



As Equações de Maxwell e o Cálculo Vetorial

Victor Rodrigues de Oliveira

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pela professora Dra. Flávia Milo dos Santos

IFSP
São Paulo
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Oliveira, Victor Rodrigues

As Equações de Maxwell e o Cálculo Vetorial / Victor Rodrigues de Oliveira - São Paulo: IFSP, 2016.

70f.

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Flávia de Milo dos Santos

Coorientador: Marco Aurélio Granero Santos

1. Eletromagnetismo. 2. Cálculo Vetorial. 3. Equações de Maxwell.
I.As Equações de Maxwell e o Cálculo Vetorial.

Victor Rodrigues de Oliveira

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E O CÁLCULO VETORIAL

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

APROVADA EM: //

CONCEITO: _____

Emiliano Augusto Chagas
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Marco Aurélio Granero Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo
Coorientador

Flávia Milo dos Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo
Orientador

Aluno: Victor Rodrigues de Oliveira

*Dedico este trabalho a todos que fizeram, fazem e farão parte da minha vida.
Independentemente do tempo que passaram ou passarão ao meu lado, terão sua parte na
construção de mim.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço minha família pelo suporte incondicional, e também por terem me suportado nesses anos em que realizei este curso. Agradeço especialmente a meus pais Elias e Raquel, meus irmãos Lucas e Otávio e minha futura esposa Nayara, pela paciência e compreensão enquanto estive ausente em diversos momentos para me concentrar em tarefas relacionadas ao curso e a este trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz no decorrer deste curso, que por muito tempo ouviram minhas piadas sem graça, minhas lamúrias e devaneios. Não são enumeráveis as vezes que a presença de vocês fizeram minhas viagens matinais ao Instituto valerem a pena.

Agradeço aos professores do Instituto Federal de São Paulo pela paciência, dedicação e suporte dados no decorrer de todo o curso. Em especial aos meus professores orientadores por terem me ouvido com atenção, e se darem ao trabalho de corrigirem minhas falhas.

*"(...) só penso na ingenuidade dos meus 23 anos(..)
Sabe o que eu estava pensando
ainda há pouco?
Se não tivesse mais fé na vida,
se duvidasse duma mulher amada
e da ordem universal,
convencido, ao contrário, de que
tudo é apenas um caos infernal e maldito
— e fosse tomado pelo terror da desilusão —
mesmo assim, desejaria viver, apesar de tudo.
Depois de saborear o cálice encantado da vida,
só o deixarei depois de esvaziá-lo."*

Fiódor Dostoiévski - Os irmãos Karamázov

Resumo

Este trabalho tem como objetivo relacionar determinados elementos presentes no Cálculo Vetorial com conceitos da Física, mais especificamente na área de Eletromagnetismo, a fim de obtermos uma estruturação matemática necessária para estudarmos as Equações de Maxwell. O modo como elaboramos este trabalho consistiu no estudo das leis que compõem as Equações de Maxwell, e a partir desse estudo evidenciamos os conteúdos de Cálculo Vetorial necessários para representar essas leis matematicamente, bem como tratamos esses conteúdos a fim de obtermos um fundamento teórico sólido nesta representação. Fazemos o estudo das Equações de Maxwell descrevendo propriedades de campos elétricos e magnéticos não variantes no tempo (estáticos), e variantes no tempo. Iniciamos o trabalho com a Lei de Gauss e a Lei de Gauss aplicada em campos magnéticos, que são válidas independentemente se os campos eletromagnéticos são estáticos ou não. Para campos estáticos fazemos estudos detalhados sobre a lei de Ampère para correntes contínuas e sobre o campo elétrico conservativo. Para campos variantes no tempo fazemos uma apresentação da relação da Lei de Faraday e a Lei de Ampère-Maxwell (ou Lei de Ampère generalizada) com suas obtenções teóricas e experimentais, bem como as mudanças que devem ser realizadas na teoria de forma a apresentá-las corretamente.

Palavras-chave: Eletromagnetismo. Cálculo Vetorial. Equações de Maxwell.

Abstract

This work aims to relate a set of elements contained in the Vector Calculus with topics of Physics, more specifically with respect to Electromagnetism, in order to obtain a mathematical structure necessary to study the Maxwell's Equations. The way in which this work was elaborated consisted in the study of the laws that compose the Maxwell's Equations, and from this study, to list the contents of Vector Calculus which are necessary to represent them mathematically, as well as to treat these contents in order to obtain a solid theoretical basis in these representations. In this work we study the Maxwell's Equations while describing properties of non-time-varying electric and magnetic (static) fields, as for time-varying electromagnetic fields. We begin the work with the Gauss's Law and the Gauss's Law for magnetic fields, which are independent of the types of fields (time-varying or non-time-varying). For static fields we make detailed studies on Ampere's law for steady currents and on the conservative electric field. For time-varying fields we present the relationship of Faraday's Law and Ampere-Maxwell's Law to the modifications that are necessary to make in the theory previously presented to correctly present them.

Palavras-chave: Electromagnetism. Vector Calculus. Maxwell's Equations.

Lista de ilustrações

1	Linha carregada disposta no eixo z	22
2	Um quadrado R no espaço das configurações de u e v sendo levado à \mathcal{S} por \mathbf{r}	25
3	Superfície cilíndrica \mathcal{F} envolvendo um comprimento h de um fio infinito.	28
4	Linhas de campo de um dipolo elétrico (a) (composto de uma carga negativa e outra positiva) e um dipolo magnético(b).	30
5	Campo elétrico produzido por uma carga q externa à superfície, atravessando-a.	30
6	Fio carregado eletricamente de comprimento arbitrário e um ponto P fora do fio.	38
7	Corrente I passando pelo fio gerando um campo magnético \mathbf{B}	38
8	Quadrado formado pelos eixos coordenados	42
9	Caminho circular C em torno do fio retilíneo.	46
10	Linhas de campo de dois sistemas de duas partículas eletricamente carregadas.	49
11	Movimento da carga q_1 partindo do ponto A para o ponto B em um campo vetorial \mathbf{D} gerado pela carga q na origem.	50
12	Se escolhermos o caminho (a) para calcularmos a integral geralmente obteremos um resultado diferente do que se escolhermos o caminho (b).	50
13	Campo magnético variando sobre um anel condutor.	61
14	Modos de variar fluxo de campo magnético.	61

Sumário

	INTRODUÇÃO	17
1	LEI DE GAUSS	21
1.1	A lei de Gauss na forma integral	23
1.1.1	Uso da Lei de Gauss	27
1.1.2	Retomando o problema inicial	28
1.2	Lei de Gauss para o magnetismo	29
1.2.1	Uma introdução sobre campos magnéticos	29
1.2.2	A lei de Gauss para o magnetismo	30
1.2.3	O operador Nabla ∇	32
1.2.4	A divergência	33
1.3	Lei de Gauss para campos elétricos na forma diferencial	34
2	LEI DE AMPÈRE	37
2.1	Campos magnéticos produzidos por correntes elétricas	39
2.2	O vetor rotacional	41
2.3	Forma vetorial da lei de Ampère	45
2.4	Retomando o problema inicial	46
2.5	O uso da lei de Ampère	46
3	O CAMPO ELÉTRICO CONSERVATIVO	49
3.1	O rotacional do campo elétrico D	51
3.2	Campo elétrico irrotacional	53
3.3	O potencial eletrostático	54
3.4	O trabalho em uma curva fechada	56
4	LEI DE FARADAY	59
5	LEI DE AMPÈRE-MAXWELL	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	REFERÊNCIAS	69

Introdução

Os conceitos de eletromagnetismo que são estudados neste trabalho estão diretamente relacionados com as quatro leis que compõem as Equações de Maxwell. As forças eletromagnéticas são as que compõem a maior parte das forças que presenciamos diariamente, e as Equações de Maxwell, junto com Força de Lorentz¹, e as leis de movimento e gravitação de Newton, descrevem todos os fenômenos do eletromagnetismo clássico conhecidos (FEYNMAN, 2011, Cap.18).

Neste trabalho, procuramos não nos aprofundar sobre os conteúdos derivados ou consequentes dessas leis, para assim darmos mais ênfase nas observações diretas dos resultados. Para a escolha dos conteúdos apresentados neste trabalho, objetivou-se responder a seguinte pergunta: Tomando como escopo as Equações de Maxwell, quais são os fundamentos matemáticos necessários para tornar possível sua compreensão?

Realizar a interface entre a Física e a Matemática não é uma situação incomum, pois a aplicabilidade da Matemática na Física e a adaptação, até a criação, de novos conceitos matemáticos surgidos da necessidade de explicar algum fenômeno físico, faz parte da história dessas duas grandes áreas. Assim, discorreremos sobre a utilização do Cálculo Vetorial como um conjunto de ferramentas matemáticas a serem utilizadas para lidarmos com as Equações de Maxwell.

Observando pelo aspecto histórico, a sistematização dos conhecimentos pertinentes aos vetores como entidades representativas da forma como conhecemos hoje, bem como sua formalização matemática, foi impulsionada com a popularização de estudos em eletromagnetismo advindos de publicações como as de James Clerk Maxwell², sobre a teoria Eletromagnética, publicadas em *On Physical lines of Force*³ de 1861 e em *A Treatise on Eletricity and Magnetism*⁴ de 1873 (CROWE, 1985).

Segundo Crowe (1985), Maxwell não viveu para presenciar o advento da Análise Vetorial que conhecemos atualmente, sendo esta desenvolvida anos após sua morte. Porém, mesmo fazendo uma apresentação das equações em seu livro na forma dos Quatérnions (MAXWELL, 1873), não defendeu o seu nos estudos de Física, sendo esta abordagem a defendida por muitos matemáticos e físicos da época (CROWE, 1985). Os Quatérnions,

¹ Hendrik Antoon Lorentz, nascido em Arnhem, 18 de julho de 1853 e falecido em Haarlem, 4 de fevereiro de 1928. Foi um físico neerlandês.

² James Clerk Maxwell, nascido em Edimburgo, 13 de junho de 1831 e falecido em Cambridge, 5 de novembro de 1879. Foi um matemático e físico escocês.

³ MAXWELL, J. C. *On physical lines of force. Philosophical Magazine*, v. 21 & 23, Março 1861.

⁴ MAXWELL, J. C. *A Treatise on Eletricity and Magnetism*. Londres: Oxford : Clarendon Press, 1873. v. 1 & 2.

segundo Maxwell, não representavam fielmente a Física, e o conhecimento sobre sua insatisfação com determinadas propriedades dos Quatérnions de certa forma delineou o que vem a ser a Análise Vetorial, e conseqüentemente o Cálculo Vetorial, como nos é apresentado atualmente (CROWE, 1985).

Um exemplo a se considerar, seria a atuação de forças entre cargas elétricas. Dessa forma, dizemos que o espaço em volta das cargas está permeado de campos elétricos e magnéticos (GRIFFITHS, 2011, p.xiv). Esses campos magnéticos e elétricos são descritos através da definição de campos vetoriais, que é elemento constituinte de um estudo sobre Cálculo Vetorial.

A definição de um campo vetorial é dada através de elementos da Análise Vetorial, que foi sistematizada por volta de 1890 por Gibbs⁵, editado e publicado por um aluno seu em *Vector Analysis*⁶, e de modo simultâneo por Heaviside⁷ em *Electromagnetic Theory*⁸ (CROWE, 1985). O desenvolvimento desta sistematização foi motivado pelos estudos destes dois autores dos manuscritos de Maxwell sobre eletromagnetismo (CROWE, 1985). Segundo a definição formal de campo vetorial adotada, um campo “é uma função que especifica uma grandeza particular em qualquer ponto de uma região” (SADIKU, 2012, p.20-21).

Esta sistematização nos permite raciocinar sobre vários problemas envolvendo determinados conceitos de uma maneira que se possa desvincular a necessidade absoluta de referencial, ou seja, de eixos coordenados. Essa possibilidade é de grande utilidade pois, as leis fundamentais da Física não dependem de uma espécie de marco zero, para que sejam aplicáveis ou válidas (KAPLAN, 1972).

Podemos ainda citar Dreyfus (1991), no que se refere ao relacionamento entre representação e modelamento de um objeto físico. O ato de representar matematicamente uma situação física é referido, tipicamente, como modelagem. Essa representação é estabelecida através de uma estruturação matemática que reflete as propriedades do objeto a ser modelado, e com isso, fazendo com que essa estruturação gere uma teoria que sirva para estudar seu comportamento (DREYFUS, 1991, p.34).

Mas além disso, a relação entre modelar e representar se encontra no fato que a modelagem é a representação de um objeto físico por meio de uma estrutura matemática, enquanto a representação é a estruturação mental do modelo matemático. Podemos fazer ainda uma analogia ao dizermos que “a modelagem está para o objeto como a representação

⁵ Josiah Willard Gibbs, nascido em New Haven, 11 de fevereiro de 1839 e falecido em New Haven, 28 de abril de 1903. Foi um cientista americano com contribuições na física, química e matemática.

⁶ WILSON, E. B. *Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*. 9. ed. New Haven: Yale University Press, 1943.

