

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO
PAULO**

FRANKI TERTO FIRES

**ESTUDO DE BIFURCAÇÕES PARA UMA FAMÍLIA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM MAIS QUE UM PARÂMETRO: UMA
INTRODUÇÃO À ESTABILIDADE E AOS SISTEMAS DINÂMICOS**

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática,
orientado pelo Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho.

IFSP

São Paulo

2018

FRANKI TERTO FIRES

**ESTUDO DE BIFURCAÇÕES PARA UMA FAMÍLIA DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM MAIS QUE UM PARÂMETRO: UMA
INTRODUÇÃO À ESTABILIDADE E AOS SISTEMAS DINÂMICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado no Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de São
Paulo, Campus São Paulo, como requisito
para obtenção do grau de Licenciado em
Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho

SÃO PAULO

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Fires, Franki Terto

Estudo de bifurcações para uma família de equações diferenciais ordinárias com mais que um parâmetro: uma introdução à estabilidade e aos sistemas dinâmicos /Franki Terto Fires - São Paulo: IFSP, 2018.

101f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Carlos Corrêa Filho

1. Sistemas dinâmicos. 2. Estabilidade. 3. Pontos de equilíbrio 4. Bifurcações. Estudo de bifurcações para uma família de equações diferenciais ordinárias com mais que um parâmetro: uma introdução à estabilidade e aos sistemas dinâmicos.

FRANKI TERTO FIRES

**ESTUDO DE BIFURCAÇÕES PARA UMA FAMÍLIA DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM DOIS
PARÂMETROS: UMA INTRODUÇÃO À ESTABILIDADE E AOS
SISTEMAS DINÂMICOS**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em
cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do
grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 14/12/2018

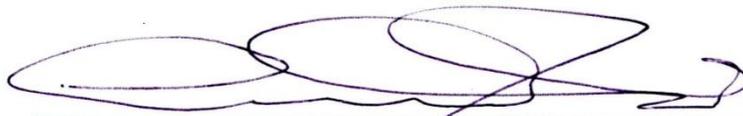
CONCEITO: 8,5

Patricia Paladino

Profa. Dra. Patrícia Andréa Paladino
Membro da Banca

Flavia Milo dos Santos

Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos
Membro da Banca



Prof. Dr. Carlos Correa Filho
Orientador

Franki Terto Fires

Aluno: Franki Terto Fires

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus pais e familiares pelo apoio em toda minha trajetória escolar até chegar a universidade. Sem eles não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP pela bolsa de Iniciação Científica (IC) que recebi e ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho por me ajudarem a iniciar minha carreira como pesquisador.

Ao corpo docente do IFSP por contribuir com minha formação profissional. Aos meus colegas de faculdade por me apoiarem nos momentos em que precisei.

RESUMO

Neste trabalho tem-se o objetivo do estudo qualitativo de uma família de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) com dois parâmetros reais livres. Mais especificamente, foi realizado uma análise de estabilidade de uma família polinomial de 3^o grau em função de dois parâmetros reais livres. Para isso, foi feito um exame da variação do número de soluções de equilíbrio e da forma de estabilidade destas soluções em função da variação de dois parâmetros reais livres de uma particular EDO polinomial de grau 3. Este processo leva diretamente à análise dos pontos de bifurcação para tal equação (mapa de bifurcações). Pretende-se tirar conclusões mais gerais sobre o estudo qualitativo para EDO's polinomiais de grau 3 e avançar conjecturas sobre o comportamento deste tipo de equação com grau maior que 3.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Estabilidade; Pontos de Equilíbrio; Bifurcação

ABSTRACT

This work has by goal the qualitative study of a family of Ordinary Differential Equations (ODE's) with two reals parameter free. More specifically, went performed a study of stability of a polynomial family of 3rd degree in function of two real parameters free. For this, an examination was made of the variation of the number of equilibrium solutions and the form of stability of these solutions as a function of the variation of two reals parameters free. This process leads directly of analyze of bifurcation points for such equations (bifurcation diagram). It seeks conclusions more general under the qualitative study for polynomials ODE's of 3rd degree and launch conjectures under the behaviour this type of equation with degree bigger of 3.

Keywords: Dynamical Systems, Stability, Equilibrium Points, Bifurcation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Gráfico das soluções da equação $x' = ax$ quando $a > 0$	36
Figura 3.2 – Gráfico das soluções da equação $x' = ax$ quando $a < 0$	37
Figura 3.3 – Diagrama de bifurcação para $x' = ax$	39
Figura 3.4 – Gráfico de pontos de equilíbrio semi-estável ou de sela	41
Figura 3.5 – A inclinação do gráfico de $y(t)$ no ponto (t_1, y_1) é $f(t_1, y_1)$	42
Figura 3.6 – “Campo” de inclinações tangentes à solução $y(t)$	42
Figura 3.7 – Um esboço do campo de direções da equação $dy/dt = y - t$	43
Figura 3.8 – Gráficos de algumas soluções da equação $dy/dt = y - t$	44
Figura 3.9 – Campo de direções da equação $dy/dt = 2x$; note que os segmentos do campo são paralelos ao longo de cada vertical (gráfico construído com o Winplot).....	45
Figura 3.10 – Esboço de algumas das soluções do caso mostrado na figura anterior; note que as curvas são paralelas na direção do eixo vertical (gráfico construído com o Winplot).....	45
Figura 3.11 – Campo de direções da equação (3.6), com o esboço de algumas soluções. Note que ao longo de cada linha horizontal, os segmentos do campo são paralelos	47
Figura 3.12 – Linha de fase da EDO $y' = y(1-y)$	48
Figura 3.13 – Linhas de fase, gráfico de soluções e campo de direções da EDO $y' = y(1-y)$	49
Figura 3.14 – Gráfico da EDO $y' = y(1-y)$	49
Figura 3.15 – Reta de fase da EDO $y' = (1+y)^2$	51
Figura 3.16 – Campo de direções e gráfico de soluções da EDO $y' = (y+1)^2$	52
Figura 3.17 – Gráficos de $f_\mu(x)$ para $\mu = -4, -2, 0, 2$ e 4	56
Figura 3.18 – À esquerda, gráficos de $f_\mu(x)$ para $\mu = 1$, para um valor menor que 1 e também para um valor maior que 1, ambos bem próximos de 1. À direita, as respectivas retas de fase.....	57
Figura 3.19 – Diagramas de bifurcação para a família $f_\mu(x) = y^2 - 2y + \mu$	58
Figura 3.20 – Curva de nível da EDO $y^2 - 2y + \mu$ respectiva reta de fase	59
Figura 3.21 – Gráfico de $f_{\mu_0}(y)$ “perto” do ponto atrator y_0 e respectiva reta de fase	60
Figura 3.22 – Gráficos de $f_{\mu_0}(x)$ e $f_{\mu_1}(x)$	60
Figura 4.1 – Gráfico de x' por x dado $x' = x - x^3$	63
Figura 4.2 – Campo de direção da equação (4.4).....	65
Figura 4.3 – Reta de fase da equação (4.4).....	66
Figura 4.4 – Gráfico de x' por x dado $x' = x - x^3 + 0,2$ (construído no Geogebra).....	67
Figura 4.5 – Campo de direções da equação (4.2) para $b = -0,2$	69

Figura 4.6 – Reta de fase da equação (4.2) para $b = -0,2$	69
Figura 4.7 – Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3 + h$	70
Figura 4.8 – Campo de direções para equação (4.2) para $b = -h$	71
Figura 4.9 – Reta de fase da equação (4.2) para $b = -h$	71
Figura 4.10 – Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3 + 1$ (construído no Geogebra).....	72
Figura 4.11 – Campo de direções para equação (4.2) para $b = -1$	72
Figura 4.12 – Os gráficos da derivada de x versus x nos casos $0 < b < h$ (linha pontilhada vermelha), $b = h$ (linha contínua azul) e $b > h$ (linha pontilhada preta).....	73
Figura 4.13 – Campo de direções de $x' = f_{(1,b)}(x) = x - x^3 - b$ para $b = 0,3$	74
Figura 4.14 – Campo de direções de $x' = f_{(1,b)}(x) = x - x^3 - b$ para $b = h$	74
Figura 4.15 – Campo de direções de $x' = f_{(1,b)}(x) = x - x^3 - b$ para $b = 2$	75
Figura 4.16 – Linha de fase para equação (4.2) para $b = 0,3$	75
Figura 4.17 – Linha de fase para equação (4.2) quando $b = h$	75
Figura 4.18 – Linha de fase para equação (4.2) onde $b = 2$	75
Figura 4.19 – Diagrama de bifurcação para $a = 1$	76
Figura 4.20 – Gráfico de x' por x dado por $x' = -x^3$	78
Figura 4.21 – Campo de direções para $x' = -x^3$ (construído no Winplot).....	79
Figura 4.22 – Linha de fase da equação (4.10).....	79
Figura 4.23 – Gráfico de x' por x dado por $x' = -x^3 + 1$	80
Figura 4.24 – Reta de fase para $x' = -x^3 + 1$	80
Figura 4.25 – Campo de direções da equação (4.11) (construído no Winplot).....	81
Figura 4.26 – Gráfico de x' por x onde $x' = -x^3 - 1$ (construído no Geogebra).....	81
Figura 4.27 – Campo de direções da equação (4.12) (construído no Winplot).....	82
Figura 4.28 – Reta de fase para $x' = -x^3 - 1$	82
Figura 4.29 – Diagrama de bifurcação para $a = 0$	83
Figura 4.30 – Gráfico de x' por x onde $x' = -x - x^3$	84
Figura 4.31 – Campo de direções para $x' = -x - x^3$ (construído no Winplot).....	85
Figura 4.32 –Linha de fase da equação (4.14).....	85
Figura 4.33 – Gráfico de x' por x dado por: $x' = -x - x^3 + 1$ (construído no Geogebra).....	86
Figura 4.34 – Campo de direções para $x' = -x - x^3 + 1$ (construído no Winplot).....	86
Figura 4.35 – Reta de fase quando $x' = -x - x^3 + 1$	86
Figura 4.36 – Gráfico de x' por x para: $x' = -x - x^3 - 1$ (construído no Geogebra).....	87

Figura 4.37 – Campo de direções para $x' = -x - x^3 - 1$ (construído no Winplot).....	87
Figura 4.38 – Reta de fase da equação (4.16)	87
Figura 4.39 – Diagrama de bifurcação quando $a = -1$	88
Figura 4.40 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 2x - x^3$ (construído no Winplot)	89
Figura 4.41 - Campo de direções para $x' = 2x - x^3$ (construído no Winplot)	90
Figura 4.42 – Reta de fase para $x' = 2x - x^3$	90
Figura 4.43 – Gráfico de x' por x para $x' = 2x - x^3 - 0,2$ (construído no Winplot)	91
Figura 4.44 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 3x - x^3$	92
Figura 4.45 – Campo de direções para $x' = 3x - x^3$ (construído no Winplot)	93
Figura 4.46 – Reta de fase para $x' = 3x - x^3$	94
Figura 4.47 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 3x - x^3 - 0,2$ (construído no Geogebra).....	94
Figura 4.48 – Diagramas de fase $x' = a.x - x^3 - b$ para os seguintes valores de a : 0,5 (curva verde), 2 (curva vermelha), 3 (curva azul) e 5 (curva preta)	95
Figura 4.49 – Diagrama no plano b versus a	97

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	19
2. Preliminares	21
2.1. Definições gerais.....	21
2.2. Um breve histórico	24
2.3. Alguns métodos quantitativos e sua insuficiência.....	27
3. Estudo sobre propriedades qualitativas das EDO's	35
3.1. Alguns preliminares.....	35
3.2. Campos de direções	41
3.3. A reta de fase.....	47
3.4. Sobre pontos de equilíbrio e sua classificação.....	52
3.5. Parâmetros livres e bifurcações	53
4. Estudo do comportamento dinâmico de uma família polinomial a dois parâmetros.....	63
5. Conclusões	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

Introdução

O estudo dos sistemas dinâmicos constitui campo de pesquisa dos mais ativos por parte dos matemáticos no mundo inteiro. Modelos baseados nos sistemas dinâmicos são usados na Física, Química, Economia, Meteorologia, Biologia, entre outras áreas das ciências exatas. Os sistemas dinâmicos, que geralmente aparecem como modelos matemáticos constituídos por um conjunto de EDO's, estão relacionados com processos que evoluem com o tempo. Até meados do século XIX, o estudo das EDO's era realizado utilizando métodos puramente analíticos, que envolvia a procura de soluções explícitas através de integração. A teoria qualitativa das EDO's surge a partir da segunda metade do século XIX, sendo que um dos principais matemáticos a introduzir tal abordagem foi o francês Henri Poincaré, que estabeleceu muitos dos aspectos que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem que seja necessário resolver explicitamente a equação diferencial. Tal abordagem pode ser encontrada na sua obra-prima *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, publicada em três volumes entre 1892 e 1899. Entre as ferramentas matemáticas que foram introduzidas no estudo das soluções das EDO's, a partir dos trabalhos de Poincaré, estão a geometria diferencial e a topologia. Muitos matemáticos consideram que o primeiro livro publicado na área é a obra *Dynamical Systems*, escrita pelo matemático estado-unidense George Birkhoff, e publicada em 1927. Uma das consequências dos estudos realizados por Poincaré foi a introdução do conceito de bifurcação. A teoria das bifurcações estuda as mudanças na estrutura qualitativa ou topológica do conjunto solução de uma família de EDO's com parâmetros livres. Em resumo, uma bifurcação ocorre quando uma pequena mudança nos parâmetros de um sistema causa uma significativa mudança qualitativa no comportamento das soluções. Isto pode ser visado na Teoria do Controle! É algo desejável controlabilidade tem teoremas "robustos" para tanto. Tais parâmetros são denominados de parâmetros de bifurcação ou de controle. Bifurcações podem ocorrer tanto no caso de sistemas contínuos (EDO's) como discretos (Equações de Diferença relacionadas ou não com processos recursivos). O nome bifurcação foi dado por Poincaré em sua publicação "*L'Équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*". *Acta*

Mathematica, vol.7, págs. 259-380, em setembro de 1885. No presente trabalho, é feito um estudo qualitativo de uma família a dois parâmetros de uma EDO, sendo que a proposta apresentada é a de realizar tal estudo dispensando-se o tratamento topológico, utilizando-se apenas os conteúdos de um curso de dois semestres de Cálculo Diferencial e Integral.

O presente trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentado definições gerais sobre EDO's e um pouco da história do desenvolvimento da referida área de conhecimento, apresenta-se também métodos quantitativos para resolução de EDO's e explica-se a insuficiência dos de tais métodos. No capítulo 3 inicia-se com o estudo de uma família polinomial de EDO que é solucionada usando a teoria qualitativa, ainda no capítulo são apresentados gráficos, retas de fase, campos de direções, diagramas de bifurcação e curva de nível de EDO's com o propósito de deixar o referido campo de pesquisa mais claro, também apresenta-se definições como pontos de equilíbrio, mini tangente No capítulo 4 é estudado qualitativamente uma família de EDO com dois parâmetros livres, nesse estudo nós mostramos a partir da variação dos parâmetros quais tipos de pontos de equilíbrio são encontrados. São apresentados diversos gráficos, retas de fase, campos de direções no intuito de tornar a pesquisa mais clara, ainda nesta parte do trabalho nos fazemos o estudo qualitativo para outros valores de a sendo $a > 0$, por fim é apresentado o plano $a \times b$ em que é explicado quais tipos de pontos de equilíbrios são encontrados quando variamos a e b Por fim no capítulo 4 nós apresentamos as conclusões do respectivo estudo feito neste TCC.

Capítulo 2: Preliminares

Neste capítulo trata-se de definir e classificar uma EDO (Equação Diferencial Ordinária), vai ser apresentado também aplicações de EDO's em outras áreas do conhecimento, e será exposto um panorama histórico dos métodos quantitativos para solucioná-las e explicaremos o que são EDO's com parâmetros livres e autônomas. As referências usadas neste capítulo são: Bassanezi (s/a), Boyce & DiPrima (s/a), Devaney, Hirsch e Smale (2004).

2.1: Definição Gerais

Uma equação diferencial é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função real ou complexa desconhecida, a “incógnita” da equação. Tanto a função incógnita como suas derivadas dependem de um conjunto de variáveis, ditas variáveis independentes. Ainda, a função incógnita é chamada de variável dependente. Quando esta equação envolve apenas uma única variável independente, ela é chamada Equação Diferencial Ordinária (EDO). A ordem de uma EDO é a ordem da maior derivada da função incógnita na equação. Neste trabalho, interessa-se especialmente por EDO's que sejam de primeira ordem, ou seja, equações que envolvem apenas derivadas de primeira ordem. A forma geral das EDO's de primeira ordem com a qual trabalha-se é a que segue:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (2.1)$$

Nesta igualdade, x está em função de t . Assim a variável x é a variável dependente, enquanto t é a variável independente. Por sua vez, $x'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$ é a primeira derivada de x em relação a t . Ainda, é feita a exigência mínima de que f seja uma função contínua.

Uma observação importante: A forma em (2.1) não representa a maneira mais geral para se representar uma EDO de primeira ordem. As equações de primeira ordem que podem ser representadas por esta forma são ditas equações explícitas, que são aquelas nas quais conseguiu-se isolar o termo $x'(t)$ em função de $x(t)$ e t . Isto nem sempre é possível, de maneira que a forma mais geral das equações de 1ª ordem é dada pela expressão

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Deve-se deixar claro que, ao longo deste trabalho, nos interessará trabalhar apenas com EDO's explícitas da forma (2.1), de modo que daqui para a frente, sempre que apresenta-se uma EDO geral de primeira ordem, estar-se apresentando a uma equação deste tipo. ■

Uma EDO (explícita) de ordem n tem a forma:

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (2.2)$$

onde F é uma função real ou complexa contínua, $t \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} a variável independente e $x(t)$ a variável dependente.

Uma solução de uma EDO do tipo (2.1), caso exista em um intervalo I não degenerado da reta é uma função $\varphi(t)$ definida em I , que é derivável e portanto contínua em I e tal que $\varphi(t)$ que satisfaz a relação

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

para todo t em I .

Embora não seja o interesse principal deste trabalho, recorda-se aqui o problema da existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (PVI ou problema de Cauchy):

Resolver a EDO:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2.3)$$

Sujeita à condição inicial: (PVI)

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.4)$$

sendo x_0 dado (em geral, mas não obrigatoriamente, consideramos $t_0 = 0$).

Temos então o (ver Zill, 2003, pág. 17):

Teorema (Existência e Unicidade) – Considere o problema de valor inicial dado por (2.3) – (2.4) acima. Se $f(t, x(t))$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas no retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: \alpha < t < \beta, \delta < x < \gamma\}$$

e se $(t_0, x_0) \in R$, então existe uma única solução para o problema (2.3)-(2.4), que está definida em um intervalo do tipo $]t_0 - h; t_0 + h[\subset]\alpha; \beta[$. ■

Um tipo importante de EDO com a qual vai ser trabalhado são as lineares. Uma EDO linear de 1ª ordem é aquela que pode ser colocada na forma:

$$x'(t) + P(t).x(t) = Q(t) \quad (2.5)$$

A EDO acima aparece frequentemente na modelagem de problemas físicos, por exemplo.

