INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

BRASIL
GOVERNO FEDERAL

OS DIFERENTES INFINITOS NA MATEMÁTICA

LENARA FERREIRA DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientada pelo Prof. Me. Lucas Casanova Silva

São Paulo

2018

LENARA FERREIRA DOS SANTOS

OS DIFERENTES INFINITOS NA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Lucas Casanova Silva

São Paulo

2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237d Santos, Lenara Ferreira dos
Os diferentes infinitos na matemática / Lenara Ferreira dos Santos. São Paulo: [s.n.], 2018.
83 f. il.

Orientador: Lucas Casanova Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Diferentes Infinitos . 2. Conjuntos Enumeráveis. 3. Conjuntos Não Enumeráveis. 4. Conjunto de Cantor.. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

LENARA FERREIRA DOS SANTOS

OS DIFERENTES INFINITOS NA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADO EM 30/11/2018 **CONCEITO:** Dez

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogerio Ferreira da Fonseca
Membro da Banca

Prof. Me. Lucas Casanova Silva
Orientador

Aluno: Lenara Ferreira dos Santos

À minha família, por todo incentivo, amor e paciência.

Agradecimentos

Agradeço, imensamente, a Deus, por me conceder a força e a coragem necessária para a realização deste trabalho e para a conclusão deste curso.

Sou grata aos meus pais, Sirlê e Aloizio, por todo o cuidado e incentivo aos meus estudos e à minha irmã, Lirieli por todo companheirismo, eles que, mesmo em tempos difíceis, estiveram ao meu lado, sendo essenciais para a minha vida.

O meu agradecimento especial a todos os amigos que fiz durante o curso, particularmente, aos meus queridos Gabriel, Guilherme, Geovana, Bianca e Vitor, que fizeram as minhas manhãs mais prazerosas e compartilharam comigo bons momentos nessa etapa das nossas vidas. Ao meu amado, Inácio, que me apoiou e me mostrou a importância das pequenas e belas coisas da vida.

Os meus sinceros agradecimentos aos professores que fizeram parte da minha formação não só acadêmica, mas pessoal, também. Em especial, ao professor Lucas, que dedicou seu tempo para orientar este trabalho, compartilhar seu conhecimento e experiência, sendo sempre paciente e disposto a me auxiliar.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação, me incentivaram, compartilharam momentos únicos e especiais transformando os momentos difíceis em agradáveis lembranças de apoio, superação e amizade.

Vejo, mas não acredito! – Georg Cantor

Resumo

O infinito sempre foi um tema que gerou reflexões e controvérsias durante a história, influenciando inclusive o pensamento matemático. Nessa perspectiva, o presente trabalho estuda algumas ideias relacionadas a esse conceito, desde a Grécia Antiga, com o surgimento de paradoxos, e a distinção entre infinito atual e potencial, passando pela Idade Média e o Renascimento, chegando até o século XIX, no qual o matemático Georg Cantor (1845 – 1918) demonstrou a existência de conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades, em outras palavras, a existência de diferentes infinitos. Além de abordar o desenvolvimento da noção de infinito ao longo da história, nesta monografia apresentamos alguns conceitos e demonstrações sobre conjuntos com diferentes cardinalidades, mais especificamente sobre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. Como exemplo de um conjunto peculiar, apresentamos o chamado Conjunto Ternário de Cantor, que possui algumas propriedades contra intuitivas.

Palavras-chave: Diferentes infinitos, Enumeráveis, Não enumeráveis, Georg Cantor.

Abstract

Infinity has always been a theme that has generated reflections and controversies throughout history, influencing even the mathematical thinking. In this perspective, the present work shows some ideas related to this concept, since Ancient Greece, with the emergence of paradoxes, and the distinction between actual and potential infinity, passing through the Middle Age and the Renaissance, reaching the 19th century, in which the mathematician Georg Cantor (1845 – 1918) demonstrated the existence of infinite sets with different cardinalities, in other words, the existence of different infinities. Besides to addressing the development of the concept of infinity throughout history, in this monograph we present some concepts and demonstrations about sets with different cardinalities, more specifically, on enumerable and non-enumerable sets. As an example of a peculiar set, we present the so-called Cantor Ternary Set, which has some counter-intuitive properties.

Keywords: Different infinities, Enumerable, Non-enumerable, Georg Cantor.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Segundo David Hilbert (1926, p. 236, apud SAMPAIO, 2008, p. 206), “a questão do infinito agitou sempre as emoções da humanidade mais profundamente do que qualquer outra”. Diante desta curiosidade acerca do tema que se constitui o infinito, bem como das consequências e dos paradoxos, e ainda da relevância do assunto para o Ensino Superior, o presente trabalho aborda as concepções sobre o infinito, que, segundo Borges (2015, p. 12) e Sena (2011, p.7), envolvem situações que vão contra o senso comum, causando, em um primeiro momento estranheza e também admiração por suas construções.

De modo a obter a contextualização sobre o desenvolvimento das concepções de infinito, o trabalho trata, a princípio, das noções intuitivas (e contra intuitivas) dos pitagóricos, no período da Grécia Clássica, sobre a infinitude e o contínuo, por meio da geometria e da diferenciação entre infinito atual e infinito potencial. O primeiro referindo-se à existência de entidades de dimensões não finitas, enquanto o segundo tratando da construção, pelo ser humano, de dimensões muito pequenas ou muito grandes em problemas específicos.

Como consequência dos estudos sobre os infinitos, houve uma crise na Matemática grega, pois a ideia de grandezas incomensuráveis (Ver capítulo 1: Concepções do infinito ao longo da História) trouxe aos estudiosos diversos desafios lógicos a serem resolvidos, como os paradoxos de Zenão, que são descritos no decorrer deste trabalho.

Alguns estudos e concepções filosóficas desenvolvidos durante a Idade Média e o Renascimento, na Europa, também são explorados neste trabalho, assim como os estudos de Galileu Galilei, que segundo Sampaio (2008, p.211) foi o primeiro a explicitar uma relação matemática biunívoca, ou seja, de um para um, entre conjuntos infinitos, em 1638.

A partir de tais considerações, entender o desenvolvimento do Cálculo Diferencial atual e a utilização do infinito na sua estrutura torna-se tangível, bem como a compreensão das noções específicas de conjuntos infinitos a partir dos estudos de Cantor, em 1883, concluindo a introdução cronológica sobre o tema.

Neste texto, os estudos de Cantor acerca dos conjuntos infinitos, são apresentados com ênfase na diferenciação entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, apontando alguns conjuntos conhecidos que possuem essas características.

De posse dessas definições, tratamos o chamado Conjunto Ternário de Cantor como exemplo de um conjunto não enumerável que possui algumas peculiaridades, apresentando mais uma vez o infinito de maneira contra intuitiva.

Desse modo, temos o objetivo de explorar as diferentes concepções do conceito de infinito ao longo da história, em especial dentro da Matemática, identificando as concepções antigas e atuais a respeito do tema. Além de discutir alguns paradoxos advindos da compreensão (circunscrita em um tempo e em uma sociedade) acerca do infinito. A partir dessas observações estudaremos alguns tópicos sobre cardinalidade, bem como a existência de diferentes infinitos.

A motivação do trabalho vem de uma curiosidade da autora a respeito do assunto, da pouca discussão do conceito na Educação Básica e, em contraste, da frequente utilização no ensino superior, sobretudo no Cálculo Diferencial e Integral.

O conhecimento sobre a evolução do conceito de infinito ao longo da história, assim como dos paradoxos descritos em consequência destes, possibilita uma compreensão das dificuldades que os alunos da Educação Básica encontrarão ao se depararem com o tema, potencializando uma discussão rica baseada no processo histórico que ocorreu até a demonstração da existência de diferentes infinitos.

A metodologia usada neste trabalho é uma pesquisa bibliográfica, tendo como fonte teses e dissertações, bem como livros utilizados no estudo de Análise Real, componente curricular relevante no estudo de conjuntos infinitos e de cardinalidade, incluindo, especialmente, o conteúdo abordado no livro Análise Real, vol.1 de Elon Lages Lima.

A estrutura do trabalho é composta por três capítulos além da Introdução e das Considerações Finais. O Capítulo 1 aborda o infinito na perspectiva histórica, traçando uma linha do tempo desde a Grécia Antiga até os estudos mais recentes de Georg Cantor. O Capítulo 2 apresenta os conceitos de enumerabilidade e não enumerabilidade utilizados por Cantor para a diferenciação entre os infinitos, assim como os argumentos utilizados para a demonstração de alguns teoremas que são importantes para o estudo do Conjunto de Cantor. Conjunto este que é abordado no Capítulo 3, com ênfase em suas propriedades e características mais específicas.

1 Concepções do infinito ao longo da História

A concepção de infinito inquieta há muito tempo a mente humana e ainda nos tempos atuais é motivo de bastante discussões e questionamentos (SAMPAIO, 2008).

Como representar por meio de coisas finitas algo que é infinito? Por que pensar no infinito se as dificuldades em o representar são tão grandes, além da impossibilidade de medi-lo? Mas o infinito parece se impor ao raciocínio humano desde os tempos antigos, sendo de grande importância na Matemática.

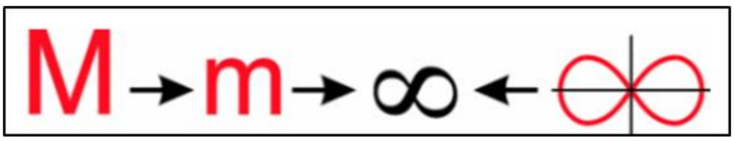
Desse modo, por conta da sua definição intrigar leigos e estudiosos, sempre esteve presente em discussões no campo de estudo da Filosofia, Matemática, Arte e Física, conforme cita Madeira; Costa (2014, p.9 apud ROMANO, 1997, p.133), “O conceito de infinito surge, antes de mais, na filosofia com o significado de que não existem limites. É a especulação teológica que dá a este conceito um conteúdo positivo de perfeição (ou grandeza) que é impossível superar.”.

Conforme Rucker (2005), o infinito é, usualmente, representado pela curva do número oito na posição horizontal, chamada lemniscata, do latim, *lemniscos*. O símbolo foi utilizado pela primeira vez no século XVII e o matemático John Wallis foi creditado por seu emprego, que se deu, principalmente, no tratamento do infinito ou da eternidade, analisadas em diversos contextos.

O símbolo torna-se adequado pela possibilidade de se contornar infinitamente a curva da lemniscata, pois condiz com a definição de infinito que, em linhas gerais, é expressa por meio de algo que não tem fim.

Há hipóteses de que o surgimento do símbolo decorre da derivação do numeral romano M que além de significar o número 1000, poderia representar um “número muito grande”. Segundo Reményi (2006), o símbolo “m” foi usada na representação do infinito pelo matemático e filósofo holandês Bernhard Nieuwentijt (1654 − 1718) no seu trabalho Analysis infinitorum (1695), o que sugere a sequência apresentada a seguir:

Figura 1: Sequência do surgimento da lemniscata



Fonte: Reményi (2006, p. 32)

Além dessas conjecturas, Madeira e Costa (2014) admitem ainda que uma possível justificativa seria a derivação do símbolo grego ω (ômega), a última letra do alfabeto grego. Além disso, na teoria dos conjuntos, o infinito é representado pela letra hebraica Aleph $(\aleph)$.

Os autores estudados a respeito do contexto histórico, Machado et al. (2013), Madeira; Costa (2014), Mello e Lorin (2014), Sampaio (2008), Santos (2008), Sena (2011), Serra (2002) concordam em discorrer a respeito dos gregos como sendo os primeiros a refletir matematicamente sobre o infinito. Traçando, assim, uma cronologia a respeito do desenvolvimento do conceito de infinito e suas aplicações começando a partir do século VII a.e.c. quando estes investiram no pensamento filosófico, incitando questionamentos a respeito da vida humana, desenvolvendo, posteriormente, o raciocínio lógico.

Na Grécia Antiga, a palavra que representava o infinito era *"Apeiron"* (*ἄπειρον*) que significava indefinido, ilimitado, mas possuía uma conotação pejorativa, uma vez que à ideia de infinito não era bem aceita pelos gregos da época, pois remetia a ideia de incompletude. Para esses filósofos existia uma ordem que regia a Matemática e esta ordem deveria ser organizada e harmônica, conforme afirma Machado et al. (2013).

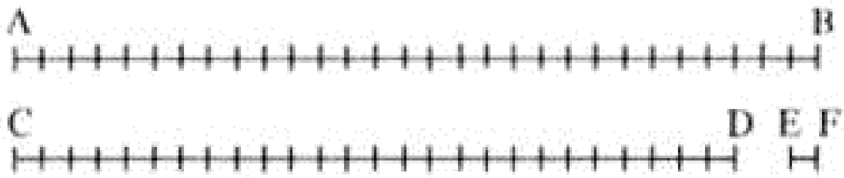
Já no século V a.e.c., o infinito já era concebido pelos gregos, com Anaximandro (610 a.e.c – 546 a.e.c), filósofo grego pré-socrático que acreditava que tudo no mundo se apresentava com antagonismos, assim, havia o bem e o mal, o dia e a noite, o grande e o pequeno etc., de modo que cada antagonismo estava ligado impossibilitando saber o início e o término de cada um, ou seja, não se sabia o momento exato em que o dia se tornava noite e vice e versa (SANTOS, 2008).

Em consequência disso, esses "conflitos" não possuíam limites e para Anaximandro, o infinito pertenceria à criação, sendo esta a representante da ausência de limite, em decorrência das infinidades de variações entre os seres; e o infinito seria, portanto, "o espaço ou o momento privilegiado onde poderiam ser acomodados esses conflitos" (SANTOS, 2008, p.23).

Essa aversão à ideia de infinito surgiu com a percepção de grandezas incomensuráveis. Segundo Sena (2011), essa noção é tida, especificamente, com os pitagóricos, quando estes perceberam que os números inteiros e suas razões eram insuficientes para demonstrar propriedades como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, pois tais segmentos são incomensuráveis

Ao afirmar que uma grandeza é comensurável, inferimos a respeito da existência de dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, aos quais, seria possível encontrar um terceiro segmento $\overline{EF}$ contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e outro número inteiro de vezes em $\overline{CD}$ (ÁVILA, 1984). Ilustramos a situação na figura a seguir.

Figura 2: Comensurabilidade



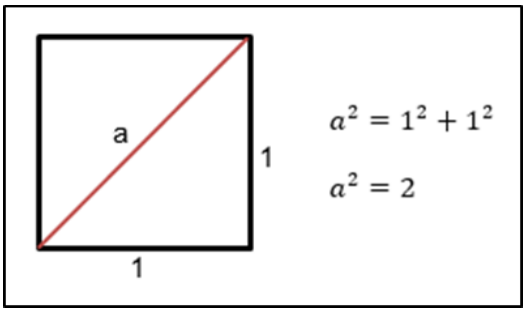
Fonte: Modificado de Ávila (1984)

Assim o segmento $\overline{EF}$ seria um divisor comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Caso o segmento $\overline{EF}$ não satisfizesse, poderíamos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante.