⁷ Oliver Heaviside, nascido em Londres, 18 de maio de 1850 e falecido em Torquay, 3 de fevereiro de 1925. Foi um matemático e engenheiro eletricitista inglês.

⁸ HEAVISIDE, O. *Electromagnetic Theory*. Londres: The Electrician, 1893. v. 1 & 2.

está para a modelagem” (DREYFUS, 1991, p.34). Ainda segundo o autor, a modelagem, a representação e o objeto a ser modelado, cada um deles, possuem propriedades inerentes que os outros não tem. Mas a relação existente entre eles faz com que cada um contribua para um aumento da capacidade de manipular mentalmente o objeto a ser estudado (DREYFUS, 1991, p.34). Essa capacidade de manipulação é fundamental no estudante pois o estudante pode utilizar os conhecimentos adquiridos previamente de maneira flexível para a resolução de problemas (DREYFUS, 1991, p.28).

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é apresentar ferramentas matemáticas a fim de lidarmos com alguns tópicos dentro do eletromagnetismo, bem como vinculá-las às suas possíveis interpretações na Física. Portanto, estamos considerando que lidar com as Equações de Maxwell no ensino superior seria um trabalho que exige determinado grau de abstração matemática, e por consequência, é enriquecedor ao que diz respeito do conhecimento sobre o Cálculo Vetorial como constituinte de um modelo e uma entidade representativa desses fenômenos físicos.

Nesse trabalho apresentamos as Equações de Maxwell aplicadas em campos variantes e não-variantes no tempo. Decidimos começar pelas leis em que não há uma necessidade de reformulação conceitual quando lidamos com campos estáticos ou quando lidamos com campos não-estáticos. Com isso, apresentamos no Capítulo 1 a lei de Gauss aplicada a campos elétricos e a campos magnéticos, enunciando assim duas das quatro Equações de Maxwell. Fazemos a apresentação dessas duas leis nas formas integrais e as relacionamos com o teorema de Gauss para obter suas formas vetoriais através da divergência do campo elétrico e divergência do campo magnético.

Depois, introduzimos as leis que compõem as Equações de Maxwell quando lidamos com campos estáticos, ou seja, quando não há variação em relação ao tempo. Assim, no Capítulo 2, apresentamos a lei de Ampère em sua forma integral ao considerarmos somente correntes contínuas, pois assim não há variação do campo magnético induzido pela corrente que passa no condutor. Ainda neste capítulo fazemos a introdução do rotacional de um campo vetorial, para assim, relacionar a forma integral da lei de Ampère com sua forma vetorial pelo teorema de Stokes. Ainda sobre campos estáticos, no Capítulo 3, apresentamos propriedades de campos elétricos gerados por cargas pontuais e com isso obtemos a última equação das quatro Equações de Maxwell ao lidarmos com campos estáticos.

Nos Capítulos 4 e 5, abordamos alguns resultados experimentais obtidos ao longo do desenvolvimento dos estudos sobre eletromagnetismo para trabalharmos com campos elétricos e magnéticos que variam em relação ao tempo. No Capítulo 4 falamos sobre a lei de Faraday e as alterações conceituais a serem consideradas ao partirmos de uma abordagem no âmbito dos campos elétricos e magnéticos estáticos para os não-estáticos. No Capítulo 5 apresentamos a lei de Ampère-Maxwell, juntamente com a finalização das alterações necessárias para o estudo de campos variantes no tempo, e com isso, as correções

feitas por Maxwell ao lidarmos com lei de Ampère em correntes variantes. Desse modo enunciamos as outras duas das quatro Equações de Maxwell, mas para campos variantes no tempo.

1 Lei de Gauss

Iniciaremos nossos estudos no domínio da eletrostática. Nele todas as cargas estão fixas no espaço, sendo possível localizar suas posições ou especificar as regiões em que estão distribuídas. Em muitos problemas reais desse domínio não é possível observar onde estão as cargas, mas sim quais posições podem assumir devido à interação entre campos gerados por elas (FEYNMAN, 2011).

Segundo Griffiths (2011, p.xiv), podemos dizer que o espaço próximo a uma carga está permeado por campos elétricos e magnéticos e, se uma segunda carga é posta ao alcance desses campos produzidos pela primeira, experimenta uma força.

Considerando uma distribuição de cargas, podemos tomar como ponto de partida para a discussão sobre a lei de Gauss o seguinte questionamento.

Dado um fio carregado com cargas, sem espessura e retilíneo, qual seria a intensidade e direção do campo elétrico gerado pelas cargas presentes no fio em um ponto P qualquer?

Estamos considerando um fio de comprimento arbitrário disposto ao longo do eixo z do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , dotado do sistema cartesiano de coordenadas. Primeiramente estamos considerando que o fio tem suas extremidades em A e B .

Para obtermos o campo elétrico \mathbf{E} no ponto $P(a, b, c)$, segundo o princípio da superposição, devemos somar os campos elétricos de cada porção infinitesimal atuantes em P . Assim teremos

$$\mathbf{E}(P) = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} k \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}} = \int_A^B k \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

em que $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ¹, r_i é a distância de cada porção infinitesimal de cargas Δq_i no fio entre A e B até P , $\hat{\mathbf{r}}$ é um versor de q até P , e i sendo indicador do número de partições que faremos para considerar a atuação das cargas no ponto P , e por isso variando de 1 até ∞ .

Seja $(0, 0, z)$ a coordenada final do fio, ou seja, seu comprimento total tomado a partir da origem $O = (0, 0, 0)$. O vetor posição \mathbf{r} será

$$\mathbf{r} = (a, b, c) - (0, 0, z) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + (c - z)\mathbf{k}.$$

Estamos considerando que a densidade de cargas λ no fio é constante em toda sua extensão, ou seja,

$$\frac{dq}{dl} = \lambda \Rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dz.$$

¹ A constante ϵ_0 é a permissividade elétrica do meio, sendo $k \approx 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$ quando no vácuo.

Dessa forma o campo elétrico total será dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda dz}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Podemos ajustar a equação (1.1) fazendo a seguinte passagem,

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dz = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} dz. \quad (1.2)$$

Para auxiliar na resolução desse problema, podemos dispor os dados anteriores na Figura 1 da seguinte maneira:

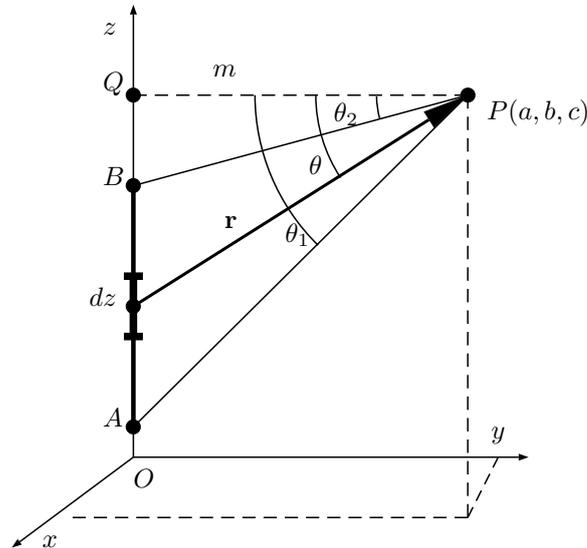


Figura 1 – Linha carregada disposta no eixo z

Segundo a disposição do fio carregado na Figura 1, m é a menor distância do ponto P à linha de carga. Podemos observar que $\cos(\theta) = \frac{m}{r}$ e $c = \overline{OQ}$. Também podemos ver que $z = \overline{OQ} - m \tan(\theta)$ e então $dz = -m(\sec(\theta))^2 d\theta$. Considerando $|\mathbf{r}| = r$, teremos $r = \sec(\theta) m$.

Utilizaremos um vetor unitário $\hat{\mathbf{m}}$ para indicar o sentido em que aponta a soma vetorial $a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$ de \mathbf{r} que está na direção do segmento m , ou seja,

$$\mathbf{r} = m\hat{\mathbf{m}} + (c - z)\hat{\mathbf{k}}.$$

Assim, teremos a partir de (1.2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{m\hat{\mathbf{m}} + (c-z)\mathbf{k}}{[m^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} dz \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[\sec(\theta)m \cos(\theta)]\mathbf{m} + [\overline{OQ} - (\overline{OQ} - m \tan(\theta))]\mathbf{k}}{m^3(\sec(\theta))^3} [-m(\sec(\theta))^2] d\theta \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{((\sec(\theta))^3 m^2 \cos(\theta))\mathbf{m} + (m^2 \sec(\theta)^3)\mathbf{k}}{m^3(\sec(\theta))^3} d\theta \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\cos(\theta)\hat{\mathbf{m}} + \sec(\theta)\mathbf{k}) d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 m} [(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))\hat{\mathbf{m}} + (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))\mathbf{k}]. \tag{1.3}
\end{aligned}$$

A resolução do caso anterior foi feita para uma linha de comprimento finito. Para uma linha infinita, teríamos de prolongar infinitamente as extremidades A e B de forma que os ângulos θ_1 e θ_2 tendessem para $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente. Desse modo, não haveria campo elétrico na direção \mathbf{k} , e portanto a equação

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 m} \hat{\mathbf{m}}$$

seria utilizada para calcular o campo elétrico \mathbf{E} em um ponto P arbitrário.

Notamos que houve um significativo trabalho mecânico e nos foi exigida uma interpretação precisa das disposições da figura, para que pudéssemos resolver o problema aparentemente simples. Porém, observando algumas disposições gerais acerca de problemas dessa natureza, podemos encontrar uma resolução tão eficaz quanto matematicamente elegante ao fazermos algumas considerações sobre natureza e propriedades do campo elétrico, como veremos na próxima seção.

1.1 A lei de Gauss na forma integral

Estudiosos em eletricidade já tinham consciência do conceito de interação à distância, mas Michael Faraday² e Maxwell são considerados os precursores deste conceito na forma que conhecemos atualmente (ASSIS et al., 2009).

Dizemos que a representação da influência de uma carga em outra é chamada de campo elétrico. O campo elétrico pode ser descrito por um campo vetorial. Matematicamente, temos a seguinte definição

Definição 1. *Um campo vetorial \mathbf{F} é uma função que associa cada ponto em seu domínio $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ a um vetor. Sendo (x, y, z) um ponto pertencente ao domínio de \mathbf{F} , podemos*

² Michael Faraday, nascido em Newington, Surrey, 22 de setembro de 1791 e falecido em Hampton Court, 25 de agosto de 1867. Foi um físico e químico inglês.

escrever

$$\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z).$$

O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ pode ser escrito em coordenadas cartesianas, sendo M , N e P campos escalares. O campo vetorial \mathbf{F} é contínuo e diferenciável se suas funções componentes M , N e P forem contínuas e diferenciáveis.

Um campo elétrico é descrito por campos vetoriais contínuos³. Em campos vetoriais contínuos, a quantidade de vetores que passam por uma determinada superfície no espaço é chamada de fluxo (THOMAS et al., 2012, p.417).

A lei de Gauss relaciona a superfície fechada que envolve uma ou mais cargas, com o fluxo elétrico resultante da interação entre os campos elétricos provenientes delas (SERWAY; JEWETT, 2004, p.699). Para entendermos mais sobre esta relação vamos discorrer um mínimo sobre superfícies.

Segundo Apostol (1993, p.467) “uma superfície é um lugar geométrico definido no espaço por um ponto que se move com dois graus de liberdade”. Podemos representar matematicamente uma superfície utilizando sua forma paramétrica.

Definição 2. No \mathbb{R}^3 , suponhamos que \mathbf{r} seja uma função vetorial contínua e injetora. Chamamos a imagem de \mathbf{r} de superfície \mathcal{S} traçada por $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, com u e v , sendo ambos contínuos e pertencentes a região R contida no plano $u \times v$ chamada de domínio dos parâmetros e f , g e h campos escalares.

A função \mathbf{r} é injetora para que \mathcal{S} não cruze a si mesma. Uma superfície que não cruza a si mesma é chamada de superfície **paramétrica simples**, ou **superfície elementar**, pois pontos distintos em R levarão a pontos distintos em \mathcal{S} (APOSTOL, 1993).

Dizemos que uma superfície é lisa ou regular, se

$$\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u \neq \mathbf{0}, \forall u, v \in R,$$

sendo

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k}.$$

Sabemos por definição de derivada parcial, que \mathbf{T}_v e \mathbf{T}_u são vetores tangentes a quaisquer pontos $(u, v) \in R$ nas direções de v e u , respectivamente. É importante lembrar

³ Estamos considerando somente a atuação do campo elétrico no vácuo.

que o produto vetorial $\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u$ tem como resultado um vetor normal a ambos os vetores \mathbf{T}_v e \mathbf{T}_u . Um vetor normal em relação a \mathbf{T}_u e \mathbf{T}_v é tal que pode possuir dois sentidos opostos, ou seja, podemos obter dois campos vetoriais normais a $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ em qualquer ponto $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ com a propriedade de existirem dois vetores opostos em cada ponto. e assim obtemos um campo de vetores normais estabelecidos em cada ponto de \mathcal{S} .