Generaliza-se: uma EDO linear de ordem n é dada por uma equação do tipo

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x(t) = g(t) \quad (2.6)$$

Por exemplo, a EDO

$$t \frac{dx}{dt} + 2x = \text{sen } t$$

é uma EDO linear de 1ª ordem, pois pode ser escrita da forma (2.5). Já a EDO

$$t \frac{dx}{dt} + x^2 = e^t$$

não é linear

Uma definição importante: quando temos uma EDO em que a variável independente t não aparece explicitamente, temos uma EDO autônoma (também denominada invariante no tempo). Assim, uma EDO autônoma de 1ª ordem tem a forma geral

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (2.7)$$

Esta é a forma de equação que será prioritária no que vai ser desenvolvido nos capítulos posteriores. Uma EDO linear e autônoma é uma equação da forma (2.6) na qual as funções coeficientes $a_i(t)$ e $g(t)$ são constantes (EDO linear com coeficientes constantes) e constituem uma das

classes mais importantes nas aplicações. Outro tipo de EDO de primeira ordem autônoma é uma EDO de primeira ordem polinomial de grau n , da forma:

$$x'(t) = x^n(t) + a_{n-1}x^{n-1}(t) + \dots + a_1x(t) + b \quad (2.8)$$

onde os coeficientes a_{n-1}, \dots, a_1 e b são constantes. No capítulo 4 trabalha-se com uma equação particular deste tipo.

2.2: Um Breve Histórico

Pode-se dizer que o Cálculo e as Equações Diferenciais Ordinárias nasceram juntos¹ e que os dois teoremas principais do Cálculo estão fortemente relacionados à solução da EDO mais simples possível, a saber

$$x'(t) = f(t)$$

Traduzindo: obter a função (incógnita) $x(t)$ que tem por derivada uma função conhecida $f(t)$. Este é um problema comum em exercícios de Cálculo Diferencial e Integral, nele se quer encontrar uma primitiva para esta última função.

Antes de prosseguir, vale a pena fazer algumas considerações históricas. Existe um consenso entre matemáticos quando se diz que a grande motivação para o estudo das EDO's veio da Mecânica. Vários problemas, como o movimento dos planetas e o estudo das oscilações de um pêndulo, e também o problema da catenária¹, já haviam sido estudados por J Kepler (1571 a 1630), Galileu Galilei (1564 a 1642) e C Huygens (1629 a 1695). A questão é que faltava a eles uma teoria matemática rigorosa, que lhes permitissem modelar corretamente o problema.

Esta teoria foi estabelecida no final do século XVII por Isaac Newton e G. Leibniz. Estes propuseram as bases daquele que seria o Cálculo, de acordo com as concepções que temos hoje em dia. Conforme foi apresentado no início dessa seção, as Equações Diferenciais vieram junto com o Cálculo e eram as ferramentas matemáticas para se resolver os problemas colocados no parágrafo anterior. No entanto, não pode-se ignorar as contribuições dadas pelo

¹ Que é a curva que se obtém quando temos uma corda de densidade linear homogênea ou corrente pendente presa pelas extremidades, e foi proposto inicialmente por Leonardo da Vinci (1452 -1519).

matemático Pierre de Fermat (1601 a 1665). Seu nome não é tão associado ao processo da criação do Cálculo por vários fatores infelizes, entre eles o fato de que seus trabalhos sobre a área somente foram publicados por cerca de 1685, 20 anos após sua morte. Mas de acordo com (SIMMONS, 1987, pág. 70):

“... Se o cálculo diferencial for considerado como a matemática de determinar máximos e mínimos de funções e desenhar tangentes a curvas, então foi Fermat o criador desta área já no ano de 1629, mais de uma década antes que Newton ou Leibniz tivessem nascido...”

O próprio Newton reconheceu a forte influência que os trabalhos de Fermat tiveram em seus estudos sobre o desenvolvimento da teoria do Cálculo. Não podemos deixar de citar ainda os trabalhos do matemático escocês James Gregory (1638 a 1675) e do inglês Isaac Barrow (1630 a 1677), aos quais são creditadas as primeiras versões do Teorema Fundamental do Cálculo. Note que Barrow foi professor de Newton, que foi muito influenciado por seu mestre.

De todas as formas, a partir dessa época, e até meados do século XIX, a preocupação preponderante entre os matemáticos que se ocupavam deste ramo era a obtenção das soluções em forma explícita. Inicialmente, procurava-se expressar essas soluções através de funções elementares, principalmente através do cálculo das primitivas de uma função (problema da quadratura). Lembre-se que uma função $F(x)$ é a primitiva de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I . A questão é que logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito reduzido. Esse fato motivou a busca de novos métodos e, a partir do século XIX, foram introduzidas as séries de funções para a obtenção das soluções de certas EDO's. Porém, o rigor que a Análise matemática adquiria com o passar do século levou os matemáticos a duvidar de certos métodos usados nas operações com séries. Os importantes teoremas de existência e unicidade das soluções de uma EDO são dessa fase. A importância destes teoremas reside no fato de que, sabendo-se a priori da existência da solução, sua busca através de processos “não muito formais” se tornava justificável, uma vez que a suposta solução assim obtida poderia ser testada posteriormente. O

problema é que este método se tornou ultrapassado, e ele entrava gradualmente em conflito com uma Matemática cada vez mais formal, principalmente a partir da segunda metade do século XIX, com os trabalhos de Cauchy, Cantor e Weierstrass, por exemplo.

É então que uma nova geração de matemáticos entra em cena. De maior destaque no que se refere a esta questão, citamos Henri Poincaré (1854 a 1912). Pode-se dizer que Poincaré é o “pai” da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Esta abordagem trabalha mais o estudo do comportamento local e global das (curvas) soluções de uma EDO ou de um sistema de EDO's ao invés de procurar soluções analíticas explícitas para as mesmas. A teoria assim desenvolvida é principalmente focada na questão dos pontos de equilíbrio dessas soluções, a classificação desses pontos (estável ou instável) e comportamento futuro das soluções (se pensarmos que a variável independente é o tempo). Esses conceitos serão definidos e explicados no capítulo seguinte. Para estabelecer tal teoria, Poincaré usou das ferramentas da Análise desenvolvidas ao longo do século XIX, juntamente com as ferramentas da Geometria Diferencial e da Topologia estabelecidas a partir da segunda metade do mesmo século. Aliás, o próprio Poincaré foi um dos grandes desenvolvedores da Topologia no final do século XIX, provavelmente motivado pelo seu estudo sobre as equações diferenciais. Praticamente da mesma época de Poincaré são os trabalhos de A. L. Lyapunov (1857 a 1918). Este trabalhou, a partir do final do século XIX e início do século XX, com a questão da estabilidade das soluções, obtendo, entre outros resultados, um critério que leva seu nome. Outro matemático importante da nova área de estudos, já então conhecida por Sistemas Dinâmicos, foi o estado-unidense George Birkhoff (1884 a 1944). Matemático ativo em diversas áreas, Birkhoff, entre outros resultados, demonstrou em 1913 o denominado “Último Teorema Geométrico” ou o “Teorema do Ponto Fixo de Poincaré”, proposto por este último no final do século XIX. Este feito tornou Birkhoff conhecido mundialmente (não iremos enunciar o problema neste texto por envolver definições complexas, cuja explicação seria longa e completamente desnecessário ao objetivo deste trabalho). O fato é que se deve a Birkhoff a publicação de um dos primeiros livros que aborda sobre a teoria qualitativa das EDO's: *Dynamic Systems*, publicado em 1927.

Deve ser enfatizado que a teoria qualitativa não eliminou o interesse e importância de se ter informações quantitativas sobre as soluções de EDO's. Estas informações podem não ser obtidas através de uma solução explícita, mas podem ser obtidas pelo uso de certos métodos aproximativos. Estes métodos constituem ramo de grande interesse até os dias de hoje e é importante componente de uma das áreas da Matemática que mais se desenvolvem atualmente, a Análise Numérica. O que se procura nesse contexto são funções próximas em muitos sentidos da solução real do problema. Como exemplo, às aplicações na Física e nas Engenharias, nesse caso usando a Análise Numérica busca-se encontrar aproximações que podem ser tão boas quanto a solução propriamente dita, desde que o problema tenha "caráter estável" no que se refere a pequenas perturbações de dados.

2.3: Alguns Métodos Quantitativos e Sua Insuficiência

Em relação as EDO's de primeira ordem, dois dos métodos de resolução mais utilizados são o método da separação de variáveis (também chamado de Método de Fourier) e o método do fator integrante. Vários dos outros métodos analíticos usam da tentativa de reduzir a EDO em questão a uma forma que permita o uso de um dos dois procedimentos acima. Este é o caso para as equações homogêneas (ver Boyce & DiPrima, 2006, pág. 75), onde se tenta transformar uma equação de variáveis não separáveis em uma de variáveis separáveis através de uma mudança de variáveis. Uma variante deste método consiste em fazer uma troca de variáveis, mesmo no caso em que a equação não é homogênea. Esta mudança tem o objetivo de reescrever uma equação "complicada" de modo a se obter uma equação "mais simples" de ser solucionada, que seja de variáveis separáveis ou linear. Um importante exemplo desse caso é uma equação do tipo Bernoulli.

Uma EDO de 1º ordem separável tem a forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)dx = g(t)dt.$$

O objetivo aqui é integrar ambos os lados da equação para obter a solução da equação. Um dos problemas fundamentais aqui é o fato de que nem sempre a integração é fácil ou mesmo possível de ser realizada; além disso, mesmo quando a integração é realizada, nem sempre se pode obter uma expressão explícita da solução (ou seja, nem sempre é possível

escrever a variável dependente como função da variável independente de forma explícita), o que dificulta a interpretação do comportamento global do resultado e especialmente a descrição da solução ao longo do tempo.

Na sequência coloca-se alguns exemplos que serão mencionados ao longo do texto. Como primeiro exemplo, vamos nos referir a uma das mais simples e também mais importantes equações de primeira ordem. Neste exemplo será usado o método de separação de variáveis. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (2.9)$$

onde a é uma constante arbitrária, a qual chamamos parâmetro (livre) da equação.

Se for considerado que $x \neq 0$, ou seja, descarta-se pelo momento a solução $x(t) \equiv 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} = a dt &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a dt \\ &\Rightarrow \ln|x| = at + c \end{aligned}$$

(aqui a constante c do lado direito corresponde à soma das constantes de integração de ambos os lados). Dá última expressão vem que

$$e^{\ln|x|} = e^{at+c} \Rightarrow$$

$$|x| = e^{at} \cdot e^c \Rightarrow x(t) = \pm k_1 \cdot e^{at}, \text{ em que } k_1 = e^c$$

Note que $k_1 > 0$; assim, a expressão acima fornece todas as soluções não nulas da equação. Ainda, k_1 foi obtida considerando-se a hipótese de que x não é a função identicamente nula. No entanto, é fácil constatar por verificação direta que $x(t) \equiv 0$ é uma solução de (2.9) não considerada na resolução feita acima. Conclui-se que a forma geral das soluções de (2.9) é dada por:

$$x = ke^{at}, k \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Uma interpretação para a constante k acima é a seguinte: seja $x_0 = x(0)$, é fácil ver que $x_0 = k \cdot e^{a \cdot 0} = k$, de modo que pode-se reescrever (2.10) da forma

$$x = x_0 \cdot e^{at}, x_0 \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Esta forma de escrever a solução enfatiza a relação entre a solução e a condição inicial $x(0) = x_0$.

A partir de (2.11), é feita uma análise do comportamento das soluções de (2.9) a partir do sinal de a .

1. Se $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{at}$ é igual a $+\infty$ quando $x_0 > 0$, e igual a $-\infty$, quando $x_0 < 0$. Note ainda que se $x_0 = 0$, se obtém a solução identicamente nula, sendo que esta é a única solução que não tende a infinito;
2. Se $a = 0$, $x_0 e^{at} = x_0 = \text{constante}$; (neste caso todas as soluções são constantes iguais a seu valor inicial)
3. Se $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{at} = 0$, para todo x_0 , como é muito fácil de ser verificado.

A solução $x(t) \equiv 0$ é de equilíbrio, no sentido de que é uma solução constante (permanece “no mesmo lugar” durante todo o tempo), já que para todos os valores de t a derivada é igual a zero. Esta também é a única solução com esta característica no caso 1 e 3. No caso 2, todas as soluções são de equilíbrio. Soluções de equilíbrio terão uma importância fundamental neste trabalho e serão comentadas com maior profundidade no capítulo seguinte.

A equação (2.9) aparece como modelo de vários processos relacionados a diversas áreas do conhecimento, como matemática financeira, desintegração radioativa e crescimento populacional. Vamos nos ater a este último caso. Neste contexto, $x(t)$ representa o número de indivíduos presentes em uma certa população no instante t e o parâmetro a representa a taxa instantânea de crescimento da população, que nesse modelo é constante, ou seja, não varia com o tempo e nem com o tamanho da população. Este é, em essência, o modelo de Malthus para o aumento populacional. Se, por exemplo, atribuirmos o valor 0,01 para a na equação em questão, a interpretação é a de que a taxa instantânea de crescimento da população é constante e igual a 1%. Pode se questionar se este é um bom modelo, tendo em vista que, pela análise feita acima, o número de indivíduos na população tende a crescer indefinidamente, o

que em prazo mais longo não parece corresponder ao comportamento de nenhuma espécie conhecida. Mas o modelo pode descrever muito bem o comportamento de certas populações em intervalos de tempo “não muito grandes”.

Em relação ao modelo acima, seria razoável supor que a taxa de crescimento populacional varie no tempo (e então o modelo não seria representado por uma equação autônoma) ou de acordo com o tamanho da população. Um caso interessante em que a taxa de crescimento varia com o tamanho da população é dada pela equação:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2.12)$$

em que $x(t)$ fornece o número de indivíduos presentes na população no instante t , $K > 0$ é uma constante chamada de capacidade de saturação e a é a constante de proporcionalidade (porcentagem). A constante K corresponde ao tamanho máximo da população que pode ser comportada pelo meio ambiente no qual a espécie em questão está inserida. Note que a taxa de crescimento populacional não é apenas proporcional ao número de indivíduos presentes na população, mas também à diferença $(1 - x/K)$. Temos que dx/dt é igual a 0 para $x(t) = 0$ e $x(t) = K$. Assim, se $x = K$ em algum momento a população cessa de aumentar ou diminuir, e mantém o mesmo número de indivíduos (uma interpretação simples: o número de indivíduos que morre é igual ao dos que nascem). É interessante notar que se $x(t) \approx 0$ e $Im_x \subset \mathbb{N}$, então $(1 - x/K) \approx 1$ e, portanto, $\frac{dx}{dt} \approx a \cdot x(t)$. É ilustrativo solucionar a equação (1.11) por separação de variáveis, lembre-se que em (1.11) $K \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \int a dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - K}\right) dx = at + C \Rightarrow$$

$$\ln(|x|) - \ln(|x - K|) = at + C \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{x}{x - K}\right|\right) = at + C \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x}{x - K}\right| = e^C \cdot e^{at} \Rightarrow \frac{x}{x - K} = (\pm e^C) \cdot e^{at} = A \cdot e^{at} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-at}} \quad (2.13)$$

sendo que $A = \pm e^C \neq 0$. A solução acima foi desenvolvida desconsiderando as soluções constantes $x = 0$ e $x = K$. De todas as formas, é fácil ver que $x(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$ se $a > 0$ e $x(0) = x_0 > 0$ (e este é o caso que nos interessa aqui).

Vamos falar um pouco agora do método do fator integrante. Em essência, um fator integrante é uma função utilizada para facilitar a integração da equação. Geralmente se multiplica ambos os lados da equação em questão por este fator, de modo a se obter uma forma equivalente diretamente integrável, sem que este processo acrescente novas soluções à equação original e idealmente, sem omitir alguma solução da mesma. Este método é particularmente interessante quando temos uma EDO linear de primeira ordem da forma geral

$$x'(t) + P(t) \cdot x(t) = Q(t) \quad (2.14)$$

Neste caso, definimos o fator integrante por

$$M(t) = e^{\int P(t) dt} \quad (2.15)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.14) por (1.15) obtem-se

$$e^{\int P(t) dt} \cdot [x'(t) + P(t) \cdot x(t)] = e^{\int P(t) dt} \cdot Q(t) \quad (2.16)$$

Consideremos a função $H(t) = e^{\int P(t) dt} \cdot x(t)$; temos que

$$H'(t) = \frac{d}{dt} (e^{\int P(t) dt}) \cdot x(t) + e^{\int P(t) dt} \cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$H'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int P(t) dt \right) \cdot e^{\int P(t) dt} \cdot x(t) + e^{\int P(t) dt} \cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$H'(t) = P(t) \cdot e^{\int P(t) dt} \cdot x(t) + e^{\int P(t) dt} \cdot x'(t) = e^{\int P(t) dt} \cdot [x'(t) + P(t) \cdot x(t)] \quad (2.17)$$

Por (2.16) e (2.17), e pela definição de $H(t)$ vem que

$$\frac{d}{dt} (e^{\int P(t) dt} \cdot x(t)) = e^{\int P(t) dt} \cdot Q(t) \Rightarrow e^{\int P(t) dt} \cdot x(t) = \int e^{\int P(t) dt} \cdot Q(t) dt + C$$

onde C é a constante de integração. Como $e^{\int P(t) dt} \neq 0$ tem-se que a solução de (2.14) é dada por

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt} \cdot \left[\int e^{\int P(t)dt} \cdot Q(t)dt + C \right] \quad (2.18)$$

Ela é também chamada de solução geral, porque qualquer solução de (2.14) é encontrada a partir de (2.18).

Vamos a um exemplo. Consideremos uma variante da equação (2.9), dada por

$$x'(t) = a \cdot x(t) - b \quad (2.19)$$

Tal equação é evidentemente linear, com constantes positivas a e b . Uma interpretação usual da equação acima em biologia é a seguinte: como antes, $x(t)$ é o número de indivíduos presentes no instante t em uma certa população, a é a taxa de crescimento instantânea e b é uma taxa fixa de “colheita”; para fixar ideias, vamos supor que se trata de uma população de peixes em um ambiente delimitado e que b seja a taxa (porcentagem) de pesca. Usando (2.18) na equação (2.19) obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int a dt} \cdot \left[\int e^{-\int a dt} \cdot (-b)dt + C \right] \Rightarrow \\ x(t) &= e^{at} \cdot \left[-b \cdot \int e^{-at} dt + C \right] \Rightarrow \\ x(t) &= e^{at} \cdot \left[-b \cdot \frac{e^{-at}}{(-a)} + C \right] \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{at} + \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Qual a relação entre a constante C e a população inicial $x_0 = x(0)$? Fazendo $t = 0$ na última equação, obtemos

$$C = x_0 - \frac{b}{a}$$

e isto nos permite reescrever (2.20) da forma

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a} \right) e^{at} + \frac{b}{a} \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) acima mostra uma interessante dependência entre o comportamento futuro da solução ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$) e a relação entre x_0 , a e b . De fato: se $\frac{b}{a} < x_0$, a população tende a crescer de forma ilimitada com o passar do tempo, de modo que a atividade pesqueira não irá ser prejudicial para a

manutenção da espécie em questão (na verdade, a conclusão a que somos levados nos conduz ao pensamento que o modelo matemático que melhor descreve a situação é o logístico², considerando também uma “taxa de pesca” b : $x'(t) = a \cdot x(t) \cdot \left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - b$, sendo que K representa a capacidade máxima que pode ser suportada pelo ambiente); se $\frac{b}{a} = x_0$ a população tende a se manter estável, ou seja, o número de indivíduos na população tende a permanecer constante (e igual a $\frac{b}{a}$). Se b for muito maior que a , de modo que $\frac{b}{a} > x_0$ então a população será levada à extinção. Desta forma, pode-se observar como a relação entre dois parâmetros pode afetar de forma variada o comportamento global das soluções. Deve-se notar que, mesmo para uma equação relativamente simples, de 1ª ordem, linear e autônoma, a análise global do comportamento das soluções em dependência dos dois parâmetros a e b (supostamente livres) não é uma tarefa trivial de ser realizada. Mesmo com a expressão analítica da solução em mãos, existe certa dificuldade de se fazer este estudo. Esta dificuldade nos ajuda a entender que a restrição aos métodos quantitativos não é a melhor abordagem quando desejamos obter um “mapa global” do tipo de comportamento das curvas solução em função dos parâmetros livres que aparecem na equação. Isto será explorado no próximo capítulo de forma mais profunda.

