Logo, chegaremos à seguinte equação

$$\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \delta = 0 \qquad (3)$$

Mas, se tivéssemos tomado $\alpha = i(z_2 - z_1)$ e $\delta = i(\bar{z}_2 z_1 - \bar{z}_1 z_2)$, obteríamos $\bar{\alpha} = -i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$, pois $\bar{\alpha} = \overline{\iota(z_2 - z_1)} = \bar{\iota}\overline{(z_2 - z_1)} = -i(\overline{z_2} - \overline{z_1})$. chegaríamos à equação a seguir:

$$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \delta = 0 \qquad (4)$$

E essas são outras duas possibilidades de representação da reta, no plano complexo, que passa pelos pontos z_1 e z_2, em que $\alpha \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

É importante ressaltar aqui, que as equações encontradas são equivalentes, possuem o mesmo valor para os coeficientes, angular e linear (assuntos que serão abordados posteriormente), apenas mudam as fórmulas para os cálculos dos mesmos. Qualquer uma das equações (1), (2), (3) ou (4) pode ser usada como relação algébrica de uma reta no plano complexo que passa pelos pontos z_1, z_2 e z. Adotaremos, neste texto, a equação (4).

Observação 1: Vejamos agora uma outra maneira de se obter a equação de uma reta contida no plano complexo.

Considerando a igualdade

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$$

e fazendo-se cálculos convenientes, chegaremos à seguinte equação:

$$(z - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = (z_2 - z_1)(\bar{z} - \overline{z_1}).$$

Essa última equação pode ser escrita sob a forma de determinante, como mostrado a seguir:

$$\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \overline{z_1} \\ z_2 - z_1 & \overline{z_2} - \overline{z_1} \end{vmatrix} = 0$$

Ou, equivalentemente, sob a forma de determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos demonstrar que essa equivalência anterior é verdadeira. Optamos para tal demonstração, utilizar a regra de Chió[3] (1813-1871). Nessa regra, é conveniente que o elemento da matriz a_{11} seja igual a 1. Para isso, utilizaremos algumas propriedades de determinantes.

Trocando-se a 1ª coluna com a 3ª coluna, e em seguida, trocando-se a 1ª linha com a 2ª linha, temos:

$$-det\begin{vmatrix} 1 & \bar{z} & z \\ 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow det\begin{vmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \bar{z} & z \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando-se agora, a regra de Chió, vem que:

$$det\begin{vmatrix} \bar{z} - 1 \cdot \overline{z_1} & z - 1 \cdot z_1 \\ \overline{z_2} - 1 \cdot \overline{z_1} & z_2 - 1 \cdot z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Trocando-se a 1ª coluna com a 2ª coluna, obtemos:

$$-det\begin{vmatrix} z - 1 \cdot z_1 & \bar{z} - 1 \cdot \overline{z_1} \\ z_2 - 1 \cdot z_1 & \overline{z_2} - 1 \cdot \overline{z_1} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow det\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \overline{z_1} \\ z_2 - z_1 & \overline{z_2} - \overline{z_1} \end{vmatrix} = 0$$

Logo, a equivalência é verdadeira.

Desenvolvendo o determinante acima, chegaremos a

$$(z - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = (z_2 - z_1)(\bar{z} - \overline{z_1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$$

E, foi justamente dessa última igualdade que obtivemos as equações da reta. Logo, podemos obter a equação de uma reta contida no plano complexo desenvolvendo o determinante.

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[3] Era italiano e chamava-se Felice Chió. Nasceu em Crescentino em 1813 e morreu em Turim, em 1871. Foi professor da academia militar e da universidade de Turim. (DANTE, 2012, p. 141).

Nessa matriz, na primeira coluna estão os números complexos, z_1 e z_2 conhecidos, e z arbitrário. Na segunda coluna estão os conjugados dos respectivos números complexos da primeira coluna.

Observação 2: Por que $\beta = (\overline{z_2}z_1 - \overline{z_1}z_2)$ das equações (1) e (2) é um imaginário puro?

Para provar que β é um imaginário puro das equações (1) e (2), basta mostrar que $\bar{\beta} = -\beta$. Temos:

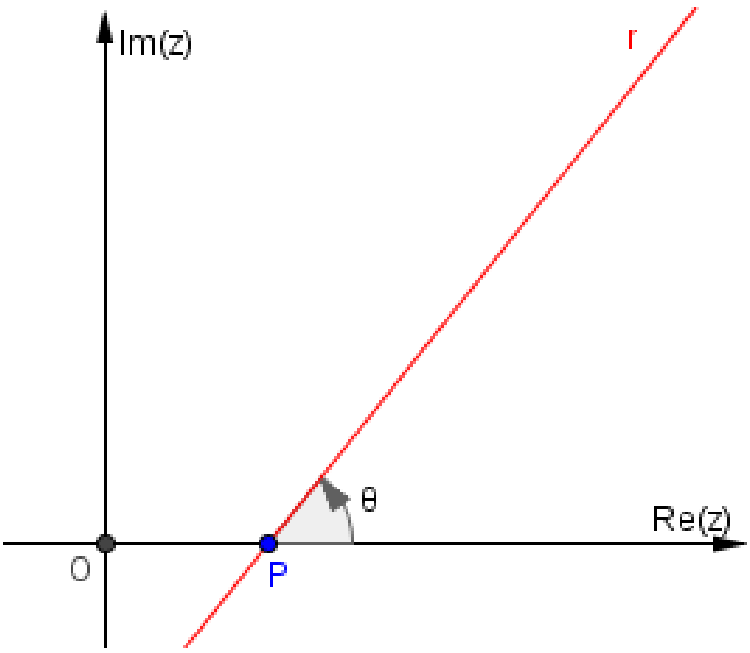
$$\bar{\beta} = \overline{(\overline{z_2}z_1 - \overline{z_1}z_2)} = (\overline{\overline{z_2}}\overline{z_1} - \overline{\overline{z_1}}\overline{z_2}) = (z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2}) = -\beta$$

Como queríamos demonstrar. Logo, β é imaginário puro. Sendo $\delta = i\beta$ e β é um imaginário puro, então δ é real.