Definimos como fluxo de um campo vetorial tridimensional, a soma do produto escalar dos vetores do campo vetorial que atravessam determinada região da superfície, ou porção de área da superfície, pelos vetores normais unitários a essa região.

Por porção de área, deixamos subtendido uma quantidade de área sobre a superfície \mathcal{S} de tamanho arbitrário⁴.

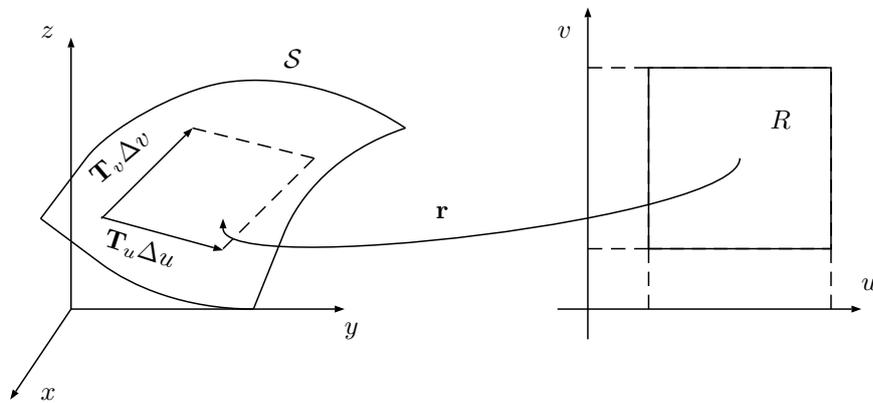


Figura 2 – Um quadrado R no espaço das configurações de u e v sendo levado à \mathcal{S} por \mathbf{r} .

Como ilustrado na Figura 2, um retângulo de R com área $\Delta u \Delta v$ será levado a \mathcal{S} por \mathbf{r} e terá área aproximadamente igual a

$$|\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v| = |\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v| \Delta u \Delta v.$$

O fluxo total de um campo vetorial \mathbf{F} que passa por essa superfície é igual a soma dos produtos escalares de \mathbf{F} pelo vetor normal unitário \mathbf{n} , ambos definidos nessas porções de área de \mathcal{S} . Essa quantidade é denominada **fluxo de \mathbf{F}** . Tomando $\Delta S = |\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v| \Delta u \Delta v$ e $\Delta \mathbf{S}_i$ como sendo um elemento de área infinitesimal de \mathcal{S} , temos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_i &= \Delta S_i \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v|} |\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v| \Delta u \Delta v \\ \Delta \mathbf{S}_i &= (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

com $i = 1, \dots, n$, sendo n o número de elementos de área infinitesimais.

Para cada elemento $\Delta \mathbf{S}_i$ de \mathcal{S} , o fluxo de campo elétrico que passa pela porção de área ΔS_i é $\mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$ ⁵.

⁴ Intuitivamente escolhemos ΔS de modo que não haja variação no campo vetorial definido nessa região.

⁵ Justificado pela natureza do produto escalar.

Então, o fluxo elétrico total, ϕ_E , de um campo elétrico \mathbf{E} por uma superfície \mathcal{S} é

$$\begin{aligned}\phi_E &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},\end{aligned}\quad (1.4)$$

em que $d\mathbf{S} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du \cdot dv$, e \mathbf{E}_i é o campo elétrico definido na região ΔS_i , com $i = 1, \dots, n$.

Agora, podemos utilizar como exemplo uma superfície esférica fechada \mathcal{B} contendo uma carga q em seu interior. Considerando q na origem e no centro da superfície fechada \mathcal{B} , segundo a definição, o fluxo elétrico passando por essa superfície esférica será

$$\phi_E = \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.5)$$

utilizando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\phi_E &= \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta \\ &= 4\pi r^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0},\end{aligned}\quad (1.6)$$

com r o raio da superfície esférica, $\hat{\mathbf{r}}$ um vetor unitário radial a partir de q , e $d\varphi$ e $d\theta$ elementos infinitesimais de coordenadas esféricas. Ou seja, o fluxo elétrico total é diretamente proporcional à carga interior à superfície fechada \mathcal{B} .

O resultado na equação (1.6) é particular para o caso de uma superfície esférica com uma carga em seu interior, mas foi apresentado com o propósito de ilustrar um caso mais geral, enunciado pela lei de Gauss.

De fato, a lei de Gauss pode ser enunciada da seguinte maneira. *Se uma distribuição de cargas é envolvida por uma superfície fechada \mathcal{F} , independente da posição das cargas dentro da superfície ou da forma da superfície fechada, o fluxo do campo elétrico resultante \mathbf{E} é igual a carga resultante Q dentro da superfície, dividida pela permissividade do meio ϵ_0 . Com isso podemos escrever*

$$\phi_{\mathbf{E}} = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.7)$$

Isso se dá porque, em uma distribuição de cargas qualquer, de acordo com o princípio da superposição, o campo elétrico total será a soma dos n campos individuais, ou seja,

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

Então, o fluxo ϕ_E através de uma superfície fechada \mathcal{F} que envolva uma distribuição discreta de cargas é dado por

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right), \quad (1.8)$$

com $i = 1, \dots, n$, sendo n o número total de cargas dentro da superfície fechada.

A equação apresentada em (1.7) é a lei de Gauss em sua forma integral.

Além disso, a lei de Gauss pode ser enunciada com o a definição do vetor **densidade de fluxo**, obtido a partir do campo elétrico \mathbf{E} .

Definição 3. Chamamos de *densidade de fluxo elétrico* o vetor $\mathbf{D} = \mathbf{E}\epsilon_0$.

Construímos o vetor densidade de fluxo elétrico para obtermos a independência da atuação do campo elétrico da permissividade elétrica do meio ϵ_0 (SADIKU, 2012). Com o auxílio da densidade do fluxo elétrico, para \mathcal{F} sendo uma superfície fechada, a lei de Gauss na equação (1.7) se torna

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q. \quad (1.9)$$

E assim podemos enunciar a lei de Gauss da seguinte maneira:

O fluxo elétrico resultante que atravessa qualquer superfície fechada é proporcional à carga resultante dentro da superfície.

1.1.1 Uso da Lei de Gauss

A Lei de Gauss provê um método mais fácil de encontrar a densidade do fluxo elétrico \mathbf{D} para distribuições simétricas de cargas, como uma carga pontual, distribuídas numa linha, numa superfície cilíndrica ou esférica. Mas devemos reforçar que a Lei de Gauss se mantém sempre, sendo a distribuição de cargas simétrica ou não.

Seguindo esta ideia, para aplicarmos a lei de Gauss e encontrarmos o campo elétrico, será necessário verificar primeiro se há uma simetria de cargas e depois encontrar uma superfície gaussiana adequada. De acordo com (SERWAY; JEWETT, 2004) e (SADIKU, 2012), para simplificar a obtenção do campo elétrico, a superfície fechada deve satisfazer algumas condições.

Uma superfície fechada simplificará a obtenção do campo elétrico se o valor do campo elétrico puder ser deduzido constante sobre porções da superfície. Podemos considerar como facilitadores para a obtenção do campo elétrico a possibilidade do produto escalar na equação (1.9) ser expresso como um simples produto algébrico $D \cdot dS$, porque

\mathbf{D} e $d\mathbf{S}$ seriam paralelos, ou o produto escalar na equação (1.9) ser zero, porque \mathbf{D} e $d\mathbf{S}$ seriam ortogonais.

É importante lembrarmos que diferentes porções da superfície podem satisfazer as diferentes condições expostas anteriormente, mas para facilitar o trabalho, é imprescindível que em cada porção dessa superfície, ao menos uma das condições acima sejam satisfeitas (SERWAY; JEWETT, 2004; SADIKU, 2012).

1.1.2 Retomando o problema inicial

A lei de Gauss é utilizada para encontrar o campo elétrico em situações em que há um alto grau de simetria nas distribuições de cargas. Ao retomarmos o problema apresentado no início deste capítulo, para uma linha infinita, veremos que a distribuição das cargas faz com que as componentes de z de cada campo elétrico produzido pelas cargas se cancelem mutuamente devido à simetria. Logo, do campo elétrico atuante em P só teremos as componentes x e y .

De acordo com as condições para resolvermos este problema utilizando a lei de Gauss, encontraremos uma superfície fechada de modo que o campo elétrico existente seja ortogonal ou normal a ela. Escolhemos uma superfície cilíndrica contendo P , satisfazendo as condições de \mathbf{D} ser perpendicular à superfície lateral, e portanto paralelo ao vetor normal em cada ponto da superfície, e \mathbf{D} ser tangente às superfícies do topo e fundo e por isso sendo perpendicular aos vetores normais dessas áreas, conforme ilustrado na Figura 3.

Logo \mathbf{D} tem direção radial (no sentido usual de coordenadas cilíndricas), ou seja, $\mathbf{D} = D\hat{\mathbf{r}}$.

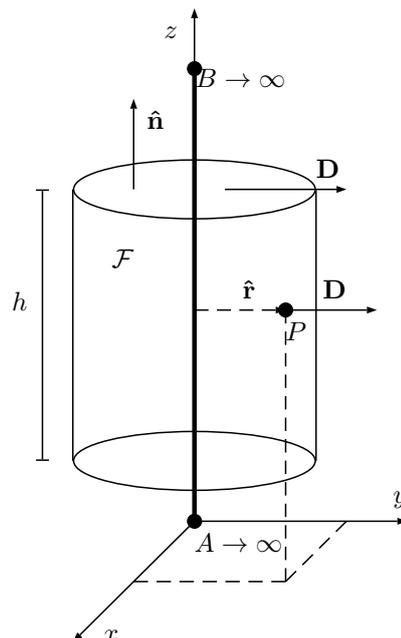


Figura 3 – Superfície cilíndrica \mathcal{F} envolvendo um comprimento h de um fio infinito.

Aplicando a lei de Gauss a um comprimento arbitrário h do fio envolto pela gaussiana, temos

$$q = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \iint_{\mathcal{F}} dS = D \int_0^{2\pi} \int_0^h r \cdot dzd\theta = D \cdot 2\pi rh.$$

Estamos considerando que as cargas estão distribuídas uniformemente, com densidade $\lambda = \frac{q}{h}$. Então para um fio infinito teremos

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.10)$$

É importante notar que se a linha tiver um comprimento finito não possuirá simetria o suficiente para aplicarmos a lei de Gauss, ou seja, os vetores não serão ortogonais ou paralelos sobre as superfícies fechadas adotadas porque nas proximidades das extremidades do fio o campo se curvará. Contudo o resultado (1.10) é uma boa aproximação para pontos muito próximos do fio, e longe das extremidades (SERWAY; JEWETT, 2004, p.704).

1.2 Lei de Gauss para o magnetismo

Sabemos que, experimentalmente, cargas e polos magnéticos atuam de maneira semelhante, e da mesma forma que os campos elétricos, os campos magnéticos podem ser descritos pelo conceito matemático de campo vetorial. A diferença entre cargas e polos magnéticos é que os polos magnéticos sempre ocorrem em pares. De fato, atualmente se desconhece a existência de um polo magnético isolado, ou monopolo magnético (TIPLER; MOSCA, 2003, p.194).

Neste capítulo estudaremos os campos magnéticos estáticos, invariantes no tempo, ou seja, campos magnéticos em que sua intensidade dependerá apenas da posição em relação à fonte desse campo.

1.2.1 Uma introdução sobre campos magnéticos

Podemos dizer que campos magnéticos fecham em si mesmos enquanto campos elétricos começam e terminam em cargas elétricas (TIPLER; MOSCA, 2003, p.234). Sendo assim, a estrutura magnética mais simples que pode ser envolto por uma gaussiana é um dipolo magnético, um ímã (SERWAY; JEWETT, 2004).

De modo a auxiliar na visualização do campo magnético, podemos definir o conceito de linhas de força. Foi Michael Faraday quem definiu o que hoje entendemos por linhas de campo. Segundo Assis et al. (2009), Faraday define linhas de força como uma representação de processos locais, de modo que as linhas de força representem a direção e

intensidade do campo naquela região. Para identificar a intensidade de um campo em uma determinada região recorreremos à densidade de linhas de campo por área.

Dessa forma, os vetores do campo vetorial que descrevem um fenômeno eletromagnético são todos pertencentes às direções tangentes das linhas de campo em cada ponto. Para melhor visualização podemos ver na Figura 4 a representação por linhas de força de um campo elétrico devido a interação de duas cargas opostas (Figura 4a) e a representação de um campo magnético (Figura 4b), do qual falaremos na próxima seção.