Intuitivamente, diríamos que é possível encontrar um segmento tão pequeno quanto se queira que seja divisor de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, contudo nem todos os segmentos são comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sem unidade comum $\overline{EF}$, os chamados segmentos incomensuráveis (ÁVILA, 1984).

A busca pela relação entre a diagonal e o lado do quadrado que vale um foi dada pelo já conhecido Teorema de Pitágoras com a equação: $a^2 = 2$, que não era satisfeita com os números até então conhecidos na época, pois "se faz necessário subdividi-lo subsequentemente sem ser possível, no entanto, satisfazer a igualdade." (MACHADO et al., 2013, p. 286).

Figura 3: Quadrado de lado 1



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

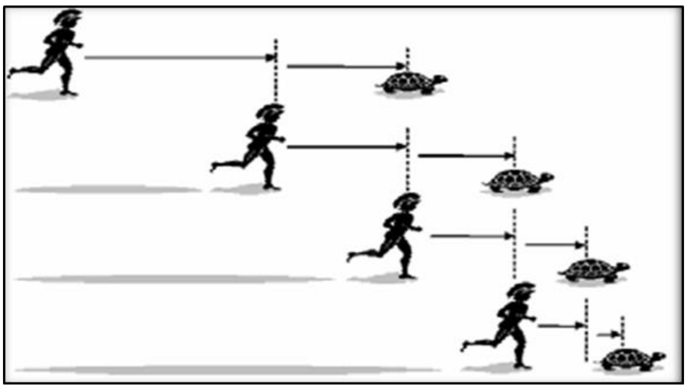
Além desse exemplo, Serra (2002) destaca a tentativa de encontrar o comprimento da circunferência de diâmetro um que é representado pelo número π. E embora os gregos não admitissem os incomensuráveis como números, tratavam sua existência como grandezas, não aparecendo somente na Matemática, mas também na filosofia grega.

Essa nova perspectiva a respeito do universo dos números, levou o filósofo Zenão de Eléia (489 - 430 a.e.c) a formular quatro paradoxos[1] a respeito do movimento e do tempo, conhecidos atualmente como paradoxo de Aquiles, da Seta, da Dicotomia e do Estádio, que serão descritos a seguir, conforme Mello e Lorin (2014).

Os paradoxos de Zenão resultaram em discórdias, mas também em influências positivas ao motivar um pensamento crítico a respeito dos conceitos de infinito, contínuo, número, tempo e movimento.

O paradoxo de Aquiles traz a reflexão a respeito de uma corrida entre o herói da mitologia grega, Aquiles, e uma tartaruga. Por conta da lentidão da tartaruga, Aquiles lhe dá certa distância de vantagem, contudo eis que surge o paradoxo, no qual Aquiles nunca conseguiria alcançar a tartaruga, pois segundo Zenão, quando Aquiles alcançasse o ponto de partida A da tartaruga, esta já teria avançado para o ponto B. Quando ele chegasse ao ponto B ela já estaria em um ponto C. E assim a tartaruga sempre estaria à frente do herói.

Figura 4: Paradoxo de Aquiles

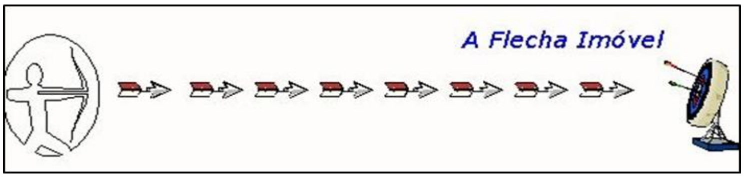


Fonte: Mello e Lorin (2014, p.06)

[1] De acordo com o dicionário Michaelis, paradoxo é a “Opinião ou proposição contrária ao senso comum, contrassenso, disparate. Pensamento ou argumento que contraria os princípios que costumam nortear o pensamento humano ou desafia o conhecimento e a crença da maioria dos seres humanos. ”.

Em relação ao tempo, no paradoxo da Seta, Zenão afirma que se o tempo é feito de momentos e um objeto está em repouso quando ocupa um determinado lugar com dimensões iguais a suas, então a flecha atirada está sempre em repouso, pois cada momento ocupa certo espaço. “O paradoxo da Seta reflete a impossibilidade de movimento se o espaço e o tempo forem compostos de partes indivisíveis” (Mello; Lorin, 2014, p. 6).

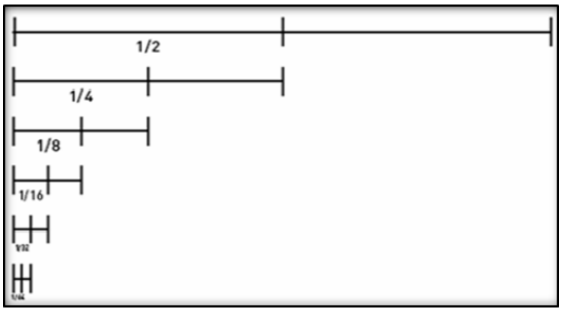
Figura 5: Paradoxo da Seta



Fonte: <http://basedafilosofia.blogspot.com/2010/03/conhecimento-missao-06-os-pre.html> Acesso em 30 de maio de 2018.

Já o paradoxo da Dicotomia, refere-se ao espaço que um objeto percorre, isto é, para que um determinado objeto percorra uma distância é necessário que ele percorra a metade dessa distância e antes disso deve percorrer a metade da metade e assim sucessivamente, de maneira que o movimento do objeto está preso a infinitas subdivisões de espaço, impossibilitando o início do percurso.

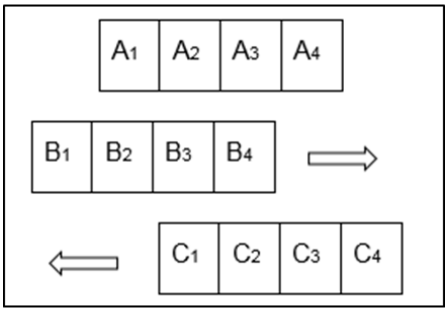
Figura 6: Paradoxo da Dicotomia



Fonte: Mello e Lorin (2014, p.5).

Por fim, o paradoxo do Estádio, que segundo Boyer (1974) é o mais discutido e o mais complicado, supondo corpos iguais e parados A_1, A_2, A_3, A_4; sejam B_1, B_2, B_3, B_4 corpos do mesmo tamanho que os A, se movendo para a direita, de modo que cada B passe por um A em um instante (o menor instante de tempo possível). E ainda seja C_1, C_2, C_3, C_4, do mesmo tamanho que os A e os B, se movendo para a esquerda, de maneira que cada C passe por um A em um instante de tempo. Em algum momento os corpos estarão na seguinte posição:

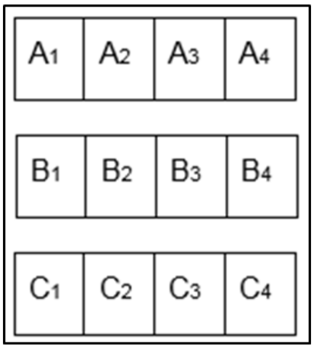
Figura 7: Paradoxo do Estádio (I)



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

E após um instante de tempo, os corpos se encontrarão alinhados, mas C_1 terá passado por dois dos B, o que implica no instante de tempo não ser mínimo.

Figura 8: Paradoxo do Estádio (II)



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Segundo Madeira e Costa (2014), tais paradoxos trouxeram aos gregos o horror ao infinito, de modo que ao passo que os paradoxos surgiam mais eles negavam a existência do infinito e do incomensurável, além disso, eles apontavam para a impossibilidade de decidir entre a visão finita e não finita dos elementos.

Os paradoxos apresentavam ainda uma noção intuitiva do que seriam os infinitesimais, entendido como um número tão pequeno quanto se queira, porém nunca igual a zero, conceito utilizado, posteriormente, no cálculo.

Os paradoxos foram formulados e inquietaram os estudiosos da época, por conta da inexistência de uma linguagem adequada e de uma definição suficientemente completa para tratar do conceito de infinito, que surgiu, em meados do século XIX.

Além dessa inquietação, os argumentos fizeram crescer a discussão a respeito do infinito atual e o infinito potencial. O infinito potencial se tratava de uma construção da mente humana, caracterizado por processos indefinidos que poderiam ocorrer por tempo indeterminado. Enquanto o infinito atual, se relacionava a figuras divinas, ao infinito acabado e absoluto (SAMPAIO, 2008).

Aristóteles (384 – 322 a.e.c), filósofo grego, aluno de Platão tido como um dos fundadores da filosofia ocidental, foi o primeiro a “dar um tratamento lógico mais sistemático e instrumental à questão do infinito, sem perder de vista as considerações sobre seu fundamento na realidade” (SANTOS, 2008, p.56).

Para este filósofo, a compreensão do infinito estaria ligada a descoberta de algo no mundo natural que também fosse infinito para então ser analisado e associa a ideia de infinito a intransponibilidade, ou seja, algo que não pode ser transposto, por não possuir um fim lógico ou sensível à experiência, uma vez que era possível “abstrair uma cadeia temporal com duração infinita” (SANTOS, 2008, 63).

Santos (2008) discorre a respeito da negação de Aristóteles a respeito da existência do infinito atual, para ele o infinito deveria existir, caso contrário, haveria diversos problemas e soluções absurdas, como admitir um início e um fim para o tempo. Desta forma, Aristóteles admitiu que somente existiria o infinito na sua natureza potencial.

Desse ponto de vista, Aristóteles via os paradoxos de Zenão como uma confusão conceitual, atribuindo a natureza atual àquilo que só existiria potencialmente, o núcleo dos paradoxos, para ele, consistia em admitir a existência de infinitas partes independentemente do processo.

No paradoxo de Aquiles e a tartaruga, por exemplo, não há confusão na possibilidade em dividir infinitamente a distância entre os corredores, mas sim em admitir que o intervalo entre eles é atualmente infinito, implicando na conclusão equivocada de que o herói grego jamais alcançaria a tartaruga, outro exemplo seria a incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o seu lado, que para o filósofo não haveria problema em existir um segmento de reta representado, pelo o que conhecemos hoje, como uma sequência decimal potencialmente infinita, uma vez que o tempo e o espaço existem potencialmente (SANTOS, 2008).

De modo a contornar a existência dos infinitesimais, os matemáticos da época, enxergavam os incomensuráveis por meio de segmentos geométricos, utilizando informações já conhecidas para estimar seus valores. Em especial, Arquimedes (287 – 212 a.e.c) fez importantes aplicações usando o método de exaustão, formulado por

Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.e.c) que consistia em aproximações sucessivas de uma área por comparação a áreas conhecidas, esse método foi de extrema importância para o desenvolvimento, posteriormente, da noção de limite, sendo um processo fundamental no cálculo atual (SAMPAIO, 2008).

Durante a Idade Média, as concepções acerca do infinito se mantiveram com os teológicos cristãos, o infinito atual foi reconsiderado, mas admitindo uma essência absoluta e suprema, representado por Deus.

Nesse contexto, Santo Agostinho (354 – 430) e São Tomás de Aquino (1225 – 1274) são destaques mantendo a discussão sobre o infinito, o primeiro afirmava que a infinitude de Deus não poderia ser somente potencial, recusando a concepção aristotélica (MACHADO et al., 2013).

Embora as especulações não fossem de natureza matemática em si, fomentaram o interesse pelo assunto, o que foi importante para a continuidade dos estudos do infinito.

No fim do Renascimento, o filósofo Giordano Bruno (1518 – 1600) ganhou destaque, segundo Santos (2008), uma vez que foi um dos principais precursores da teoria de um universo descentralizado e infinito. “Aliás, para ele eram infinitos os infinitos mundos infinitamente povoados” (MACHADO et al., 2008, p.291).

A concepção do infinito, para o filósofo, relacionava-se com uma visão particular de divindade, chegando, em alguns momentos, a se confundirem. Giordano Bruno aceitava o infinito atual baseado na percepção sensível, ou seja, era possível encontrar esse infinito na natureza, pois a natureza era Deus e Deus era a natureza e ambos eram infinitos (SANTOS, 2008).

Contudo, essas ideias se encontravam em um ambiente centrado nos dogmas da Igreja Romana, que admitia o universo finito, e por defender esse pensamento crítico o filósofo foi condenado à morte pelo Santo Tribunal da Inquisição.

No século XVII, o italiano Galileu Galilei (1584 – 1642), de acordo com Sampaio (2008), formulou a primeira noção explícita de conjuntos infinitos, motivado pelo pensamento de que o conjunto dos números naturais, os números pares, ímpares e os quadrados perfeitos eram conjuntos infinitos, questionando então a existência de dimensão entre eles, ou seja, se um infinito poderia ser maior, menor ou igual a outro.

Essa relação está descrita na obra *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* (Diálogos relativos a duas novas ciências), de 1638.

A partir da correspondência entre números naturais e seus quadrados perfeitos, o filósofo concluiu que os conceitos de maior, menor e igual não eram válidos para conjuntos infinitos, além de mostrar a contradição na afirmação *"O todo é maior que a parte".*

Se a palavra "igual" for interpretada no sentido de existir uma correspondência em cada conjunto, então o conjunto todo que seria composto pelos números naturais possui correspondentes no conjunto da parte, quadrados perfeitos (SAMPAIO, 2008).

A correspondência bijetora (de um para um, no qual todos os elementos possuem um único e respectivo correspondente) se fez da seguinte maneira:

Figura 9: Relação biunívoca

1	2	3	4	5	...	n	...
↕	↕	↕	↕	↕		↕	
1	4	9	16	25	...	n^2	...

Fonte: Elaborada pela autora (2018)

De acordo com Santos (2008), é possível observar que n e n^2 estão presentes na coleção dos números naturais, o que leva a pensar que essa coleção possui mais elementos, contudo ao estabelecer a relação de um para um, observou-se que em ambas as coleções deveria ter o mesmo número de elementos, o que contraria a noção intuitiva.

A partir de Galileu surgiram os primeiros sinais do tratamento do infinito como é conhecido hoje na Matemática Moderna. Galileu percebeu que o tratamento para conjuntos infinitos deveria ser diferente, mas somente Georg Cantor, 250 anos depois, conseguiu proceder com essa noção.

É possível inferir que o século XVII foi de grande importância para a Matemática em relação ao desenvolvimento mais sistemático da noção de infinito. Nessa época surge a Geometria Analítica e o Cálculo Infinitesimal, este utilizando consideravelmente o conceito de infinito e infinitesimais (SANTOS, 2008).