2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Consideremos, agora, no plano complexo, uma reta não paralela ao eixo imaginário, que intercepta o eixo real no ponto P, e forma com esse mesmo eixo um ângulo, cuja medida é θ, com $0° \leq \theta \leq 180°$.

Figura 3: Reta r no Plano Complexo de inclinação θ

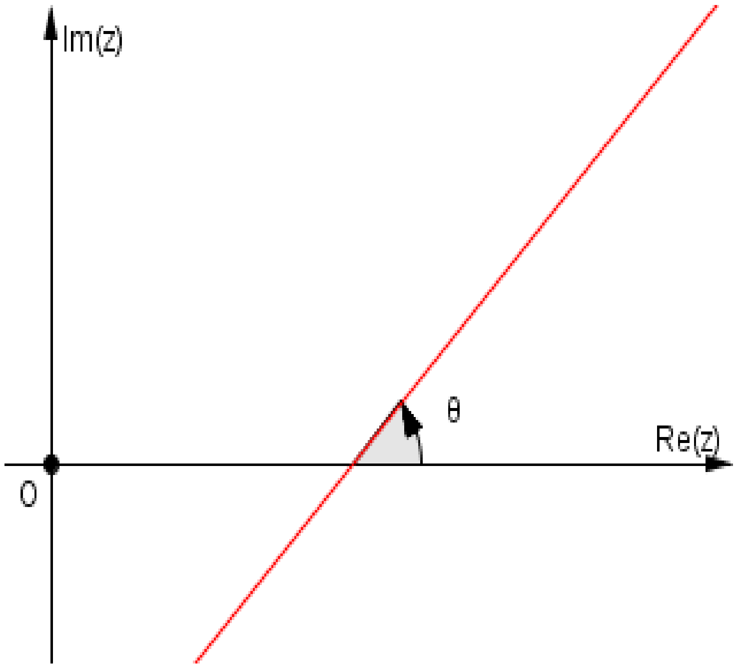


Fonte: próprio autor

Inclinação de uma reta no plano complexo será o ângulo de medida θ(teta), como mostra a figura 3, formado agora, entre o eixo real ($Re(z)$) e a reta r, partindo-se do eixo real em direção à reta no sentido anti-horário, já o coeficiente angular de uma reta, será definido como sendo um número também real que indicaremos por m tal que $m = tg(\theta)$. Assim, estas duas definições são equivalentes as definições de inclinação e coeficiente angular de uma reta do plano cartesiano.

- **Primeiro caso**

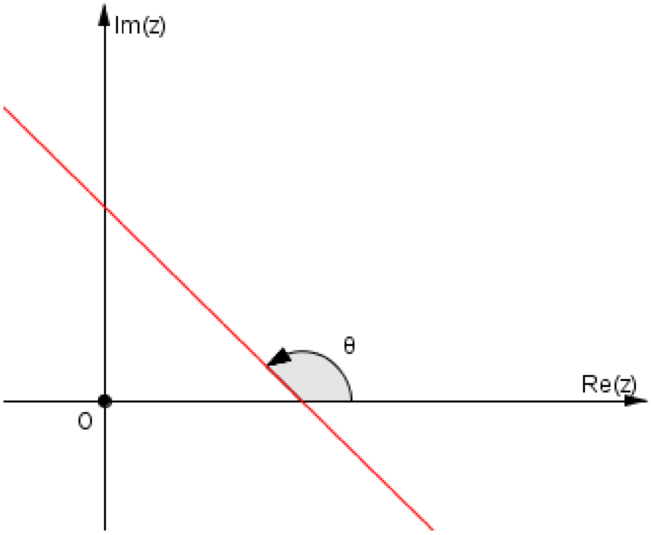
Figura 4: θ é agudo, implica $m = tg\theta > 0$



Fonte: próprio autor

- **Segundo caso**

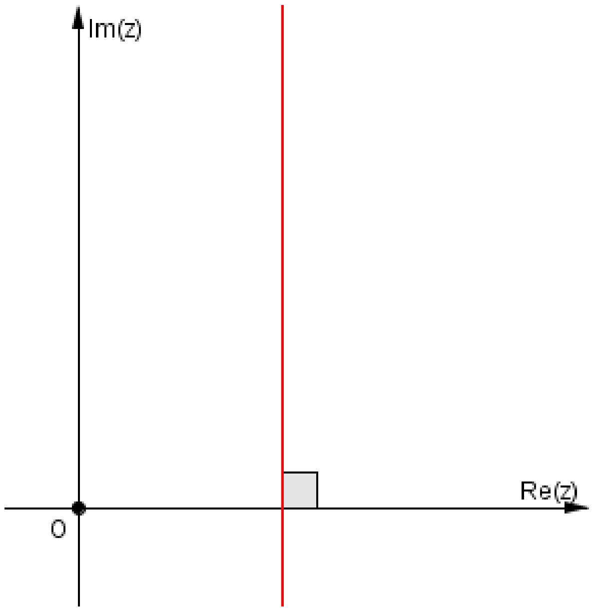
Figura 5: θ é obtuso, implica $m = tg\theta < 0$



Fonte: próprio autor

- **Terceiro caso**

Figura 6: θ é reto. Como não existe $tg\ 90°$, logo não existirá coeficiente angular da reta.

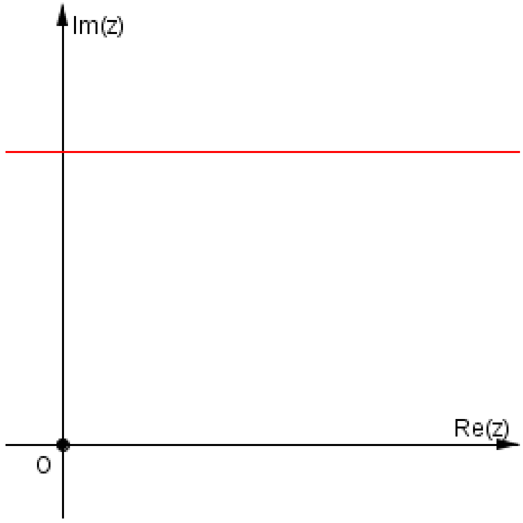


Fonte: próprio autor

Caso a reta seja paralela ao eixo real, teremos então seu coeficiente angular nulo, ou seja, $m = 0$. Segue na figura a seguir uma ilustração para este caso.