Um outro exemplo importante, que mostra a impossibilidade de se chegar a uma conclusão sobre o comportamento das soluções (ou mesmo sobre as soluções) de uma EDO por integração é o que segue:

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-x^2} \quad (\text{onde } a \text{ é um parâmetro livre})$$

$$\Rightarrow dy = ae^{-x^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = a \int e^{-x^2} dx + C$$

Sabemos que a integral do lado direito da igualdade é impossível de ser calculada por meio de funções elementares. Ou seja: somente é possível

² Um modelo logístico é aquele em que estudamos o crescimento populacional, nele a população estudada tem um limite, uma capacidade ambiental de sustentação.

expressar a solução pelo uso de uma série de Taylor com infinitos termos. Dadas condições iniciais e valores particulares do parâmetro a , podemos obter a solução com relativa precisão através de certos métodos numéricos. Mas não é possível ter uma ideia do comportamento global das soluções em função de variações do parâmetro a . Voltaremos a discutir este caso nos capítulos subsequentes.

Capítulo 3: Estudo Sobre Propriedades Qualitativas das EDO's

Neste capítulo apresenta-se definições para o estudo qualitativo das EDO's, será explicado o que são pontos de equilíbrio e os classificaremos. E também aborda-se bifurcações e diagramas de bifurcações.

3.1: Alguns Preliminares

Vamos voltar à equação (2.9) do capítulo anterior, que por questão da melhor compreensão do leitor será renumerada como a equação (3.1) deste capítulo:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = ax \quad (3.1)$$

Conforme dissemos antes, a é uma constante arbitrária denominada parâmetro livre da equação. De acordo com a análise das soluções feita no capítulo anterior, o comportamento destas depende “fortemente” do valor de a . É nesse aspecto que boa parte de nossa contribuição com este trabalho está centrada.

Lembre-se que as soluções da equação (3.1) obtida por integração foi

$$x(t) = x_0 \cdot e^{at} \quad (3.2)$$

onde $x_0 = x(0)$. Aqui, pretende-se fazer uma análise diferente para concluir como se comportam as soluções de (3.1), análise esta que será realizada a partir de uma interpretação “geométrica” da equação (3.1).

Vamos recordar que se x é uma função de t , o número $x'(t_0)$, ou seja, a derivada de x em t_0 , nos fornece o declive do gráfico de $x(t)$ em t_0 . Consideremos primeiro o caso em que $a > 0$. Neste caso, se uma solução $x(t)$ da equação passa por um ponto (x_0, t_0) com $x_0 > 0$, a equação (3.1) nos diz que esta solução é crescente em x_0 , já que $x'(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0) = ax_0 > 0$. Mais que isso: a equação (3.1) nos diz que tal solução deve satisfazer a relação de proporcionalidade direta

$$\frac{dx/dt}{x(t)} = a > 0$$

Assim, se $x(t) > 0$ para algum t , sua derivada $x'(t)$ também será positiva e proporcional a $x(t)$, ou seja, quanto maior for $x(t)$ maior será sua taxa de variação instantânea (derivada) $\frac{dx}{dt}$ e vice-versa. Por outro lado, se $x(t) < 0$ para algum t , assim será também sua derivada e quanto menor for $x(t)$ (ou seja, quanto maior for o valor absoluto de $x(t)$, embora negativo) menor será sua derivada. Além do mais, se para algum t tivermos $x(t) = 0$, então $x'(t) = 0$, de forma a ser obtido a solução constante (de equilíbrio) $x(t) \equiv 0$. Assim, conclui-se que toda solução $x(t)$ tal que para algum t_0 se tem $x(t_0) > 0$ é tal que $x(t) \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow \infty$ e $x(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow -\infty$. Em particular, $x(t) > 0$ para todo t . Por outro lado, se para algum t_1 tem-se $x(t_1) < 0$, então $x(t) \rightarrow -\infty$ se $t \rightarrow \infty$ e $x(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow -\infty$. Ainda neste caso, $x(t) < 0$ para todo t . Conclui-se que o comportamento global das soluções da equação (3.1) no caso $a > 0$ é o que segue.

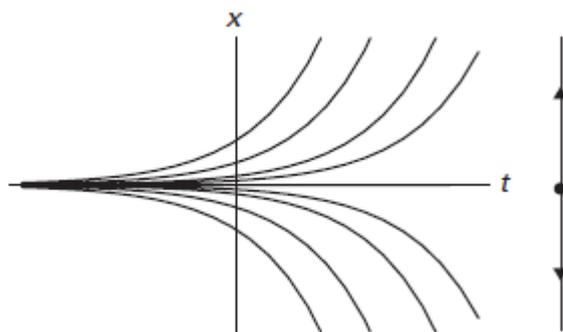


Figura 3.1 - Esboço das soluções de (1) no caso $a > 0$.

Fonte: Devaney, Hirsch e Smale (2004)

A reta vertical à direita do gráfico é denominada reta de fase mostrado na figura 3.1. Ela é uma representação que resume as informações sobre o comportamento das soluções “sob o ponto de vista” do eixo x . Nesta reta, as soluções de equilíbrio são representadas por pontos (no caso, apenas $x = 0$), enquanto que os valores de x para os quais as soluções são crescentes são representadas por flechas que apontam para cima, e os valores para os quais as soluções são decrescentes são representadas por flechas que apontam para baixo. Mais sobre retas de fase será dito adiante. A partir do padrão da reta de fase, podemos ver que qualquer solução, mesmo que comece “infinitamente próxima” do ponto de equilíbrio, tende a se afastar deste (tendendo para o

infinito positivo ou negativo). Quando isto ocorre, o ponto de equilíbrio é instável ou um repulsor. Mais especificamente: **equilíbrio instável**, porque se o estado inicial x_0 do sistema estiver bem próximo desse ponto ($x = 0$), a respectiva curva solução irá “se afastar” dessa solução de equilíbrio.

Já no caso em que $a < 0$ na equação (3.1), se tem

$$\frac{dx/dt}{x(t)} = a < 0$$

Assim, se $x(t) > 0$ para algum t , sua derivada $x'(t)$ será negativa, e se $x(t) < 0$ sua derivada será positiva. Em ambos os casos, os valores de $x'(t)$ serão proporcionais aos de $x(t)$ em valor absoluto; ou seja, quanto maior for $x(t)$ maior será o valor absoluto de sua derivada $\frac{dx}{dt}$, mas esta terá sinal oposto ao de $x(t)$ e vice-versa. Novamente a única solução de equilíbrio será $x(t) \equiv 0$. Conclui-se que toda solução $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e que se para algum t_0 tem-se $x(t_0) > 0$, é tal que $x(t) \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow -\infty$ e se para algum t_1 obtêm-se $x(t_1) < 0$, então $x(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. Conclui-se que o comportamento global das soluções da equação (3.1) no caso $a < 0$ é o que segue.

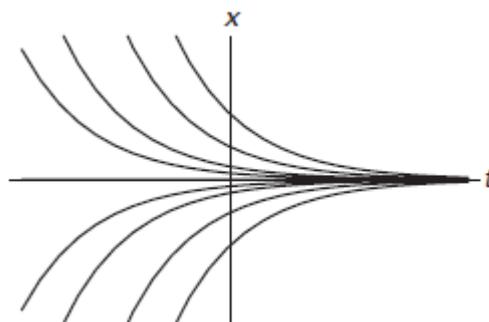


Figura 3.2 - Esboço das soluções de (1) no caso $a < 0$.

Fonte: Devaney, Hirsch e Smale (2004)

Novamente é mostrada a reta de fase à direita do gráfico mostrado na figura 3.2. Desta vez, existe uma diferença qualitativa fundamental em relação ao primeiro caso: todas as soluções convergem para o único ponto de equilíbrio ($x = 0$) quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja: ao longo do tempo, a solução de equilíbrio tende a atrair as demais soluções, motivo pelo qual esta solução (ou ponto) de

equilíbrio é denominado de ponto de equilíbrio estável ou um atrator. O nome estável se deve ao fato de que se o estado inicial x_0 da solução estiver próximo da solução de equilíbrio, esta curva tende a se aproximar da solução de equilíbrio.

No caso em que $a = 0$, todas as soluções da equação (3.1) são constantes (retas paralelas ao eixo horizontal t). Todas as soluções são de equilíbrio.

Um fato importante a ser notado é o seguinte: se o parâmetro a for positivo, qualquer variação suficientemente pequena em seu valor não irá acarretar mudanças importantes no aspecto qualitativo do comportamento das soluções (contanto que! Esta mudança de valores não implique em mudança de sinal de a): o comportamento das soluções em ambos os casos podem ser representados pelo gráfico da figura 3.1 acima, sendo que o único ponto de equilíbrio continua a ser um ponto de equilíbrio instável. O mesmo pode ser dito no caso $a < 0$ em relação ao gráfico na figura 3.2: pequenas variações de a não alteram o fato de que a solução de equilíbrio é estável. O mesmo não ocorre no caso $a = 0$: qualquer pequena variação muda de modo significativo o comportamento das soluções. De fato: se $a = 0$, todas as soluções são de equilíbrio, conforme dissemos acima. Qualquer variação positiva, por menor que seja, nos leva à condição da figura 3.1, com uma única solução de equilíbrio instável, enquanto que qualquer variação negativa nos leva à situação mostrada na figura 3.2, com uma só solução de equilíbrio estável. Neste sentido, o parâmetro $a = 0$ é um valor especial: qualquer variação, por menor que seja, em seu valor, nos leva a comportamentos drasticamente diferente do comportamento das soluções, ao contrário de todos os outros possíveis valores de a . Este parâmetro em especial será chamado de parâmetro ou valor ou ponto de bifurcação.

Resume-se as conclusões acima em um diagrama que será exibido na figura 3.3. Este diagrama consiste de um gráfico no qual o eixo horizontal representa os valores do parâmetro a e o eixo vertical os valores assumidos pela função x . O diagrama mostra quais são os pontos de equilíbrio x e sua classificação (estável, instável, etc.) para cada valor de a . Por motivos que

ficarão claros na sequência, este será denominado diagrama de bifurcação da equação.

Para explicar como deve-se interpretar o diagrama de bifurcações, primeiro considera-se uma EDO autônoma de 1ª ordem com um parâmetro livre a dada por uma relação do tipo

$$x'(t) = f(x(t), a) \quad (3.3)$$

O diagrama de bifurcações consiste de uma curva no plano a versus x como mostrado na figura 3.3. Ao traçar-se uma reta vertical passando para um valor fixo a_0 no eixo horizontal, esta reta interceptará a curva nos valores de x que correspondem aos pontos de equilíbrio da equação (3.3) para o parâmetro a_0 . Indica-se este ponto é de equilíbrio estável (respectivamente instável) colocando flechas verticais acima e abaixo do ponto correspondente na curva, de modo que ambas apontem na direção (respectivamente, na direção contrária) a este ponto. Por exemplo, para o caso da equação (3.1) temos o seguinte diagrama:

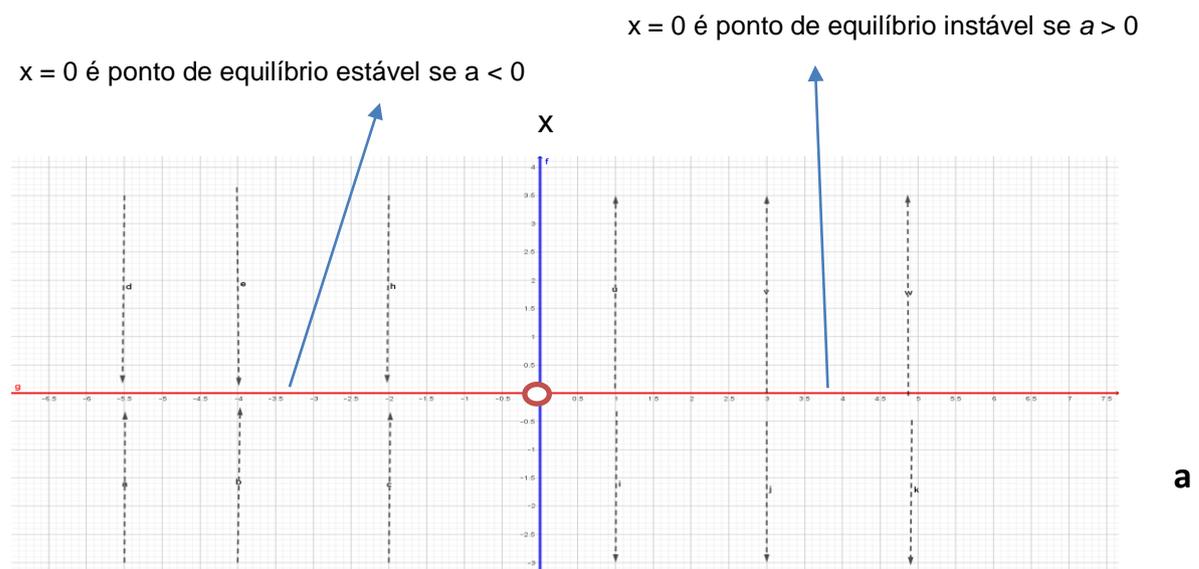


Figura 3.3 - Diagrama de bifurcação para $x' = ax$

A reta horizontal vermelha diz que $x = 0$ é ponto de equilíbrio para todo valor de a . O fato das setas verticais se afastarem desta reta para todo $a > 0$ diz que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável (repulsor) para todo valor positivo do parâmetro a . Da mesma maneira, as setas verticais se aproximando da reta

vermelha correspondente a $x = 0$ diz que este ponto é de equilíbrio estável (atrator) para todo valor de a negativo. Quando $a = 0$, a reta vertical azul diz que todos os valores de x são pontos de equilíbrios, não isolados, da equação, de forma que tais pontos não podem ser nem de equilíbrio estável, nem instável. Fica claro pelo gráfico que $a = 0$ é um parâmetro de bifurcação, o que é destacado pela bola sobre o correspondente ponto. A justificativa é o fato de que para todos os valores de a menores que 0, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é um atrator, enquanto que para valores de a maiores que 0 o mesmo ponto é de equilíbrio instável.

Algumas observações importantes: a primeira, é o fato de poder haver variação no número de pontos de equilíbrio para um parâmetro de bifurcações. Certamente se isto ocorre para um certo valor do parâmetro, este é de bifurcação. Também deve ser observado que existe outro tipo de ponto de equilíbrio, o ponto de sela, que não aparece no caso acima. Mais detalhes sobre pontos de equilíbrio e parâmetros de bifurcação serão dados nas seções seguintes.

Com este exemplo preliminar e os conceitos introduzidos através dele, esperamos que os conteúdos que serão desenvolvidos a seguir neste capítulo fiquem mais claros. Sempre que necessário, voltaremos a fazer referências a este exemplo.

Resumindo, existem três tipos de solução de equilíbrio:

- 1) Equilíbrio estável (atrator); neste caso, em torno do ponto de equilíbrio, as soluções que começam “próximas” deste ponto se comportam de forma parecida ao da figura 3.2;
- 2) Equilíbrio instável (repulsor); neste caso, em torno do ponto de equilíbrio, as soluções que começam “próximas” deste ponto se comportam de forma parecida ao da figura 3.1;
- 3) Ponto de sela: nesses casos, as soluções em uma vizinhança do ponto de equilíbrio se comportam como na figura a seguir:

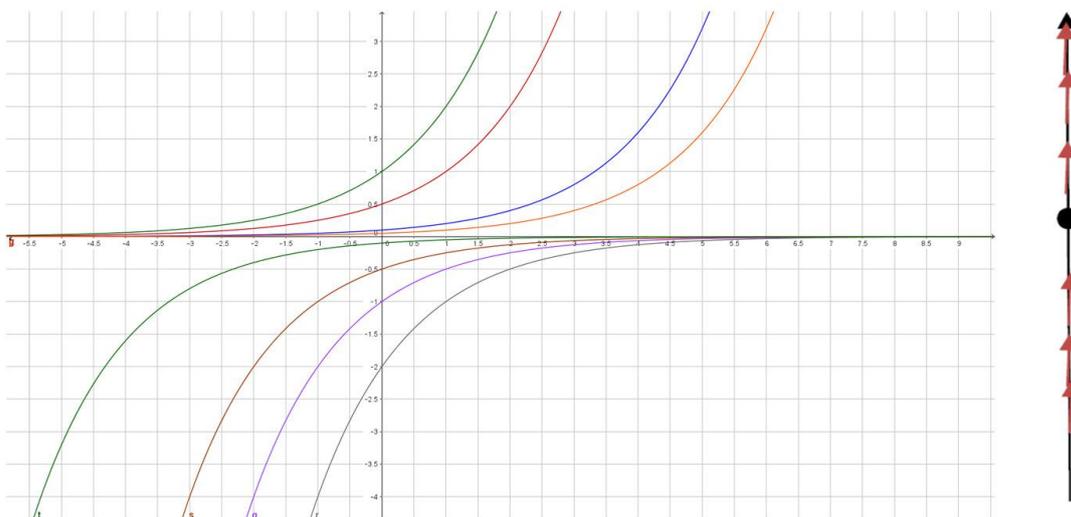


Figura 3.4 - Gráfico de pontos de equilíbrio semi-estável ou de sela.

3.2: Campos de Direções

A primeira técnica qualitativa que iremos discutir é a do campo de direções. Embora não seja o foco principal deste trabalho, será de grande auxílio em termos de interpretação dos resultados obtidos. Esta técnica ganhou grande importância nas últimas décadas graças ao fácil acesso a computadores eletrônicos e a grande disponibilidade de softwares gráficos, como o Winplot, Maple, Geogebra e Matlab.

Basicamente, o campo de direções trabalha com a geometria das soluções de uma EDO de 1ª ordem do tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3.4)$$

Se a função $y(t)$ é uma solução da equação acima e seu gráfico passa pelo ponto (t_1, y_1) , onde $y_1 = y(t_1)$, isto implica que a derivada dy/dt em $t = t_1$ é dada pelo número $f(t_1, y_1)$. A implicação geométrica deste fato é a de que a inclinação ou direção da linha tangente ao gráfico de $y(t)$ em (t_1, y_1) é $f(t_1, y_1)$. Veja a figura a seguir.