Para Machado et al. (2008), os eventos que ocorreram no início da Idade Moderna como as navegações, a queda de Constantinopla (possibilitando o acesso a documentos gregos e árabes), a separação da Igreja e do Estado, entre outros acontecimentos da época propiciaram ao homem uma mudança de pensamento. É nesse contexto que surge a necessidade de cálculos mais precisos, utilizando, especialmente, os infinitesimais.

Pai do movimento racionalista francês no século XVII, René Descartes (1596 – 1650), discordava da visão de que o infinito era simplesmente a negação do conceito de finito. Para ele, a ideia de infinito poderia ter sido adicionada em “nosso espírito por vontade do criador do universo, sendo ele próprio a consubstanciação e manifestação originária do infinito” (SANTOS, 2008, p.94) e por conta da natureza finita do ser humano haveria a tentativa de enquadrar a noção de infinito em algo que fosse acessível dentro dessa natureza.

Segundo Descartes, o infinito não era concebido negativamente, mas sim em um conceito positivo, admitido no infinito atual, como unidade, dentro do pensamento racionalista, no qual a partir da razão é que seria possível desvendá-lo.

Discípulo de Galileu, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) possibilitou maior entusiasmo na resolução de problemas envolvendo cálculo infinitesimal. No livro de Cavalieri, *Geometria Indivisibilius Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (1653), há a apresentação de um método para o cálculo de áreas e volumes, considerando que os objetos eram formados por uma infinidade de secções planas paralelas entre si, estas eram chamadas de indivisíveis (MACHADO et al., 2013).

Vinte anos depois, o matemático John Wallis escreveu a obra *Arithmetica Infinitorum,* em uma tentativa de tornar a geometria de indivisíveis de Cavalieri mais próxima da aritmética. Apesar de seus métodos não serem tão rigorosos, Wallis utilizou, pela primeira vez, o símbolo da lemniscata (∞), para representar ${}^{1}/_{0}$, introduzindo, ainda, o estudo de séries infinitas.

Na primeira metade do século XVII, muitos resultados de natureza infinitesimal já eram conhecidos, contudo ainda não havia uma teoria unificada. Essa sistematização foi realizada de modo independente pelo físico inglês Isaac Newton (1642 – 1727) e pelo filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Ambos desenvolveram métodos gerais e transformaram o cálculo infinitesimal em uma área independente da geometria (MOL, 2013).

Newton trabalhou com quantidades infinitesimalmente pequenas, chamadas de momentos de fluxões (do termo inglês *fluxions*), utilizando a percepção de que uma curva era gerada por um ponto se movendo continuamente no tempo.

Em 1671, Newton escreveu *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum,* publicada apenas em 1736. Nessa obra, aprimorou conceitualmente o método dos infinitesimais, considerando as quantidades matemáticas como sendo de natureza contínua e, embora não definisse formalmente o conceito de limite, expressou em seus escritos certa noção a respeito (MACHADO et al., 2008).

Paralelamente a esse trabalho, Leibniz, desenvolvia um novo cálculo, diferentemente de Newton que voltava ao estudo do movimento, ele considerava as variáveis x e y como grandezas que "variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos" (MACHADO et al., 2008, p.295).

O cálculo de Leibniz era de essência geométrica e apoiava-se na noção de diferencial, ou seja, a operação fundamental era o cálculo de diferenças (equivalente a derivada) tendo como operação inversa à soma (equivalente a integral), desenvolvendo, ainda, conforme Mol (2013), uma notação específica, a qual utilizamos até os dias atuais, além disso, a terminologia utilizada na época deu origem ao que chamamos de "Cálculo Diferencial e Integral".

Contudo, segundo Machado et al. (2008), embora os novos métodos fossem eficientes e muito utilizados, suas bases não estavam determinadas, pois ainda não haviam, de fato, esclarecido a natureza do infinito, tampouco o que eram as quantidades infinitesimais.

O "Século das Luzes", como é conhecido o século XVIII, foi cenário de diversas mudanças na sociedade: economicamente com a Revolução Industrial e socialmente com as Revoluções Americana e Francesa. Como aponta Mol (2013), nesse contexto, a valorização da Matemática em decorrência do seu emprego nas novas tecnologias e os incentivos à ciência tornam-se evidentes, e para acompanhar tais mudanças a comunidade cientifica se organizou nas chamadas academias, estimulando o desenvolvimento e a criação de ideias e teorias.

Segundo Sampaio (2008), Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um dos mais produtivos e importantes de seu tempo, resolvendo muitas questões controversas no cálculo infinitesimal. Além de utilizar a notação e a linguagem que ainda é utilizada hoje em dia, contribuindo para a utilização dos símbolos e, π, i e f para indicar uma função de x. Em 1748, escreveu a obra *Introductio in analysin infinitorium*, a respeito dos processos infinitos – séries infinitas, além de ser a primeira a apresentar o conceito de função como tema central da Análise Matemática.

Euler mantinha correspondências com o matemático francês Jean Le Round D'Alembert (1717 – 1784), este acreditava que a noção de limite era essencial para o cálculo, aceitando apenas o infinito potencial.

D'Alembert define limite na *Encyclopédie ou dictionnaire raisoné des sciences, des arts et des métiers* (Enciclopédia ou dicionário sistemático das ciências, das artes e dos ofícios):

> ...uma grandeza é o limite de uma outra grandeza, quando a segunda pode se aproximar da primeira mais perto que uma grandeza dada, tão pequena quanto podemos supor, sem, no entanto, que a grandeza que aproxima possa ultrapassar aquela da qual ela se aproxima; de forma que a diferença de uma tal quantidade e seu limite seja absolutamente indeterminável. (MOL, 2013, p.120 apud D'Alembert, 1751, p.542).

A Matemática é tida como uma ciência autônoma, em parte, por influência da Revolução Francesa. Nesse cenário, a reflexão a respeito dos fundamentos da Matemática se torna importante e mais uma vez a discussão do infinito atual é reacendida. (SAMPAIO, 2008).

Segundo Sampaio (2008), quase dois séculos após o desenvolvimento e divulgação dos métodos de Newton e Leibniz, o francês Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) realizou estudos de modo a aperfeiçoar os conceitos fundamentais do Cálculo, possibilitando um novo caminho para a Análise Matemática, além de buscar soluções para os diversos paradoxos que surgiam desde a época de Zenão. Em 1821, na obra *Cours d'analyse de l' Ecole Royale Polytechnique* Cauchy delineou uma forma de conceber o conceito de infinitesimal, o matemático francês definiu:

> ...*quantidade variável* como aquela que é capaz de assumir sucessivamente valores diferentes; e *quantidade constante* como aquela a que se pode atribuir um valor fixo e determinado. Quando uma quantidade variável assume valores sucessivos que se aproximam indefinidamente de um valor fixado, diferindo deste tão pouco quanto se queira, será, pois, este valor fixo, o limite de todos os outros. (MACHADO et al., 2013, p. 296)

A partir dessa definição, apresentou os infinitésimos como uma quantidade variável que decresce indefinidamente, tornando-se infinitamente pequena, de modo a convergir para o limite zero.

Na segunda metade do século XIX, o alemão Karl Weierstrass, contribuiu para a fundamentação da Análise. O trabalho de Weierstrass utilizava as séries de números racionais para definir um número real dado e não para calculá-lo como era feito até então, desse modo foi preciso uma construção rigorosa dos números reais.

Contudo, segundo Jeanrenaud e Martins (2012), esse método trouxe à tona o problema em obter tais infinitésimos por meio de processo infinitos (infinito potencial) opondo-se à ideia de que esse infinito era trabalhado como uma totalidade completa (infinito atual).

Assim, Cauchy e Weierstrass, além de contribuírem na compreensão de números reais permitiram um novo tratamento matemático para o infinito em consequência da formalização da noção de limite.

O infinito ganha uma nova história com o tcheco Bernhard Bolzano (1781 – 1848). Segundo Sampaio (2008), o matemático caracterizava os conjuntos por meio de suas características e não pela quantidade de elementos, definindo conjunto como uma coleção na qual a ordem das partes é irrelevante e ao mudar tal ordem nada de essencial é mudado.

Acreditava, ainda, na existência de diferentes infinitos. Embora aceitasse o pressuposto de que o todo era maior que a parte, tentou esboçar a correspondência biunívoca entre conjuntos infinitos e suas partes.

Na obra *Paradoxien des unendlichen* (Paradoxos do infinito), publicada em 1851, após sua morte, defendia os conjuntos infinitos como totalidade acabada, de modo que o infinito entendido como processual antigamente dá vazão ao infinito atual. (MACHADO et al., 2013).

Em 1872, conforme Sampaio (2008), o matemático alemão Julius Wihelm Richard Dedekind (1831 – 1916) estabeleceu, pela primeira vez na obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (A continuidade e os números irracionais), que o conjunto é infinito se for semelhante a uma parte própria de si mesmo, ou seja, podendo ser colocado em correspondência biunívoca (bijetora) com alguma de suas partes, definição atual utilizada em teoria dos conjuntos.

Na obra *Continuidade e números irracionais* (1872), Dedekind fez o estudo acerca deste problema, assim o trabalho dele foi o primeiro a apresentar uma definição satisfatória acerca da continuidade, dentro do rigor matemático do século XIX, porém que se estende até os dias atuais.

Conforme Caraça (1951), de modo a obter uma definição precisa que servisse de base para demonstrações, Dedekind verificou que todo ponto da reta determinava nela uma separação em duas partes, de modo que todo o ponto de uma das partes está à esquerda de todo ponto da outra, formando assim duas classes. Observando de modo inverso, o matemático propôs a seguinte propriedade:

> Se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da recta em duas partes (CARAÇA, 1951, p.60).

Em resumo, a continuidade é caracterizada por todo corte da reta ser produzido por um ponto dela, ou seja, qualquer que seja o corte, existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes.

Ao estender tal propriedade ao conjunto dos números racionais a expressão “estar à esquerda” utilizada ao tratar pontos equivale a “ser menor que” em números. Teremos um corte nesse conjunto quando existirem duas classes A e B de números racionais, de modo que todo número racional esteja contido ou em A ou em B e todo número de A seja menor que todo número de B (CARAÇA, 1951).

Investigando o conjunto dos números racionais é possível provar que esse conjunto não é contínuo, uma vez que não satisfaz a propriedade, ou seja existem cortes que não são produzidos por números racionais.

Todavia, a partir dessa propriedade podemos construir o conjunto dos números reais e constatar que este possui a mesma estrutura de continuidade da reta.

Segundo Jeanrenaud e Martins (2012), o raciocínio matemático estaria voltado para a estrutura e suas propriedades e não somente para os números envolvidos e os resultados poderiam ser utilizados em outros domínios como os de funções.

Nesse contexto, durante os estudos da unicidade de funções representadas por meio de séries trigonométricas, em especial as séries de Fourier[2], Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor sentiu a necessidade de uma análise mais precisa acerca dos números reais e a continuidade, que embora já estivesse presente em alguns estudos, como os de Dedekind, ainda não estava completa (MACHADO et al., 2013).

Georg Cantor (1845 – 1918), como é mais conhecido, nasceu em São Petersburgo e aos 11 anos se mudou com a família para a Alemanha, onde descobriu a aptidão aos estudos de Filosofia, Física e Matemática, seguindo, então, carreira acadêmica, contribuindo efetivamente nos estudos acerca do infinito (BOYER, 1906).

Figura 10: Georg Cantor

Fonte: Dauben (1990, p.121)

Cantor, com seus estudos a respeito das séries de Fourier, obteve uma série de conjuntos infinitos de pontos, começando a esboçar o que seria a teoria geral de conjuntos, unindo a ideia de hierarquia de conjuntos, de número transfinito e do *continuum*. Até então, a noção de um conjunto ser ou não enumerável[3], era tida como uma maneira de analisar os infinitos qualitativamente. (SANTOS, 2008).

Os matemáticos da época entendiam o *continuum* de modo físico existindo, por exemplo, no tempo e no espaço. Segundo Santos (2008), suspeitavam ainda que existiam dois tipos de infinito: o primeiro poderia ser colocado em uma relação biunívoca com o conjunto dos números naturais e o segundo que não possuía essa característica.

[2] Ver Apêndice A – Série de Fourier.

[3] Segundo Lima (2006) um conjunto X é dito enumerável se é finito ou se existe uma bijeção entre ele e o conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$).

Cantor e Dedekind estavam cientes a respeito da maior complexidade das propriedades e da quantidade de elementos dos números irracionais, mas ainda não tinham uma demonstração que explicitasse esse fato.

Segundo Sampaio (2008), em 1873, Cantor escreveu para Dedekind, afirmando a impossibilidade de realizar uma correspondência entre os números naturais e os números reais e, em 1874, Cantor publicou a demonstração no artigo *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números algébricos reais), demonstração que ficou conhecida como argumento da diagonal de Cantor. (Ver capítulo 2: Contando o Infinito).

Em meio a essas considerações sobre o conjunto dos números reais, Cantor ainda precisava explicitar o que, de fato, significava o tamanho de um conjunto infinito, para tal feito, o método de correspondência de conjuntos permitiu o desenvolvimento do conceito de potência de um conjunto, ou seja, conjuntos possuem a mesma potência quando é possível estabelecer uma relação biunívoca entre eles.

Outro resultado importante obtido por Cantor foi o da existência de duas classes de conjuntos infinitos, a saber "infinitos enumeráveis, que reúne todos os conjuntos equipotentes ao conjunto de todos os números naturais" e "a classe de todos os conjuntos infinitos não-enumeráveis, ou que possuem a potência do *continuum*" (SANTOS, 2008, p. 115).

Os artigos seguintes de Cantor, continham a essência da teoria geral de conjuntos, o primeiro, em 1879, tratava as potências de conjuntos e o segundo, em 1883, indicava o que viria ser o número transfinito.

Cantor atribuiu para cada conjunto infinito um "tamanho", o qual chamou de potência e esses "tamanhos" foram ditos números transfinitos. O matemático fixou a menor potência ao conjunto dos números naturais e aos conjuntos que podem ser colocados em relação biunívoca com ele (enumeráveis), sendo representados por $\aleph_0$ (Aleph zero). E ainda, utilizou a notação $2^{\aleph_0}$, para representar a potência do *continuum* (DELAHAYE, 2006).

Segundo Santos (2008), o símbolo ∞ deixa de ser usado por Cantor em seus estudos. O matemático adota o símbolo $\aleph$, a primeira letra do alfabeto hebraico, por representar a unidade, tanto no sentido aritmético quanto no sentido teológico. Desse modo os números transfinitos deveriam representar unidades infinitas, aproximando-se da concepção teológica judaico-cristã e reforçando as convicções religiosas do matemático.

A notação utilizada por Cantor infere que a segunda classe de números seria maior que a primeira $(\aleph_0)$, assim um subconjunto dos reais poderia ter a cardinalidade dos reais ou ser enumerável, reafirmando a existência das duas classes (enumeráveis e não-enumeráveis), mas haveria, então, uma classe intermediária?