- **Quarto caso**

Figura 7: $\theta = 0°$, implica $m = tg\ 0° = 0$



Fonte: próprio autor

2.2.1 Cálculo do coeficiente angular da reta a partir de sua equação

Foi comentado em 2.1 que as equações (1), (2), (3) ou (4) são equivalentes e possuem mesmo valor para o coeficiente angular, apenas diferem na fórmula para calcular. Visto que são quatro as equações que escrevem uma reta no Plano Complexo, vamos calcular o coeficiente angular em cada caso.

- Equação da reta $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \delta = 0$.

Substituindo na equação z por $x + yi$, chegaremos a

$$\bar{\alpha}(x - yi) + \alpha(x + yi) + \delta = 0$$

Fazendo a distributiva de $\bar{\alpha}$ e α, vem que

$$\bar{\alpha}x - \bar{\alpha}yi + \alpha x + \alpha yi + \delta = 0$$

Colocando x e y em evidência da última equação, obtemos

$$(\bar{\alpha} + \alpha)x + y(\alpha - \bar{\alpha})i + \delta = 0$$

Isolamos agora o y

$$y = -\frac{(\bar{\alpha} + \alpha)x}{(\alpha - \bar{\alpha})i} - \frac{\delta}{(\alpha - \bar{\alpha})i}$$

Consideremos o coeficiente de x, e façamos algumas manipulações algébricas

$$-\frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - \bar{\alpha})} \cdot \frac{(-i)}{-i^2} = \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - \bar{\alpha})} i$$

De acordo com o que foi deduzido a partir da equação, o coeficiente angular será

$$m = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} i$$

- Equação $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \delta = 0$,

Substituindo z por $x + yi$

$$\alpha(x - yi) + \bar{\alpha}(x + yi) + \delta = 0$$

Fazendo-se a distributiva de α e $\bar{\alpha}$, e em seguida, colocando x e y em evidência, temos:

$$(\alpha + \bar{\alpha})x + (-\alpha + \bar{\alpha})iy + \delta = 0$$

Isolando o y

$$y = -\frac{(\alpha + \bar{\alpha})x}{(-\alpha + \bar{\alpha})i} - \frac{\delta}{(-\alpha + \bar{\alpha})i}$$

Considerando o coeficiente de x e fazendo algumas manipulações algébricas

$$m = -\frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - \bar{\alpha})} i$$

E esse valor é o coeficiente angular da reta de equação $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \delta = 0$.

Analogamente ao que foi deduzido nas equações (3) e (4) acima para encontrar o cálculo do coeficiente angular, façamos respectivamente também com as equações (1) e (2).

- Equação $\bar{\gamma}\bar{z} - \gamma z + \beta = 0$, Substituindo z por $x + yi$

$$\bar{\gamma}(x - yi) - \gamma(x + yi) + \delta = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}x - \bar{\gamma}yi - \gamma x - \gamma yi + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\gamma + \bar{\gamma})x + (-\gamma - \bar{\gamma})yi + \beta = 0$$

Isolando o y

$$y = -\frac{(-\gamma + \bar{\gamma})x}{(-\gamma - \bar{\gamma})i} - \frac{\beta}{(-\gamma - \bar{\gamma})}$$

Manipulando algebricamente o coeficiente de x

$$-\frac{(-\gamma + \bar{\gamma})}{(-\gamma - \bar{\gamma})i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{(-\gamma + \bar{\gamma})i}{(-\gamma - \bar{\gamma})} = \frac{(-\gamma + \bar{\gamma})i}{-(\gamma + \bar{\gamma})} = \frac{-(\gamma - \bar{\gamma})i}{-(\gamma + \bar{\gamma})} = \frac{(\gamma - \bar{\gamma})i}{(\gamma + \bar{\gamma})}$$

$$m = \frac{(\gamma - \bar{\gamma})i}{(\gamma + \bar{\gamma})}$$

- Equação $\gamma\bar{z} - \bar{\gamma}z + \beta = 0$

Substituindo z por $x + yi$

$$\gamma(x - yi) - \bar{\gamma}(x + yi) + \beta = 0 \Rightarrow \gamma x - \gamma yi - \bar{\gamma}x - \bar{\gamma}yi + \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma - \bar{\gamma})x + (-\gamma - \bar{\gamma})iy + \beta = 0$$

Isolando o y

$$y = -\frac{(\gamma - \bar{\gamma})x}{(-\gamma - \bar{\gamma})i} - \frac{\beta}{(-\gamma - \bar{\gamma})i}$$