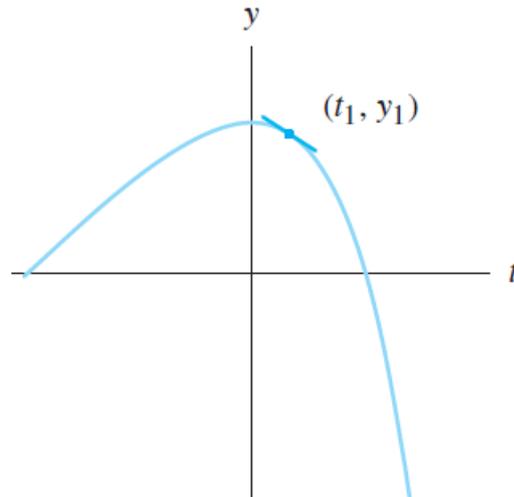


Figura 3.5 - A inclinação do gráfico de $y(t)$ no ponto (t_1, y_1) é $f(t_1, y_1)$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

A nossa conclusão é a de que a igualdade na equação (3.4) nos diz que os valores no lado direito da equação nos fornecem as inclinações das retas tangentes aos gráficos de todas as funções $y(t)$ que seja solução de (3.4), para todo t .

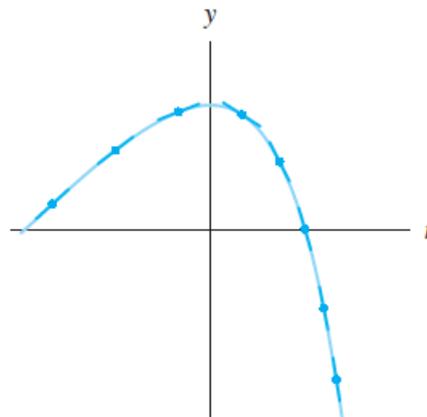


Figura 3.6 - “Campo” de inclinações tangentes à solução $y(t)$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

Em outras palavras: os valores assumidos pela função de duas variáveis $f(t, y(t))$ nos fornece uma visão razoável do comportamento das soluções da equação (3.4). Para cada ponto (t, y) no plano y versus t o valor $f(t, y)$ nos dá a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução $y(t)$ que passa por este ponto (desde que exista uma tal solução). Se for esboçado um pequeno segmento

neste ponto que corresponda à “mini tangente” ao gráfico da solução $y(t)$ que passa por este ponto, e repetir-se o processo um número suficiente de vezes para vários pontos distintos, temos uma boa ideia do esboço dos gráficos das soluções. Claro que esta ideia será tanto melhor quanto mais mini tangentes sejam esboçadas, o que exige grande esforço e resultados duvidosos se o processo for realizado à mão. Esta tarefa se torna muito mais fácil e os resultados são muito melhores se for utilizado algum software gráfico que possa esboçar um grande número de tais segmentos em espaço de tempo bem pequeno. O conjunto dessas mini tangentes no plano y versus t é denominado o campo de direções (*slope field*) da equação (3.4), e é uma ferramenta de grande utilidade para termos uma visão global do comportamento das soluções de uma EDO de 1ª ordem. Para o esboço de uma curva solução que passa por um ponto do plano, deve-se sempre seguir a direção dada pela mini tangente, da esquerda para a direita, de modo que a pequena curva assim esboçada (tangente ao segmento) encontre outro segmento e o processo se repita. Abaixo, o campo de direções da equação $\frac{dy}{dt} = y - t$ (figura 3.7) e o esboço de algumas das suas curvas solução na é exibido na figura 2.8.

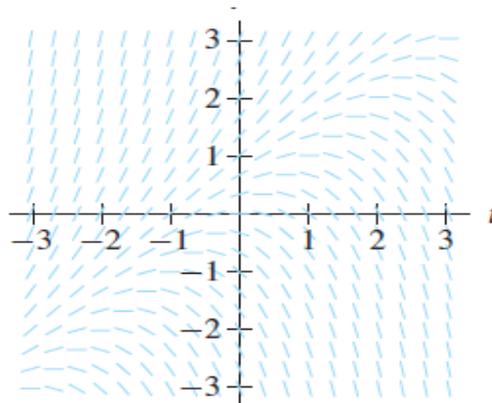


Figura 3.7 - Um esboço do campo de direções da equação $\frac{dy}{dt} = y - t$

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

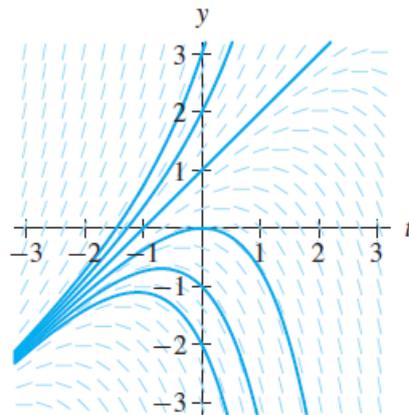


Figura 3.8 - Gráficos de algumas soluções da equação $\frac{dy}{dt} = y - t$

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

Existem dois casos em que o campo de direções de uma EDO possui peculiaridades muito interessantes. São estes:

1º) A EDO é da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \quad (3.5)$$

Como $f(t)$ depende apenas de t , o mesmo acontece com $\frac{dy}{dt}$; ou seja, para cada t_0 , os declives das soluções que cortam a reta vertical $t = t_0$ são iguais, ou ainda, os segmentos que representam as inclinações das soluções são todos paralelos ao longo desta reta.

Toma-se como exemplo a EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$; por uma integração trivial, pode-se verificar que a solução geral desta equação é $y(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante real qualquer. O campo de direções das soluções, construído no Winplot, vem a seguir:

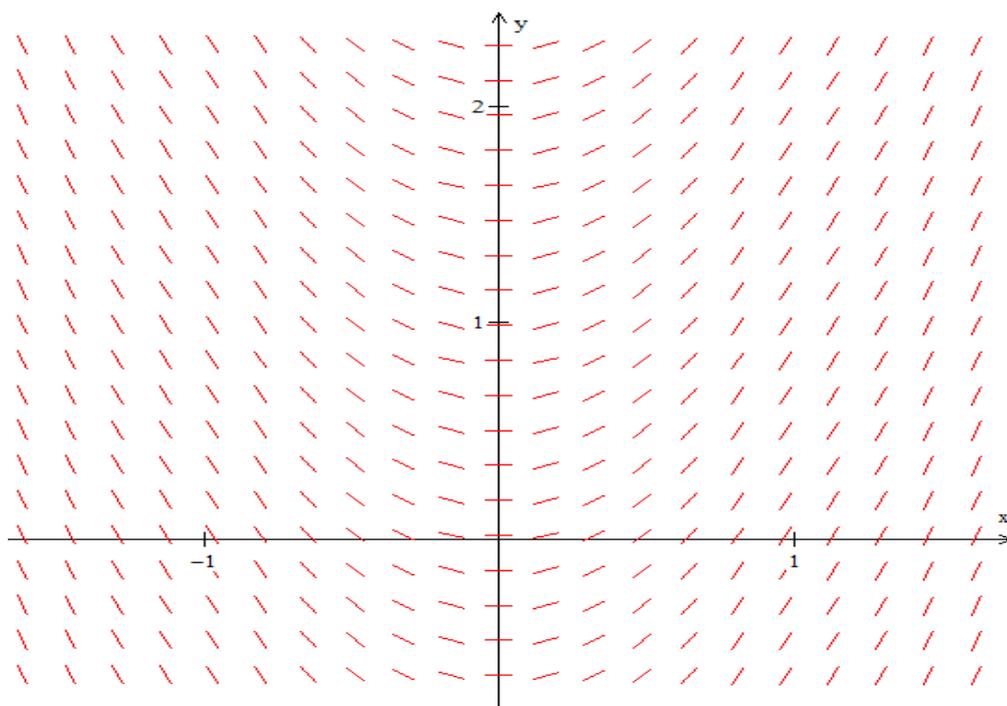


Figura 3.9 – Campo de direções da equação $\frac{dy}{dx} = 2x$; note que os segmentos do campo são paralelos ao longo de cada vertical (gráfico construído com o Winplot)

A seguir, o mesmo campo com algumas curvas solução esboçadas:

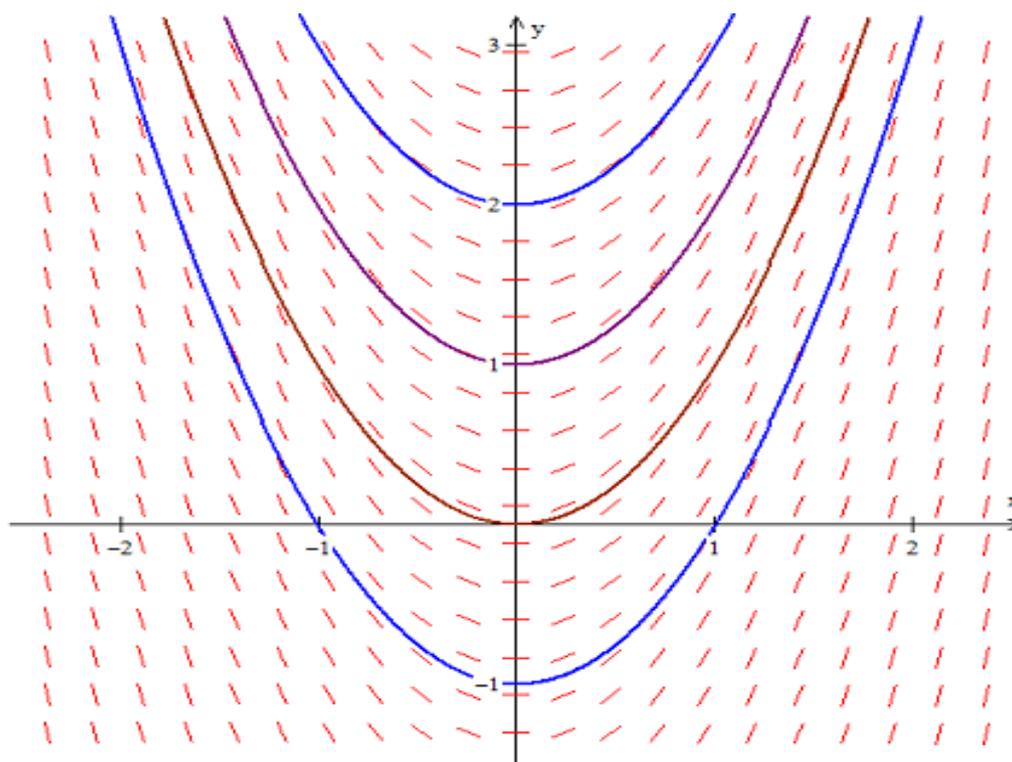


Figura 3.10 – Esboço de algumas das soluções do caso mostrado na figura anterior; note que as curvas são paralelas na direção do eixo vertical (gráfico construído com o Winplot)

É importante notar que a expressão analítica das soluções gerais das equações do caso aqui tratado pode ser obtida por integração direta da função $f(x)$ (desde que este processo seja possível).

Conclui-se que todas as curvas soluções para este caso são paralelas ao longo do eixo vertical. Tendo o esboço de uma solução, têm-se de todas as soluções. Como consequência, deve-se notar que este tipo de equação não possui solução de equilíbrio isolada: ou todas as soluções são de equilíbrio (ou seja, retas horizontais paralelas) ou não existe nenhuma solução desta forma. De fato: se existisse uma solução de equilíbrio, o segmento que representa a mini tangente para todo t deve ser horizontal. Como para cada t os demais segmentos são paralelos a este ao longo da reta vertical passando por t , temos que todos os segmentos desta forma são horizontais, ou seja, todas as soluções são constantes.

2º) A EDO é da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (3.6)$$

Ou seja, a EDO é autônoma. Este é o caso que irá nos interessar neste trabalho. Como o lado direito da equação (3.6) depende apenas de y , chega-se à conclusão de que para cada y_0 fixo, os segmentos representando as mini tangentes às soluções que cortam a reta horizontal que passa por y_0 são todos paralelos. Ou seja: dy/dt é constante ao longo de cada horizontal. Assim, as curvas soluções da equação (3.6) são todas paralelas ao longo do eixo horizontal t (contanto que não seja uma solução constante).

Como exemplo, considere o seguinte caso particular da equação (2.11) dada no segundo capítulo:

$$\frac{dy}{dt} = 4y \cdot (1 - y) \quad (3.7)$$

Na sequência ilustra-se o campo de direções da equação, juntamente com o esboço de algumas curvas solução. Note o realce que foi dado às duas soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = 1$ (que corresponde às “raízes” da equação no lado direito de (3.7):

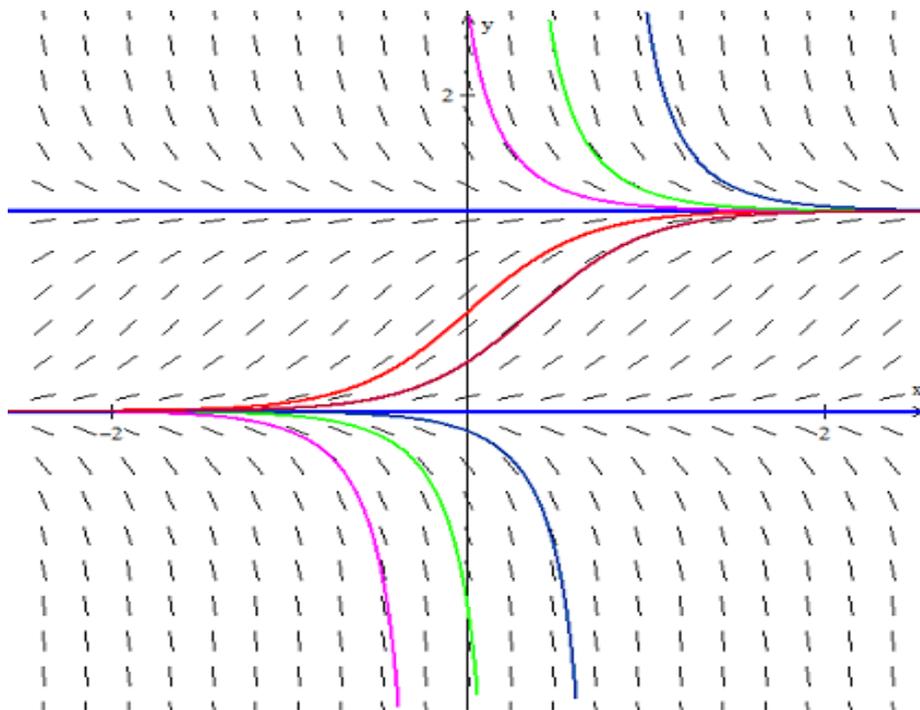


Figura 3.11 – Campo de direções da equação (3.6), com o esboço de algumas soluções. Note que ao longo de cada linha horizontal, os segmentos do campo são paralelos.

3.3: A Reta de Fase

No capítulo anterior, foi destacado as desvantagens dos métodos analíticos utilizados para a resolução de EDO's de 1ª ordem. Certos métodos numéricos podem nos fornecer aproximações muito boas das soluções, contanto que um valor inicial seja dado. No que se refere ao estudo do comportamento global das soluções na presença de um ou mais parâmetros livres, nenhum desses métodos se mostram eficientes. O método computacional do campo de direções é mais útil para esta finalidade, porém pode muitas vezes demandar grande esforço computacional.

No caso especial em que a equação é autônoma, ou seja, da forma

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (3.8)$$

pode ser utilizado uma generalização do método qualitativo usado para se analisar o comportamento global das soluções da equação (3.1) da seção anterior. Pelo fato da equação somente depender de x e não de t , o campo de direções para este caso nos diz que as inclinações das soluções $x(t)$ no plano t versus x permanecem constantes ao longo de linhas horizontais neste plano.

Ou seja: as curvas-solução que passam por dois pontos distintos com a

mesma coordenada x tem a mesma inclinação nesses pontos. Isto nos permite dizer que se conhecermos o campo de direções ao longo de uma linha vertical $t = t_0$ qualquer, conhece-se o campo de direções no plano inteiro. Esta linha é denominada na literatura como linha de fase da equação autônoma. Se a inclinação é positiva, isto significa que a curva solução “sobe” com velocidade dada pelo valor desta inclinação. Se a inclinação for negativa, faz-se o mesmo, só que descendo. Se a inclinação é nula, ficamos no mesmo lugar, e isto quer dizer que fica-se na correspondente altura x_0 “para sempre. Se a inclinação for positiva, desenha-se uma reta apontando para cima e de tamanho proporcional ao da inclinação (valor de $f(x_0)$). Se for negativa, faz-se o mesmo com uma seta apontando para baixo. Se a inclinação for nula, colocamos um ponto. Estes pontos são os pontos ou soluções de equilíbrio.

Vamos considerar, por exemplo, a equação de 1ª ordem autônoma

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot (1 - y) = f(y)$$

Os pontos ou soluções de equilíbrio correspondem às raízes do polinômio $f(y)$, que são $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$. Se $0 < y < 1$, $f(y)$ é positiva, o que corresponde a dizer que toda solução que passa por esta região do plano é crescente. Se $y < 0$ ou $y > 1$, temos que $f(y) < 0$, donde as soluções que passam nesta parte do plano são decrescentes. Assim, a linha de fase desta equação tem dois pontos, em $y = 0$ e $y = 1$, setas que apontam para cima para $0 < y < 1$ e setas apontando para baixo se $y < 0$ ou $y > 1$.

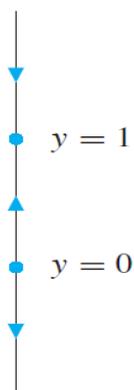


Figura 3.12 – Linha de fase da EDO $y' = y(1-y)$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

A comparação da linha de fase, respectivamente, com o campo de direção e com o esboço gráfico das soluções segue abaixo:

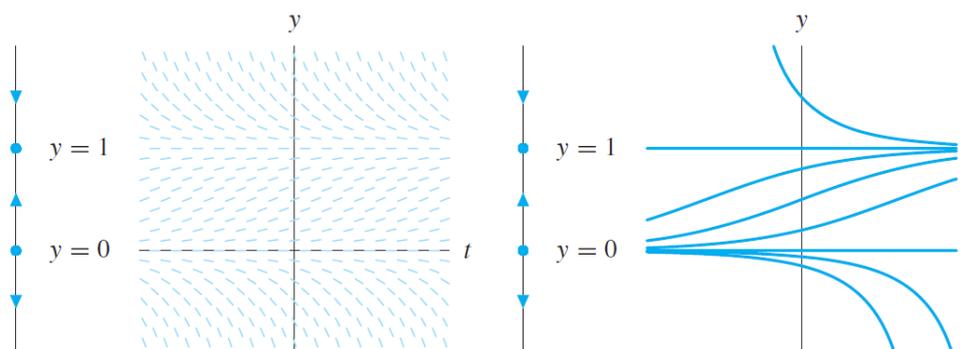


Figura 3.13 – Linhas de fase, gráfico de soluções e campo de direções da EDO $y' = y(1-y)$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

O entendimento do comportamento das curvas solução no lado direito da figura acima é simples. Em primeiro lugar, observe o gráfico da função $f(y)$:

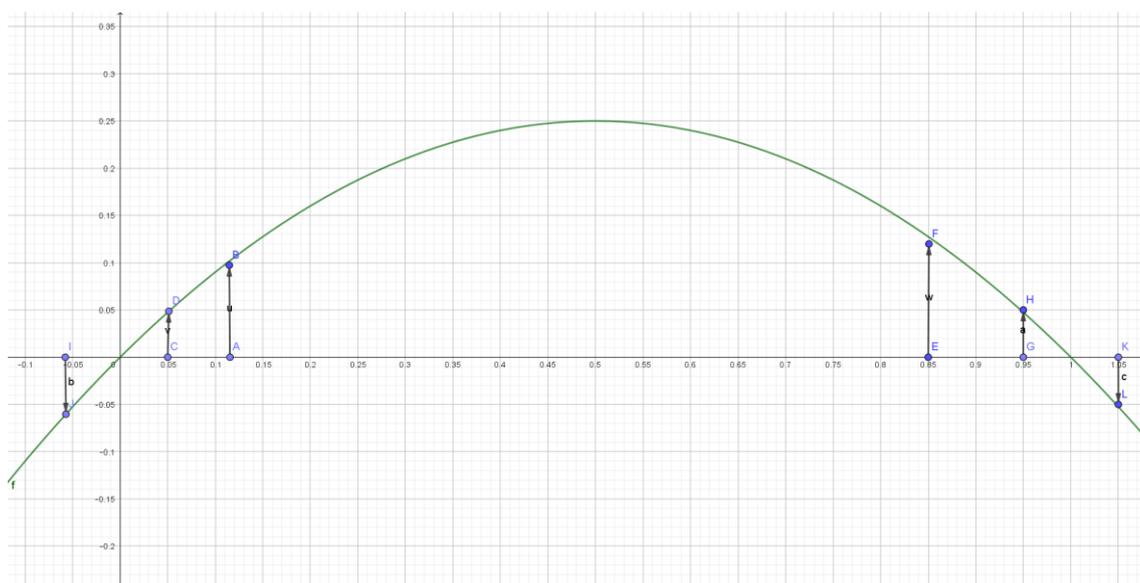


Figura 3.14 – Gráfico da EDO $y' = y(1-y)$.