Essa foi a chamada *hipótese do continuum*, na qual Cantor afirmava não existir nenhum transfinito entre $\aleph_0$ e $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Contudo o matemático faleceu antes de ter a prova de que a hipótese era verdadeira e até hoje não há uma demonstração que prove sua validade, tampouco a refute.

As teorias defendidas por Cantor revolucionaram o infinito na Matemática e o infinito atual foi finalmente incorporado às áreas de estudo, contudo, como afirma Sampaio (2008), Cantor foi extremamente criticado por seu trabalho.

No campo religioso, sua teoria foi alvo de grande polêmica, especificamente, por tratar coleções infinitas e completas de números, o que aos olhos da Igreja Católica Apostólica Romana poderia representar a "racionalização sobre a própria potência divina" (SANTOS, 2008, p.135).

Alguns teólogos, acreditavam que as ciências deveriam aceitar as verdades da Igreja, estes eram chamados de *tomistas*, outros, os *neotomistas*, afirmavam que a ciência não colocaria os dogmas religiosos em contradição, contudo a teoria defendida por Cantor acerca do infinito atual, era tida pelos tomistas como uma aproximação entre a potência divina e o mundo concreto, gerando uma postura panteísta e herética, pois relacionava o infinito de Deus ao infinito temporal (SANTOS, 2008).

Cantor, por ser uma pessoa com estreitas relações religiosas, trocava correspondências com personalidades importantes da Igreja[4], na tentativa de que sua teoria obtivesse apoio dessa instituição tão influente na sociedade. Assim, Cantor explicou sua distinção entre os infinitos, afastando um suposto panteísmo, uma vez

[4] Ao termo "Igreja", neste texto, nos referimos a Igreja Católica Apostólica Romana.

que o infinito absoluto estaria reservado a Deus, enquanto o transfinito atual seria uma qualidade do Universo criado, uma prova da criação de Deus (SANTOS, 2008).

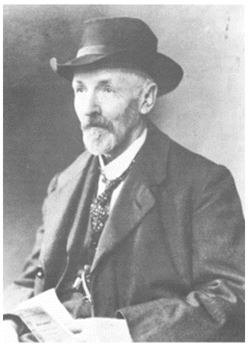
Alguns matemáticos também se opuseram fortemente aos estudos sobre o infinito, comumente a frase *“Não sei o que predomina na teoria de Cantor - filosofia ou teologia, mas tenho certeza de que não há Matemática lá”* (MÜCKENHEIM, [2016], trad. nossa), está ligada ao alemão Leopold Kroenecker (1823 – 1891).

Além disso, em uma carta autenticada e destinada ao sueco Mittag-Leffler (1846 – 1927), Cantor afirma que o Kroenecker acusa seu trabalho de ser um *‘humbug’* que, segundo o dicionário online Pons, pode ser compreendido como um disparate (Essa carta e outras correspondências do matemático se encontram em Meschkowski e Nilson (1991)).

Henri Poincaré (1854 – 1912) também detinha críticas acerca do trabalho de Cantor afirmando que era uma “perversa patologia no seio da matemática” (SANTOS, 2008, p.203).

Em contrapartida, os matemáticos David Hilbert (1862 – 1943) e Bertrand Russel (1872 – 1970) encaravam essa nova forma de conceber o infinito como a mais fantástica invenção desde o cálculo infinitesimal.

Figura 11: Georg Cantor em 1917, meses antes de falecer



Fonte: Dauben (1990, p.273)

Em 1884, Cantor sentiu os primeiros sinais de esgotamento e acessos de depressão que o acompanhariam até o fim de sua vida, em uma instituição para doenças mentais, em 1918. Antes do falecimento, Cantor obteve o reconhecimento por suas obras (BOYER, 1906).

Embora a vida de Cantor tenha sido conturbada seus estudos foram elogiados por um dos maiores matemáticos do século XX, o alemão David Hilbert (1862 – 1943) que, na conferência de 1925, afirmou “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós” (HILBERT, 1923, p.170).

Conforme Sampaio (2008), no início do século XX, ocorreu o segundo Congresso Internacional de Matemática, em Paris no ano de 1900, no qual Hilbert apresentou uma lista com problemas matemáticos que não possuíam resposta, entre eles o problema na demonstração da *hipótese do continuum.*

Em 1908, o alemão Ernst Zermelo (1871 – 1956) propôs a primeira formalização axiomática da teoria de conjuntos, que deveria satisfazer três condições: ser consistente, ser completa e cada postulado ser independente dos demais (SAMPAIO, 2008). Contudo somente em 1931, o austríaco Kürt Gödel (1906-1978) mostrou a impossibilidade em demonstrar a falsidade da *hipótese do continuum*, demonstrando que “existem verdades matemáticas impossíveis de demonstrar por via lógica” (SAMPAIO, 2008, p.220).

Em 1963, Paul Cohen (1934 – 2007) mostrou que a negação da hipótese do contínuo era compatível com o sistema axiomático da teoria de conjuntos, desse modo os estudos de Gödel e Cohen mostraram que não era possível aceitar tampouco refutar essa formulação da *hipótese do continuum* valendo-se apenas dos axiomas da teoria dos conjuntos (SAMPAIO, 2008).

2 Contando o Infinito[5]

A abordagem acerca dos conjuntos infinitos é feita por meio das relações biunívocas que eles estabelecem ou não com outros conjuntos ou com suas partes próprias.

Essas relações foram abordadas por Cantor, dando ênfase ao questionamento acerca da existência de mais de um infinito e da possibilidade de compará-los, caso existissem.

Desse modo, faz-se necessário entender o que é uma relação biunívoca, também conhecida como função bijetiva, e para tal faremos uso da seguinte definição:

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita bijetiva quando elementos diferentes do conjunto A se correspondem com elementos diferentes do conjunto B e ainda todo elemento do conjunto B possui um correspondente em A.

Em linguagem matemática temos que a função bijetiva deve ser:

i. Injetiva: para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathrm{A},\ x_1 \neq\ x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   Ou, equivalentemente, para quaisquer $x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2)$ implica em $x_1 = x_2$ e;
ii. Sobrejetiva: para todo $y \in \mathrm{B}$, existe um $x\ \in A$, tal que $f(x) = y$.

Assim, ao obter essa função biunívoca dizemos que os conjuntos possuem o mesmo número de elementos, no caso de serem finitos, ou que possuem a mesma cardinalidade quando tratamos de conjuntos infinitos.

Algumas noções intuitivas que são possíveis com conjuntos finitos deixam de ter validade quando tratamos dos conjuntos infinitos, entre elas a máxima de que o todo é maior que a parte.

Observemos que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito[6] (claramente a noção de infinito potencial, no qual cada elemento possui um sucessor, e esse processo pode ocorrer indefinidamente). E, ainda, conseguimos estabelecer

---

[5] Este capítulo tem como referência principal o livro Análise Real (LIMA, v.1, 8.ed. 2006).

[6] Ver Apêndice B – A infinitude de $\mathbb{N}$.

uma relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares (o qual denotaremos por $\mathbb{P}$), subconjunto de $\mathbb{N}$, como segue:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}, \text{ definida por } f(n) = 2n$$

A função f é injetiva. De fato, sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

E ainda, é sobrejetiva. De fato, consideremos $y \in \mathbb{P}$. Como y é par, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = 2n$, ou seja, $n = \frac{y}{2}$. Assim, temos:

$$f(n) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$$

Desse modo, esta função apresentada é uma bijeção. Portanto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ possuem a mesma cardinalidade.

■

Um conjunto X é dito enumerável se é finito ou se existe uma bijeção entre ele e o conjunto[7] $\mathbb{N}$.

O fato de um conjunto possuir relação de um para um com sua parte própria caracteriza-o como conjunto infinito. Esse resultado pode ser encontrado em Lima (2006).

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, embora pareça ser maior do que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, é um conjunto enumerável. Para demonstrar esta afirmação, basta considerarmos a função a seguir.

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, para\ n\ par \\ \frac{n-1}{2}, para\ n\ ímpar \end{cases}$$

Observemos que a função dada relaciona os elementos do seguinte modo:

Figura 12: Visualização da função dada $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \cdots & -n & n & \cdots \end{array}$$

[7] Observemos que o conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável, pois a função identidade $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida como $f(n) = n$ é bijetiva.

Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Temos que f é função injetiva. De fato:

i. Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, então:

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow -\frac{n_1}{2} = -\frac{n_2}{2} \Longrightarrow -n_1 = -n_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$.

ii. Sejam $n_3, n_4 \in \mathbb{N} - \mathbb{P}$, então:

$f(n_3) = f(n_4) \Rightarrow \frac{n_3-1}{2} = \frac{n_4-1}{2} \Longrightarrow n_3 - 1 = n_4 - 1 \Longrightarrow n_3 = n_4$.

iii. Considere ainda $n_5, n_6 \in \mathbb{N}$, tais que n_5 seja par e n_6 seja ímpar:

$f(n_5) = f(n_6) \Rightarrow -\frac{n_5}{2} = \frac{n_6-1}{2} \Longrightarrow -n_5 = n_6 - 1 \Longrightarrow 1 = n_6 + n_5$.

Note que como n_5, n_6 são números naturais, essa soma não é possível, pois consideramos o conjunto dos naturais como

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$$

Fica provado, assim, que a função é injetiva.

Temos, também, que f é função sobrejetiva. De fato, seja $y \in \mathbb{Z}$ então y é negativo ou não-negativo:

i. Tomemos $y \geq 0$, então seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2y + 1$ (n é ímpar)

$$f(n) = f(2y+1) = \frac{(2y+1)-1}{2} = y$$

ii. E se $y < 0$, então seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = -2y$ (n é par e positivo)

$$f(n) = f(-2y) = \frac{-(-2y)}{2} = y$$

Assim, a função definida f é sobrejetiva. Portanto, bijetiva.

Logo, $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável e possui a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

■

De modo ainda mais contra intuitivo, é possível provar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ também possui a mesma cardinalidade que os números naturais e os números inteiros. Novamente, para determinar que o conjunto seja enumerável recorremos à noção de relação biunívoca.

De acordo com Lima (2006), o conjunto dos números racionais pode ser escrito do seguinte modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Assim, podemos considerar, inicialmente, uma grade de frações, na qual a primeira linha é destinada ao zero e as frações cujo denominador é igual a 1. Enquanto na segunda linha, temos as frações não nulas de denominador igual a 2, prosseguindo dessa maneira, obtemos:

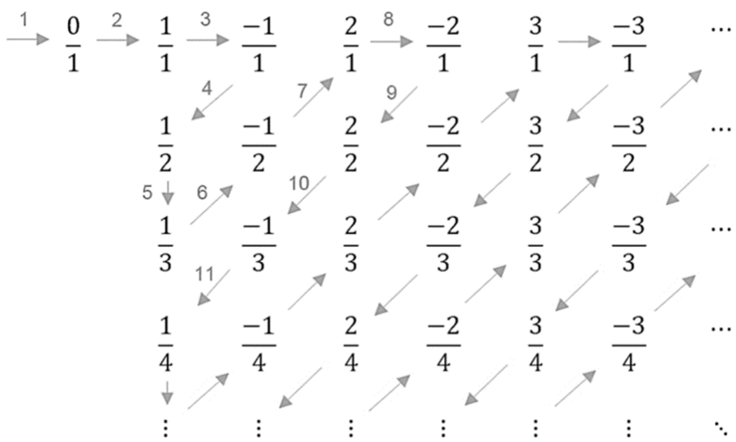
Figura 13: Grade de frações

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} & \cdots \\
 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \cdots \\
 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{-3}{3} & \cdots \\
 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Dispostas dessa maneira, as frações aparecem em um lugar definido. Para que visualizemos a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ temos o esquema de flechas a seguir, de modo que cada número natural é associado a uma fração, inclusive se desconsiderarmos as frações equivalentes, acompanhamos, assim, uma ordenação.

Figura 14: Enumeração de $\mathbb{Q}$



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

E assim, a "contagem" é possível, portanto podemos representar o conjunto dos racionais desta forma: $\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \dots\right\}$.

Para provarmos que $\mathbb{Q}$ é enumerável, será necessário o conhecimento de alguns resultados que decorrem do teorema enunciado a seguir[8]:

Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável

De acordo com o texto de Lima (2006), os corolários a seguir são consequências deste teorema:

Corolário 1. Seja $f: X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também o será. (Caso particular: todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável).

Corolário 2. Seja $f: X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também o será.

Corolário 3. O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

A partir disso, podemos definir uma função sobrejetiva $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, sendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, e a função definida do seguinte modo:

$$\varphi(m, n) = \frac{m}{n}$$

A função é sobrejetiva. De fato, seja $y \in \mathbb{Q}$, então existe $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, de modo que $y = \frac{a}{b}$. Temos então que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ e assim $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, podemos então aplicar a função φ:

$$\varphi(a, b) = \frac{a}{b} = y$$

Desse modo temos que φ é uma função sobrejetiva. E como o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável (de acordo com o corolário 3), segue, pelo corolário 2, que o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é enumerável.

■

A partir disso, percebemos que os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais possuem o mesmo infinito, em outras palavras, possuem a mesma cardinalidade, definida e denotada por Georg Cantor como $\aleph_0$.

---

[8] Ver demonstrações em: Apêndice C - Enumeráveis

Além desses conjuntos numéricos, todo conjunto que tenha uma relação de um para um com os naturais possui cardinalidade $\aleph_0$. Destacamos entre esses conjuntos os números ímpares, quadrados e até mesmo os números primos, que, embora pareçam existir em menor quantidade que os naturais, possuem a mesma cardinalidade.

Ao tratarmos os conjuntos finitos, ressaltamos que a cardinalidade é dada pelo número de elementos do conjunto, ou seja, um conjunto X finito composto por 10 elementos tem cardinalidade $\#(X) = 10$.

A comparação entre conjuntos infinitos trouxe a possibilidade de inferir acerca do número de elementos desses conjuntos, mas em 1883, Cantor não conseguiu uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais e os naturais e foi além, demonstrando que essa relação não poderia existir, o que significava a existência de um infinito maior que o enumerável, ou ainda, o infinito não enumerável.

A prova de que o conjunto dos números reais é um conjunto não enumerável foi feita, a princípio, por meio do argumento da diagonal de Cantor.

Todo número real não nulo pode ser representado como decimal infinito, alguns porque o são como a dízima $0{,}3333\ldots$, mas mesmo os decimais finitos podem ser representados de maneira infinita. Por exemplo, $0{,}25$ pode ser representado por $0{,}24999\cdots$ ou o número 1 por $0{,}999\cdots$. Assim um número $x \in (0{,}1)$ tem representação decimal $a = 0, x_1x_2x_3\cdots$, sendo cada dígito $x_i \in \{0{,}1, 2, \cdots, 9\}$.