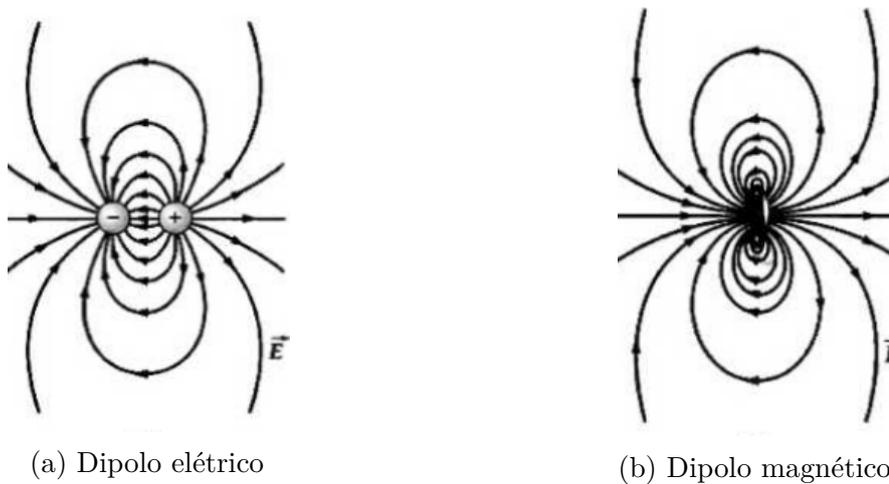


Figura 4 – Linhas de campo de um dipolo elétrico (a) (composto de uma carga negativa e outra positiva) e um dipolo magnético(b). Fonte: [Tipler e Mosca \(2003, p.234\)](#).

1.2.2 A lei de Gauss para o magnetismo

A lei de Gauss para campos elétricos nos diz que o fluxo elétrico resultante em uma superfície fechada é igual à carga resultante envolta por esta superfície. Por exemplo, se tomarmos uma gaussiana que não envolva nenhuma carga, então segundo essa lei, o fluxo elétrico resultante será zero. Isso pode ser ilustrado ao visualizarmos um campo elétrico produzido por uma carga externa à uma gaussiana entrando nessa superfície fechada na mesma medida em que sai dessa superfície, como ilustrado na Figura 5.

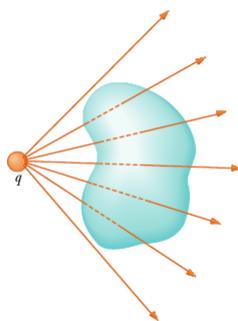


Figura 5 – Campo elétrico produzido por uma carga q externa à superfície, atravessando-a. Fonte: [Serway e Jewett \(2004\)](#).

De modo semelhante, a lei de Gauss aplicada a campos magnéticos se mantém mesmo se a gaussiana escolhida não envolver todo o ímã, pois temos que o número de vetores do campo magnético entrando nesta superfície fechada é o mesmo número que sai, ou seja, o fluxo magnético resultante em qualquer superfície fechada é sempre zero. Isso se dá por causa da natureza do campo magnético, como explicado anteriormente.

De modo geral, se envolvermos uma gaussiana em qualquer ponto do espaço por onde passa um campo magnético \mathbf{H} teremos que o fluxo magnético resultante ϕ_B sobre essa superfície é zero.

Analogamente ao que foi feito para campos elétricos, faremos $\mathbf{B}\mu_0 = \mathbf{H}$, em que μ_0 ⁶ é a permissividade do campo magnético do meio. O fluxo magnético total ϕ_B dado sobre uma gaussiana \mathcal{F} será

$$\phi_B = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.11)$$

Sendo assim, podemos enunciar a lei de Gauss para o magnetismo da seguinte maneira:

O fluxo magnético resultante em uma superfície fechada é zero.

Como dissemos anteriormente, o campo elétrico diverge de uma carga e converge em outra, mas o campo magnético é composto de linhas de campo que se fecham. Em outras palavras, podemos dizer que o campo magnético não se expande ou se contrai indefinidamente, ou seja, em um campo magnético não há fontes ou sorvedouros. Um modo de sabermos se um determinado campo vetorial tem uma fonte ou sorvedouro é analisando seu comportamento em determinados pontos no espaço e suas regiões próximas, ou seja, suas vizinhanças.

Para analisarmos o comportamento de um campo vetorial em um determinado ponto P do espaço em função de sua vizinhança, podemos, por exemplo, envolver P por uma gaussiana \mathcal{F} que limita um volume \mathcal{V} contendo uma distribuição de cargas $\rho(P) = \frac{q}{\mathcal{V}}$, em que $\rho(P)$ é a densidade de carga volumétrica no ponto P .

Segundo a lei de Gauss, o fluxo elétrico total ϕ_D passando por \mathcal{F} é

$$\phi_D = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q = \rho(P)\mathcal{V},$$

ou seja,

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{F}} \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho(P).$$

⁶ μ_0 é a constante de permissividade do campo magnético no meio e é $4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$.

O limite anterior define as características do campo elétrico nas proximidades de P conforme o volume \mathcal{V} tende a zero. O resultado desse limite é chamado de **divergência de um campo vetorial** (NUSSENZVEIG, 1997, p.23).

1.2.3 O operador Nabla ∇

Podemos tratar a divergência de uma forma pontual e conseguirmos uma notação mais compacta para sua representação. Primeiro precisamos do auxílio de uma ferramenta presente no cálculo vetorial, o operador ∇ . Este operador pode ser escrito na seguinte forma

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (1.12)$$

Seu propósito original nos remete ao trabalho de Hamilton,⁷ sobre Quatérnions. Mas para nossos propósitos nos é conveniente tratá-lo de modo distinto do que foi apresentado por Hamilton. Sendo assim nos convém tratar as componentes deste operador de forma escalar, ou seja, trataremos ∇ como um vetor (WILSON, 1943).

Podemos definir o operador ∇ para atuar em uma função escalar. De fato, sua aplicação em uma função escalar f em um ponto de seu domínio nos dá o vetor gradiente, dotado da propriedade de sua magnitude e direções indicarem a maior taxa de variação de f naquele ponto. Dessa forma, representaremos a aplicação de ∇ em uma função escalar $f(x, y, z)$ por

$$\nabla f = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k},$$

definindo o que conhecemos como **gradiente de uma função escalar f** .

Em um campo vetorial \mathbf{F} , ao tratarmos o operador ∇ como um vetor, das relações definidas entre vetores nos restarão duas possibilidades para a aplicação de ∇ em \mathbf{F} , uma será representada por um produto escalar, definido como a **divergência de \mathbf{F}**

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \quad (1.13)$$

e outra por um produto vetorial, definido como o **rotacional de \mathbf{F}**

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Com isso, temos que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ e $\nabla \times \mathbf{F}$, assim como o gradiente, ao serem aplicados em um campo vetorial, nos revelam propriedades pertinentes a este campo. Pode parecer que essas supostas propriedades dependeriam então dos eixos coordenados adotados para

⁷ William Rowan Hamilton, nascido em Dublin, 4 de agosto de 1805 e falecido em 2 de setembro de 1865, foi um matemático, físico e astrônomo irlandês.

representação do campo, mas na verdade, essas propriedades apresentadas pelos produtos vetorial e escalar de ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} são independentes dos eixos coordenados adotados para sua representação.

1.2.4 A divergência

Com o operador ∇ definido anteriormente podemos enunciar a seguinte definição de divergência.

Definição 4. *Dado um campo vetorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ contínuo e diferenciável, a divergência de \mathbf{F} é o limite de sua integral de superfície por unidade de volume, quando o volume tende a zero. Da equação (1.13) temos que*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \lim_{\mathcal{F} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{F}} \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

É dado o nome de divergência pois $\nabla \cdot \mathbf{F}$ mede o quanto o campo vetorial \mathbf{F} se espalha, ou seja, diverge do ponto em questão. Um ponto de divergência positiva é chamado de fonte e um ponto em que a divergência é negativa é chamado de sorvedouro (GRIFFITHS, 2011, p.17) .

Segundo as informações sobre campos magnéticos até então apresentadas, podemos supor que um campo magnético \mathbf{B} tem divergência nula, ou seja, não se espalha e nem se contrai em ponto algum. Analisando a lei de Gauss para o magnetismo podemos supor que o fluxo magnético total em uma superfície fechada se anula porque é da natureza do campo magnético ter linhas de campo que entram na superfície a mesma medida que saem.

De fato, segundo **Teorema da divergência**, ou como também é conhecido, o **Teorema de Gauss**:

Teorema 1. *Sejam \mathbf{F} um campo vetorial definido do \mathbb{R}^3 de primeiras derivadas contínuas e uma superfície fechada e orientada \mathcal{F} que delimita um volume \mathcal{V} , então*

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot dV = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Em outras palavras, este teorema diz que o fluxo de um campo vetorial “saindo” de uma superfície fechada é igual a integral da divergência desse campo vetorial.

Aplicando o Teorema 1 à equação (1.11), e considerando uma gaussiana \mathcal{F} delimitando um volume \mathcal{V} , temos

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot dV = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

e como estamos considerando \mathcal{V} um volume arbitrário

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.15}$$

A equação (1.15) é a confirmação matemática que o campo magnético não tem fontes ou sorvedouros, não tem ponto inicial ou ponto final. Com isso dizemos que o campo magnético é livre de divergência.

Campos elétricos e campos magnéticos são fenômenos distintos enquanto são estáticos, ou seja, não variam com o tempo. Mas a interdependência entre esses campos aparece quando houver uma variação de corrente em um condutor em relação ao tempo, ou quando um ímã é movido perto de algum condutor (FEYNMAN, 2011).

1.3 Lei de Gauss para campos elétricos na forma diferencial

De acordo com o princípio da superposição, a equação (1.8) é adequada somente para distribuições discretas de cargas. Para distribuições contínuas de cargas, lidamos com a densidade, ou variação de cargas em linhas, superfícies e volumes. Temos o elemento de carga infinitesimal dq que se relaciona com as densidades da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dl} &= \lambda; \\ \frac{dq}{dS} &= \sigma; \\ \frac{dq}{dV} &= \rho.\end{aligned}$$

Representando a densidade, ou variação, de carga por elemento infinitesimal, para linha temos $\lambda \cdot dl$, para superfície $\sigma \cdot dS$ e para volume ρdV , com dl , dS e dV sendo elementos infinitesimais de linha, superfície e volume, respectivamente. Particularmente, no caso da carga dentro de uma superfície fechada, teremos

$$dq = \rho dV,$$

ou seja,

$$\iiint_V \rho dV = q,$$

em que q é a carga total.

Mas

$$q = \iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV. \quad (1.16)$$

Aplicando o Teorema 1 em (1.16) temos

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV,$$

ou seja,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \iiint_V \rho dV,$$

e assim, temos para \mathcal{V} arbitrário

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1.17}$$

que é a lei de Gauss na forma diferencial.

2 Lei de Ampère

Oersted¹, por volta de 1820, mostrou em seus experimentos que uma corrente elétrica passando por um fio produz um campo magnético. Ele estabeleceu a ligação entre campos elétricos e campos magnéticos (SADIKU, 2012; SERWAY; JEWETT, 2004).

Segundo Sadiku (2012), um campo magnético estático é produzido quando há um fluxo de corrente constante, ou corrente contínua². Uma corrente elétrica I é definida como a razão entre a quantidade de carga dq que passa por uma seção de um condutor e o tempo dt , ou seja, uma carga em movimento constitui uma corrente e, em geral, elas surgem em resposta a um campo elétrico estabelecido no condutor (REITZ et al., 1982, p.139). Matematicamente podemos dizer que

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

De acordo com as experiências de Oersted, ao passarmos uma corrente elétrica contínua por um fio retilíneo, geramos um campo magnético com intensidade igual para pontos com o mesmo raio de distância do fio. Com isso, Oersted inferiu que o campo era circular em volta do fio, ou seja, tem o fio como centro dessa circunferência que pertence a um plano transversal ao fio. A intensidade do campo magnético \mathbf{B} , obtida experimentalmente, é inversamente proporcional à distância r do fio e diretamente proporcional à intensidade da corrente I , ou seja,

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi r}. \quad (2.2)$$

Considerando um fluxo de cargas constante em que não há acúmulo de cargas em ponto algum do condutor podemos pensar no seguinte questionamento.

Dado um fio retilíneo, em que passa uma corrente contínua, qual é o campo magnético em um ponto P , fora desse fio?

A lei de Biot-Savart é para campos magnéticos estáticos o que a lei de Coulomb é para os campos elétricos estáticos. Ela relaciona o campo magnético \mathbf{B} gerado com corrente elétrica I que passa pelo condutor, seja o condutor um fio retilíneo, uma placa ou

¹ Hans Christian Oersted, nascido em 14 de Agosto 1777 e falecido em 9 de Março 1851, foi um físico e químico dinamarquês.

² Foram encontrados termos como “steady currents” em livros na língua inglesa, cuja tradução literal para o português é “corrente estacionária”. Segundo Feynman (2011), mesmo o termo em inglês nos dá a impressão de contradição devido a própria definição de corrente elétrica. Para evitar esta impressão na língua portuguesa adotamos o termo corrente constante, ou corrente contínua utilizados em Serway e Jewett (2004) e Sadiku (2012).

um fio em espiras. Ao lidarmos com um fio retilíneo, a lei de Biot-Savart se torna

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \quad (2.3)$$

com r sendo a distância do condutor até o ponto P . Com ela podemos encontrar o campo magnético em alguma região próxima do fio.

Sendo assim, podemos dispor o fio retilíneo com extremidades em A e B no eixo z . Ao fazermos isso teremos a Figura 6.