Note que quando y se aproxima da raiz 1 (solução de equilíbrio) pela esquerda (ou seja, por valores menores que 1), $f(y)$ tende a zero por valores positivos. Interpreta-se isto da seguinte forma: se $y(t)$ é uma solução da equação $\frac{dy}{dt} = y \cdot (1 - y) = f(y)$ com $0 < y(0) < 1$, esta solução, embora seja crescente para todo t , tem declive cada vez menor quando se aproxima da solução de equilíbrio $y = 1$. Imagine a situação de dirigir-se um carro de modo

que, conforme aproxima-se de um ponto (lugar no espaço), vamos diminuindo cada vez mais a velocidade conforme aproxima-se do ponto (lugar no espaço), sem nunca parar, no entanto. Quanto mais próximo do ponto (lugar no espaço), mais lentamente move-se. Nesta situação um tanto quanto abstrata, temos que admitir que levar-se-ia um tempo “infinito” para chegar ao ponto (lugar no espaço) marcado; nunca deixa-se de ir para frente, mas também nunca chega-se a um ponto (lugar no espaço) que, desta forma, se torna “infinitamente” próximo! A interpretação gráfica para este fato é a de que a solução $y(t)$ se torna assintótica em relação à reta horizontal $y = 1$, embora sempre crescente. O comportamento de soluções tais que $y(0) > 1$ é parecido. O mesmo ocorre em relação ao ponto de equilíbrio $y = 0$.

Inspirados por este exemplo, estabelecemos o fato seguinte sem demonstração (maiores informações podem ser encontradas em (Blanchard, Devaney e Hall, 2011, pág. 40)).

Suponha que $x(t)$ seja uma solução da equação autônoma (3.8), sendo $x(t)$ contínua e diferenciável. Suponha que x esteja definida em t_0 , que sem perda de generalidade iremos assumir como sendo 0. Seja $x_0 = x(0)$, de modo que este valor corresponda ao intercepto de $x(t)$ com o eixo vertical x . Nestas condições temos os seguintes fatos:

- Se $f(x_0) = 0$, então x_0 é uma solução (ponto) de equilíbrio da equação (4), de modo que $x(t) = x_0$ para todo t ;
- Se $f(x_0) > 0$, então $x(t)$ é crescente para todo t e uma, e apenas uma das afirmações a seguir ocorre: 1) $x(t) \rightarrow \infty$ quando t aumenta; ou 2) a solução $x(t)$ tende para a primeira solução de equilíbrio (reta horizontal) *maior* que x_0 ;
- Se $f(x_0) < 0$, então $x(t)$ é decrescente para todo t e uma, e apenas uma das afirmações a seguir ocorre: 1) $x(t) \rightarrow -\infty$ quando t aumenta; ou 2) a solução $x(t)$ tende para a primeira solução de equilíbrio (reta horizontal) *menor* que x_0 ;

Note que sublinhamos a palavra “aumenta” no texto acima. Se tivéssemos colocado “ $t \rightarrow \infty$ ” ao invés, a afirmação não seria necessariamente verdadeira. O

problema é que as soluções podem não estar definidas para todo t . Devemos, portanto, tomar cuidado com as interpretações da reta de fase. Vamos tomar como exemplo a equação

$$\frac{dy}{dt} = (y + 1)^2$$

O único ponto de equilíbrio da solução é $y = -1$; além disso, é fácil ver que a reta de fase desta equação é dada por:

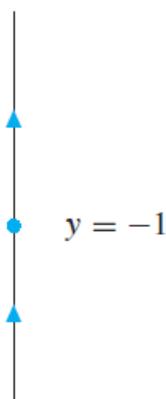


Figura 3.15 – Reta de fase da EDO $y' = (y+1)^2$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

A flecha apontando para cima de $y = -1$ nos diz que toda solução começando acima deste valor tende a infinito. Isto, no entanto, não significa que a solução esteja definida para todo valor de t . De fato: é fácil verificar, por integração direta, que a expressão analítica da solução é:

$$y(t) = -\left(\frac{1}{t+C} + 1\right) \text{ note que } y'(t) = \frac{1}{(c+t)^2}$$

onde C é uma constante arbitrária. Para cada valor de C , existem duas soluções contínuas: uma definida no intervalo $] -\infty; -C[$ e a outra definida no intervalo $] -C; \infty[$; quando t se aproxima de $-C$ pela direita, a primeira solução tende a $-\infty$; quando tende a $-C$ pela esquerda, a outra solução tende a ∞ . Isto porque estamos considerando como solução uma função que seja contínua em um intervalo I . Para esta equação, não existem soluções contínuas definidas para

qualquer valor real, a não ser a solução de equilíbrio. Na sequência (figura 3.15) o campo de direções e algumas soluções da equação:

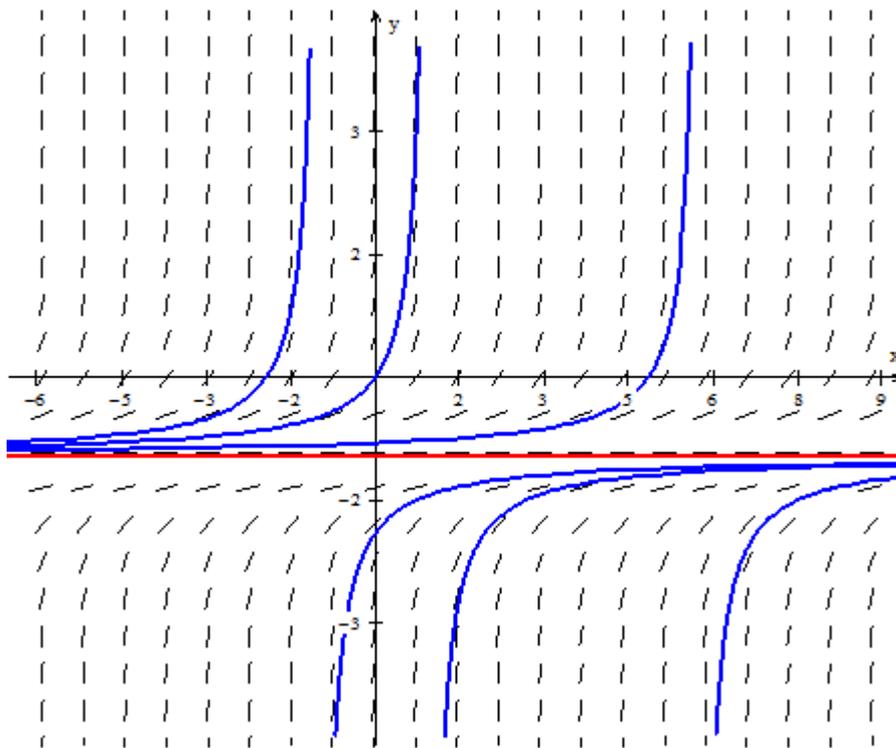


Figura 3.16 – Campo de direções e gráfico de soluções da EDO $y'=(y+1)^2$.

3.4: Sobre Pontos de Equilíbrio e Sua Classificação

Das discussões e exemplos anteriores, fica claro que podemos determinar a reta de fase e classificar os pontos de equilíbrio de uma equação autônoma a partir de informações obtidas através do gráfico de $f(x(t))$. Desta forma, podemos concluir que a classificação de um ponto de equilíbrio depende apenas do padrão da reta de fase nas vizinhanças desse ponto.

Se x_0 é um ponto de equilíbrio estável (atrator), as setas da linha de fase imediatamente abaixo de x_0 apontam para cima e aquelas imediatamente acima apontam para baixo. Isto nos diz que o gráfico $f(x(t))$ deve ser positivo para valores de x em uma vizinhança conveniente à esquerda de x_0 e negativo para os valores em uma vizinhança convenientemente pequena à direita de x_0 . Concluimos que o gráfico de f deve ser decrescente em um intervalo aberto contendo x_0 . Reciprocamente, se $f(x_0) = 0$ e f é decrescente em uma

vizinhança de x_0 , então f deve ser positiva imediatamente à esquerda de x_0 e negativa imediatamente à direita de x_0 , sendo então que x_0 deve ser um ponto de equilíbrio estável ou um atrator. Seguindo o mesmo raciocínio, concluímos também que x_0 é ponto de equilíbrio instável se e somente se $f(x(t))$ é crescente em uma vizinhança aberta contendo x_0 . Se $f(x_0) = 0$ e f mantém o mesmo sinal em vizinhanças imediatamente à esquerda e direita de x_0 , então x_0 deve ser um ponto de sela.

Os resultados básicos do Cálculo Diferencial justifica o seguinte critério:

CRITÉRIO PARA CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO:

Suponha que x_0 seja um ponto de equilíbrio da equação autônoma $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$, sendo $f(x)$ contínua e diferenciável em uma vizinhança de x_0 . Então:

- Se $f'(x_0) < 0$, x_0 é um ponto de equilíbrio estável (atrator)
- Se $f'(x_0) > 0$, x_0 é um ponto de equilíbrio instável (repulsor)
- Se $f'(x_0) = 0$, nada podemos afirmar sobre x_0 , sendo necessária uma análise do sinal da função $f(x)$ em uma vizinhança de x_0 para chegarmos a uma conclusão. Assim, devemos tomar cuidado: $f'(x_0) = 0$ não implica imediatamente que x_0 seja um ponto tipo sela.

Uma observação importante: se f' for também diferenciável, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$, então x_0 deve ser ponto de sela. É o que acontece em pontos de máximo ou mínimo local de f . Conforme veremos na próxima seção, estes pontos tem estrita relação com os chamados pontos de bifurcação.

3.5: Parâmetros livres e Bifurcações

Vamos agora tomar um exemplo mais interessante, que nos permitirá definir o conceito de diagrama de bifurcação.

Vamos considerar a EDO de 1ª ordem autônoma, dependendo do parâmetro μ , dada por

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y + \mu \quad (3.9)$$

A variável independente é t e a variável dependente é y . Devemos notar que, na realidade, (3.9) representa infinitas EDO's distintas, uma para cada valor de μ . Em cada equação particular, μ possui um valor fixo, mas valores diferentes deste parâmetro nos leva a equações diferentes, cada uma com um conjunto de soluções que possui comportamento global particular. Nosso principal objetivo aqui será o estudo de como este comportamento global varia com os valores de μ .

Vamos usar uma notação que permita identificar a dependência das EDO's em (3.9) do parâmetro μ :

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu}(y) = y^2 - 2y + \mu$$

Nós diremos então que a função $f_{\mu}(y)$ na equação (3.9) define uma família a um parâmetro de equações diferenciais em μ . Deve ficar claro que μ não depende de t . Caso deseje-se especificar um valor particular para μ , por exemplo, $\mu = 2$, nós escrevemos

$$f_2(y) = y^2 - 2y + 2$$

Assim, obtemos a correspondente EDO

$$\frac{dy}{dt} = f_2(y) = y^2 - 2y + 2$$

Sempre iremos utilizar esta notação nestes caso. Uma função f da variável dependente y e que também depende do parâmetro μ será denotada por $f_{\mu}(y)$. A EDO correspondente será

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu}(y).$$

Retorne ao nosso exemplo $f_2(y)$. Para cada valor de μ , a relação (3.9) nos dá uma EDO autônoma, de modo que pode-se construir sua linha de fase e analisar seus pontos de equilíbrio e classifica-los de acordo com o desenvolvido na seção anterior. Vamos fazer esta análise utilizando inicialmente os seguintes valores: $\mu = -4$, $\mu = -2$, $\mu = 0$, $\mu = 2$ e $\mu = 4$.

Para $\mu = -4$, obtemos a EDO:

$$\frac{dy}{dt} = f_{-4}(y) = y^2 - 2y - 4$$

Esta equação possui como pontos de equilíbrio valores de y para os quais $f_{-4}(y) = 0$. Assim, esses pontos são $y_1 = 1 + \sqrt{5}$ e $y_2 = 1 - \sqrt{5}$. Como $f'_{-4}(y) = 2y - 2$, $f'_{-4}(y_1) = 2\sqrt{5} > 0$ e $f'_{-4}(y_2) = -2\sqrt{5} < 0$, temos que y_1 é ponto de equilíbrio instável e y_2 de equilíbrio estável. O mesmo raciocínio nos diz que para $\mu = -2$, $y_3 = 1 + \sqrt{3}$ e $y_4 = 1 - \sqrt{3}$ são, respectivamente pontos de equilíbrio instável e estável, para $\mu = 0$ $y_5 = 2$ e $y_6 = 0$ são, respectivamente pontos de equilíbrio instável e estável. Para $\mu = 2$ e $\mu = 4$, a equação (3.9) não possui raízes reais, o que implica na não existência de pontos de equilíbrio.

Pode-se notar que, apesar de diferentes, o comportamento das soluções para os valores $\mu = -4$, -2 e 0 são muito parecidos, no sentido de não haver mudanças de natureza qualitativa no comportamento das soluções: existem dois pontos de equilíbrio, o de menor valor sendo de equilíbrio estável e o de maior valor de equilíbrio instável. Apesar da posição exata destes pontos de equilíbrio mudarem conforme os valores de μ aumentam, de modo que estes dois pontos se aproximem “continuamente”, suas posições relativas e classificação permanecem.

Já para os valores $\mu = 2$, 4 , temos um padrão bem diferente dos anteriores. Simplesmente não existem pontos de equilíbrio, de modo que qualquer solução está definida para toda a reta e é globalmente estritamente crescente. Pelo motivo de haver mudança significativa quanto à natureza do comportamento das soluções, nós dizemos que ocorreu uma bifurcação para algum valor de μ entre 0 e 2 . Para analisar melhor a situação, deve-se notar que a equação $f_{\mu}(y) = 0$ possui duas raízes reais para os três primeiros valores, sendo estas raízes correspondentes aos respectivos pontos de equilíbrio, e nenhuma raiz nos dois últimos casos. Isto nos faz crer que em algum ponto entre $\mu = 0$ e $\mu = 2$ a equação acima possui uma única raiz, e este deve ser o valor do parâmetro para o qual ocorreu a bifurcação (ver a figura a seguir).

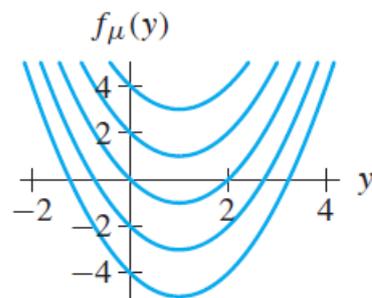


Figura 3.17 - Gráficos de $f_{\mu}(x)$ para $\mu = -4, -2, 0, 2$ e 4 .

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

As raízes da equação $y^2 - 2y + \mu = 0$ são $y = 1 \pm \sqrt{1 - \mu}$, conforme pode ser verificado facilmente. Se $\mu < 1$, a equação possui duas raízes reais distintas; se $\mu > 1$, a equação não possui raízes reais. Para $\mu = 1$, a equação possui exatamente uma única raiz, $y = 1$. Para todo valor de μ menor que 1, a EDO resultante possui dois pontos de equilíbrio, um estável e o outro instável, e para qualquer valor de μ maior que 1 a EDO não possui ponto de equilíbrio nenhum. O valor $\mu = 1$ é o único em que a EDO resultante possui um único ponto de equilíbrio. Conforme os valores de μ se aproximam de 1 por valores menores que 1, os dois pontos de equilíbrio (as duas raízes das parábolas resultantes) das EDO's respectivas se "aproximam", tendo como ponto médio o valor $y = 1$. Quando μ assume o valor 1, estes dois pontos "se encontram" e tornam-se um único. Uma análise simples do sinal da função $f_1(y) = y^2 - 2y + 1$ nos mostra que esta é positiva tanto à esquerda como à direita de $y = 1$. Sendo assim, este é um ponto de equilíbrio do tipo sela. Ou seja: para o valor $\mu = 1$, não apenas o número de pontos de equilíbrio muda, mas também sua classificação (ver figura na sequencia deste parágrafo). Devido à mudança de natureza qualitativa que o comportamento das soluções da família de EDO's dada por (3.9) sofre quando $\mu = 1$, diremos que este é um valor ou parâmetro de bifurcação (ou simplesmente uma bifurcação) desta família de equações.

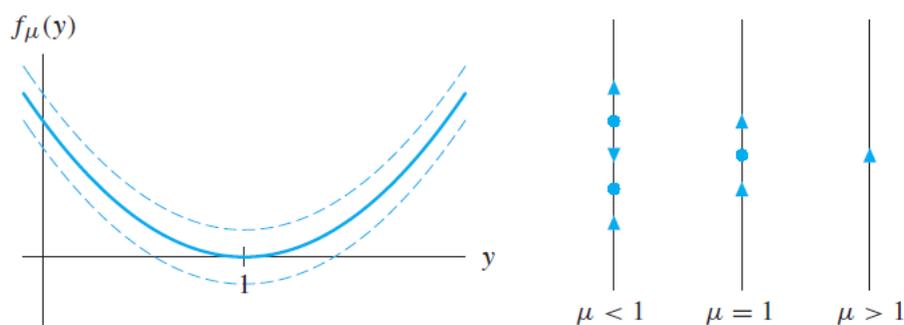


Figura 3.18 - À esquerda, gráficos de $f_\mu(x)$ para $\mu = 1$, para um valor menor que 1 e também para um valor maior que 1, ambos bem próximos de 1. À direita, as respectivas retas de fase.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

O conceito de diagrama de bifurcação foi introduzido neste trabalho através do exemplo preliminar deste capítulo. Vamos discutir novamente sobre essa técnica sob o ponto de vista do presente exemplo. Este diagrama pode ser visto como um cenário completo no plano μ versus y das linhas de fase em função de μ , de modo a identificar os pontos de bifurcação da família de equações (3.9), ou seja, os valores do parâmetro μ para os quais existe mudança qualitativa significativa no comportamento das soluções das equações envolvidas.