Manipulando algebricamente o coeficiente de x

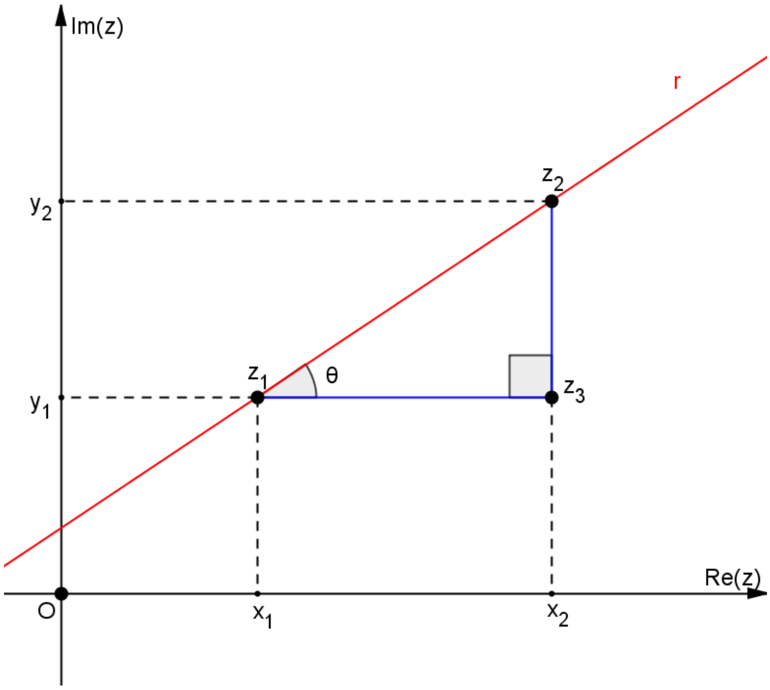
$$-\frac{(\gamma - \bar{\gamma})}{(-\gamma - \bar{\gamma})i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{(\gamma - \bar{\gamma})}{(-\gamma - \bar{\gamma})}i = -\frac{(\gamma - \bar{\gamma})}{(\gamma + \bar{\gamma})}i$$

$$m = -\frac{(\gamma - \bar{\gamma})}{(\gamma + \bar{\gamma})}i$$

2.2.2 Cálculo do coeficiente angular da reta a partir de seus dois pontos

A partir de dois pontos, podemos calcular o valor do coeficiente angular m da reta sob o ponto de vista geométrico utilizando a tangente trigonométrica de sua inclinação. Veremos a seguir como fica esse cálculo. Inicialmente, consideremos dois pontos distintos e contidos no Plano, $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, afixos dos respectivos números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, e a reta determinada por eles.

Figura 8: Triângulo retângulo $\Delta z_1 z_3 z_2$



Fonte: próprio autor

Tomando-se um terceiro ponto $z_3 = (x_2, y_1)$, afixo do número complexo $z_3 = x_2 + y_1 i$ e não colinear a z_1 e a z_2, temos um triângulo retângulo, reto em z_3, mostrado na figura 8.

Projetemos o segmento $\overline{z_1 z_2}$ sobre os eixos do plano complexo e em seguida, apliquemos a trigonometria.

Sobre o eixo real $(Re(z))$: $\overline{x_1 x_2} = \overline{z_1 z_2} \cdot \cos(\theta)$ $\quad (a)$

Sobre o eixo imaginário $(Im(z))$: $\overline{y_1 y_2} = \overline{z_1 z_2} \cdot \cos(90° - \theta) = \overline{z_1 z_2} \cdot sen(\theta)$ $\quad (b)$

Dividindo-se (b) por (a), temos:

$$\frac{\overline{y_1y_2}}{\overline{x_1x_2}} = \frac{\overline{z_1z_2} \cdot sen(\theta)}{\overline{z_1z_2} \cdot \cos(\theta)} = tg(\theta)$$

Portanto,

$$m = tg(\theta) = \frac{\overline{y_1y_2}}{\overline{x_1x_2}} = \frac{Im(z_2 - z_1)}{Re(z_2 - z_1)}$$

Faremos agora um exemplo para entender melhor o que está sendo feito no cálculo do coeficiente angular de uma reta. Consideremos dois pontos distintos, $z_1 = (-2, -1)$ e $z_2 = (3, 5)$, afixos dos respectivos números complexos, $z_1 = -2 - i$ e $z_2 = 3 + 5i$.

Vamos encontrar a equação da reta determinada por z_1e z_2 utilizando:

$$det\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ -2 - i & -2 + i & 1 \\ 3 + 5i & 3 - 5i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculemos esse determinante aplicando a regra prática de Sarrus[4] (1798-1861).

$$\left|\begin{matrix} z & \bar{z} & 1 \\ -2 - i & -2 + i & 1 \\ 3 + 5i & 3 - 5i & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} z & \bar{z} \\ -2 - i & -2 + i \\ 3 + 5i & 3 - 5i \end{matrix}$$

$$-(3 + 5i) \cdot (-2 + i) - (3 - 5i) \cdot z - (-2 - i) \cdot \bar{z} + (-2 + i) \cdot z + (3 + 5i)\bar{z} + (-2 - i) \cdot (3 - 5i) = 0$$

Colocando em evidência $\bar{z}$ e z da expressão acima, vem que:

$$(5 + 6i)\bar{z} + (-5 + 6i)z + (-2 - i) \cdot (3 - 5i) - (3 + 5i) \cdot (-2 + i) = 0$$

Façamos agora os cálculos dos termos independentes

$$(-2 - i) \cdot (3 - 5i) - (3 + 5i) \cdot (-2 + i) = (-11 + 7i) - (-11 - 7i) = 14i$$

---

4 Chamava-se Pierre Frédéric Sarrus. Nasceu em Saint Affrique, em 1798 e morreu na mesma cidade, em 1861. Foi professor na universidade francesa de Estrasburgo durante trinta anos e escreveu a famosa regra de Sarrus por volta de 1833. Foi premiado pela academia francesa de ciências de 1842. (DANTE, 2012, p. 141).

Temos assim, a seguinte equação:

$$(5+6i)\bar{z}+(-5+6i)z+14i=0 \Rightarrow (5+6i)\bar{z}-(5-6i)z+14i=0$$

Observe que, os coeficientes de $\bar{z}$ e z têm sinais opostos, e o termo independente é um imaginário puro. Mas, conforme foi comentado em 2.1, a equação que optamos para utilizar neste texto foi a (4). Nela, é preciso que os coeficientes de $\bar{z}$ e z sejam positivos e o termo independente seja um número real. E agora, o que fazer?

Basta multiplicar ambos os membros da equação pela unidade imaginária i, obtendo:

$$i(5+6i)\bar{z}-i(5-6i)z+(14i)i=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-6+5i)\bar{z}+(-6-5i)z-14=0$$

Dessa equação, temos: $\alpha=(-6+5i)$, $\bar{\alpha}=(-6-5i)$ e $\delta=-14$.