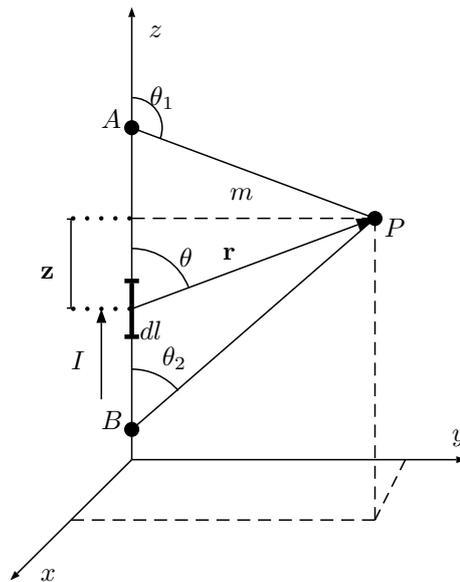


Figura 6 – Fio carregado eletricamente de comprimento arbitrário e um ponto P fora do fio.

De acordo com a Figura 6, ao fazermos $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$ teremos um vetor perpendicular aos dois com sentido e direção dados pela regra da mão direita, como visto na Figura 7. Esta direção será indicada por $\hat{\mathbf{a}}$. Sendo assim, teremos o vetor do campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{a}}$.

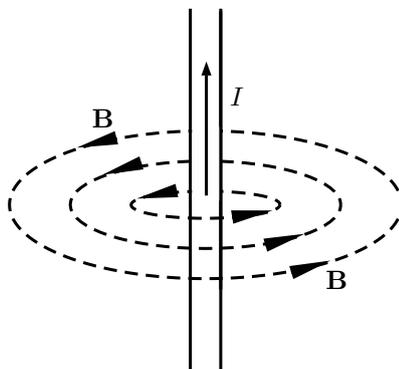


Figura 7 – Corrente elétrica I passando pelo fio gerando um campo magnético \mathbf{B} .

Assim, nos resta saber a intensidade do campo magnético \mathbf{B} em P . Como $d\mathbf{l} = dz\mathbf{k}$,

de acordo com a definição de produto vetorial, podemos fazer

$$d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = dz \operatorname{sen}(\theta), \quad (2.4)$$

pois $\hat{\mathbf{r}}$ é um versor.

Inserindo (2.4) na equação (2.3) obteremos

$$dB = \frac{I}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}(\theta) dz}{r^2}. \quad (2.5)$$

Como

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m}{r} \Rightarrow r = \frac{m}{\operatorname{sen}(\theta)} = m \operatorname{cosec}(\theta),$$

e

$$\tan(\theta) = \frac{m}{z} \Rightarrow \cotan(\theta) = \frac{z}{m} \Rightarrow m \cotan(\theta) = z \Rightarrow dz = -m(\operatorname{cosec}(\theta))^2 d\theta,$$

teremos na equação (2.5)

$$dB = \frac{I}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}(\theta)(-m(\operatorname{cosec}(\theta))^2) d\theta}{[m(\operatorname{cosec}(\theta))]^2} = -\frac{I}{4\pi m} \operatorname{sen}(\theta) d\theta. \quad (2.6)$$

Tomando cada contribuição de campo magnético dada pelos segmentos infinitesimais, de forma que o vetor \mathbf{r} varie de θ_1 a θ_2 , teremos

$$B = -\frac{I}{4\pi m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}(\theta) d\theta = \frac{I}{4\pi m} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)). \quad (2.7)$$

O resultado em (2.7) é válido para um fio de comprimento finito. Se quisermos encontrar o campo magnético resultante, com o comprimento do fio tendendo ao infinito, devemos fazer com que $\theta_1 \rightarrow -\pi$ e $\theta_2 \rightarrow 0$, e assim teremos

$$\mathbf{B} = \frac{I}{2\pi m} \hat{\mathbf{a}}. \quad (2.8)$$

2.1 Campos magnéticos produzidos por correntes elétricas

Ampère³, após realizar vários experimentos, obteve alguns resultados assim como o que foi chamado de *lei de circulação*, *lei circuital de Ampère* ou simplesmente **lei de Ampère** (NUSSENZVEIG, 1997). Através de experimentação, Ampère apresentou uma lei que relaciona a circulação do campo magnético à intensidade da corrente elétrica passando pelo fio que gera este campo.

A circulação é um elemento do Cálculo Vetorial que está relacionado com curvas em geral. Segundo Apostol (1993, p.364), a grosso modo, uma curva é uma representação gráfica de uma função vetorial.

³ André-Marie Ampère, nascido em 1775 e falecido em 10 de Junho de 1836. Foi um matemático e físico francês.

Definição 5. Seja \mathbf{l} uma função vetorial definida em um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$. A reunião de todos os pontos que a função vetorial $\mathbf{l}(t)$ indicar, para cada $t \in [a, b]$ e \mathbf{l} contínua nesse intervalo, será chamada de **curva**. Dizemos então que uma curva C é descrita por \mathbf{l} .

Para nossos propósitos, necessitamos que além de contínua, uma curva C seja regular. Dizemos que uma curva é regular se para cada $t \in (a, b)$ temos que a derivada $\mathbf{l}'(t)$ em relação a t existe e é contínua.

De modo geral, dada uma curva fechada C descrita por $\mathbf{l}(t)$ no \mathbb{R}^3 , com t variando dentro do intervalo fechado $[a, b]$, e um campo vetorial \mathbf{F} também definido no \mathbb{R}^3 , a **circulação de um campo vetorial** é a integral de linha do um campo vetorial sobre uma curva fechada.

Dizemos que a curva é fechada quando no intervalo $t \in [a, b]$ o caminho $\mathbf{l}(t)$ tem $\mathbf{l}(a) = \mathbf{l}(b)$. Estamos considerando que cada curva fechada seja simples. Uma curva fechada é dita simples se para $t_1, t_2 \in (a, b]$ com $t_1 \neq t_2$, teremos $\mathbf{l}(t_1) \neq \mathbf{l}(t_2)$, com $\mathbf{l}(t)$ sendo a função vetorial que descreve uma curva C .

Conforme t avança para $t + \Delta t$ a curva segue de $\mathbf{l}(t)$ para $\mathbf{l}(t + \Delta t)$ e obtemos um vetor deslocamento $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{l}(t + \Delta t) - \mathbf{l}(t)$. Ao fazermos $\Delta \mathbf{S} \approx \mathbf{l}'(t)\Delta t$, os vetores de \mathbf{F} na direção de $\Delta \mathbf{S}$ em cada ponto de C serão

$$\mathbf{F}(\mathbf{l}(t)) \cdot \Delta \mathbf{S} \approx \mathbf{F}(\mathbf{l}(t)) \cdot \mathbf{l}'(t)\Delta t.$$

Subdividiremos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais, ou seja, $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Isso nos é permitido porque estamos considerando que as curvas aqui tratadas sejam todas regulares. A soma de todos estes produtos escalares será

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{S} \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{l}(t_i)) \cdot \mathbf{l}'(t_i)\Delta t$$

com $\Delta t = \Delta t_i - \Delta t_{i-1}$ e $\mathbf{l}' = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$.

Fazendo essa aproximação ser ainda melhor, tomamos n tão grande quanto queiramos. Assim, teremos como limite dessa soma

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{l}(t)) \cdot \mathbf{l}'(t)dt. \quad (2.9)$$

Como $\mathbf{l}'(t).dt = d\mathbf{l}$, podemos escrever (2.9) do seguinte modo:

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{l}(t)) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.10)$$

O caminho \mathbf{l} é fechado, então

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{l}(t)) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.11)$$

que é chamado de **circulação de \mathbf{F} sobre C** .

Sabemos, por Oersted, que o campo magnético gerado por um fio retilíneo é circular e concêntrico, ou seja, é fechado. Ao tentarmos calcular a integral de linha do campo magnético sobre um caminho circular em torno do fio, ou seja, ao tentarmos obter a circulação de \mathbf{B} por uma curva circular C , percebemos que os vetores $d\mathbf{l}$ e os vetores do campo magnético \mathbf{B} sobre a curva são paralelos em cada ponto. Por causa disso \mathbf{B} é constante sobre o caminho.

Sendo assim, ao calcularmos a circulação de \mathbf{B} sobre C teremos

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \int_0^{2\pi} r \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r = I. \quad (2.12)$$

Este caso de um caminho circular concêntrico no fio serve pra ilustrar um caso mais geral, enunciado pela lei de Ampère da seguinte maneira:

A integral de linha do campo magnético \mathbf{B} sobre qualquer caminho fechado em volta de um fio é igual à corrente contínua I que passa por este fio, ou seja,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (2.13)$$

Também podemos notar que, segundo a definição, o produto escalar em (2.13) nada mais é do que produto da componente tangencial de \mathbf{B} pelo elemento infinitesimal da curva $d\mathbf{l}$ por todo o caminho fechado, sendo este igual à corrente resultante I . A equação (2.13) é a *lei de Ampère* na forma integral.

2.2 O vetor rotacional

Considerando que um caminho fechado delimita uma superfície, podemos enunciar a lei de Ampère dizendo que a integral de linha em volta de qualquer caminho fechado é igual a I , que então será a corrente elétrica que atravessa a superfície delimitada por essa curva fechada.

Como proposto por Feynman (2011) e Nussenzveig (1997), vamos imaginar um caminho, uma curva fechada no formato de um quadrado que é paralela ao plano xy formado pelos eixos coordenados. Este caminho delimita uma área que pode se tornar tão pequena o quanto queiramos para que o campo vetorial \mathbf{B} não varie significativamente

nessa área. Podemos decompor esta curva fechada em uma soma de várias outras curvas, por exemplo, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, e a integral será

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^4 \oint_{C_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

A circulação total de \mathbf{B} sobre C será igual à soma das integrais de linha sobre as curvas que juntas formam o caminho fechado C . De fato, esta relação entre circulação total e a soma das integrais de caminhos parciais da curva se mantêm mesmo quando esses caminhos parciais são fechados e internos à curva original, como mostrado por Kaplan (1972), Marsden e Tromba (2011), Apostol (1993) e ilustrado por Feynman (2011).

É importante falar que as integrais de linha podem ser tomadas em orientações distintas. Estamos adotando a orientação padrão como sendo a anti-horária, como ilustrado na Figura 8. Sendo assim, ao percorrermos o intervalo de integração no sentido anti-horário, estaremos tomando valores crescentes da parametrização escolhida (STEWART, 2013, p.958).

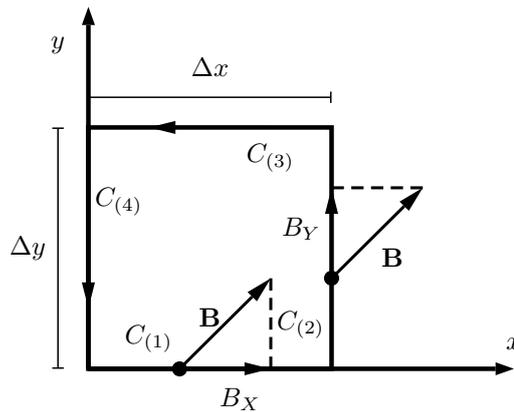


Figura 8 – Quadrado formado pelos eixos coordenados x e y .

A ilustração desta construção, apresentada na Figura 8, nos mostra que a circulação de \mathbf{B} sobre C é

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_{C_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_3 + \int_{C_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_4 \\ &= B_x(1)\Delta x + B_y(2)\Delta y - B_x(3)\Delta x - B_y(4)\Delta y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para a variação total na direção do eixo x temos, segundo a Figura 8

$$[B_x(1) - B_x(3)] \Delta x.$$

De acordo com Feynman (2011) para que tenhamos uma aproximação melhor⁴, devemos levar em consideração a taxa de variação na direção do eixo y de B_x , ou seja,

⁴ Fazendo uma expansão de Taylor tridimensional. Ver (SADIKU, 2012, p.83).

$B_x(1) - B_x(3) = -\frac{\partial B_x}{\partial y} \Delta y$, pois $B_x(1)$ difere de $B_x(3)$ por um incremento Δy infinitesimal. Logo

$$[B_x(1) - B_x(3)] \Delta x = \left[-\frac{\partial B_x}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x. \quad (2.15)$$

Para a variação total na direção do eixo y podemos fazer o análogo para os caminhos (2) e (4), assim teremos

$$[B_y(2) - B_y(4)] \Delta y = \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y. \quad (2.16)$$

Somando (2.15) e (2.16), teremos do lado direito da igualdade

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

que na verdade, segundo o que fizemos em (2.14) é

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (2.17)$$

Para termos mais precisão fazemos com que o elemento de área $\Delta x \Delta y$ tenda a zero, e então

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta y} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right). \quad (2.18)$$

Fazendo todo esse processo para curvas contidas nos planos paralelos à xz e yz , teremos também

$$\lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta z} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

e

$$\lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right). \quad (2.20)$$

Analisando as circulações acima, percebemos que elas se assemelham em forma ao resultado obtido pelo produto vetorial entre dois vetores. Mais especificamente, o produto vetorial entre o operador ∇ e o campo vetorial \mathbf{B} . De fato, como mostrado na equação (1.14), sendo $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, em coordenadas cartesianas, temos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}, \quad (2.21)$$

mas lembrando que

$$\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{k} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{j} \quad (2.22)$$

e fazendo o análogo para $\mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}$ e $\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$ teremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.23)$$

Definição 6. A densidade de circulação de um campo vetorial $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ é chamada de **rotacional de \mathbf{F}** e é expresso por $\nabla \times \mathbf{F}$. Podemos expressar o rotacional de \mathbf{F} como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.24)$$

Então, podemos escrever (2.23), de modo compacto,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

para o campo \mathbf{B} dado em coordenadas cartesianas.