Vamos supor que $(0{,}1)$ seja enumerável. Então $(0{,}1) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, em que cada $a_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots$. Assim, estes elementos podem ser representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\
a_2 &= 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\
a_3 &= 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots \\
&\vdots \\
a_n &= 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Notemos que todo número pertencente a $(0{,}1)$ possui representação infinita e ainda todos os números de representação infinita, cujo algarismo da unidade é zero, estão em $(0{,}1)$. Podemos ter os seguintes decimais:

$$(*)\begin{cases} a_1 = 0{,}1234567\ \ldots \\ a_2 = 0{,}2535455\ \ldots \\ a_3 = 0{,}5556555\ \ldots \\ a_4 = 0{,}3333333\ \ldots \\ \vdots \\ a_n = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\ \ldots \\ \vdots \end{cases}$$

Consideremos $b \in \mathbb{R}$ da forma $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ tal que:

$$b_1 = \begin{cases} 5, se\ a_{11} \neq 5 \\ 6, se\ a_{11} = 5 \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{cases} 5, se\ a_{22} \neq 5 \\ 6, se\ a_{22} = 5 \end{cases}$$

Prosseguimos assim para todos os $b_i, i \in \mathbb{N}$. No exemplo $(*)$, teríamos:

$$b = 0, 5665 \ldots$$

Observemos que $b \in (0{,}1)$, pois é um decimal da forma $a_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots$, ou seja, deve estar relacionado com algum $n \in \mathbb{N}$, uma vez que supomos $(0{,}1)$ enumerável.

Contudo, temos uma contradição, pois da forma como construímos b, temos que ele é diferente de todos os números reais da nossa enumeração. Assim, o intervalo $(0{,}1) \subset \mathbb{R}$ não pode ser enumerado, em outras palavras, não podemos estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos naturais e o intervalo $(0{,}1)$.

Como $(0{,}1) \subset \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R}$ também é não enumerável.

$\blacksquare$

Além da demonstração por meio da diagonal de Cantor, é possível provar a não enumerabilidade do conjunto dos números reais utilizando outro caminho.

O conjunto dos números reais possui estrutura de corpo ordenado completo[9]. A característica de $\mathbb{R}$ mais relevante para o nosso estudo é a de que todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo e esse supremo é denotado por, $b = \sup(X) \in \mathbb{R}$.

Ao dizermos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, afirmamos que existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Assim dizemos que b é uma cota

[9] Para mais detalhes, ver a obra Análise Real (LIMA, v.1, 8.ed. 2006).

superior de X. Se $b \in \mathbb{R}$ for a menor das cotas superiores, b é chamado de supremo do conjunto X, e denotado por $\sup(X)$.

Analogamente, definimos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$, então dizemos que a é uma cota inferior de X, Se $a \in \mathbb{R}$ for a maior das cotas inferiores, a é chamado de ínfimo do conjunto X, e denotado por $\inf(X)$.

Dadas as definições de cota superior e supremo de um conjunto, e ainda o Teorema dos Intervalos Encaixados, que será enunciado a seguir, podemos obter uma outra demonstração da não enumerabilidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Teorema dos Intervalos Encaixados: Dada uma sequência de intervalos limitados e fechados, $I_n = [a_n; b_n]$, tal que $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então existe pelo menos um número real c tal que, $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: As inclusões $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ significam que:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

Como $a_n \leq b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever assim:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{\, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ é limitado superiormente, uma vez que cada $b_n,\ n \in \mathbb{N}$ é uma cota superior do conjunto A.

Então, existe $c = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Como b_n, é cota superior de A, então temos que $c \leq b_n, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$, logo $a_n \leq c \leq b_n, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$ e, portanto, $c \in\ I_n, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$.

■

A ideia de provar a não enumerabilidade do conjunto dos reais por meio desse teorema é a de mostrar, por contradição, que não existe uma função bijetiva que relaciona os naturais aos números reais.

Demonstração: Suponhamos que $\mathbb{R}$ seja um conjunto enumerável, ou seja, existe $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ bijetiva.

Consideremos, $a_1, b_1 \in\ \mathbb{R}$, sendo $a_1 < b_1$, tal que $f(1) \notin [a_1, b_1] = I_1$. A seguir encontraremos um intervalo $[a_2, b_2] = I_2$, de tal modo que que $I_1 \supset I_2$ e $f(2) \notin I_2$.

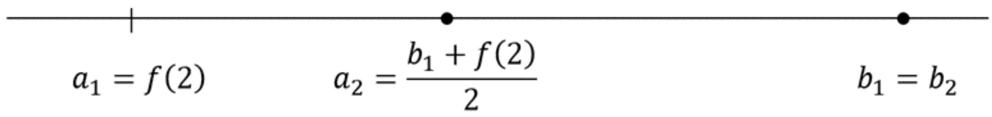
De fato, se $f(2) \in [a_1, b_1]$, temos que $a_1 \leq f(2) \leq b_1$:

i. Se $f(2) \notin [a_1, b_1]$, temos que $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$

ii. Se $a_1 \neq f(2)$, tomamos $a_1 = a_2$ e $b_2 = \frac{a_1 + f(2)}{2}$, assim:

$$a_1 = a_2 < b_2 < f(2) < b_1$$

Figura 15: Teorema dos Intervalos Encaixados (I)

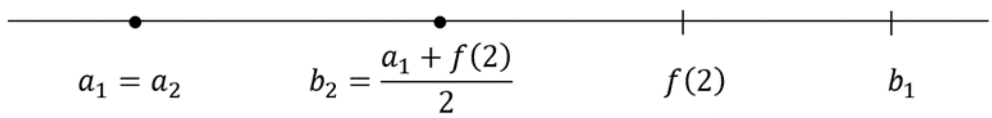


Fonte: Elaborado pela autora (2018)

iii. Se $a_1 = f(2)$, tomamos $b_1 = b_2$ e $a_2 = \frac{b_1 + f(2)}{2}$, assim:

$$a_1 = f(2) < a_2 < b_2 = b_1$$

Figura 16: Teorema dos Intervalos Encaixados (II)



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Em todo caso, teremos que $f(2) \notin [a_2, b_2]$.

Tendo encontrado intervalos não vazios, limitados e fechados sendo: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_p, b_p]$, tais que $f(i) \notin [a_i, b_i], \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, p\}$. Construiremos o intervalo $[a_{p+1}, b_{p+1}] = I_{p+1}$, de modo que $f(p+1) \notin I_{p+1}$.

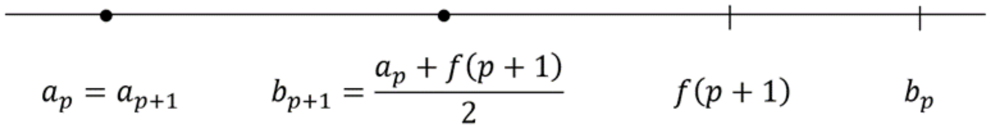
Se $f(p+1) \in [a_p, b_p]$, temos que $a_p \leq f(p+1) \leq b_p$:

i. Se $f(n+1) \notin [a_n, b_n]$, temos que $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

ii. Se $a_p \neq f(p+1)$, tomamos $a_{p+1} = a_p$ e $b_{p+1} = \frac{a_p + f(p+1)}{2}$, logo:

$$a_p = a_{p+1} < b_{p+1} < f(p+1) < b_p$$

Figura 17: Teorema dos Intervalos Encaixados (III)

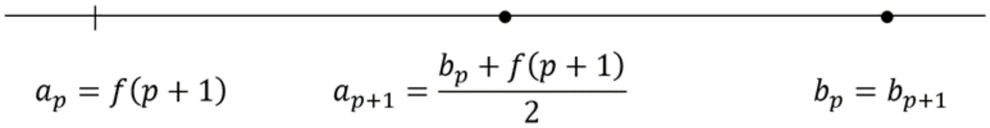


Fonte: Elaborado pela autora (2018)

iii. Se $a_n = f(n+1)$, tomamos $b_{n+1} = b_n$ e $a_{n+1} = \frac{b_n + f(n+1)}{2}$, e temos:

$$a_n = f(n+1) < a_{n+1} < b_{n+1} = b_n$$

Figura 18: Teorema dos Intervalos Encaixados (IV)



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

Desse modo, $f(p+1) \notin [a_{p+1}, b_{p+1}]$.

Assim, construímos indutivamente uma sequência de intervalos não vazios, limitados e fechados, a saber: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$, de modo que $f(n) \notin [a_n, b_n], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Contudo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe algum $c \in \mathbb{R}$ que pertence a todos os intervalos. Portanto $c \neq f(n), \forall n \in \mathbb{N}$, logo c não está na imagem da função f, ou seja, f não é sobrejetiva e, consequentemente, não é bijetiva. Essa contradição advém da suposição de $\mathbb{R}$ ser enumerável. Portanto $\mathbb{R}$ não é enumerável.

■

Outro conjunto que desafia a nossa intuição é o conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, esse conjunto tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números reais, ou seja, existem tantos números irracionais quanto números reais.

Como $\mathbb{R}$ não é enumerável, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável também. Caso contrário, teríamos $\mathbb{R}$ enumerável, pois seria a união[10] de dois conjuntos enumeráveis, o que contradiz o teorema visto anteriormente.

■

[10] Ver demonstração em: Apêndice C - Enumeráveis

O conjunto das partes de um conjunto infinito também possui aspectos interessantes de serem observados, em especial, por apresentar a hierarquia entre os infinitos não enumeráveis.

Dado um conjunto X, ao escrevermos todos os seus subconjuntos obtemos o conjunto das partes, por exemplo, seja $X = \{0, 1, 2\}$, o conjunto das partes de X, denotado por $\wp(X)$, é dado por:

$$\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

Ao tratarmos de conjuntos finitos, temos que o número de subconjuntos (ou ainda, a cardinalidade do conjunto das partes), é dado por $\#\wp(X) = 2^{(\#X)}$. Notemos que no exemplo dado $\#\wp(X) = 2^{(\#X)} = 2^3 = 8$ (a demonstração desse resultado pode ser encontrada em Dourado (2015).

Cantor, por meio desse resultado, formulou um teorema no qual enunciou que se A é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de A é (estritamente) menor do que a cardinalidade do conjunto das partes[11] de A, ou seja, $\#A < \#\wp(A)$ no texto de Dourado (2015), podemos interpretar o teorema do seguinte modo:

> ... se um conjunto é infinito, existe um outro conjunto, diferente deste, que é maior na grandeza de infinito, que é, a saber, o conjunto das partes deste mesmo conjunto. Ou seja, sempre existe um infinito maior do que o infinito de qualquer conjunto infinito, que é o infinito do conjunto das partes deste mesmo conjunto (DOURADO, 2015, p.44).

Assim, existe um conjunto maior que o conjunto dos números reais, a saber $\wp(\mathbb{R})$, que por sua vez é menor que $\wp(\wp(\mathbb{R}))$ e assim sucessivamente.

Sabendo que a cardinalidade do conjunto dos naturais foi denotada por Cantor como $\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$, temos que $\aleph_0 < \wp(\mathbb{N})$, e assim, é possível exibir uma hierarquia entre os infinitos:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \cdots$$

Ressaltamos que Cantor, ao perceber que o conjunto dos reais não era enumerável, estabeleceu quão maior é o infinito dos *continuum* em relação aos enumeráveis, de modo que $\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ (Ver demonstração em Dourado (2015)).

---

[11] Ver demonstração em: Apêndice D – Primeiro Teorema de Cantor

Chegando a esse ponto, Cantor formulou a *hipótese do continuum*, na qual não haveria nenhum cardinal entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Como Cantor denotou $\aleph_0 < \aleph_1$, tal hipótese consiste no fato de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Dessa forma, podemos imaginar duas situações, sendo elas:

i. Não existe outros infinitos entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ ou
ii. Há diferentes infinitos e faz-se necessário descobrir como podemos obtê-los e em qual quantidade existem.

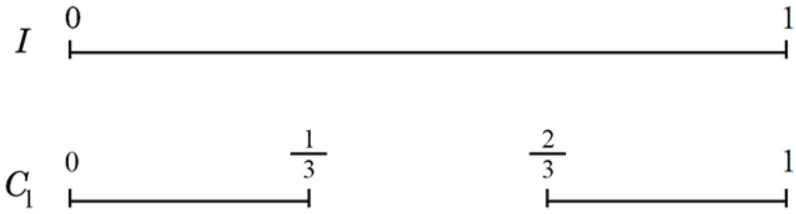
Contudo até os dias atuais tal hipótese não foi provada, embora também não tenha sido refutada, uma vez que considerá-la verdadeira não contradiz à axiomática da teoria dos conjuntos (DELAHAYE, 2006).

3 Conjunto de Cantor e suas notáveis propriedades

Em 1882, Georg Cantor, definiu um subconjunto dos reais com propriedades que, mais uma vez, colocaria a prova nossa intuição (STADLER, 2000). O conjunto conhecido como Conjunto Ternário de Cantor, ou, ainda, “Poeira de Cantor” é um exemplo engenhoso acerca dos conjuntos infinitos, construído de forma iterativa, ou seja, por meio de processos repetidos *“ad infinitum”.*

A princípio tomaremos o intervalo fechado $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e o dividiremos em três partes iguais, retiramos, então, a parte central, terço médio, restando os terços extremos.

Figura 19: Primeira iteração do Conjunto de Cantor



Fonte: Adaptada de Alves (2008, p.19)

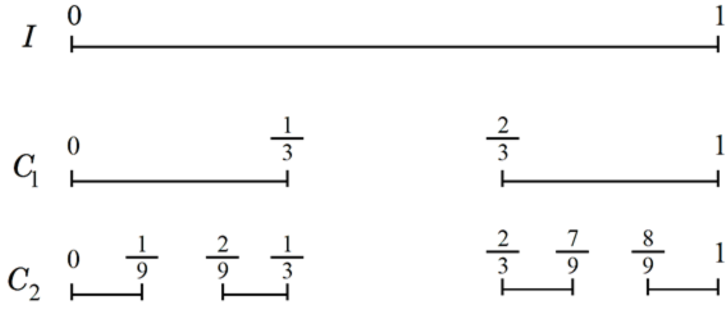
Assim, o intervalo fechado $I = [0,1]$ foi dividido em três partes, a saber

$$I = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

E retiramos o intervalo central, aberto, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. obtendo $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Devemos repetir o processo com as partes restantes, de modo a retirar os terços médios de cada uma, obtendo quatro segmentos:

Figura 20: Segunda iteração do Conjunto de Cantor



Fonte: Alves (2008, p.19)

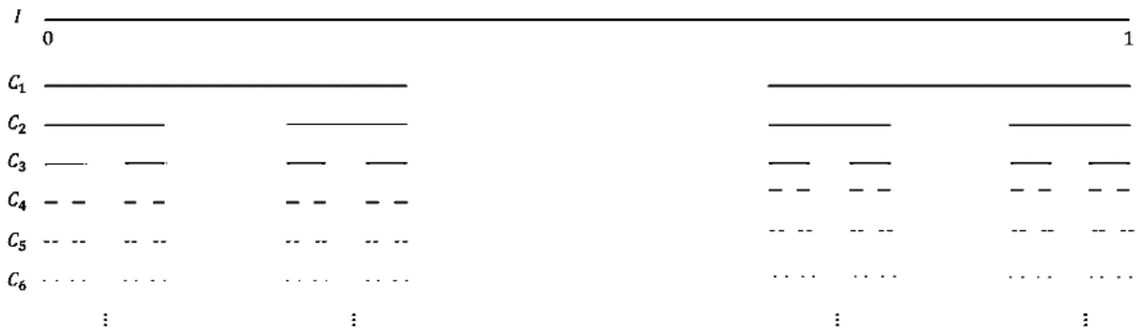
Então, temos que $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

Na terceira etapa, vamos remover o terço médio de cada intervalo fechado, obtendo:

$$C_3 = \left[0,\frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27},1\right]$$

Repetindo esse processo infinitamente, sempre dividindo os segmentos em três e retirando o terço médio, obtemos o Conjunto Ternário de Cantor.