Encontrando o valor do coeficiente angular da reta por meio da fórmula

$$m=-\frac{(\alpha+\bar{\alpha})}{(\alpha-\bar{\alpha})}i$$

$$m=-\frac{[(-6+5i)+(-6-5i)]}{(-6+5i)-(-6-5i)}i=-\frac{(-12)}{10i}i=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

Utilizando também

$$m=tg(\theta)=\frac{Im(z_2-z_1)}{Re(z_2-z_1)}$$

$(z_2-z_1)=5+6i$. Logo, $Im(z_2-z_1)=6$ e $Re(z_2-z_1)=5$.

Portanto,

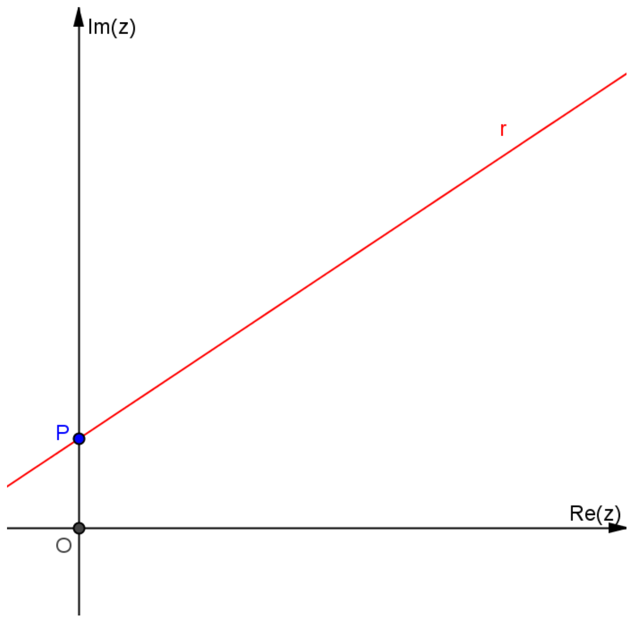
$$m=\frac{6}{5}$$

Esse valor encontrado é o coeficiente angular da reta. Utilizamos as duas fórmulas que deduzimos tanto pela equação da reta, quanto a partir de dois pontos distintos contidos no plano complexo.

2.3 Coeficiente linear da reta

Em Geometria Analítica Plana, o coeficiente linear da reta contida no plano cartesiano será a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo Oy. Vejamos agora como será o coeficiente linear de uma reta no plano complexo. Primeiro, consideremos uma reta contida neste plano e não paralela ao eixo imaginário.

Figura 9: Reta r no Plano Complexo



Fonte: Próprio autor

No plano complexo, o coeficiente linear de uma reta será a parte imaginária do ponto onde a reta intercepta o eixo dos números imaginários puros $(Im(z))$. Na figura 9, temos uma ilustração para esse caso, observando-se que o ponto que indicamos por P é comum a reta e ao eixo. Dizer que a reta intercepta o eixo imaginário, significa dizer que a parte real do ponto é nula, ou seja, $R(z) = 0$, assim o ponto será da forma $P = (0, y)$. Vamos tentar calcular o coeficiente linear da reta de equação (4).

Consideremos a equação: $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \delta = 0$.

Substituindo-se z por $x + yi$ e manipulando algebricamente de forma conveniente, obtemos:

$$\alpha(x - yi) + \bar{\alpha}(x + yi) + \delta = 0 \Rightarrow \alpha x - \alpha yi + \bar{\alpha}x + \bar{\alpha}yi + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha + \bar{\alpha})x + (-\alpha + \bar{\alpha})iy + \delta = 0$$

Como a parte real é nula, logo, o x é igual a zero

$$(-\alpha + \bar{\alpha})iy + \delta = 0$$

Isolando a parte imaginária y, vem que:

$$y = -\frac{\delta}{(-\alpha + \bar{\alpha})i} = -\frac{\delta}{(-\alpha + \bar{\alpha})} \cdot \frac{1}{i}$$

Multiplicando $\frac{1}{i}$ pelo conjugado do denominador, obtemos:

$$y = -\frac{\delta}{(-\alpha + \bar{\alpha})} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{\delta}{(-\alpha + \bar{\alpha})} \cdot i$$

Logo, o coeficiente linear da reta será $\frac{\delta}{(-\alpha+\bar{\alpha})} \cdot i$, e o ponto onde a mesma intercepta o eixo imaginário será da forma $P = \left(0, \frac{\delta}{(-\alpha+\bar{\alpha})} \cdot i\right)$.

Faremos agora um exemplo para entender melhor o que está sendo feito no cálculo do coeficiente linear de uma reta. Consideremos dois pontos distintos no plano de Argand-Gauss(Plano Complexo), $z_1 = (-2, -3)$ e $z_2 = (3, 4)$, afixos dos respectivos números complexos $z_1 = -2 - 3i$ e $z_2 = 3 + 4i$, e a reta determinada por eles.

Primeiro, vamos encontrar a equação da reta determinada por z_1 e z_2 utilizando

$$det \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ -2 - 3i & -2 + 3i & 1 \\ 3 + 4i & 3 - 4i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando-se a regra prática de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ -2 - 3i & -2 + 3i & 1 \\ 3 + 4i & 3 - 4i & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} z & \bar{z} \\ (-2 - 3i) & (-2 + 3i) \\ (3 + 4i) & (3 - 4i) \end{matrix}$$

$$-(3+4\mathrm{i})\cdot(-2+3\mathrm{i})-(3-4\mathrm{i})\cdot \mathrm{z}-(-2-3\mathrm{i})\cdot\bar{z}+z\cdot(-2+3i)+\bar{z}\cdot(3+4i)+(-2-3i)\cdot(3-4i)=0$$