Assim como um produto vetorial, o rotacional de $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, será um vetor. Este vetor é paralelo ao eixo de rotação pelo qual o campo vetorial rotaciona em torno. Com isso, se o resultado do rotacional for um vetor nulo, isso significa que o campo vetorial é irrotacional.

Notemos que as direções das componentes de $\nabla \times \mathbf{B}$ que são iguais aos resultados (2.18), (2.19) e (2.20) são ortogonais às superfícies delimitadas pelas curvas que originaram estes resultados.

Percebemos, por exemplo, que a componente \mathbf{k} do resultado do produto vetorial na equação (2.23), que é ortogonal à superfície delimitada por C , é igual à circulação de um caminho paralelo ao plano xy (como visto na equação (2.18)).

De fato, existe um teorema que relaciona a integral de linha de um campo vetorial sobre uma curva fechada e uma integral de uma superfície delimitada por esta curva fechada. Este teorema é conhecido como *Teorema de Stokes*⁵.

⁵ George Gabriel Stokes, nascido em Skreen, condado de Sligo na Irlanda em 13 de agosto de 1819 e falecido em Cambridge 1 de fevereiro de 1903. Foi um matemático e físico irlandês.

Teorema 2. *Seja \mathcal{S} uma superfície orientada lisa por partes delimitada por uma curva lisa por partes C . Uma curva lisa por partes é tal que pode ser dividida em várias outras superfícies que se unem por meio de curvas lisas. Seja $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ um campo vetorial com primeiras derivadas parciais contínuas. A circulação de \mathbf{F} sobre C é igual à integral do $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ sobre a superfície \mathcal{S} delimitada por C .*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Aplicando o Teorema 2 à (2.13) temos

$$I = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.26)$$

2.3 Forma vetorial da lei de Ampère

Quando uma corrente elétrica ocorre numa região tridimensional, podemos descrevê-la por um vetor chamado **densidade de corrente volumétrica**, representado por \mathbf{J} .

Considerando um condutor elétrico por onde passa uma corrente elétrica, podemos considerar que cada uma das cargas se move com uma velocidade \mathbf{v} . A quantidade de cargas dq que passa por uma área dS do condutor em um tempo dt pode ser expressa como

$$dq = Nq\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dS, \quad (2.27)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor normal à dS e N é o número de cargas elétricas.

Portanto definimos \mathbf{J} ⁶ como

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}. \quad (2.28)$$

Das equações (2.1), (2.28) e (2.27), temos

$$\begin{aligned} dI &= \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ I &= \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Comparando (2.26) com (2.29) temos

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

e então

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a forma vetorial, ou pontual, da lei de Ampère apresentada em (2.13).

⁶ Se a distribuição de cargas não for discreta, definimos $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$.

2.4 Retomando o problema inicial

Para resolver o problema, apresentado no início deste capítulo, para o caso de fio infinito, com a lei de Ampère, precisamos avaliar todas as contribuições dos campos magnéticos gerados pelas cargas no fio, ou seja, precisamos utilizar a lei de Ampère na forma da equação (2.13). Para encontrarmos o campo magnético em P nós construímos uma curva circular, um caminho fechado, que passe por P . Podemos representar este caminho como na Figura 9.

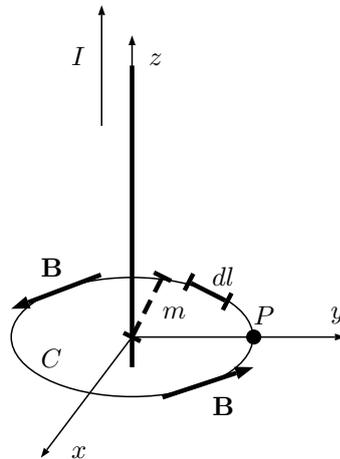


Figura 9 – Caminho circular C em torno do fio retilíneo que passa pelo ponto P .

Construiremos este caminho fechado da seguinte maneira. Ao tomarmos a menor distância do ponto P ao eixo z , no qual dispomos o fio, obteremos um comprimento m . Traçamos então uma circunferência de raio m a partir do fio, e que portanto passa pelo ponto P . Como o caminho é circular, o campo magnético \mathbf{B} será paralelo ao deslocamento pelo caminho $d\mathbf{l}$, e por isso $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot dl$. Então, segundo a lei de Ampère dada em (2.13),

$$I = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B \int_0^{2\pi} m \cdot dl = B2\pi m.$$

Como o sentido e direção do campo \mathbf{B} são dados por $\hat{\mathbf{a}}$, temos

$$\mathbf{B} = \frac{I}{2\pi m} \hat{\mathbf{a}}. \quad (2.31)$$

2.5 O uso da lei de Ampère

De modo análogo à lei de Gauss enunciada no capítulo anterior, a lei de Ampère para correntes contínuas é utilizada visando aproveitar as simetrias existentes em determinadas situações. Bem como a lei de Gauss, a lei de Ampère é válida mesmo quando não há simetria, mas sua utilidade prática se revela quando a simetria existe e é alta.

Assim, podemos obter algumas informações de acordo com a natureza já conhecida dos campos magnéticos para facilitarmos o trabalho mecânico na obtenção da corrente contínua que gera esse campo magnetostático. Segundo [Sadiku \(2012\)](#), correntes passando por linhas, planos ou solenoides infinitos são facilitadores para a aplicação da lei de Ampère.

Do mesmo modo, [Serway e Jewett \(2004\)](#) também identificam algumas relações entre as configurações dos vetores do campo magnético e os caminhos de integração, as curvas. Assim, teremos facilidade em aplicar a lei de Ampère se pudermos deduzir, devido à simetria existente, que o valor do campo magnético é constante. Ou seja, facilitará nossos esforços se pudermos observar que o produto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ poderia ser expresso como um simples produto entre B e a área total obtida por dl , porque \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ seriam paralelos, ou, se devido à disposição dos elementos, repararmos que o produto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ seria zero, porque \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ seriam perpendiculares em cada ponto.

3 O campo elétrico conservativo

Devido a vários experimentos, sabemos que há uma força atrativa entre cargas de sinais opostos e uma força repulsiva entre cargas de sinais iguais, como representado na Figura 10. Também sabemos que a força de interação entre os campos dessas duas cargas é dada pela lei de Coulomb.

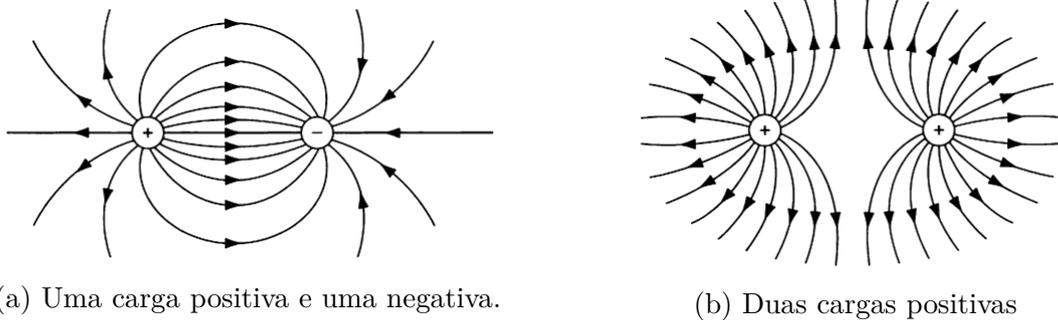


Figura 10 – Linhas de campo de dois sistemas, compostos de duas partículas eletricamente carregadas. Temos em 10a e 10b linhas de campo representando a atração e a repulsão entre cargas, respectivamente. Fonte [Griffiths \(2011\)](#).

Para manter uma carga positiva perto de outra de mesmo sinal devemos aplicar uma força de mesma intensidade e direção, mas no sentido oposto ao afastamento das cargas. Dizemos então que há um trabalho sendo executado por um agente externo a fim de mantê-las próximas uma da outra. Se as cargas forem de sinais opostos o trabalho realizado é negativo, se forem cargas de sinais iguais o trabalho é positivo ([SERWAY; JEWETT, 2004](#), p.726).

Nas proximidades de um campo elétrico \mathbf{D} , gerado por uma carga q situada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, colocamos uma outra carga q_1 , como na Figura 11. Se levamos a carga q_1 de um ponto A para um ponto B , sem a acelerarmos, o trabalho W executado será dado por

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.1)$$

sendo $\mathbf{F} = q_1 \mathbf{D}$.

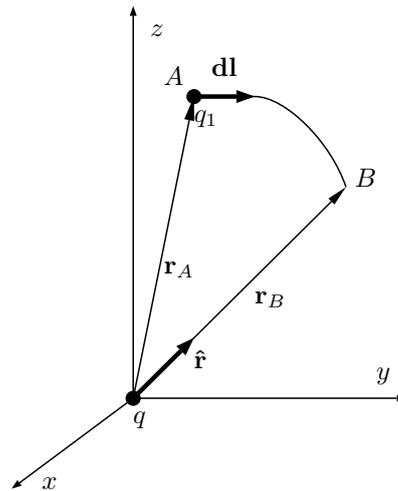


Figura 11 – Movimento da carga q_1 sendo executado partindo do ponto A , indicado por \mathbf{r}_A , para o ponto indicado por B , indicado por \mathbf{r}_B , em um campo vetorial \mathbf{D} gerado pela carga q na origem.

Segundo Feynman (2011), o resultado que obtemos das integrais utilizadas para calcular o trabalho executado nessa movimentação, geralmente, são dependentes do caminho que escolhermos para integrá-las, como ilustrado na Figura 12.

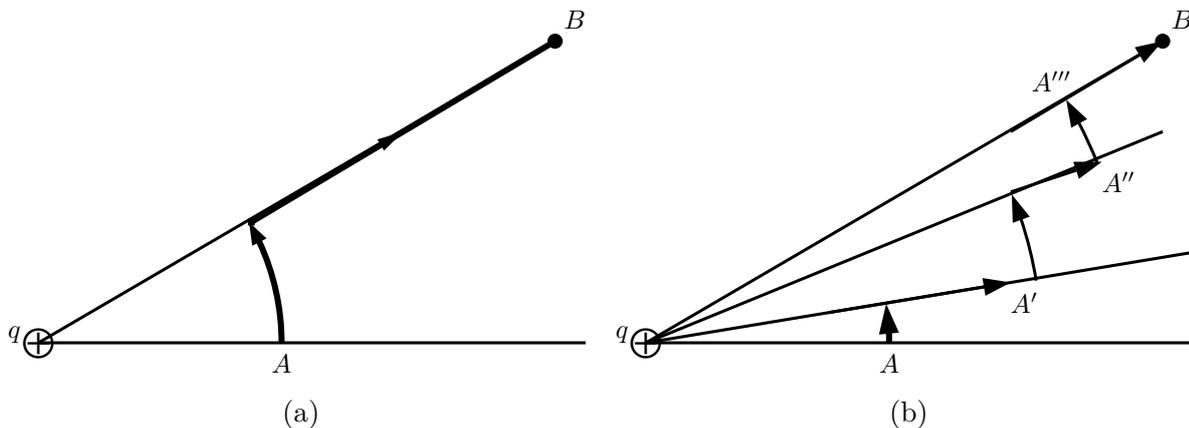


Figura 12 – Se escolhermos o caminho (a) para resolvermos a integral geralmente obteremos um resultado diferente do que se escolhermos o caminho (b). Fonte: adaptado de Feynman (2011).

O sinal negativo na equação (3.1) aparece porque o trabalho é realizado por uma força externa ao sistema campo elétrico - carga. O resultado obtido de (3.1) é chamado de *energia potencial eletrostática* (SADIKU, 2012).

Ao colocarmos q_1 em A , indicado pelo vetor partindo da origem \mathbf{r}_A , e calcularmos

o trabalho executado para movê-la para o ponto B , indicado por \mathbf{r}_B , o trabalho será

$$W = -q_1 \int_A^B \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l}.$$

Como $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$, com $\hat{\mathbf{r}}$ unitário partindo de q para cada ponto do percurso feito por $d\mathbf{l}$, temos que, para dl módulo de $d\mathbf{l}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ versor partindo de q para q_1

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{q}{4\pi r^2} dl \cos(\theta) \\ &= \frac{q}{4\pi r^2} dr, \end{aligned}$$

pois, $d\mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{r}} = dl \cos(\theta)$, que pode ser escrito como $dl \cos(\theta) = dr$, sendo dr módulo do vetor radial diferencial $d\mathbf{r}$ tomado a partir de q , e θ o ângulo entre dl e dr . Com isso,

$$\begin{aligned} W &= -q_1 \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi r^2} \cdot dr \\ &= -\frac{q_1 q}{4\pi} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Portanto

$$W = \frac{q_1 q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right), \quad (3.2)$$

com r_A e r_B sendo o módulo, ou seja, a distância absoluta de q até A e B , respectivamente.