Pode-se dizer agora, depois de se ter exemplificado o conceito de reta de fase adequadamente, que para o esboço do diagrama de bifurcações, deve-se colocar os valores do parâmetro μ na linha horizontal do plano y na linha vertical (como no tradicional plano xy). Para cada valor de μ , se desenha a reta de fase da equação correspondente obtida de (3.9) quando se fixa este valor do parâmetro, de modo que esta corresponda à reta vertical passando por μ . Neste caso, o conjunto de todos os pontos de equilíbrio assim colocados no plano forma uma curva, de modo a se identificar facilmente os valores de bifurcação. Pode se perguntar como afirmar que o conjunto de tais pontos constitui uma curva contínua. O motivo é que como a função $f_\mu(x)$, por ser polinomial, é de classe C^1 (derivável, com primeira derivada contínua), e este fato é suficiente para sustentarmos nossa afirmação. Na literatura, se diz que as soluções de (3.9) variam ou dependem continuamente dos parâmetros. A demonstração de

tal fato é longa e necessita de conceitos que fogem ao escopo deste texto! O leitor interessado pode consultar o capítulo 7 de (Smale et al., 2004, pág. 152).

O diagrama de bifurcações da família (3.9) vem abaixo.

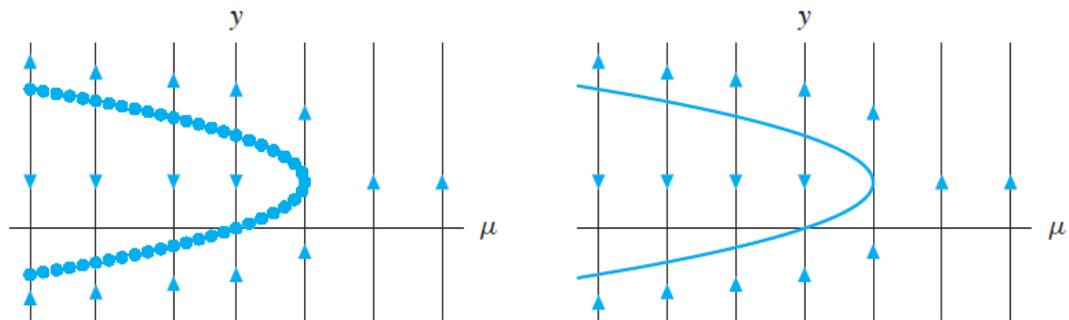


Figura 3.19 – Diagramas de bifurcação para a família $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

É fácil identificar pelo diagrama que o valor de bifurcação ocorre quando $\mu = 1$. Para todos os valores de $\mu < 1$ a correspondente EDO possui sempre dois pontos de equilíbrio, sendo o menor sempre estável e o maior instável. Para $\mu = 1$ existe um único ponto de equilíbrio, que é do tipo sela. Finalmente, para valores $\mu > 1$, não existem pontos de equilíbrio.

Uma forma em que, às vezes, é mais fácil de se obter a curva acima é como se segue. Em primeiro lugar, vamos encarar a função $f_\mu(y)$ como uma função de duas variáveis $f(y, \mu)$, de forma que

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \mu) = y^2 - 2y + \mu$$

Ora, os pontos de equilíbrio desta equação pertencem ao conjunto de todos os pares (y, μ) para os quais $f(y, \mu) = 0$; ou seja, corresponde à curva de nível para $f = 0$ da função $f(y, \mu)$. Isto nos dá a relação

$$y^2 - 2y + \mu = 0$$

É muito mais fácil isolar μ em função de y na relação acima que o contrário. Assim, a curva de nível correspondente ao valor $f = 0$ no plano μ versus y é dada pela parábola abaixo.

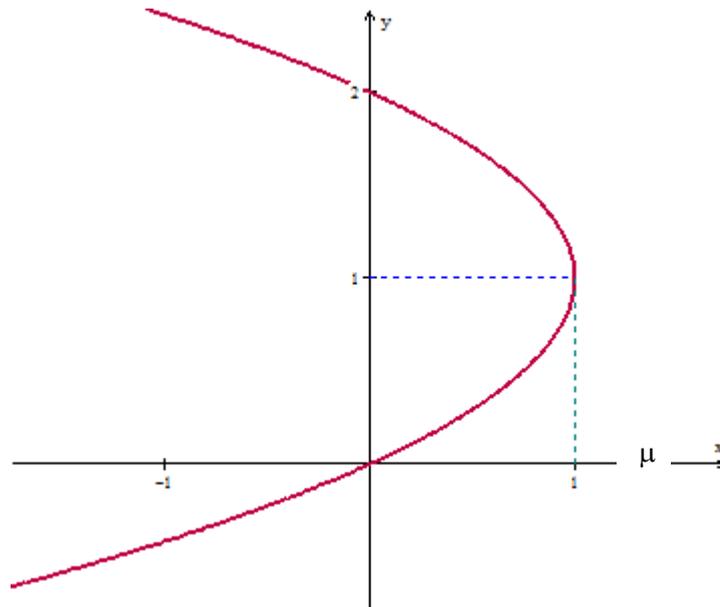


Figura 3.20 - Curva de nível da EDO $y^2 - 2y + \mu$.

Esta é a mesma curva que a obtida antes. É claro que nem sempre é fácil obter tais curvas. Sua elaboração deve envolver um misto dos resultados do cálculo diferencial de uma variável para o esboço de curvas com métodos computacionais.

Sobre bifurcações para famílias a um parâmetro da forma (3.9) onde f depende continuamente de y e μ , coloca-se alguns fatos importantes na sequência.

O fato principal é o de que bifurcações frequentemente não ocorrem para equações deste tipo. Para tentar justificar nossa afirmação sem fazer uma demonstração rigorosa, devido que uma prova da afirmação foge ao escopo deste trabalho. Vamos argumentar da seguinte forma: Suponha que y_0 seja um ponto de equilíbrio estável de $\frac{dy}{dt} = f_\mu(y)$, para o parâmetro μ_0 , de forma que $f_{\mu_0}(y_0) = 0$ e $f'_{\mu_0}(y_0) < 0$ (ver figura a seguir).

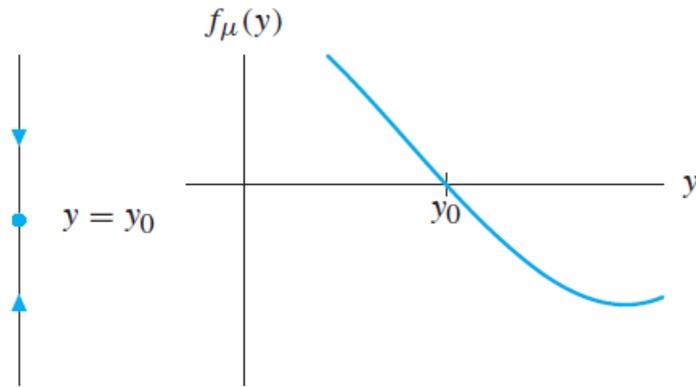


Figura 3.21 - Gráfico de $f_{\mu_0}(y)$ “perto” do ponto atrator y_0 e respectiva reta de fase.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

Uma pequena mudança no valor de μ , digamos, de μ_0 para μ_1 , não irá acarretar mudanças significativas no gráfico acima, deslocando “levemente” o ponto de intercepto com o eixo y , de forma que a nova raiz y_1 (ponto de equilíbrio) assim obtida ainda estará muito perto de y_0 e a função $f_{\mu_1}(y)$ ainda será decrescente em y_1 , ou seja, ainda teremos $f_{\mu_1}(y_1) < 0$. Assim, a correspondente equação diferencial ainda terá um ponto de equilíbrio estável em y_1 , muito próximo de y_0 (ver figura abaixo).

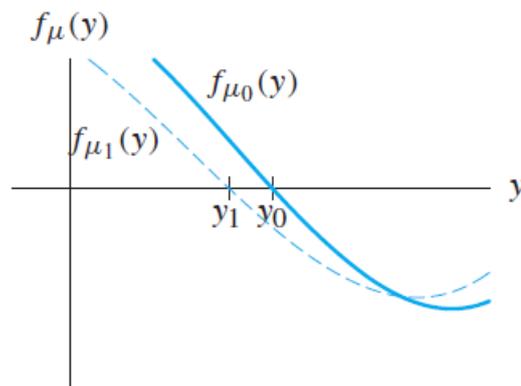


Figura 3.22 - Gráficos de $f_{\mu_0}(y)$ e $f_{\mu_1}(y)$.

Fonte: Blanchard, Devaney e Hall (2011)

Colocando de forma mais precisa: se y_0 é um ponto de equilíbrio estável isolado (ou seja, de tal forma que em um intervalo aberto contendo y_0 não exista nenhum outro ponto de equilíbrio) para a EDO

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu_0}(y)$$

então, para todo μ_1 suficientemente próximo de μ_0 , a EDO $\frac{dy}{dt} = f_{\mu_1}(y)$ também possui um ponto de equilíbrio estável isolado para um valor y_1 muito próximo de y_0 , de forma que nenhuma mudança qualitativa significativa (a menos do pequeno deslocamento do ponto de equilíbrio ao longo do eixo horizontal) irá ocorrer nas vizinhanças deste ponto, ou seja, de forma que não existam valores de bifurcação em uma vizinhança de μ_0 . O mesmo argumento pode ser repetido para o caso de ocorrer um ponto de equilíbrio instável. Com estas observações em mente, pode-se então argumentar que bifurcações devem ocorrer se ocorrem pontos de equilíbrio do tipo sela; ou seja, se existir um valor de parâmetro μ_0 de modo que exista y_0 com $f_{\mu_0}(y_0) = f'_{\mu_0}(y_0) = 0$ e $f''_{\mu_0}(y_0) \neq 0$, então μ_0 deve ser um valor de bifurcação (pois a teoria do cálculo diferencial nos diz que para tais pontos deve ocorrer uma raiz de $f_{\mu_0}(y)$ que também é um ponto de máximo ou mínimo da função, e isto nos dá um ponto de sela). Assim, para melhor detectarmos a ocorrência de bifurcações, deve-se prestar especial atenção em pares (y_0, μ_0) para os quais as condições acima ocorram.

Capítulo 4: Estudo do Comportamento Dinâmico de Uma Família Polinomial a dois Parâmetros

Neste capítulo será realizada a análise qualitativa detalhada de uma particular família de EDO's autônoma, de primeira ordem e polinomial, com dois parâmetros livres. Esta análise será realizada com base nas noções colocadas no capítulo anterior.

Mais especificamente: será estudada a família polinomial a dois parâmetros livres dada por

$$x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b \quad (4.1)$$

Serão analisadas as mudanças que ocorrem no comportamento dinâmico das soluções de acordo com a variação dos valores dos dois parâmetros. Este estudo será feito em algumas etapas. Na primeira etapa, iremos fixar o valor para $a = 1$, e iremos variar os valores de b , a fim de entendermos como variam os pontos de equilíbrio com esta variação, tanto em número como em suas classificações (equilíbrio estável, instável, sela). Será obtido então o mapa de bifurcações para este caso. Na sequência, fixaremos o valor de a em -1 e repetiremos o estudo. Nosso objetivo é realizar esta análise cobrindo todos os valores do parâmetro a possíveis. No final, iremos construir um mapa dos pontos de equilíbrio e bifurcações no plano $a \times b$.

Etapa 1

Nesta primeira etapa pretende-se construir o diagrama de bifurcações para a equação (4.1) no caso $a = 1$:

$$x' = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b \quad (4.2)$$

Note que (4.2) é uma família a um parâmetro.

O objetivo aqui é a análise do comportamento das soluções da família (4.2), análise esta que será feita com base nas variações possíveis dos valores de b . Inicialmente se faz $b = 0$ e tem-se a seguinte equação de 1ª ordem:

$$x' = x - x^3 \quad (4.3)$$

O gráfico de x' por x é o que segue:

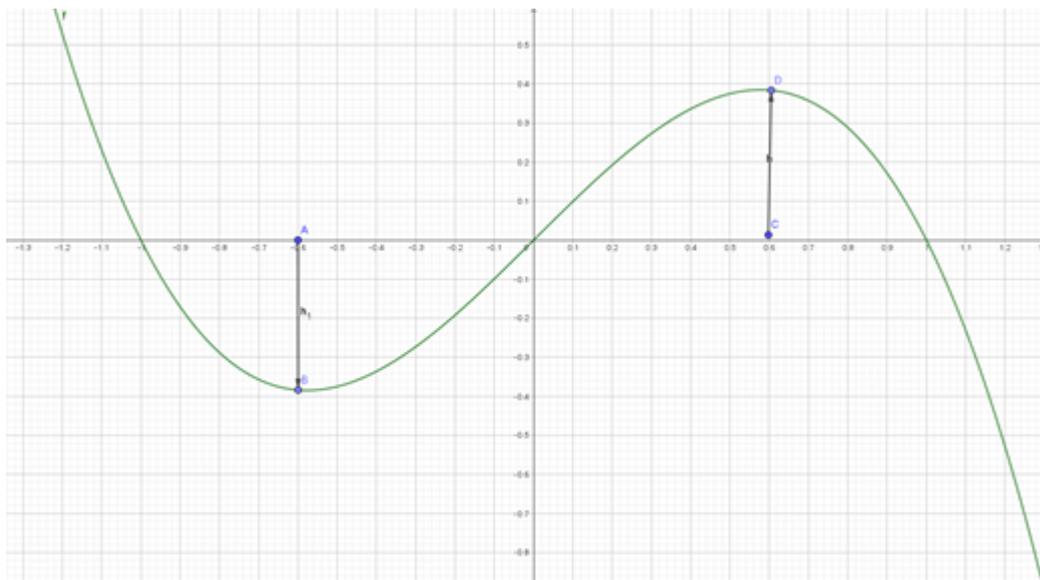


Figura 4.1 – Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3$ (construído no Geogebra).

Os valores para os quais a curva intercepta o eixo x são os pontos em que a derivada é nula e correspondem às soluções de equilíbrio. Esses pontos são: -1 , 0 e 1 . De fato, é fácil fazer a verificação algébrica, já que a equação (4.3) pode ser reescrita da forma

$$x' = x(1 - x^2) \quad (4.4)$$

Temos o seguinte quadro:

- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) > 1$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 1$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $0 < x(0) < 1$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 1$, se afastando do ponto de equilíbrio $x \equiv 0$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $-1 < x(0) < 0$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv -1$, se afastando do ponto de equilíbrio $x \equiv 0$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) < -1$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv -1$;

Também pode-se chegar a estas conclusões através da definição de critérios de classificação de pontos de equilíbrio do capítulo 3. De fato:

considerando novamente a função $f_{1,0}(x) = x - x^3$ em (4.3), temos que $f'_{1,0}(x) = 1 - 3x^2$. Assim:

- O ponto de equilíbrio $x_1 = 0$ é tal que $f'_{1,0}(x_1) = 1 > 0$; logo, x_1 é um ponto de equilíbrio instável ou um repulsor;
- Os pontos de equilíbrio $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$ são tais que $f'_{1,0}(x_2) = f'_{1,0}(x_3) = -2 < 0$; assim, esses pontos são de equilíbrio estável, ou seja, toda solução começando suficientemente próxima desses pontos tendem para os respectivos quando $t \rightarrow \infty$.

De posse destas informações, pode-se concluir que o campo de direções (ver Boyce & DiPrima, 2006, pág. 2) das soluções da equação (4.3) ou (4.4) são como abaixo:

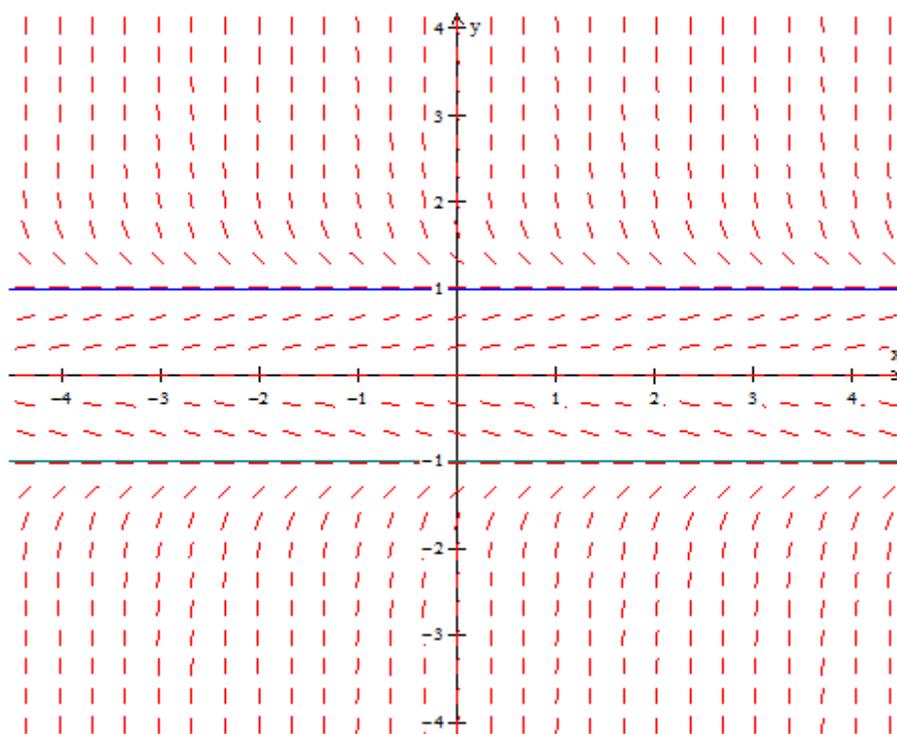


Figura 4.2 - Campo de direção da equação (4.4)

Na figura acima, as soluções de equilíbrio estão em destaque em linha contínua. De todas as formas, a reta de fase de (4.4) é como abaixo:

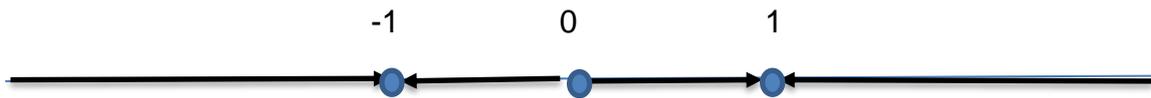


Figura 4.3 – Reta de fase da equação de (4.4)

Assim, a conclusão é que -1 é uma solução de equilíbrio estável ou um atrator, 0 é ponto de equilíbrio instável ou um repulsor e 1 é um atrator.

Será muito útil na construção do comportamento das soluções e respectivas retas de fase para demais valores de b a determinação dos pontos de máximo e mínimo locais do gráfico da figura 4.1. Os métodos utilizados são aqueles de um curso básico de Cálculo (Stewart, 2013, cap. 4).

Fazendo $x' = F(x) = x - x^3$, tem-se que $F'(x) = 1 - 3x^2$ e $F''(x) = -6x$. As raízes de $F'(x)$ são $x = \pm 1/\sqrt{3}$ e como $F''(1/\sqrt{3}) < 0$ e $F''(-1/\sqrt{3}) > 0$, se conclui que o ponto $x = 1/\sqrt{3}$ e $F(x) = 2\sqrt{3}/9 = h$ corresponde ao ponto de máximo local de $F(x)$ e $x = -1/\sqrt{3}$ e $F(x) = -2\sqrt{3}/9 = -h$ corresponde ao ponto de mínimo local. A quantidade h será de muita utilidade na construção das retas de fase e do diagrama de bifurcações que se seguem. Deve também ser notado que os resultados acima dizem que a maior inclinação positiva de uma solução da equação (4.2) e que tenha a propriedade $0 < x(0) < 1$ é dada por h e a máxima inclinação negativa para as soluções tais que $-1 < x(0) < 0$ é $-h$.