Colocando em evidência $\bar{z}$ e z da expressão acima, vem que:

$$(5+7i)\cdot\bar{z}+(-5+7i)\cdot z+(-2-3i)\cdot(3-4i)-(3+4i)\cdot(-2+3i)=0$$

Façamos agora os cálculos dos termos independentes

$$(-2-3i)\cdot(3-4i)-(3+4i)\cdot(-2+3i)=(-18-i)-(-18+i)=-2i$$

Temos assim, a seguinte equação:

$$(5+7i)\cdot\bar{z}+(-5+7i)\cdot z-2i=0\Rightarrow(5+7i)\cdot\bar{z}-(5-7i)\cdot z-2i=0$$

Para obter a equação anterior no formato da equação (4), do capítulo 1, multipliquemos ambos os seus dois membros pela unidade imaginária i, obtendo:

$$i\cdot(5+7i)\cdot\bar{z}-i\cdot(5-7i)\cdot z+i\cdot(-2i)=0\cdot i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-7+5i)\cdot\bar{z}+(-7-5i)\cdot z+2=0$$

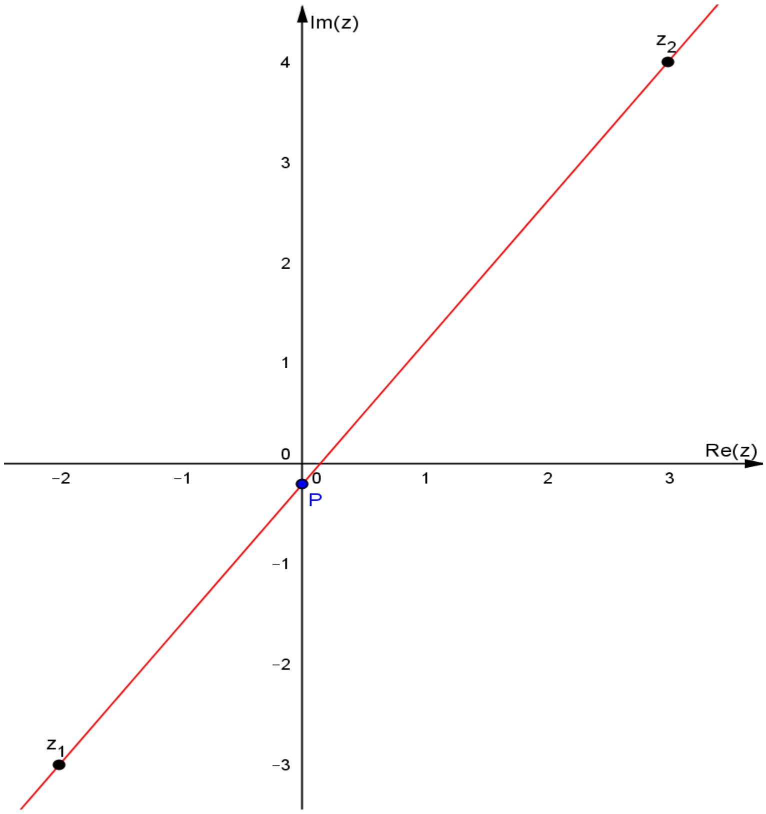
Dessa equação, temos: $\alpha=(-7+5i)$, $\bar{\alpha}=(-7-5i)$ e $\delta=2$

Logo,

$$\frac{\delta}{(-\alpha+\bar{\alpha})}\cdot i=\frac{2}{[-(-7+5i)+(-7-5i)]}\cdot i=\frac{2}{-10i}\cdot i=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$$

E esse valor encontrado é o coeficiente linear da reta. Temos na figura 10 a seguir, uma ilustração para este exemplo.

Figura 10: Exemplo para o coeficiente linear da reta



Fonte: próprio autor

O ponto tem a forma $P = \left(0, -\frac{1}{5}\right)$. Lembrando que o valor do coeficiente linear é a segunda coordenada do ponto.

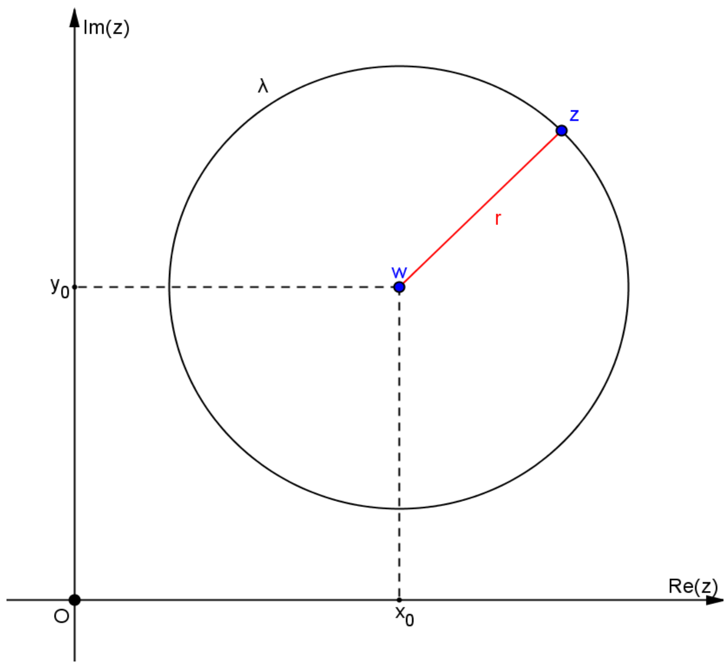
3 CIRCUNFERÊNCIA

Neste capítulo, partiremos de uma circunferência no plano de Argand-Gauss para estudar sua equação, e a partir dela obter seu centro e seu raio. Para tal intento, vamos considerar a definição geral de circunferência a seguir: "Dados um ponto C, pertencente a um plano α, e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto C. Circunferência = $\{P \in \alpha : PC = r\}$." (IEZZI, 2005, p.118).