Figura 21: Construção do Conjunto de Cantor



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

E, ainda, temos $I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$. Denotando o conjunto por K, podemos representá-lo como:

$$\mathrm{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

O Conjunto Ternário de Cantor pode ser caracterizado pelo modo como escrevemos os seus elementos na base ternária (ou base 3), ou seja, $x \in [0,1]$ podemos escrever $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$, sendo cada $x_n = \{0,1,2\}$ de modo que:

$$x = x_1 \cdot \frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{1}{3^2} + \cdots + x_n \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \frac{1}{3^n}$$

Assim, temos, como exemplo, que:

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = (0{,}2)_3$$

$$\frac{17}{27} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} = (0{,}122)_3$$

$$\frac{1}{4} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 0 \cdot \frac{1}{3^3} + 2 \cdot \frac{1}{3^4} + \cdots = (0{,}02020\ \ldots)_3$$

Notemos que a representação em base ternária é finita se o denominador é uma potência de 3, caso não seja, o número racional tem representação infinita e periódica como é o caso $\frac{1}{4} = (0{,}02020 \ldots)_3$. Por fim, os números irracionais possuem representação infinita e não periódica na base 3 (LIMA, 2006).

A construção do conjunto implica que na primeira iteração obtemos a união de dois intervalos fechados, na segunda iteração unimos quatro intervalos, na terceira, unimos oito intervalos, de modo que na enésima iteração obteremos a união de 2^n intervalos fechados.

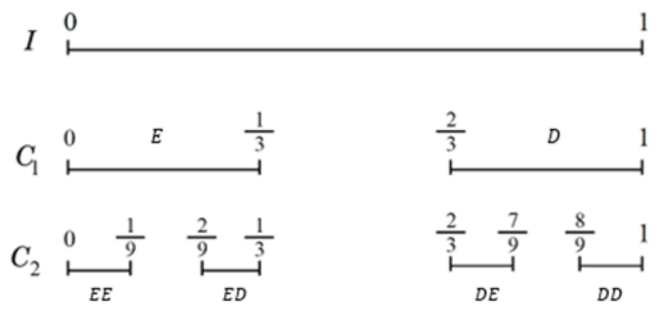
Embora a cada etapa do processo retiremos um intervalo aberto, o conjunto, nunca será vazio, podemos observar que os pontos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ permanecem no conjunto, na verdade, o Conjunto de Cantor tem o mesmo infinito do conjunto dos números reais, ou seja, é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Conforme a construção do Conjunto de Cantor (K), cada iteração constitui-se na união de intervalos fechados.

Consideremos a primeira iteração, na qual obtemos dois intervalos fechados, diremos que o intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ está à esquerda do ponto médio do intervalo original $[0{,}1]$ e o intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ está a direita. Denotaremos por D o intervalo a direita e E o intervalo a esquerda.

Na segunda iteração atribuiremos a posição em relação ao intervalo anterior.

Figura 22: Orientação dos intervalos



Fonte: Adaptada de Aves (2008, p.19)

Do mesmo modo, faremos para as iterações seguintes em um processo infinito, de modo a conseguirmos os elementos de K, assim cada elemento do conjunto será representado por sequências contendo E's e D's.

A par dessa atribuição em relação a orientação direita ou esquerda de cada elemento, vamos considerar que o Conjunto Ternário de Cantor é enumerável, ou seja, $\mathrm{K} = \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots\}$, sendo cada k_p uma sequência de E's e D's para todo p natural e escrevemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= DDEDDEDEDDD \dots \\ k_2 &= EEEDDEDDEEE \dots \\ k_3 &= EEEDDEDEDDD \dots \\ k_4 &= DEDEDEDEDED \dots \\ k_3 &= EEDDDDDDEEE \dots \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (**)$$

Utilizando o argumento da diagonal de Cantor, escrevemos os elementos do conjunto conforme sua representação, assim todo elemento de K é uma sequência de E's e D's todas as sequências dessa forma estão no conjunto:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_{11}\, a_{12}\, a_{13} a_{14}\, a_{15} \dots \\ k_2 &= a_{21}\, a_{22}\, a_{23} a_{24}\, a_{25} \dots \\ k_3 &= a_{31}\, a_{32}\, a_{33} a_{34}\, a_{35} \dots \\ k_3 &= a_{41}\, a_{42}\, a_{43} a_{44}\, a_{45} \dots \\ &\vdots \\ k_n &= a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} a_{n4}\, a_{n5} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Consideremos agora $l \in \mathbb{R}$, com $l = b_1 b_2 b_3 \dots$, tal que $b_i \neq a_{ii}, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Assim em $(**)$, teríamos $l = EDDDE \cdots$. Logo, l é representado por uma sequência de E's e D's, então l deve pertencer a K, ou seja, deve estar relacionado com algum $n \in \mathbb{N}$, uma vez que supomos K enumerável. Desse modo, l poderia ocupar o enésimo lugar, ou seja:

$$l = b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots = a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots a_{nn} \dots$$

O que significa: $b_1 = a_{n1}$; $b_2 = a_{n2}$; $b_3 = a_{n3}$; $\cdots$; $b_n = a_{nn}$; $\cdots$. Contudo, por construção $b_n \neq a_{nn}$. Assim, temos uma contradição, pois $l \in \mathrm{K}$, mas l não pertence a nossa enumeração, pois $l \notin \{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots\}$. Logo, o conjunto K não é enumerável.

■

Além de ser um conjunto não enumerável, o Conjunto de Cantor possui outras características descritas por meio de noções de Topologia, entre elas, destacamos que o conjunto:

(i) possui interior vazio (não possui intervalos);

(ii) é compacto, e

(iii) não contém pontos isolados.

(i) *Demonstração*: O comprimento de um intervalo qualquer (a, b), sendo $a \neq b$ é dado por $b - a$, ou seja, o intervalo $[0,1]$ tem comprimento igual a 1.

Na primeira iteração do Conjunto de Cantor (K) retiramos um intervalo aberto de comprimento igual a $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Na segunda iteração retiramos dois intervalos abertos, ambos com comprimento $\frac{1}{9}$ e na terceira iteração retiramos quatro intervalos abertos, cada um com comprimento $\frac{1}{27}$.

Continuando o processo para obter o conjunto teremos que o comprimento de todos os intervalos retirados será dado pela expressão:

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1}) \cdot \frac{1}{3^n}$$

Essa expressão é uma série geométrica[12], a qual tem o primeiro termo denotado por $a_1 = \frac{1}{3}$ e a razão é dada por $q = \frac{2}{3}$. Como a razão é menor que 1, a série converge e a soma da série é dada por:

$$s_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

Assim, o comprimento total de todos os intervalos retirados é igual a um, mas temos que o intervalo original $[0,1]$ também possui comprimento igual a um, logo o comprimento do Conjunto de Cantor é zero, portanto o Conjunto não possui intervalos não degenerados, em outras palavras possui interior vazio.

■

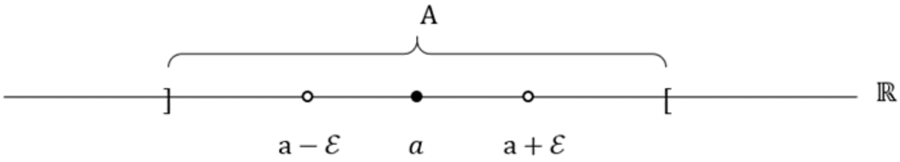
Além disso, K é um conjunto compacto, ou seja, é fechado e limitado. Contudo para provarmos, faz-se necessário algumas definições que serão dadas a seguir.

Segundo Lima (2006, p. 48), um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito aberto quando todos os pontos de A são pontos interiores, chamando o conjunto de todos os pontos interior

[12] Ver o capítulo 11 do livro Cálculo (STEWART, v.2, 7.ed., 2013).

de $int\ (A)$, temos que um conjunto é aberto quando $A = int\ (A)$. E um ponto a é dito interior do conjunto $A \subset \mathbb{R}$, quando existe um número $\mathcal{E} > 0$, de modo que o intervalo $]\mathrm{a} - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}[\subset A$.

Figura 23: Conjunto aberto



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Temos ainda um teorema que infere acerca da reunião de conjuntos abertos.

Teorema 3.1: Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos abertos, a reunião

$$X = \bigcup_{\lambda \in L}^{\infty} X_\lambda$$

é um conjunto aberto.

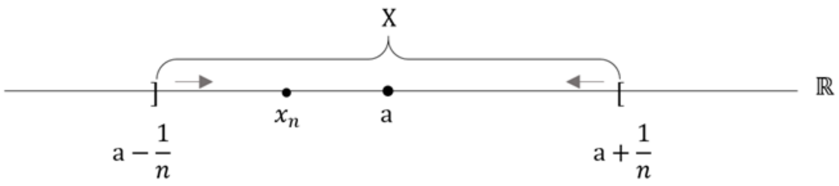
Demonstração: Seja $x \in X$, então existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in X_\lambda$. Como X_λ é aberto, existe $\mathcal{E} > 0$, de modo que $]\mathrm{x} - \mathcal{E}, x + \mathcal{E}[\subset X_\lambda \subset X$. Logo todo ponto $x \in X$ é ponto interior de X e assim X é um conjunto aberto.

■

A noção de conjunto fechado está ligada a definição de ponto aderente, Lima (2006, p.49), define que o ponto a é aderente ao conjunto $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$, quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. Dizemos que um conjunto $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ é fechado quando todo ponto aderente a X pertence a X. Chamando o conjunto de todos os pontos aderentes a X de fecho e denotando por $\bar{X}$, um conjunto é dito fechado quando $X = \bar{X}$.

Um ponto a é dito aderente ao conjunto $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$, se e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X (Essa afirmação é resultado do teorema enunciado e demonstrado no texto de Lima (2006, p.48)).

Figura 24: Ponto aderente



Fonte: Elaborada pela autora

A definição de vizinhança também é importante para as demais definições deste texto, e assim aos pontos que distam menos que $\mathcal{E}$ de a, chamaremos de vizinhança de a. Podemos denotar a vizinhança de a, por:

$$V_a =]a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}[$$

Teorema 3.2. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $F^C = \mathbb{R} - F$ é aberto.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Tese: F^C é aberto.

Seja $a \in F^C$, suponha que a seja um ponto aderente, ou seja, $V_a \cap F \neq \emptyset$ e assim $a \in \bar{F}$. Como, por hipótese, F é um conjunto fechado, temos que $F = \bar{F}$. Assim, $a \in F$, o que é contradição, pois $a \in F^C$. Logo $V_a \cap F = \emptyset$ e $V_a \subset F^C$.

Como $a \in F^C$ e existe V_a tal que $a \in V_a \subset F^C$, pela definição de ponto interior, segue que $a \in int(F^C)$. Assim, temos que $F^C \subset int(F^C) \Rightarrow F^C = int(F^C)$.

Logo, F^C é um conjunto aberto.

($\Leftarrow$) Tese: F é fechado.

Seja $a \in \bar{F}$, temos que:

$$\begin{cases} a \in F & (1) \\ \quad\quad ou & \\ a \notin F & (2) \end{cases}$$

Em (2), como $a \notin F \Rightarrow a \in F^C$, como, por hipótese, F^C é um conjunto aberto, existe $V_a \subset F^C$, tal que $a \in V_a$ e $V_a \cap F = \emptyset$, logo $a \notin \bar{F}$, o que é contradição.

Desse modo, $a \in F$, ou seja, todo ponto aderente a F pertence a F ($\bar{F} \subset F$), assim, $\bar{F} = F$, logo, F é um conjunto fechado.

■

Temos que a intersecção de conjuntos fechados resulta em um conjunto fechado, como prova o teorema a seguir.

Teorema 3.3: Se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados, então a intersecção

$$F=\bigcap_{\lambda\in L}^{\infty}F_\lambda$$

é um conjunto fechado.

Demonstração: Para cada $\lambda\in L$, temos que $F_\lambda^C=\mathbb{R}-F_\lambda$ é um conjunto aberto, conforme demonstrado no teorema 3.2. Segue que:

$$A=\bigcup_{\lambda\in L}^{\infty}F_\lambda^C$$

é um conjunto aberto, pelo teorema 3.1. Mas como

$$A=\mathbb{R}-\bigcap_{\lambda\in L}^{\infty}F_\lambda\Rightarrow A=\mathbb{R}-F$$

temos que F é um conjunto fechado.

■

De posse dessas definições e teoremas podemos provar que K é um conjunto compacto.

(ii) *Demonstração*: Notemos que $I=[0,1]$ é um intervalo limitado, como $\mathrm{K}\subset[0,1]$ segue que K também é limitado.

Consideremos, $\mathrm{I}_n, n\in\mathbb{N}$ os intervalos abertos retirados em cada iteração para obter o conjunto K. Temos que a união A desses intervalos é um conjunto aberto como visto no teorema 3.1.

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n$$

E ainda, o complementar é dado por $B=\mathbb{R}-A$, que é um conjunto fechado pelo teorema 3.2 e corresponde aos intervalos que se mantém em cada interação.

O Conjunto de Cantor é dado por $\mathrm{K} = [0,1] \cap B$, logo K é fechado, pois corresponde a intersecção de conjuntos fechados (Teorema 3.3).

Segue de K ser limitado e fechado que K é compacto.

■

A terceira característica mencionada infere sobre os pontos do Conjunto de Cantor serem pontos de acumulação.

Conforme o texto de Lima (2006, p.54) dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a. O que equivale afirmar que para todo $\mathcal{E} > 0$ tem-se $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

E ainda, se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que a é um ponto isolado de X. Ou seja, existe $\mathcal{E} > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo aberto $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

Teorema 3.4: Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) a é um ponto de acumulação de X;

(b) a é limite[13] de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;

(c) Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

Demonstração: Supondo (a), para todo n natural podemos achar um ponto $x_n \in X - \{a\}$, na vizinhança $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Assim, temos $a = \lim(x_n)$, provando a afirmação (b).