Será dada agora a sequência para a construção do diagrama de bifurcações da família de equações (4.1) no caso $a = 0$. Se em (4.2) for adotado um valor para b_0 para b tal que $-h < b_0 < 0$, obtemos a equação

$$x' = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b_0 \quad (4.5)$$

e, conforme pode-se ver abaixo, o gráfico da figura 2.1 não se altera de modo significativo. O gráfico abaixo se refere ao valor $b = -0,2 > -h \cong -0,3849$. O estudo qualitativo que será feito para este caso particular será válido para todo valor de b no intervalo indicado.

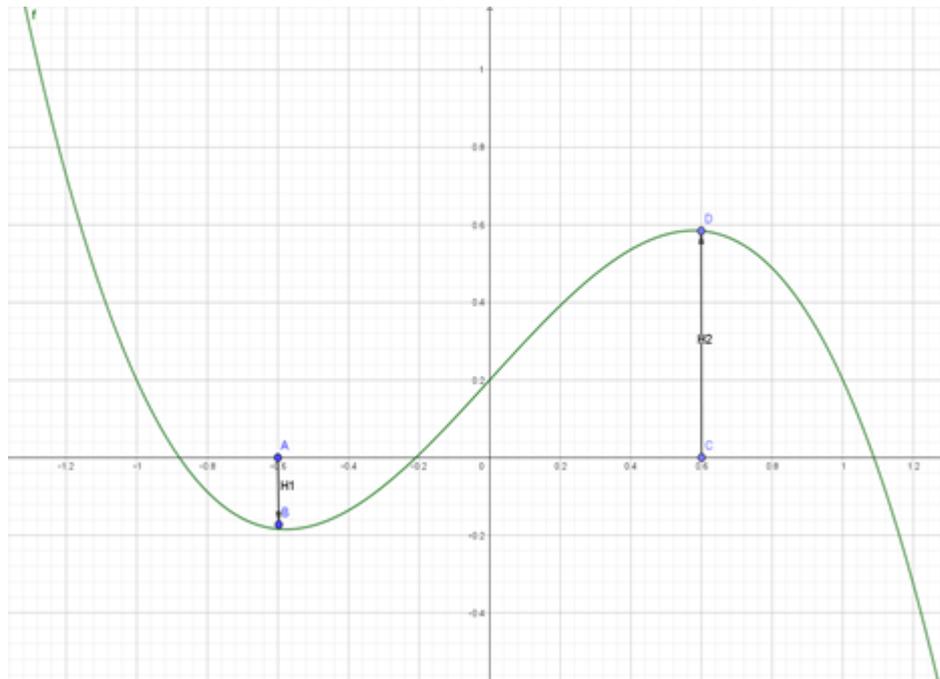


Figura 4.4 – Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3 + 0.2$ (construído no Geogebra).

Note que as principais mudanças ocorridas são as seguintes: o ponto de equilíbrio instável em $x = 0$ e o de equilíbrio estável em $x = -1$, verificados no caso $b = 0$ agora se “aproximaram”, sendo que o primeiro “caminhou” para a esquerda e o segundo para a direita. Se esses pontos forem denominados, respectivamente, por x_1 e x_2 , teremos que $-1 < x_2 < x_1 < 0$. Por outro lado, o ponto de equilíbrio estável no caso $b = 0$ correspondente a $x = 1$, “caminhou” para a direita. Se este ponto for denominado x_3 , tem-se $x_3 > 1$. Note que x_1 , x_2 e x_3 mantêm as características dinâmicas (equilíbrio estável, etc) dos correspondentes pontos $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ no caso $b = 0$. Ou seja: o deslocamento do gráfico da figura 2.1 no sentido vertical de uma quantidade positiva $0 < -b < h$ não altera as qualidades dinâmicas de seus pontos de equilíbrio. Também os valores de x para os quais os pontos de máximo e mínimo eram atingidos no caso anterior não se alteram, conforme pode ser constatado facilmente. Porém, os valores máximos e mínimos locais do gráfico em x' se alteram discretamente. De fato, para $x = 1/\sqrt{3}$ se obtém o valor $x'_{max} = H_2 > h$ e para $x = -1/\sqrt{3}$ o valor mínimo $x'_{min} = H_1 > -h$ (veja o gráfico na figura 4.3).

Uma maneira alternativa de se chegar às mesmas conclusões é a seguinte: a derivada da função em (4.5) é $f'_{1,b_0}(x) = 1 - 3x^2$, ou seja, a mesma do caso anterior. As raízes desta derivada são novamente dadas por

$x = 1/\sqrt{3}$ e $x = -1/\sqrt{3}$ e, como antes, pela análise da segunda derivada, podemos ver que correspondem, respectivamente, aos pontos de máximo e mínimo local da função. Seja x_1 a raiz de $f_{1,b_0}(x)$ à esquerda de $x = -1/\sqrt{3}$, de modo que podemos escrever $x_1 = -1/\sqrt{3} - \varepsilon$, sendo $\varepsilon > 0$ convenientemente escolhido. Temos então que

$$\begin{aligned} f'_{1,b_0}(x_1) &= 1 - 3(x_1)^2 = 1 - 3(-1/\sqrt{3} - \varepsilon)^2 = 1 - 3(1/\sqrt{3} + \varepsilon)^2 \\ &= 0 - 3\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} + \varepsilon^2\right) < 0 \end{aligned}$$

Assim, a raiz x_1 corresponde a um ponto de equilíbrio estável. De modo semelhante, podemos concluir que x_2 , a raiz de $f_{1,b_0}(x)$ entre x_1 e 0 é uma solução de equilíbrio instável e a raiz x_3 , localizada à direita de 0 é ponto de equilíbrio estável.

Nesta altura, devemos fazer uma observação importante: nem sempre é fácil se tirar conclusões a partir do gráfico da função (isto pode depender da ferramenta computacional usada para se construir tal gráfico) ou de manipulações analíticas sobre a derivada como feito acima. A recomendação é de que se utilize um método numérico para se obter uma boa aproximação das raízes de $f_{1,b_0}(x)$, como o método da dicotomia ou o de Newton-Raphson. Como funções polinomiais são de classe C^∞ (infinitamente diferenciáveis) os valores da derivada $f'_{1,b_0}(x)$ não sofrerão grandes variações nas vizinhanças das raízes assim obtidas, mantendo o mesmo sinal, de forma a garantir que chegaria-se às conclusões corretas.

Abaixo seguem os campos de direção e a reta de fase para a equação (4.3) para $b = -0,2$; deve ser frisado novamente que não existem mudanças significativas entre estes gráficos e os gráficos que seriam obtidos para qualquer valor de b assumindo valores no intervalo aberto $(-h; 0)$.

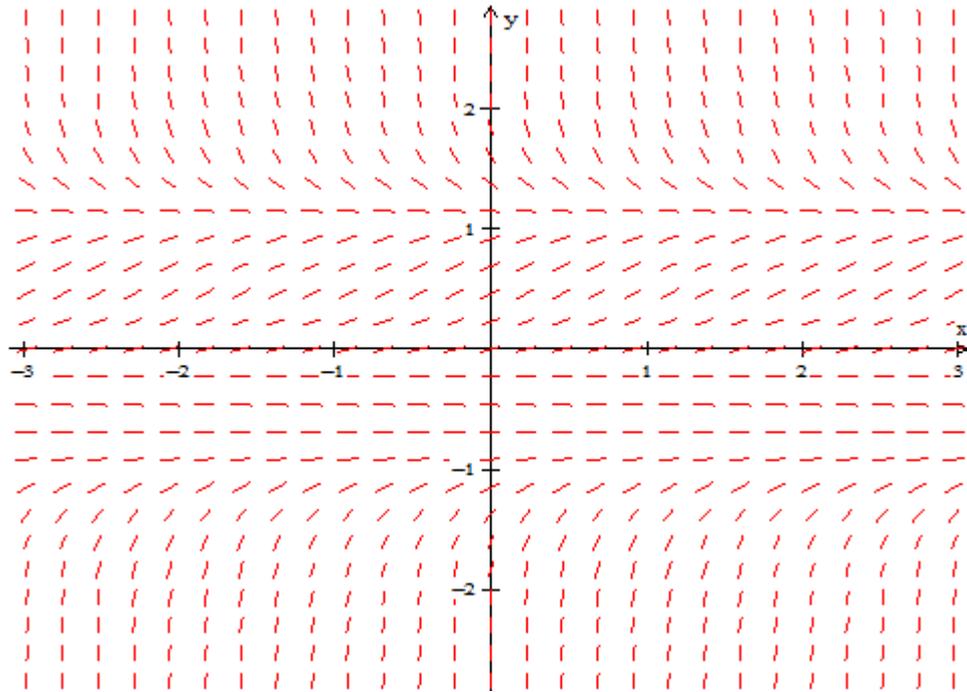


Figura 4.5 – Campo de direções da equação (4.2) para $b = -0,2$.

A reta de fase é a que se segue:



Figura 4.6 – Reta de fase da equação (4.2) para $b = -0,2$.

Agora será feita a análise da equação (4.2) para $b = -h$. Obtemos a EDO:

$$x' = f_{1,-h}(x) = x - x^3 + h \quad (I)$$

É claro que $x_1 = -1/\sqrt{3}$ é uma raiz à esquerda de 0 de $f_{1,-h}(x)$ e que a outra raiz é da forma $x_2 = 1/\sqrt{3} + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ convenientemente escolhido. O gráfico de x' por x segue abaixo.

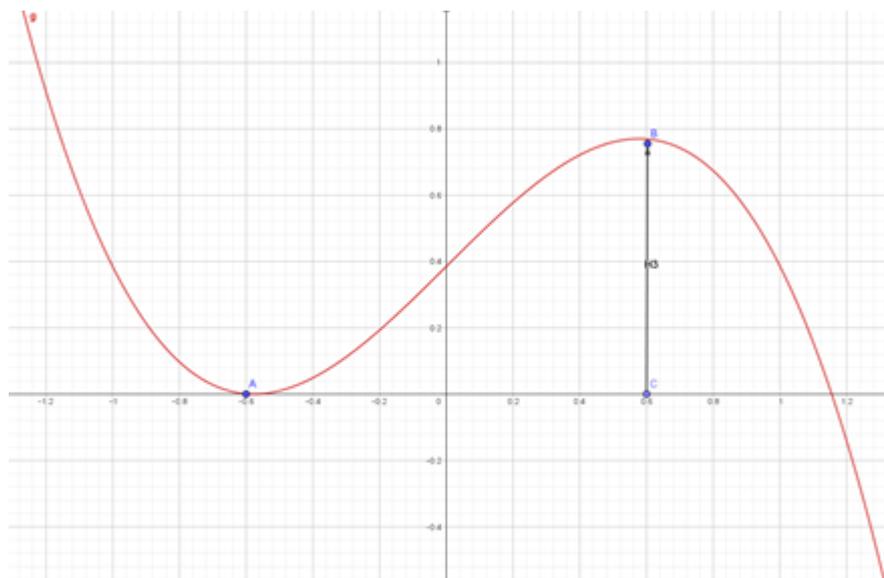


Figura 4.7 - Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3 + h$ (construído no Geogebra).

Neste caso, pode ser verificada uma mudança significativa em relação aos casos anteriores. O sinal de x' em termos de x é o seguinte:

- $x' > 0$ nos intervalos $]-\infty, -1/\sqrt{3}[$ e $]-1/\sqrt{3}; x'_2[$, onde x'_2 é o intercepto do gráfico com o eixo x que ocorre mais à direita;
- $x' < 0$ se $x > x'_2$.

Agora, pela análise do sinal de x' em termos de x , se verifica que existem apenas dois pontos de equilíbrio, a saber, o primeiro em $x = -1/\sqrt{3}$ e o segundo em $x = x'_2$. Conclui-se que $x = -1/\sqrt{3}$ é um ponto de sela, já que a derivada é positiva antes e depois deste valor, enquanto que x'_2 é um ponto de equilíbrio estável. Note que o maior valor local da derivada ainda é atingido para $x = 1/\sqrt{3}$.

Outra forma de se observar isto é a seguinte: neste caso, temos novamente que $f'_{1,-h}(x) = 1 - 3x^2$ e, portanto, $f'_{1,-h}(-1/\sqrt{3}) = 0$. Assim, temos diretamente que $x = -1/\sqrt{3}$ é ponto de equilíbrio tipo sela.

O gráfico com o campo de direções das soluções assim obtidas vem logo abaixo:

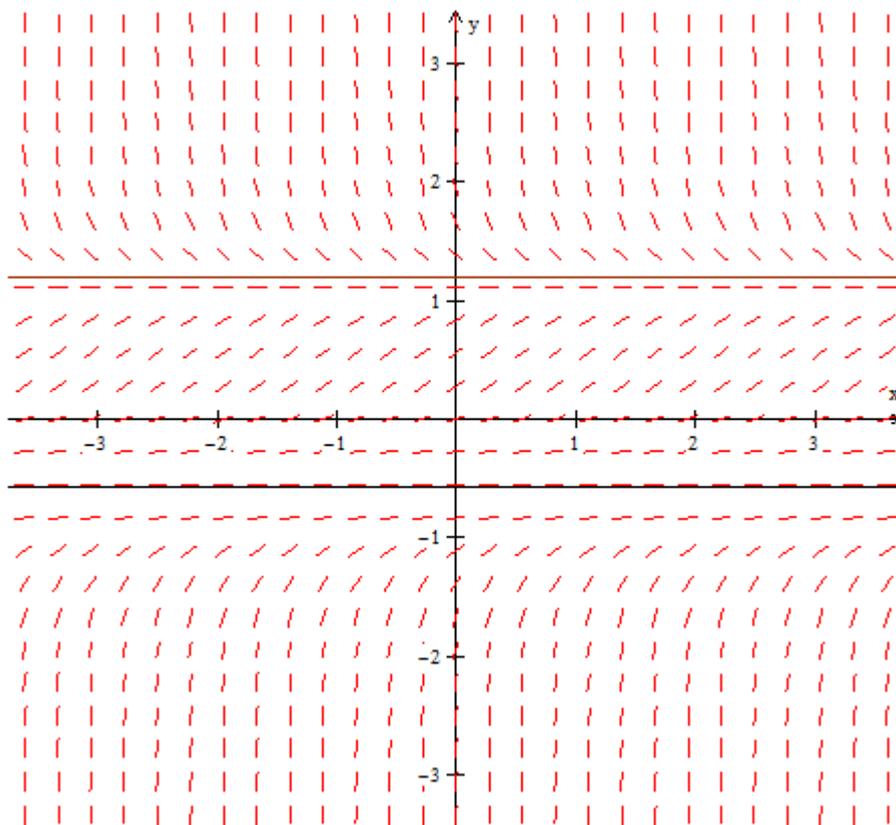


Figura 4.8 – Campo de direções para equação (4.2) para $b = -h$

A reta de fase correspondente é a que segue.



Figura 4.9 – Reta de fase da equação (4.2) para $b = -h$.

Agora, o caso $b < -h$. Nesse caso, é óbvio que o gráfico da Figura 4.1 “sobe” verticalmente de modo que o ponto de mínimo local da função fique acima do eixo dos x , sendo então que a equação (4.2) tem somente uma única raiz à direita de 1. O gráfico de x' por x neste caso segue abaixo. Deve ser observado que foi usado o valor $b = -1$ para a construção do gráfico a seguir.

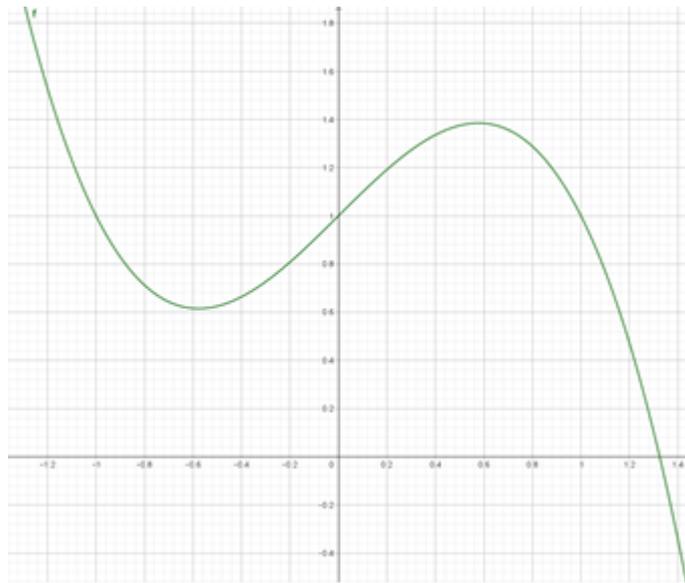


Figura 4.10 – Gráfico de x' por x dado por $x' = x - x^3 + 1$ (construído no Geogebra).

Pode ser concluído sem maiores dificuldades que para todo valor de $b < -h$, os gráficos de x' por x serão todos análogos ao de cima, e não haverá mudanças dinâmicas qualitativas além do fato do único valor de equilíbrio ocorrer para valores crescentes de x , proporcionais ao aumento de $|h|$. Qualquer dos pontos de equilíbrio nestes casos serão sempre um atrator.

Na sequência é ilustrado o campo de direções para o caso da última figura. Ainda, do comentário feito no parágrafo anterior, não haverá mudanças substanciais entre este gráfico e sua reta de fase para os gráficos e retas de fase relativas a qualquer valor de b que seja menor que $-h$.

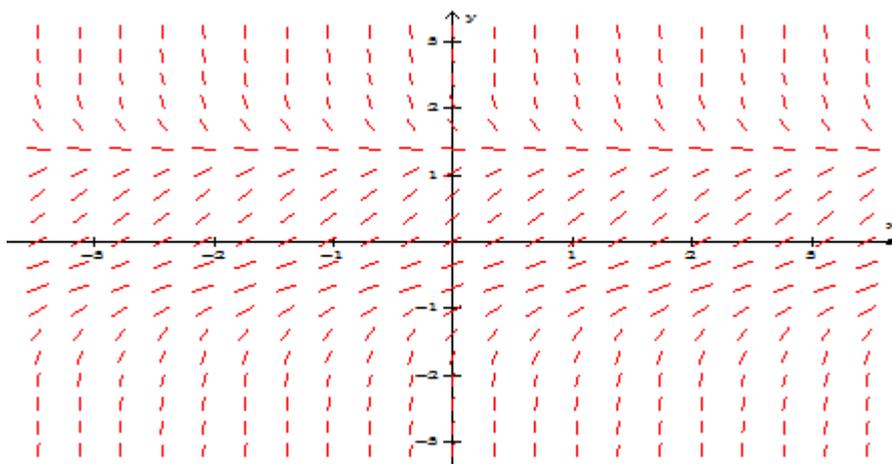


Figura 4.11 – Campo de direções para equação (4.2) para $b = -1$.

Para os valores de b nos casos $0 < b < h$, $b = h$ e $b > h$, os gráficos da derivada de x' versus x , os do campo de direções das soluções e retas de fase são muito semelhantes aos dos casos anteriores. Na sequência, esses gráficos e retas são colocados sem que haja a necessidade de repetição dos comentários feitos anteriormente (note a simetria entre os próximos casos e os anteriores em relação ao caso especial $b = 0$).