Nesse caso, o centro e o raio serão, respectivamente, C e r. O ponto P é arbitrário. Vamos, agora, considerar a circunferência no plano de Argand-Gauss. Dado um número complexo fixo neste Plano, da forma $z = (x_o, y_0)$, afixo do número $z = x_0 + y_0 i$, e uma distância r não nula, "uma circunferência nesse plano é o lugar geométrico de todos os pontos $w = x + y$i cuja distância a z é uma constante fixa $r > 0$, a qual é denominada raio da circunferência. O conjunto que representa essa circunferência é $\{w \in \mathbb{C}: |w - z| = r\}$." (CAON, 2013, p.57).

Nesse caso, o centro e o raio serão, respectivamente, z e r. O ponto w é arbitrário. Porém, nesse trabalho adotaremos que o centro seja w e z como o ponto arbitrário, assim teremos a seguinte equação $|z - w| = r$. Vejamos na figura 11 a seguir a circunferência que chamaremos de λ (lambda).

Figura 11: Circunferência $\boldsymbol{\lambda}$ no Plano Complexo de centro w e raio r



Fonte: próprio autor

Uma observação importante é que no caso particular de a circunferência estar na origem, ou seja, $w = 0 + 0i$, sua equação será $|z| = r$.

De fato,

$$|z - w| = r \Rightarrow |z - (0 + 0i)| = r \Rightarrow |z - 0| = r \Rightarrow |z| = r$$

Em que $|z|$ indica o módulo do número complexo z, e sob o ponto de vista geométrico é interpretado como sendo a distância de seu afixo à origem do plano de Argand-Gauss.

3.1 Equação da circunferência no plano complexo

Da Geometria Analítica Plana, uma circunferência do plano cartesiano pode ser representada por sua equação na forma geral, ou seja, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Pensando agora no plano complexo uma Circunferência contida nele, será que é possível escrever sua equação de forma parecida com a do plano cartesiano?

Para responder tal pergunta, deduziremos a seguinte equação que representa uma circunferência no Plano Complexo

$$|z - w| = r$$

Elevando ambos os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$|z - w|^2 = r^2$$

Do primeiro membro podemos fazer:

$$|w - z|^2 = (z - w)\overline{(z - w)} = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}).$$

Logo,

$$(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = r^2$$

Ainda do primeiro membro e fazendo-se as distributivas, vem que:

$$z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} - r^2 = 0.$$

Tomando-se $\alpha = -\overline{w}$ e $\beta = w\overline{w} - r^2$, temos que $\overline{\alpha} = -w$, pois $\overline{\alpha} = \overline{-\overline{w}} = -w$.

Assim, obtemos a seguinte equação:

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha}\overline{z} + \beta = 0 \qquad (5)$$

E essa é a equação da circunferência no plano de Argand-Gauss, em que $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

3.2 Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação

Pela equação $|z - w| = r$, sob o ponto de vista algébrico é simples perceber qual será o centro e o raio da circunferência. O centro e o raio serão, respectivamente, w e r.

Pois, por exemplo, dada a equação $|z - (2 + 3i)| = 5$ temos que pelo ponto de vista algébrico, o centro e o raio serão, respectivamente, $(2 + 3i)$ e 5. Agora, se a equação for $|z + (2 + 3i)| = 5$, para coloca-la na forma $|z - w| = r$, primeiro fazemos $|z - (-2 - 3i)| = 5$. Logo, o centro será

$(-2 - 3i)$ e o raio será 5.

Mas, se tivermos uma equação de circunferência, escrita na forma

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha}\overline{z} + \beta = 0$$

Como podemos obter o centro e o raio a partir dela?

Vejamos:

Da relação

$$\beta = w\overline{w} - r^2$$

Sabemos que r é o raio. Logo, podemos encontrar uma expressão para ele em função de β e w.

$$\beta = w\overline{w} - r^2 \Rightarrow -r^2 = \beta - w\overline{w}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1, temos:

$$r^2 = -\beta + w\overline{w}$$

Extraindo a raiz quadrada, vem que:

$$r = \pm\sqrt{-\beta + w\overline{w}}$$

Como não existe raio negativo, logo a expressão para r será:

$$r = +\sqrt{-\beta + w\overline{w}} \Rightarrow r = +\sqrt{w\overline{w} - \beta}$$

Lembrando que $w = -\bar{\alpha}$, podemos ainda escrever a expressão para o raio como sendo

$$r = +\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$$

E o centro?

O centro será o w, em que $w = -\bar{\alpha}$.

Como exemplo, consideremos a equação de uma circunferência

$$z\bar{z} + (2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} + 4 = 0$$

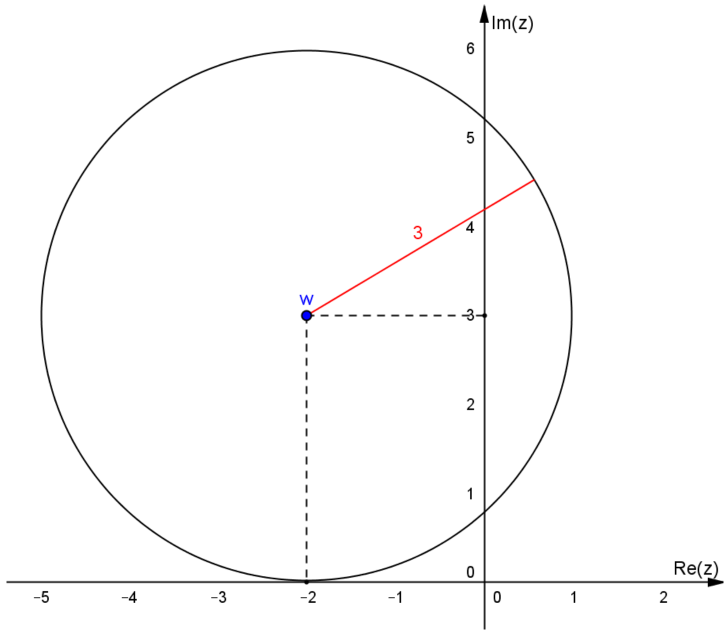
Sendo $\alpha = (2 + 3i)$, $\bar{\alpha} = (2 - 3i)$ e $\beta = 4$. Vamos calcular os valores do centro e do raio.

$$r = \sqrt{(2 + 3i)(2 - 3i) - 4} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$w = -(2 - 3i) = -2 + 3i$$

Assim, o centro será $-2 + 3i$ e o raio será 3. Segue na figura 12 uma ilustração para este exemplo.