Seja (b) uma sentença verdadeira, mostraremos que para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $C = \{x_n, n > n_0\}$ é infinito. Suponha, por absurdo, que o conjunto C é finito, então existe x_{n_1} que se repete infinitas vezes, assim x_{n_1} fornece uma sequência constante, tal que $x_{n_1} \neq a$, contrariando o fato de $a = \lim(x_n)$. E pela definição de limite[14] fica provado (c).

---

[13] Neste texto, a notação $\lim(x_n)$ equivale a $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n)$.

[14] Sendo $a = \lim(x_n)$, então para todo número real $\mathcal{E} > 0$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$, cumprem a condição de $|x_n - a| < \mathcal{E}$, isto é, $a - \mathcal{E} < x_n < a + \mathcal{E}$, ou ainda x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$ (LIMA, 2006, p.23).

Por fim, sendo (c) verdade, consideremos o intervalo aberto $\left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right)$ de centro em a. Assim para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um ponto $x_n \in X$, tal que $x_n \neq a$. Logo $\left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right) \cap \{X-\{a\}\} \neq \emptyset$, ou seja, a é um ponto de acumulação de X.

■

(iii) De posse desse teorema provaremos que todos os pontos de K são pontos de acumulação.

No conjunto de Cantor, consideremos $c \in \mathrm{K}$ uma extremidade de algum intervalo (c, b) retirado em alguma iteração. Quando (c, b) foi retirado restou um intervalo fechado $[a, c]$. Nas etapas seguintes da construção de K, restarão terços finais, do tipo $[a_n, c]$. O comprimento $c-a_n$ tende a zero, logo $a_n \rightarrow c$ (ou seja, $\lim(a_n)=c$), e assim, c é um ponto de acumulação, pelo item (b) do teorema anterior.

Vamos supor que $c \in \mathrm{K}$ não seja extremo de algum intervalo retirado de $[0,1]$ na construção de K. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou depois da enésima iteração para construir K.

Desse modo, temos $x_n<c<y_n$, com $x_n, y_n \in \mathrm{K}$ e ainda, $y_n-x_n=\frac{1}{3^n}$.

E assim $c=\lim(x_n)=\lim(y_n)$, e pelo item (b) do teorema anterior c é ponto de acumulação.

Fica então demonstrado que todos os pontos do Conjunto de Cantor são pontos de acumulação.

■

As demonstrações feitas nesse capítulo, mostraram que o Conjunto de Cantor possui características interessantes, mas que contrariam a nossa intuição acerca de sua construção.

Ao mesmo tempo em que retiramos infinitos intervalos do Conjunto de Cantor ele possui um infinito não enumerável e ainda possui comprimento nulo. Todos os elementos do Conjunto possuem uma vizinhança e nessa vizinhança há elementos diferentes do conjunto e temos todas essas características em um conjunto fechado contido no intervalo $[0,1]$.

Segundo Stadler (2000) embora Cantor tenha introduzido o Conjunto Ternário e o definido como infinito não enumerável, perfeito[15] e fechado, o primeiro registro publicado sobre um conjunto semelhante ao definido por Cantor, ocorreu em 1875, no *artigo On the Integration of Dicontinuous Functions*, do matemático britânico Henry J. Stephen Smith.

[15] Um conjunto é dito perfeito se é fechado e se todo ponto do conjunto é ponto de acumulação (RUDIN, 1971, p.33).

Considerações Finais

O conceito de infinito é encontrado sob diversos aspectos nas sociedades, seja no campo da Física, Filosofia, Religião, Matemática e até mesmo no imaginário popular referindo-se a coisas muito grandes ou de contagem difícil como as estrelas do céu e os grãos de areia.

Por conta da dificuldade em definir o infinito e da impossibilidade de encontrá-lo em situações concretas, o questionamento a respeito desse conceito permeia o conhecimento até os dias atuais.

Entretanto é na Matemática que nos atentamos ao escrever esse texto. O modo como o infinito se apresenta dentro de outros conceitos como o limite, o cálculo e os números irracionais incitou a necessidade de estudar a infinitude e, de fato, estabelecer definições e conjecturas que possibilitassem o entendimento desse conceito.

Como normalmente acontece com os conceitos da Matemática, o processo de compreensão do infinito perdurou por muitos séculos, necessitando da noção de conjuntos para se fazer completo. A definição tal como é conhecida hoje foi feita pelo matemático Georg Cantor (1845 – 1918).

Entretanto, na Grécia Antiga, já havia registros do pensamento acerca do infinito, mas este tinha certa carga pejorativa por não se encaixar na ideia da matemática perfeita e harmoniosa dos gregos. Nesta perspectiva, alguns paradoxos surgem confundindo ainda mais a ideia que se tinha sobre o infinito.

Embora os paradoxos tenham causado estranheza e confusão, estes foram fundamentais para que o estudo do infinito prosseguisse e se mostrasse consistente mesmo surgindo, em diversos contextos, de maneira contra intuitiva.

No século XIX, Cantor percebeu a existência de conjuntos infinitos diferentes, o que levou à definição de cardinalidade de conjuntos, fato que, ainda hoje, gera estranhamento, uma vez que não é natural interpretarmos o infinito com “tamanhos” distintos.

O matemático separou o infinito, do seu contexto sociocultural, em duas categorias (os enumeráveis e não enumeráveis) e possibilitou a relação entre esses conjuntos por meio de teoremas utilizados hoje no estudo de Análise Real, sendo, portanto, essencial para o norteamento deste trabalho.

A partir dessas considerações, o desenvolvimento do presente estudo consistiu no estudo de demonstrações de teoremas que são base para o entendimento e diferenciação entre os infinitos, partindo do conjunto dos números naturais como um exemplo dos conjuntos que possuem o menor infinito até a demonstração de que o conjunto dos números reais possui um infinito diferente considerado não enumerável.

O estudo do Conjunto de Cantor também foi realizado por caracterizar um exemplo de conjunto não enumerável com propriedades interessantes no que diz respeito a sua construção, que consiste na retirada de diversos elementos, mantendo ainda uma infinidade não enumerável.

A compreensão da possibilidade ou não de contar os conjuntos infinitos é um tópico delicado por conter situações que desafiam a lógica, mas observar a trajetória histórica da construção matemática por trás do conceito permite que afirmações concretas sejam analisadas e demonstradas.

Embora a cronologia histórica tenha sido feita a partir dos gregos e tenha permeado a Europa, ressaltamos que outras sociedades em épocas distintas também inferiram acerca do infinito de acordo com as suas realidades. O estudo do infinito a partir da ótica de outras culturas relaciona-se com a Etnomatemática compondo um campo rico de conhecimento, não só pelo modo como é interpretado um conceito, mas como as diversas culturas lidam e lidavam com esse saber.

Referências

ASSIS, Thiago Albuquerque de et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira Ensino Física**, São Paulo, v.30, n.2, 2008. p. 2304.1 – 2304.10. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 03 de setembro de 2018.

ÁVILA, Geraldo. **Grandezas incomensuráveis e números irracionais**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo. n.5, 1984. p.6-11.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1ª. Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974. p.489.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

DAUBEN, Joseph Warren. **Georg Cantor:** His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Princeton: Princeton University Press, 1990. p.404.

DELAHAYE, Jean-Paul. O infinito é um paradoxo na Matemática? In: As diferentes faces do infinito. **Scientific American do Brasil**, Edição Especial n. 15. São Paulo: Duetto Editorial. 2006. p. 06 – 13

DOURADO, Thiago Augusto S. Uma brevíssima história dos infinitos infinitos. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, n. 177, nov. 2015. p.40 – 47.

GOMIDE, Walter. Os ‘Grundlagen’ de Cantor: sua origem histórica e conceitos fundamentais. **Aquinate**, Rio de Janeiro, v.3, n.5, jul. 2007. p.91 – 120.

HILBERT, David. **Sobre o infinito**. Traduzido por W. A. Carniielli a partir do original alemão Über das Unendliche publicado em Mathematische Annallen (Berlim) v.95 (1926).

JEANRENAUD, Maria de Lourdes Rocha de Assis; MARTINS, Daniel Felipe Neves. **A questão do infinito em Hilbert.** In: Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, 13, 2012, São Paulo: EACH/USP, 2012. p.11.

LIMA, Elon Lages. **Análise real** – Vol.1. 8. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006. p.189.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise** – Vol.1. 7. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1976. p.344.

MACHADO, Rosilene Beatriz et al. Aporética do infinito: [des]caminhos na Matemática e na pintura. Alexandria: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 1, p. 283 – 317, abr. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37946> Acesso em 03 de setembro de 2017.

MADEIRA, Marta Augusta da C. Ramires; COSTA, João Paulo Pita da. **História do conceito de infinito**. 2014. Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias – ULHT Disponível em: <https://edmatematica1.files.wordpress.com/2014/07/oinfinitoemmatematica1.pdf> Acesso em: 03 de setembro de 2017.

MAGALHÃES, Luis T. Séries de Fourier. In: ______. **Métodos de resolução de equações diferenciais e análise de Fourier com aplicações.** Lisboa. Instituto Superior Técnico de Lisboa 2013. cap. 07. p. 179-244. Disponível em: <http://www.math.ist.utl.pt/~lmagal/TEEDCap8.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2018.

MARTÍNEZ, Javier Lorenzo. A ciência do infinito. In: As diferentes faces do infinito. **Scientific American do Brasil**, São Paulo, Edição Especial n. 15, 2006. p. 15 – 23.

MELLO, Amanda Priscila Nunes; LORIN, João Henrique. **O infinito: uma abordagem histórico-filosófica antiguidade até o século XI.** In: IX Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 9., 2014. Campo Matão: FECILCAM, 2014. p. 311 - 323.

MESCHKOWSKI, Herbert; NILSON, Winfried (Ed.). **Georg Cantor:** Briefe. Berlim: Springer, 1991. p.552.

MICHAELIS. Moderno Dicionário da Língua Portuguesa (Versão Online). Editora Melhoramentos. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da Matemática.** Belo Horizonte: Caed. UFMG, 2013. p.138.

MORAES JR, Rogério Jacinto de. **Enumerabilidade e não-enumerabilidade de conjuntos:** uma abordagem para o ensino básico. 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.

MORRIS, Richard. **Uma Breve História do Infinito**: Dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997. p. 232. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges.

MÜCKENHEIM, Wolfgang. Scepticism about transfinite set theory. In: MÜCKENHEIM, Wolfgang. **Transfinity:** A Source Book. [2016]. p. 134-191.

NASCIMENTO, Bismark Gonçalves do. **Um Estudo do Conjunto de Cantor.** 2017. 51 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, Caicó, 2017.

PONS. Dicionário Alemão – Português (Versão Online). Editora PONS GmbH. Disponível em: <https://pt.pons.com/tradu%C3%A7%C3%A3o>

REMÉNYI, Maria. A história do símbolo. In: As diferentes faces do infinito. **Scientific American do Brasil**, São Paulo, Edição Especial n. 15, p. 32 – 33. 2006.

RUCKER, Rudy. Infinity. In: ______. **Infinity and the mind:** the science and philosophy of the infinite. Princeton: Princeton University Press, 2005. p. 1-52.

RUDIN, Walter. **Princípios de Análise Matemática.** Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971. p.297 Tradução de Eliana Rocha Henriques de Brito.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. **Infinito uma história a contar.** Millenium: Journal of Education, Technologies and Health, Viseu, v.13, n.34, abr.2008.

p.205-222. Disponível em: <http://revistas.rcaap.pt/millenium/article/view/8368/5957>. Acesso em 03 de setembro de 2017.

SANTOS, Eberth Eleutério dos. **O infinito de Georg Cantor:** Uma revolução paradigmática no desenvolvimento da Matemática. 2008. 264 f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2008.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. **Uma história sobre o infinito atual.** 2011. 30 f. Monografia (Especialização) - Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática, UFMG, Belo Horizonte, 2011.

SERRA, Isabel. **Transmutações do infinito.** 2002. III Colóquio Internacional "Discursos e Práticas Alquimistas". Disponível em: <http://www.triplov.com/coloquio_4/iserra.html> Acesso em: 03 de setembro de 2017.

STADLER, Marta Macho. **Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor**. Un paseo por la Geometría. País Vasco. Departamento de Matemáticas, curso 1999/2000. p. 97-116.

STEWART, James. Sequências e Séries infinitas. In: ______. Cálculo – Vol.2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Cap. 11. p. 623-706.

SVERSUT, Wellington. **Filosofia do Conhecimento**. Disponível em: <http://basedafilosofia.blogspot.com/2010/03/conhecimento-missao-06-os-pre.html> Acesso em 30 de maio de 2018.

Apêndice A – Série de Fourier

O matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) introduziu em 1807 as séries trigonométricas, inicialmente, com o propósito de resolver problemas físicos como a propagação de ondas e difusão do calor, contudo seu desenvolvimento teve importantes resultados na Matemática.

O estudo das séries de Fourier, possibilitou afirmar que qualquer função periódica pode ser decomposta por meio da soma de senos e cossenos, tornando funções complexas em funções mais simples de serem manipuladas.

Uma função é dita periódica se existe uma constante T, de modo que $f(x+T) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ O menor valor de T para o qual a igualdade anterior é válida é dito período da função f.

Uma série formada por senos e cossenos é chamada série trigonométrica. Dada uma função $f(x), x \in \mathbb{R}$, periódica, de período T, temos então que:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + B_n \cdot sen\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\right)$$

A essa série chamamos série de Fourier de f e os coeficientes $A_0,\ A_n,\ B_n,\ n = 1{,}2{,}3$ ... são chamados coeficientes[16] de Fourier de f.

Uma vez que a função pode ser expressa por meio da soma de senos e cossenos, esta representação é única, tal unicidade foi demonstrada por Georg Cantor em 1870.

O estudo acerca da unicidade das representações por meio das séries de Fourier, teve como consequência para Cantor, o estudo dos números reais (como sequência de números racionais) e a publicação de diversos artigos que deram base para teoria geral dos conjuntos.

---

[16] Ver Magalhães (2013) para informações detalhadas.

Apêndice B – A infinitude de $\mathbb{N}$

Definiremos o conjunto finito $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou ainda

$$I_n = \{n \in \mathbb{N} |\ p \leq n\}$$

Temos que um conjunto X é dito finito se X é um conjunto vazio ou existe uma função bijetiva $f: I_n \to \mathbb{N}$, para algum n natural.

Vamos supor que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ seja um conjunto finito.