Observando o resultado (3.2) podemos refletir acerca da independência ou não do caminho a ser tomado quando calculamos o trabalho realizado ao mover uma partícula carregada em um campo elétrico, pois aparentemente dependemos apenas das posições finais e iniciais da carga q_1 . Para investigar este resultado, primeiramente precisamos descobrir o rotacional do campo elétrico \mathbf{D} .

3.1 O rotacional do campo elétrico \mathbf{D}

Como vimos no capítulo anterior, ao tomarmos o rotacional de um campo magnético em qualquer ponto temos a equação (2.31). Vamos agora aplicar o operador rotacional em um campo elétrico \mathbf{D} .

Considerando uma carga pontual q situada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, em um espaço tridimensional, o campo elétrico atuante em um ponto P , indicado pelo vetor \mathbf{r} , será dado por

$$\mathbf{D}(P) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.3)$$

O vetor \mathbf{r} é o vetor posição de P a partir de q , e portanto, como q está na origem

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Aplicando o rotacional na equação (3.3), temos

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \left(\frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{q}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.4)$$

pois $\frac{q}{4\pi}$ é escalar.

Para prosseguirmos, devemos aplicar a seguinte propriedade do rotacional em $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Propriedade 1. *Dados um campo vetorial \mathbf{F} qualquer e uma função escalar g , ambos definidos no \mathbb{R}^3 , teremos que*

$$\nabla \times g\mathbf{F} = g(\nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times (\nabla g). \quad (3.5)$$

Devemos aplicar a propriedade 1 na equação (3.4), pois $\frac{1}{r^3}$ é uma função escalar.

Assim,

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \underbrace{\frac{1}{r^3} (\nabla \times \mathbf{r})}_{(I)} + \underbrace{\mathbf{r} \times \left(\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right)}_{(II)}.$$

De (I),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De (II), para a componente \mathbf{i} , teremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{-3} \right) \mathbf{i} = \left(\frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^5} \right) \mathbf{i},$$

com os resultados das componentes \mathbf{j} e \mathbf{k} sendo obtidos de maneira análoga. Desse modo

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) &= \frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^5} \mathbf{i} + \frac{-3y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^5} \mathbf{j} + \frac{-3z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^5} \mathbf{k} \\ &= -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}. \end{aligned}$$

O produto vetorial $\mathbf{r} \times -3\frac{\mathbf{r}}{r^5} = 0$, pois \mathbf{r} e $3\frac{\mathbf{r}}{r^5}$ são paralelos entre si¹.

De (I) e de (II) resulta que

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

e portanto

$$\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é a segunda equação de Maxwell relacionada a campos eletrostáticos, na forma vetorial. Esse resultado foi obtido considerando uma carga pontual situada na origem. É possível encontrarmos este mesmo resultado para uma carga disposta em um local qualquer do espaço (REITZ et al., 1982). De fato, segundo Feynman (2011), para generalizarmos esta equação para distribuições de cargas quaisquer basta recorrermos ao princípio da superposição.

3.2 Campo elétrico irrotacional

O fato do rotacional do campo elétrico ser nulo, para qualquer configuração de distribuição de cargas, nos revela mais sobre a natureza do campo elétrico. De fato, um campo vetorial qualquer com rotacional nulo é chamado de *irrotacional*.

Um campo ser irrotacional implica no fato dele poder ser obtido de uma função escalar, após a aplicação do gradiente. O Teorema 3 prova esta afirmação.

Teorema 3. *Dada uma função escalar f duas vezes diferenciável e contínua, temos*

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0},$$

ou seja, o rotacional de um campo gradiente é nulo.

Demonstração. O gradiente de uma função f pode ser escrito como $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

¹ $\mathbf{r} \times \alpha \mathbf{r} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

e portanto

$$\nabla \times \nabla f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k},$$

e que, devido ao teorema da igualdade das derivadas mistas², resultará no vetor nulo $\mathbf{0}$. \square

Uma consequência do Teorema 3 é o campo elétrico de fato poder ser obtido através da aplicação do gradiente em uma função escalar.

3.3 O potencial eletrostático

Se o campo elétrico \mathbf{D} pode ser obtido por um gradiente precisamos de uma função escalar f que, ao ser tomado seu gradiente, nos dará \mathbf{D} . Com isso, a função f a ser encontrada deverá obedecer a

$$\mathbf{D} = -\nabla f, \quad (3.8)$$

ou seja,

$$\int_A^B \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.9)$$

Com a equação (3.9) podemos reescrever (3.2) como

$$\frac{W}{q_1} = \int_{r_B}^{r_A} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_B}^{r_A} \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

A relação que encontramos em (3.10) é de fato um facilitador para a obtenção do trabalho executado por um campo elétrico. Podemos lidar com o último termo das igualdades na equação (3.10) com o teorema enunciado a seguir.

Teorema 4. *Sejam f uma função tal que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, com f contínua e diferenciável, e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ uma curva contínua e diferenciável descrita pelo caminho $\mathbf{l}(t)$, $t \in [a, b]$. Então*

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{l}(b)) - f(\mathbf{l}(a)).$$

Demonstração. Definimos uma função F de modo que

$$F : t \rightarrow f(\mathbf{l}(t)), \quad (3.11)$$

ou seja, F é uma função que leva t a valores reais.

² Sendo f uma função escalar com derivadas segundas contínuas, suas derivadas cruzadas (ou mistas) são iguais. Ver Teorema de Clairaut em (THOMAS et al., 2012).

Pela Regra da cadeia obtemos

$$F'(t) = (f \circ \mathbf{l})'(t) = \nabla f \cdot \mathbf{l}'(t), \quad (3.12)$$

pois $f(x(t), y(t), z(t))$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\int_a^b F'(t) \cdot dt = F(b) - F(a). \quad (3.13)$$

Das equações (3.11) e (3.13) obtemos

$$\int_a^b F'(t) \cdot dt = f(\mathbf{l}(b)) - f(\mathbf{l}(a)),$$

e portanto, com a equação (3.12)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{l}(t)) \cdot \mathbf{l}'(t) \cdot dt = \int_a^b F'(t) \cdot dt = F(b) - F(a) \\ &= f(\mathbf{l}(b)) - f(\mathbf{l}(a)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

□

O Teorema 4 generaliza o resultado que obtivemos em (3.2), ou seja, prova que para qualquer campo elétrico o trabalho realizado ao deslocarmos uma partícula dependerá apenas dos pontos finais e iniciais e não da trajetória. Com isso

$$\int_{r_A}^{r_B} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (3.15)$$

Logo, um campo conservativo poderá ser definido da seguinte maneira.

Definição 7. *Se calcularmos um trabalho realizado por uma força devido a um campo qualquer e encontrarmos a não-dependência do caminho a ser tomado dizemos que este campo é um campo conservativo.*

Segundo Serway e Jewett (2004), devido a força eletrostática ser conservativa podemos descrever os fenômenos eletrostáticos em termos de uma função escalar chamada de *diferença de potencial*.

A diferença de potencial entre dois pontos A e B é denotada por V_{AB} . A equação (3.15) nada mais é que a diferença de potencial entre os pontos A e B , ou seja

$$V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l}.$$

Podemos dizer que, ao assumirmos o potencial elétrico sendo zero no infinito, faremos com que a energia potencial eletrostática em um ponto dado seja o trabalho realizado para deslocar uma determinada carga do infinito até aquele ponto, sendo este trabalho realizado por um agente externo (SADIKU, 2012).

Então, o potencial elétrico em um ponto a uma distância r de q é

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.16)$$

Retomando o resultado da equação (3.2), para encontrarmos o potencial elétrico num ponto B fazemos com que $r_A \rightarrow \infty$ e portanto $V_A \rightarrow 0$. Assim, o potencial elétrico V em um ponto B , com distância r de q , é

$$V = \frac{q}{4\pi r}. \quad (3.17)$$

A equação (3.8) confirma a equação (3.17), pois com $V = f$

$$\mathbf{D} = -\nabla V, \quad (3.18)$$

em que a igualdade em (3.18) pode ser verificada diretamente através da derivação de V .

Resolver a integral de linha utilizando o potencial elétrico é mais simples do que utilizando a equação do campo elétrico. Isso se dá pelo fato de ao lidarmos com o potencial elétrico estarmos calculando a integral em respeito a um campo escalar e na forma $\frac{1}{r}$ ao invés de calcularmos três integrais (devido às três componentes do campo elétrico) e sob a forma de $\frac{1}{r^2}$.

Dessa forma, o trabalho encontrado em (3.2), dividido por unidade de carga q_1 nada mais é do que a diferença de potencial do ponto A ao ponto B , ou seja, é a energia potencial eletrostática por unidade de carga.

3.4 O trabalho em uma curva fechada

Todo campo vetorial obtido de um campo escalar através do gradiente é um campo conservativo, como vimos pelos Teoremas 3 e 4. Ou seja, o campo elétrico é um campo conservativo.

Portanto, se tomarmos dois pontos com mesma distância da carga q geradora do campo elétrico e quisermos encontrar o trabalho executado ao deslocarmos uma partícula por este campo, obteremos 0, pois não há trabalho a ser executado. Isso se deve à natureza radial do campo elétrico que se propaga no espaço com uma razão de $\frac{1}{r^2}$ (FEYNMAN, 2011).

Além disso, como podemos obter da equação (3.7), e garantido pelo Teorema 4, o trabalho executado para carregar uma partícula sobre uma curva fechada é nulo, ou seja, para uma curva C fechada teremos

$$\oint_C \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.19)$$

A equação (3.19) é a forma integral da equação vetorial (3.7), e que compõe as equações de Maxwell para campos eletromagnéticos estáticos, ou seja, invariantes no decorrer do tempo.

Também podemos obter (3.19) de forma direta aplicando o Teorema 2 em (3.7)

$$\oint_C \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.20)$$

em que C é uma curva fechada e S é a superfície delimitada por C .

4 Lei de Faraday

Nos capítulos anteriores, vimos que cargas estacionárias produzem campos elétricos estacionários, e uma corrente contínua, constituída de cargas em movimento, produz um campo magnético.

Com a lei de Ampère, descobrimos que existe uma relação entre o campo magnético e o vetor densidade de corrente \mathbf{J} .

Segundo [Reitz et al. \(1982, p.143\)](#), obtemos experimentalmente que em um condutor com corrente elétrica e sob temperatura constante, teremos a seguinte relação

$$\mathbf{J} = r\mathbf{D}, \quad (4.1)$$

em que r é uma constante chamada de condutividade. Em outras palavras, o vetor densidade de corrente é linearmente proporcional ao campo elétrico.

Mas da lei de Ampère em (2.30), temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0, \quad (4.2)$$

que nos é garantido pelo seguinte teorema:

Teorema 5. *Seja \mathbf{F} um campo vetorial tal que $\mathbf{F} : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, duas vezes contínuo e diferenciável, temos então que*

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0, \quad (4.3)$$

isto é, a divergência de qualquer rotacional é zero.

Demonstração. Seja $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

então

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \quad (4.4)$$

que, pela igualdade das derivadas parciais cruzadas, é igual a zero. \square

Das equações (4.1) e (4.2) temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.5)$$

que entra em contradição com a equação (3.7).

O campo elétrico associado ao vetor \mathbf{J} então deve ser diferente daquele produzido por cargas elétricas.

De fato, dos experimentos realizados por Faraday em 1831, foi descoberta a existência de dois tipos de campos elétricos distintos. O campo elétrico relacionado com o vetor densidade de corrente está associado ao movimento de cargas em um condutor, diferente do campo elétrico produzido por cargas elétricas.

Segundo Reitz et al. (1982), em um condutor, um fluxo de cargas ordenado, ou seja, uma corrente elétrica, não pode ser mantido somente por forças eletrostáticas, sendo essa corrente atribuída ao outro tipo de campo elétrico. O trabalho W realizado para mover uma carga q em um circuito fechado dado por este novo campo elétrico \mathbf{D} é

$$W = q\mathcal{E}, \quad (4.6)$$

em que $\mathcal{E} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l}$ é chamado de **força eletromotriz**, ou simplesmente fem.

Definimos a fem como o trabalho realizado, por unidade de carga, para movimentar uma partícula em um caminho fechado. A fem \mathcal{E} é a entidade responsável pelo movimento das cargas, o que constitui uma corrente elétrica.

Diferentemente do trabalho realizado por um campo elétrico de cargas, a fem associada a um circuito depende do caminho a ser escolhido. Fazendo com que $\mathbf{D} \neq -\nabla V$, ou seja, o campo elétrico induzido pela fem não é conservativo.