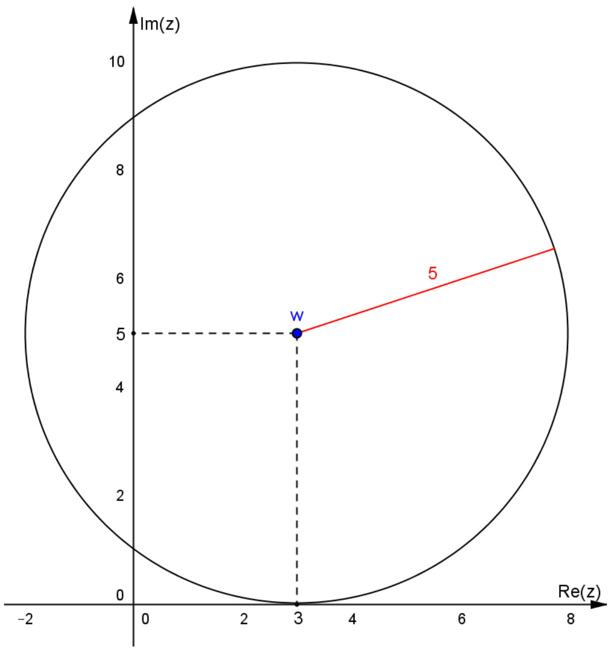
Figura 12: Circunferência no Plano de Argand-Gauss de centro $-2+3i$ e raio 3



Fonte: próprio autor

Consideremos a seguir, outro exemplo em que queiramos, agora, a partir do ponto de vista geométrico, encontrar a equação de uma circunferência que vai descrevê-la algebricamente.

Figura 13: Circunferência no Plano de Argand-Gauss de centro $3+5i$ e raio 5



Fonte: próprio autor

A partir dessa Circunferência, mostrada na figura 13, uma equação da forma $|z - w| = r$ é

$$|z - (3 + 5i)| = 5$$

Quadrando os dois membros dessa equação, temos:

$$|z - (3 + 5i)|^2 = 5^2$$

Do primeiro membro podemos fazer

$$(z - (3 + 5i)) \cdot \overline{(z - (3 + 5i))}$$

Logo,

$$\big(z - (3 + 5i)\big) \cdot \overline{\big(z - (3 + 5i)\big)} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(z - (3 + 5i)\big) \cdot \big(\bar{z} - (3 - 5i)\big) = 25$$

Desenvolvendo-se as distributivas e fazendo-se em seguida os cálculos convenientes, chegaremos a:

$$z\bar{z} - (3 - 5i)z - (3 + 5i)\bar{z} + (3 + 5i) \cdot (3 - 5i) = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + (-3 + 5i)z + (-3 - 5i)\bar{z} + 9 = 0$$

E essa é uma equação da forma $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$, que descreve algebricamente a circunferência considerada no Plano.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho tratou de dois objetos geométricos: reta e circunferência. Contudo, considerando-os no plano de Argand-Gauss. Suas relações algébricas, ou seja, suas equações foram deduzidas na variável complexa.

No estudo de Geometria Analítica no plano cartesiano, cada reta tem uma equação geral que a representa, já no plano complexo vimos, no capítulo 1, que cada reta tem quatro possibilidades de representação para a equação geral, sendo elas equivalentes entre si. Assim como no plano cartesiano, dada uma representação algébrica para a reta no plano complexo, esta possui uma fórmula para seu coeficiente angular e uma para seu coeficiente linear.

Já no capítulo 2, onde estudamos a circunferência, vimos que dada uma circunferência no plano complexo, esta tem como representante algébrico apenas uma equação, assim como acontece no plano cartesiano. Vale notar também, que a equação da circunferência diverge da equação da reta em apenas um termo, $z\bar{z}$. E, por fim, assim como acontece no estudo no plano cartesiano, dada uma equação de circunferência no plano complexo, podemos, a partir dela, obter o centro e o raio desta circunferência.

Este trabalho teve por finalidade fazer um estudo dos objetos já conhecidos da geometria, porém no plano complexo, ao invés de no plano cartesiano. Vimos que as representações algébricas são, em geral, análogas às representações dos objetos no plano cartesiano. No caso da reta, vale ressaltar que diferentes textos consultados usavam diferentes equações da reta, o que dificulta a compreensão para um leitor iniciante. Além disso, os textos consultados não indicavam as quatro possibilidades para equação da reta, sendo que cada autor ou autora fez uso de uma equação diferente, dentre as quatro, para seu respectivo artigo. Desta forma, sentimos a necessidade de uma padronização, ou seja, de se eleger uma das quatro como equação geral da reta no plano complexo.

Por fim, o estudo não se encerra aqui. Das cônicas que são estudadas na Geometria Analítica (no plano cartesiano), temos ainda a parábola, a elipse e a hipérbole. Desta forma, o próximo passo será estudar as equações destas cônicas tratadas na variável complexa.

REFERÊNCIAS

BRASIL/MEC. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. vol. 2, Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2006.

CAON, F. **Números Complexos:** inter-relação entre conteúdos e aplicações. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

DANTE, L.R. **Matemática:** Contexto e Aplicações. 1ª ed. vol. 2, São Paulo: Ática, 2012.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Plana. 8ª ed. vol. 9, São Paulo: Atual, 2005.

FEITOSA, L. **Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana.** Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Analítica. 5ª ed. vol.7, São Paulo: Atual, 2005.

KLOSTER, G. **Números Complexos e Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado) -PROFMAT. Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2014.

PAIVA, M. **Matemática**. 1ª ed. vol. 3, São Paulo: Moderna, 1995.

SERRÃO MENDES, R. **Teoria dos números complexos com aplicações nos campos das geometrias plana e analítica**. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, São Luiz, 2017.