Então para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma função bijetiva $f: I_n \to \mathbb{N}$ e consideremos ainda $p \coloneqq f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, observemos que $p \in \mathbb{N}$.

i. Se $n = 1$, vamos supor que f seja injetiva, então conjunto imagem deveria ter um único elemento e por construção dos números naturais[17] isso não ocorre, assim temos $Im_f \neq CD_f$ e f não é sobrejetiva, logo não é bijetiva.
ii. Se $n > 1$, temos $p > f(i), \forall\, i \in I_n$, pois sendo $n > 1$, p é dado pela somatória de ao menos duas parcelas (positivas), logo temos $p > f(1)$, $p > f(2)$ e assim sucessivamente. Desse modo p é natural, mas não é imagem de nenhum $i \in I_n$, portanto a função não é sobrejetiva e consequentemente não é bijetiva.

Concluímos, assim, que a função bijetiva $f: I_n \to \mathbb{N}$ não é possível de ser construída e o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

[17] Ver a construção de $\mathbb{N}$ por meio dos axiomas de Peano em LIMA (2006)

Apêndice C – Enumeráveis

As demonstrações desse apêndice têm como referência a obra Análise Real de Elon Lages Lima (2006, 8 ed.).

Teorema: Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável

Demonstração: Se X é finito, então X é enumerável por definição. Caso contrário, temos X infinito então devemos mostrar que existe uma função bijetiva $f: \mathbb{N} \to X$.

Para melhor entendimento da demonstração, chamaremos $X = A_0$.

Como $X = A_0 \subset \mathbb{N}$, é válido o Princípio da Boa Ordenação (P.B.O.), no qual todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, desse modo, seja x_1 o menor elemento de A_0. Definimos $f(1)$ como sendo x_1. O conjunto $A_1 = A_0 - \{x_1\}$ não é vazio, pois o conjunto A_0 é infinito (na verdade A_1 é infinito).

E ainda, pelo P.B.O., seja x_2 o menor elemento de A_1. Assim, definimos $f(2)$ como sendo x_2. Seja, agora, $A_2 = X - \{x_1, x_2\}$. Prosseguindo dessa forma, consideremos f definida para os n primeiros naturais: $f(1) = x_1, \cdots, f(n) = x_n$. Da forma como esses elementos da imagem foram obtidos, temos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Seja $A_n = A_0 - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, temos que $A_n \neq \emptyset$ e ainda, pelo princípio da boa ordem, existe $x_{n+1} \in A_n$, tal que x_{n+1} é o menor elemento de A_n.

Consideremos, então $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $n \neq m$. Sem perda de generalidade, suporemos $n > m$. Seguindo a construção de f, obtemos:

$$x_m = f(m) \in A_{m-1} = A_0 - \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$$

$$x_n = f(n) \in A_{n-1} = A_0 - \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, \dots, x_n, \dots\}$$

Dessa forma, temos que $x_m = f(m) \notin A_{n-1}$. Como $x_n \in A_{n-1}$, temos que $f(m) \neq f(n)$, portanto a função é injetiva.

Suponha que exista $x \in A_0$, tal que $x \neq x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo $x \in A_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Desse modo, $x > x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, o que é equivalente a dizer que todos os elementos do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ são menores que x, definindo assim um conjunto limitado[18], o que é

[18] No texto de LIMA (2006, p.4), o Corolário 2 do Teorema 2 enuncia: "Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado." E ainda define que "Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$."

contradição, pois ser limitado implica em ser finito, no conjunto dos naturais, e o conjunto $X = A_0$ é infinito, dessa contradição temos que f é sobrejetiva.

Portanto, temos que f é bijetiva e, consequentemente, $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

■

Corolário 1: Seja $f: X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é enumerável.

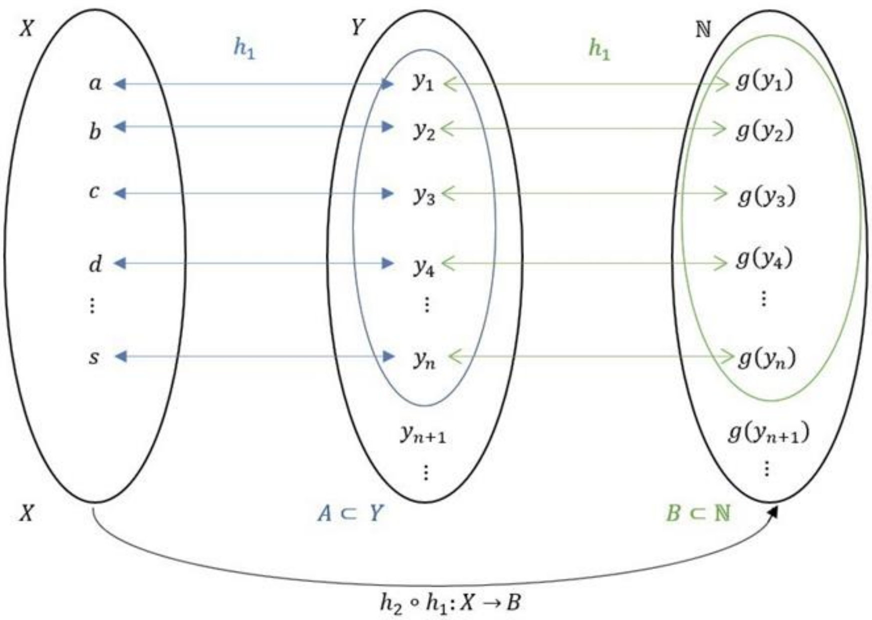
Demonstração: Sendo Y enumerável, então existe uma função $g: \mathbb{N} \longrightarrow Y$ bijetiva e assim temos que a função inversa, $g^{-1}: Y \longrightarrow \mathbb{N}$, existe e, também, é bijetiva. Assim, podemos escrever o esquema:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{N}$$

Contudo f, pode não ser sobrejetiva, então tomaremos a restrição de Y a $Im_f(X) = A$. Assim a função $h_1: X \longrightarrow A$, tal que $h_1(x) = f(x)$ é sobrejetiva. Como $h_1(x) = f(x), \forall x \in X$ e f é injetiva, então h_1 é bijetiva.

E ainda, a restrição de $\mathbb{N}$ a $Im_{g^{-1}}(A) = B$, sendo $h_2: A \longrightarrow B$ de modo que $h_2(y) = g^{-1}(y)$ é sobrejetiva. Como $h_2(x) = g^{-1}(y), \forall\, y \in Y$ e g^{-1} é bijetiva, então h_2 é bijetiva. Obtemos o esquema a seguir:

Figura 25: Restrição da função



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Desse modo, podemos escrever:

$$X \xrightarrow{h_1} A \subset Y \xrightarrow{h_2} B \subset \mathbb{N}$$

Como h_1 e h_2 são bijetivas, segue que $h_2 \circ h_1: X \to B$ é bijetiva. E ainda, temos $B \subset \mathbb{N}$, pelo teorema visto anteriormente, B é enumerável. Portanto, como há uma função bijetiva de X em um subconjunto enumerável de $\mathbb{N}$, temos que X é enumerável.

■

Caso Particular: Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração: Seja Y enumerável, considere $X \subset Y$ e a função $\phi: X \to Y$ definida como $\phi(x) = x$, como ϕ é injetiva, pois é a função inclusão, pelo corolário 1, temos que X é enumerável.

■

Corolário 2: Seja $f: X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é enumerável.

Demonstração: Como f é sobrejetiva, segue que todo $y \in Y$ é imagem de algum $x \in X$ pela f.

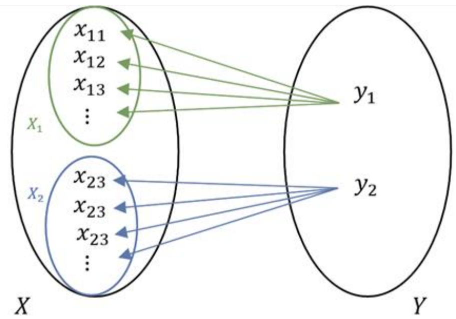
Contudo, f pode não ser injetiva, nesse caso, definiremos a função $g: Y \to X$, da seguinte maneira:

i. Se $y \in Y$ é imagem, pela f, de um único x, então $g(y) = x$
ii. Se $y \in Y$ é imagem, pela f, de dois ou mais $x \in X$, escolhemos um deles.

Desse modo, temos g injetiva, pois sejam $y_1, y_2 \in Y \mid y_1 \neq y_2$.

Existem $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots\}$ e $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots\}$, tais que $f(x_{1i}) = y_1$ e $f(x_{2j}) = y_2, \forall\, i, j$, sendo $X = X_1 \cup X_2$. Conforme a ilustração a seguir:

Figura 26: Domínio e contradomínio da função



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Observemos que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, pois, se existisse $x \in X_1 \cap X_2$, teríamos:

$$(***) \begin{cases} f(x) = y_1, pois\ x \in X \\ f(x) = y_2, pois\ x \in Y \end{cases}$$

Tendo em vista $(***)$ temos que um único elemento do domínio possui duas imagens distintas, o que implica em f não ser função, o que contraria a hipótese de que f é função sobrejetiva.

Assim, temos $g(y_1) = x_{1p}$, para algum p fixo e $g(y_2) = x_{2q}$, para algum q fixo. Sendo $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, como $g(y_1) \in X_1$ e $g(y_2) \in X_2$, então $g(y_1) \neq g(y_2)$. Logo, g é injetiva.

Pelo corolário 1, como $g: Y \to X$ é injetiva e X enumerável, então Y é enumerável.

■

Corolário 3: O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Provaremos, a princípio, que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Consideremos, então, a função $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida como:

$$\varphi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$$

Conforme o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) todo número inteiro positivo e maior que 1 tem decomposição única em produto de fatores primos (a menos da ordem), temos assim uma função injetiva:

Sejam $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de modo que $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$.

Segue que: $\varphi(m_1, n_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1}$ e $\varphi(m_2, n_2) = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2}$

i. Suponha que $m_1 \neq m_2$, pelo TFA, temos que $\varphi(m_1, n_1) \neq \varphi(m_2, n_2)$.
ii. Se $m_1 = m_2$, vem que $2^{m_1} = 2^{m_2}$, vamos supor ainda que: $\varphi(m_1, n_1) = \varphi(m_2, n_2) \Rightarrow 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} \Longrightarrow 3^{n_1} = 3^{n_2}$, segue que $n_1 = n_2$, o que é contradição, pois $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$.

Concluímos assim que f é injetiva e, consequentemente, pelo corolário 1, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Como X é enumerável, existe $h_1: \mathbb{N} \to X$ bijetiva, do mesmo modo temos que Y é enumerável, existe $h_2: \mathbb{N} \to Y$ bijetiva.

Assim, podemos escrever a função sobrejetiva $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ tal que $h(m,n) = \big(h_1(m), h_2(n)\big)$.

A função h é sobrejetiva, pois: seja $y \in X \times Y$, tal que $y = \big(h_1(a), h_2(b)\big)$, então existe $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim podemos aplicar a função h.

$$h(a,b) = \big(h_1(a), h_2(b)\big), = y$$

Obtemos assim que $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ é sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, consequentemente, pelo Corolário 2, $X \times Y$ é enumerável.

■

Corolário 4: A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Sejam X e Y, dois conjuntos enumeráveis, então $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \cap Y \neq \emptyset$.

i. $X \cap Y = \emptyset$

Como X é enumerável, então existe uma função $f: X \to \mathbb{N}$ bijetiva. Chamemos o conjunto dos números pares positivos de $\mathbb{P}$, então existe $g: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, tal que $g(n) = 2n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ que também é bijetiva (ver demonstração no capítulo 2 Contando o Infinito). Logo, existe a composta $h_1: g \circ f$ bijetiva.

E ainda, Y é enumerável, então existe uma função $v: Y \to \mathbb{N}$ bijetiva. Chamemos o conjunto dos números ímpares positivos de $\mathbb{N} - \mathbb{P}$, então existe $\varphi: \mathbb{N} \to (\mathbb{N} - \mathbb{P})$, definida como $\varphi(n) = 2n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$ bijetiva, pois sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow 2m - 1 = 2n - 1$, logo, $m = n$. E ainda, seja $y \in \mathbb{N} - \mathbb{P}$, então existe $n = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{N}$, tal que $f(n) = 2 \cdot \left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 = (y + 1) - 1 = y$. Desse modo, existe $h_2: \varphi \circ v$ bijetiva.

Seja $\psi: (X \cup Y) \to \big(\mathbb{P} \cup (\mathbb{N} - \mathbb{P})\big)$, tal que:

$$\psi(x) = \begin{cases} h_1(x), se\ x \in X \\ h_2(x), se\ x \in Y \end{cases}$$

Notemos que ψ é injetiva e está bem definida, pois $X \cap Y = \emptyset$ e ainda temos $\mathbb{P} \cup (\mathbb{N} - \mathbb{P}) = \mathbb{N}$ que é enumerável, logo $X \cup Y$ também é enumerável, pelo Corolário 1.

ii. $X \cap Y \neq \emptyset$.

Sejam $A = X - (X \cap Y)$ e $B = Y$. Temos que $A \cap B = \emptyset$, assim, por (i), $A \cup B$ é enumerável. Como $A \cup B = [X - (X \cap Y)] \cup Y = X \cup Y$, então $X \cup Y$ é enumerável.

■

Apêndice D – Primeiro Teorema de Cantor

Se A é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de A é (estritamente) menor do que a cardinalidade do conjunto das partes de A. Em símbolos:

$$\#A < \#\wp(A)$$

Demonstração: Se $A = \emptyset$ então $\#A = 0 < 1 = \#\wp(A)$, assim $\#A < \#\wp(A)$.

Suponha que $A \neq \emptyset$. Neste caso, a função $g: A \to \wp(A)$, dada por $g(x) = \{x\} \in \wp(A)$, para todo $x \in A$, é injetiva. Desta forma, o conjunto A tem a mesma cardinalidade do conjunto $\{\{x\} | \, x \in A\}$ de $\wp(A)$ ou, ainda, $\#A \leq \#\wp(A)$.

Para que a demonstração fique completa, é preciso mostrar que a cardinalidade de A não pode ser igual a cardinalidade de $\wp(A)$. Para isso, suponha o contrário, ou seja, se $\#A = \#\wp(A)$, então existe uma bijeção:

$$f: A \to \wp(A)$$

$$x \mapsto f(x)$$

Notemos que $f(x) \subset A$. E consideremos o conjunto $S \in \wp(A)$, (isto é, S é um subconjunto de A) tal que $S = \{x \in A | \, x \notin f(x)\}$.

Pela definição de S, temos que um elemento não pode pertencer a $f(x)$ e a S ao mesmo tempo, logo $f(x) \neq S$, para qualquer x.

Assim, como $S \in \wp(A)$ e $S \neq f(x)$, temos que S não é imagem de nenhum x e a função f não é sobrejetiva.

Desse modo, concluímos que nem todos os elementos de $\wp(A)$ serão imagens de algum $x \in A$. Portanto, f não é bijetiva e $\#A \neq \#\wp(A)$.

Ou seja, $\#A < \#\wp(A)$.

■