De acordo com os experimentos de Faraday, uma fem é induzida quando variamos um campo magnético \mathbf{B} que atravessa um circuito fechado¹, como na Figura 13, em que a variação do campo magnético pode ser visualizada pela mudança de densidade de linhas de campo atravessando o anel conforme o ímã avança com velocidade \mathbf{v} .

¹ Por circuito fechado estamos considerando um fio formando uma espira.

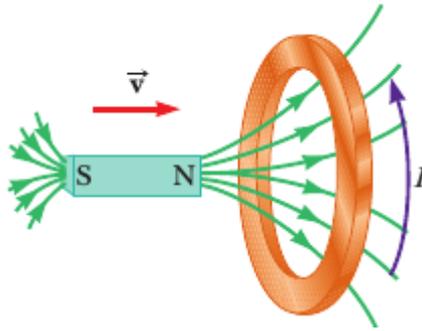


Figura 13 – Campo magnético variando sobre um anel condutor. Fonte: Serway e Jewett (2004), p.875.

Com isso, Faraday obteve experimentalmente que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}, \quad (4.7)$$

ou seja, a variação do fluxo do campo magnético ϕ_B , em relação ao tempo, que atravessa o circuito gera uma fem \mathcal{E} induzida nesse circuito.

Segundo Griffiths (2011), dentre os modos de variar o fluxo magnético sobre um circuito fechado, podemos, em um campo magnético uniforme, estabelecer um movimento relativo entre o campo e o circuito, assim variamos a área de atuação do campo magnético, e portanto variamos o fluxo magnético, atravessando-o. Um outro modo, constitui em estabelecermos um campo magnético variável (utilizando um eletroímã, por exemplo) e mantendo o circuito fixo, como ilustrado na Figura 14.

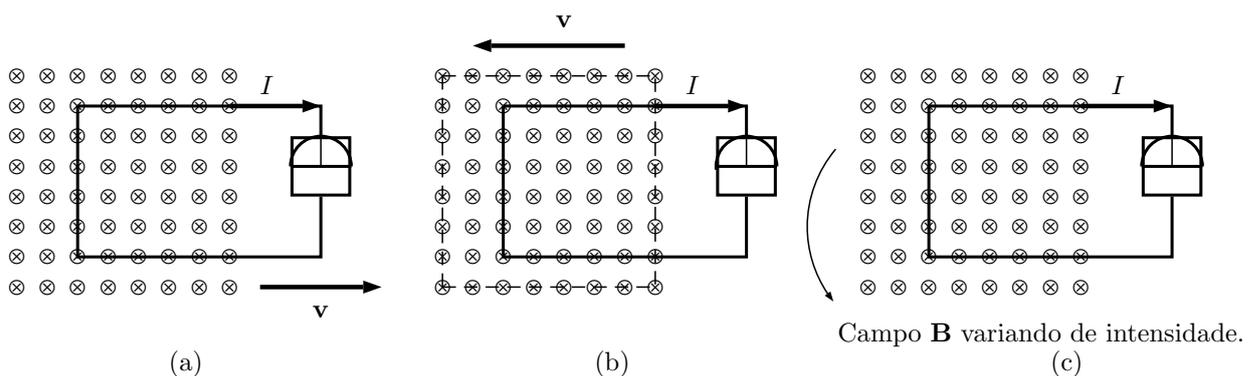


Figura 14 – Geramos uma corrente induzida I no circuito ao (a) variamos a área movimentando o circuito, ou (b) movimentamos a fonte de campo magnético, sendo o campo magnético uniforme com sentido e direção pra dentro da folha. Em (c) variamos o fluxo alterando a intensidade do campo magnético.

De qualquer maneira, havendo uma variação no fluxo magnético em relação ao tempo, teremos um campo elétrico no fio que movimentará as cargas, gerando assim uma corrente elétrica.

O sinal negativo na equação (4.7) vem do fato que a corrente induzida pela fem no circuito tende a se opor ao fluxo que a produz (SADIKU, 2012, p.336). Essa afirmação é conhecida como a Lei de Lenz².

Da equação (4.7) e da definição de fem, temos

$$\oint_C \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\phi_B. \quad (4.8)$$

Da definição de fluxo magnético em (1.11), a equação (4.8) se torna

$$\oint_C \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.9)$$

que é a forma integral da chamada *lei de Faraday*.

Podemos fazer ainda

$$\oint_C \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.10)$$

e ao tomarmos o lado esquerdo de (4.10) em um caminho fechado C e o lado direito sobre a superfície \mathcal{S} delimitada por C , segundo o Teorema 2, teremos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.11)$$

que é a lei de Faraday na forma vetorial.

Na verdade, mesmo atuando no vácuo, a variação do fluxo magnético ainda gera um campo elétrico, mesmo não havendo a presença de cargas (FEYNMAN, 2011). Assim podemos enunciar a Lei de Faraday como:

Um fluxo magnético variável produz um campo elétrico.

² Heinrich Friedrich Emil Lenz, nascido em Tartu, atual Estônia em 12 de Fevereiro de 1804 e falecido em Roma, 10 de Fevereiro de 1865. Foi um físico russo.

5 Lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère, apresentada em (2.30) e (2.13), foi estabelecida ao fazermos uma série de considerações especiais, como a corrente elétrica ser estritamente contínua e desconsiderando o acúmulo ou dispersão de cargas quando há um fluxo de cargas, uma corrente elétrica.

De fato, segundo Griffiths (2011, p.150), não existe uma corrente absolutamente contínua, mas sim uma variação na corrente elétrica considerada aceitável para ser chamada de contínua. E também, em uma situação real de movimento de cargas, a equação apresentada em (4.2) não é válida.

Havendo uma variação de cargas por região, a densidade de cargas por volume ρ deixa de ser constante. Isso pode ocorrer devido a não homogeneidade do condutor ou variações do fluxo de cargas, mas é fundamentalmente amparado pelo que se chama de “lei de conservação da carga” (GRIFFITHS, 2011, p.240). Essa lei diz que uma carga elétrica não pode ser criada ou destruída, apenas transferida.

Aplicando o Teorema 1 ao lado direito da equação (2.29) temos

$$I = - \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} dV, \quad (5.1)$$

em que o sinal negativo aparece porque estamos considerando um fluxo de cargas para fora do volume \mathcal{V} delimitado pela superfície fechada \mathcal{S} . Isso ocorre porque nos é conveniente considerar uma corrente I positiva quando houver um fluxo de cargas entrando no volume (REITZ et al., 1982).

Da definição de corrente apresentada no capítulo 2 teremos que, quando a distribuição de cargas não for discreta, a equação (2.1) para um volume será

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Das equações (5.1) e (5.2) temos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

ou seja, considerando que a equação acima se aplique a qualquer volume \mathcal{V} , teremos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5.4)$$

Ao compararmos (5.4) com (4.2) nos deparamos com uma violação da lei de conservação das cargas. Porém devemos levar em consideração que foi demonstrado para qualquer campo vetorial que a divergência de um rotacional é sempre nula. Assim, nos deparamos com uma inconsistência entre teoria e experimentação.

De forma a corrigir essa inconsistência, Maxwell adicionou um termo na lei de Ampère (GRIFFITHS, 2011, p.225). Este termo, chamado por ele de **corrente de deslocamento**, é indicado por \mathbf{J}_d , e quando nele aplicamos a divergência obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Assim a lei de Ampère apresentada na equação (2.30) se torna

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d, \quad (5.6)$$

e, aplicando a divergência em (5.6)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A equação (5.5) é a lei de Ampère corrigida e generalizada, pois respeita o fato da divergência do rotacional ser nula e à lei de conservação de cargas.

Porém, lembrando da lei de Gauss para campos elétricos, apresentada na equação (1.17), podemos fazer a seguinte relação com (5.5)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_d &= \frac{\partial}{\partial t} \rho \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

fazendo com que a lei de Ampère corrigida por Maxwell na forma vetorial, chamada de *lei de Ampère-Maxwell*, seja

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.9)$$

A lei de Ampère-Maxwell na forma integral pode ser obtida ao aplicarmos o Teorema 2 em (5.9)

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.10)$$

em que, retomando as equações (1.4), (2.26) (2.29) teremos

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \phi_D \quad (5.11)$$

com C sendo uma curva fechada delimitando uma superfície \mathcal{S} , I é a corrente passando pela superfície e ϕ_D o fluxo elétrico resultante passando por \mathcal{S} .

6 Considerações Finais

Nesse trabalho optamos por mesclar as apresentações de elementos de eletromagnetismo com os conceitos matemáticos do Cálculo Vetorial, fazendo sempre que possível, contextualizações e até eventualmente interpretações.

Historicamente, como visto na introdução, há uma relação entre o refinamento da teoria do que viria a ser o Cálculo Vetorial com os estudos realizados em eletromagnetismo. As Equações de Maxwell, para chegar nas formas apresentadas neste trabalho, se utilizaram da notação concisa do Cálculo Vetorial organizado por Joseph Gibbs e Wilson em (WILSON, 1943) e Oliver Heaviside em (HEAVISIDE, 1893), e com o auxílio do operador ∇ da forma que é tratado neste âmbito. Sem a notação do Cálculo Vetorial, as Equações de Maxwell na forma vetorial não seriam quatro, mas sim oito equações, pois seriam todas escritas apenas por derivadas parciais.

Com isso, podemos mostrar o quão matematicamente elegante, no sentido de redução de escrita e profundo significado, a notação do Cálculo Vetorial se apresentou. Eventualmente, com os avanços nas pesquisas em Matemática, com o advento dos tensores e dos avanços em pesquisas na área da Física no decorrer do século XX, as Equações de Maxwell passaram de quatro pra duas equações (GRIFFITHS, 2011, p.375).

O modo como foi estruturado este trabalho teve como objetivo introduzir mais naturalmente possível os elementos de Cálculo Vetorial necessários para apresentarmos as Equações de Maxwell. Pelo termo "introduzir naturalmente", nos expressamos no sentido de apresentar diferentes interpretações e determinados conceitos em momentos oportunos, não nos contendo em formalizações excessivas, mas fundamentando o necessário dos elementos que utilizados na representação de conceitos de eletromagnetismo de modo simplificado.

Vale destacar que neste trabalho não pretendíamos esgotar as discussões sobre as relações entre o Cálculo vetorial e as Equações de Maxwell, mas sim estabelecer uma relação inicial para assim propiciar uma base matemática que consideramos adequada para quem deseja realizar estudos sobre essas equações. Isso pode ser evidenciado pela escolha em não introduzirmos neste trabalho o Teorema de Hemholtz ou as equações de Poisson, que são conteúdos pertinentes ao Cálculo Vetorial, ou das interações de campos eletromagnéticos em meios diferente do vácuo e propagações de ondas eletromagnéticas, que são pertinentes ao eletromagnetismo e podem ser descritos com o auxílio das Equações de Maxwell. Por isso, para um maior aprofundamento nestes temas recomendamos o prosseguimento dos estudos em oportunidades futuras.

Referências

- APOSTOL, T. M. *Cálculo: Funções de várias variáveis*. Barcelona: Reverté S.A, 1993. v. 2.
- ASSIS, A. K. T. et al. The field concepts of Faraday and Maxwell. *Trends in Physics – Festschrift in Homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo*, p. 9, 2009. Disponível em: <[http://www.ifi.unicamp.br/~assis/The-field-concepts-of-Faraday-and-Maxwell\(2009\).pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~assis/The-field-concepts-of-Faraday-and-Maxwell(2009).pdf)>. Acesso em: 13 de dezembro de 2016.
- CROWE, M. J. *A History of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. New York: Dover, 1985.
- DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking process. In: TALL, D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. 1. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991, (Mathematics Education Library, v. 11). p. 25–41.
- FEYNMAN, R. P. *The Feynman Lectures on Physics: Mainly electromagnetism and matter*. New York: Basic Books, 2011. v. 2. Disponível em: <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html>. Acesso em: 13 de dezembro de 2016.
- GRIFFITHS, D. J. *Introdução a Eletrodinâmica*. 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2011.
- HEAVISIDE, O. *Electromagnetic Theory*. Londres: The Electrician, 1893. v. 1 & 2.
- KAPLAN, A. *Cálculo Avançado*. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. v. 1.
- MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. *Vector Calculus*. 6. ed. New York: W. H. Freeman, 2011.
- MAXWELL, J. C. On physical lines of force. *Philosophical Magazine*, v. 21 & 23, Março 1861.
- MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Londres: Oxford : Clarendon Press, 1873. v. 1 & 2.
- NUSSENZVEIG, H. *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*. São Paulo: Edgard Blücher, 1997. v. 3.
- REITZ, J. R. et al. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro: Campus, 1982.
- SADIKU, M. N. O. *Elementos de eletromagnetismo*. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. *Princípios de Física: Eletromagnetismo*. 1. ed. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2004. v. 3.
- STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. ISBN 978-85-221-1463-4.
- THOMAS, G. B. et al. *Cálculo*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros: Eletricidade e magnetismo, Óptica*. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. v. 2.

WILSON, E. B. *Vector analysis*: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. 9. ed. New Haven: Yale University Press, 1943.