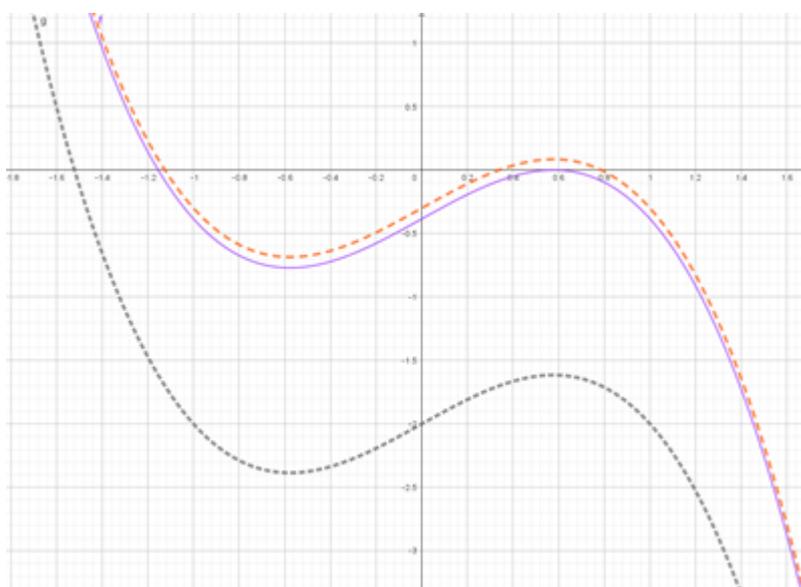


Figura 4.12 - os gráficos da derivada de x' versus x nos casos $0 < b < h$ (linha pontilhada vermelha), $b = h$ (linha contínua azul) e $b > h$ (linha pontilhada preta).

Todos os gráficos acima se referem à equação (4.2). O gráfico com traço vermelho é obtido da equação (4.2) para o valor $b = 0,3$. Os gráficos correspondentes para quaisquer valores de b no intervalo $]0; h[$ são análogos, tendo duas raízes no lado positivo da reta e uma única do lado negativo. O gráfico contínuo em azul é obtido da equação (4.2) quando se faz $b = h$; neste caso temos duas raízes, uma positiva e outra negativa. O gráfico pontilhado em preto se refere ao valor $b = 2$. Todos os valores de b maiores que h fornecem gráficos semelhantes a este, com uma única raiz negativa.

Dos gráficos acima, se obtém o comportamento do campo de direções para cada caso.

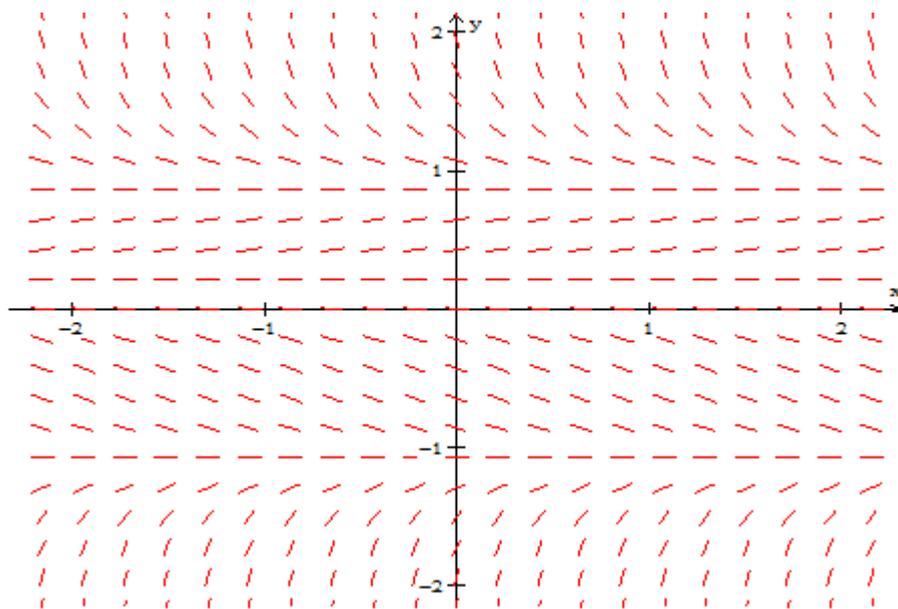


Figura 4.13 – Campo de direções da equação $x' = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b$ para $b = 0,3$.

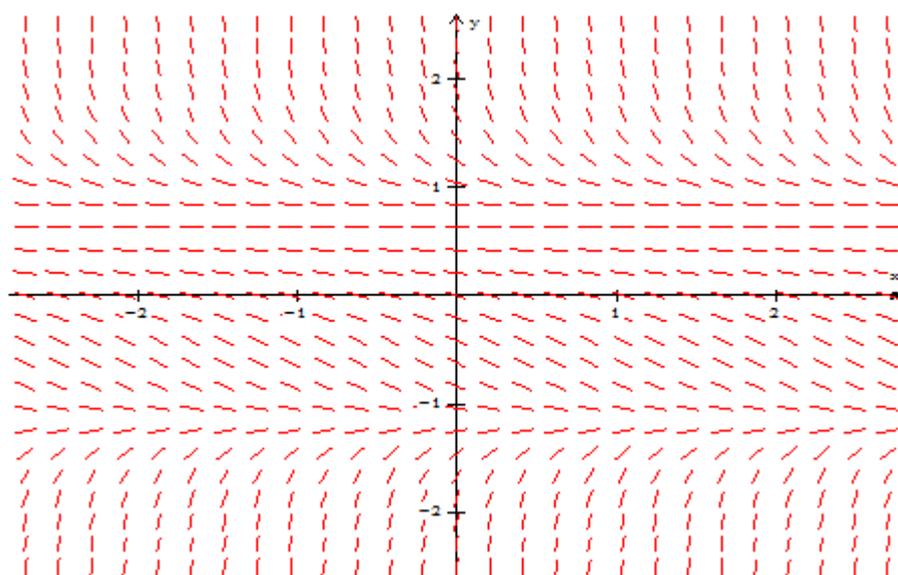


Figura 4.14 – Campo de direções da equação $x' = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b$ para $b = h$.

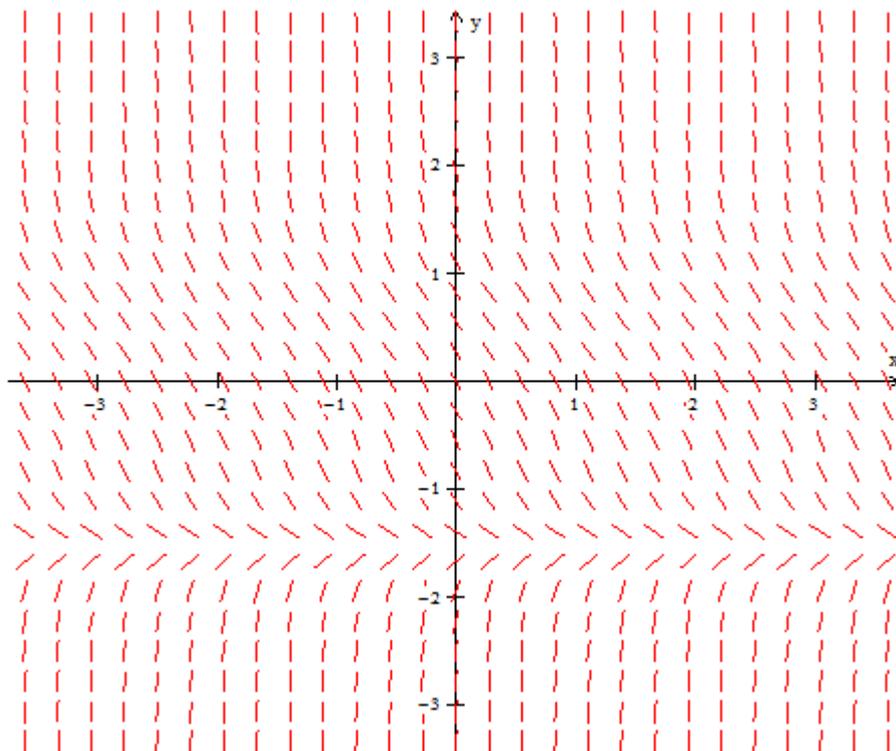


Figura 4.15 – Campo de direções da equação $x' = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b$ para $b = 2$.

As respectivas retas de fase seguem.



Figura 4.16 – Linha de fase para equação (4.2) para $b = 0,3$.

Nota-se que x_1 e x_3 são pontos estáveis e x_2 é instável.



Figura 4.17 – Linha de fase para equação (4.2) quando $b = h$.

Observe que agora a equação (4.2) possui dois pontos de equilíbrio, sendo um estável e outro ponto de sela.



Figura 4.18 – Linha de fase para equação (4.2) onde $b = 2$.

Com todas as informações obtidas acima, já é possível que se construa o diagrama de bifurcações para a família de equações (4.2). O diagrama de bifurcações é um gráfico de x por b . Este diagrama fornece os valores de x que são os pontos de equilíbrio para cada valor de b . Deve ser lembrado que os

pontos de equilíbrio em função de b são fornecidos, em cada caso, fazendo $x' = 0$ na equação (4.2), donde se obtém x como função (implícita) de b através da equação:

$$0 = f_{1,b}(x) = x - x^3 - b \quad (4.7)$$

Observe que é mais fácil colocar b em termos de x que o contrário; assim, a equação a ser trabalhada é

$$b = x - x^3 \quad (4.8)$$

Repare na semelhança entre esta equação e a equação (4.3): se naquela equação for trocado “ x ” por “ b ”, chega-se na equação (4.7); em outras palavras, o gráfico da equação (4.7), que tem b como função de x , é exatamente o mesmo que o gráfico na figura 4.1. Como a equação (4.6) determina o diagrama de bifurcações da equação (4.2), seu gráfico deve representar x no eixo vertical como função de b no eixo horizontal. Isto é obtido facilmente se fazendo uma reflexão do gráfico da figura 4.1 em torno da reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Desta forma, reunindo todas as informações coletadas pelas retas de fase, o diagrama de bifurcações para a família (4.2) é o que se segue abaixo:

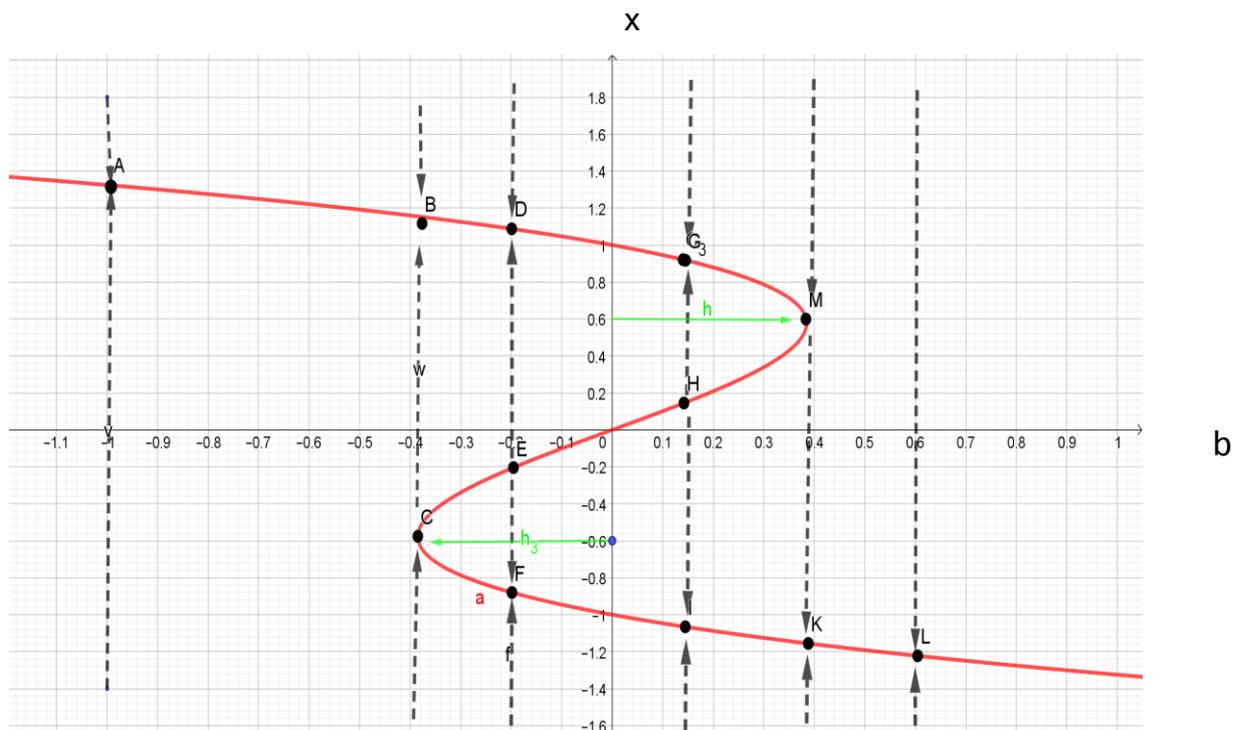


Figura 4.19 - Diagrama de bifurcação para $a = 1$.

Todos os pontos sobre o gráfico vermelho que estão à esquerda de $b = -h$ são de equilíbrio estável. O ponto A representa um desses pontos. Se $b = -h$, temos dois pontos de equilíbrio: o Ponto C, que é um ponto de sela e o ponto de equilíbrio estável dado por B. Para valores de b no intervalo $] -h; h[$, têm-se três pontos de equilíbrio: um ponto de equilíbrio estável como o ponto D ($x > 0$), um ponto de equilíbrio instável, como o ponto E ($x < 0$ se $b \in] -h; 0[$, $x = 0$ se $b = 0$ e $x > 0$ se $b \in] 0; -h[$), e um ponto de equilíbrio estável como o ponto F ($x < 0$). Se $b = h$, novamente se apresentam dois pontos de equilíbrio: o ponto de sela M ($x > 0$) e o ponto de equilíbrio estável K ($x < 0$). Para valores de $b > h$, o sistema apresenta apenas um ponto de equilíbrio estável, como o ponto L. Note como o diagrama consegue mapear todos os pontos de equilíbrio da família (4.3) conforme b varia.

Etapa 2

Nesta etapa pretende-se construir o diagrama de bifurcação da equação (4.1) no início deste capítulo no caso $a = 0$; obtem-se assim a nova família de equações a um parâmetro:

$$x' = f_{0,b}(x) = -x^3 - b \quad (4.9)$$

note que (4.9) é uma família a um parâmetro.

O objetivo é fazer uma análise do comportamento das soluções da família (4.3), análise esta que será feita com base nas variações possíveis dos valores de b . Inicialmente se faz $b = 0$ e tem-se a seguinte equação de 1º ordem.

$$x' = -x^3 \quad (4.10)$$

O gráfico de x' por x pode ser visto abaixo:

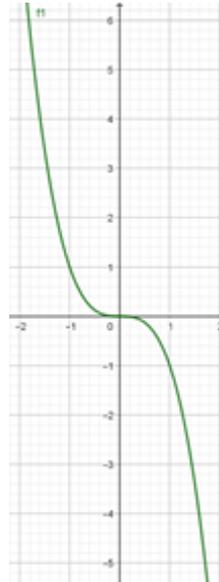


Figura 4.20 – Gráfico de x' por x dado por $x' = -x^3$ (construído no Geogebra).

O valores para o qual a curva intercepta o eixo x ocorrem onde a derivada é nula e corresponde a solução de equilíbrio. Para a equação (4.10), isso ocorre quando $x = 0$. Descreve-se agora o comportamento das soluções da equação (4.10).

Temos o seguinte quadro:

- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) > 0$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 0$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) < 0$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 0$;

De posse destas informações, pode-se concluir que o campo de direções (ver Boyce & Diprima, 2006, pág. 2) de solução da equação é como abaixo:

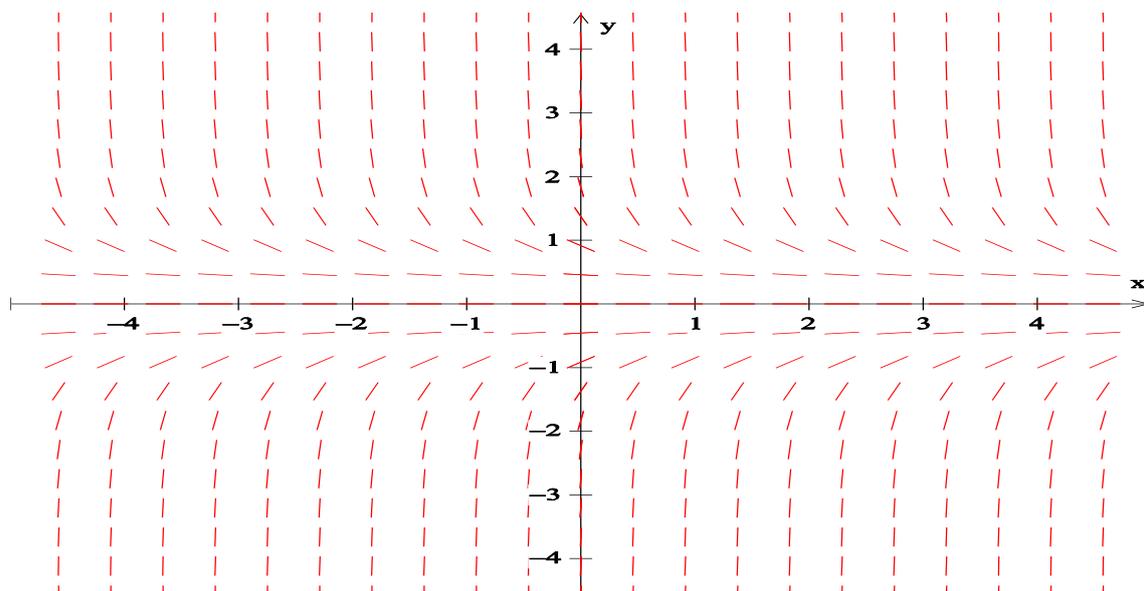


Figura 4.21 – Campo de direções para $x' = -x^3$, construído no Winplot.

Na figura acima, a solução de equilíbrio está em destaque em linha contínua. De todas as formas, a reta de fase de (4.10) é como abaixo:

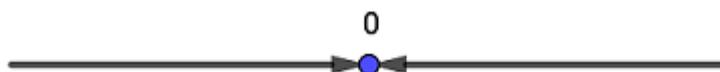


Figura 4.22 – Linha de fase da equação (4.10).

Assim, a conclusão é que 0 é uma solução de equilíbrio estável. Pode-se observar pelo gráfico (figura 4.20) que a equação (4.10) não possui ponto de máximo e/ou mínimo.

Analisa-se agora o caso em que $b = -1$ então:

$$x' = -x^3 + 1 \quad (4.11)$$

Pode ser afirmado que não haverá mudanças qualitativas em relação ao caso $b = 0$ ou ainda para $b < -1$. Veja abaixo o gráfico da respectiva equação:



Figura 4.23 – Gráfico de x' por x dado por: $x' = -x^3 + 1$ (construído no Geogebra).

Observa-se pelo gráfico acima que a EDO continua tendo apenas um ponto de equilíbrio, que por sua vez é estável (ou atrator). Esta solução ficou a direita do ponto $x = 0$, que era solução da igualdade $x' = -x^3$.

Segue agora a reta de fase para a equação (4.11):



Figura 4.24 – Reta de fase para $x' = -x^3 + 1$.

Nota-se que o ponto de equilíbrio “andou” para direita da solução $x = 0$, mas não houve mudanças qualitativas.

Segue abaixo o campo de direções para esta EDO:

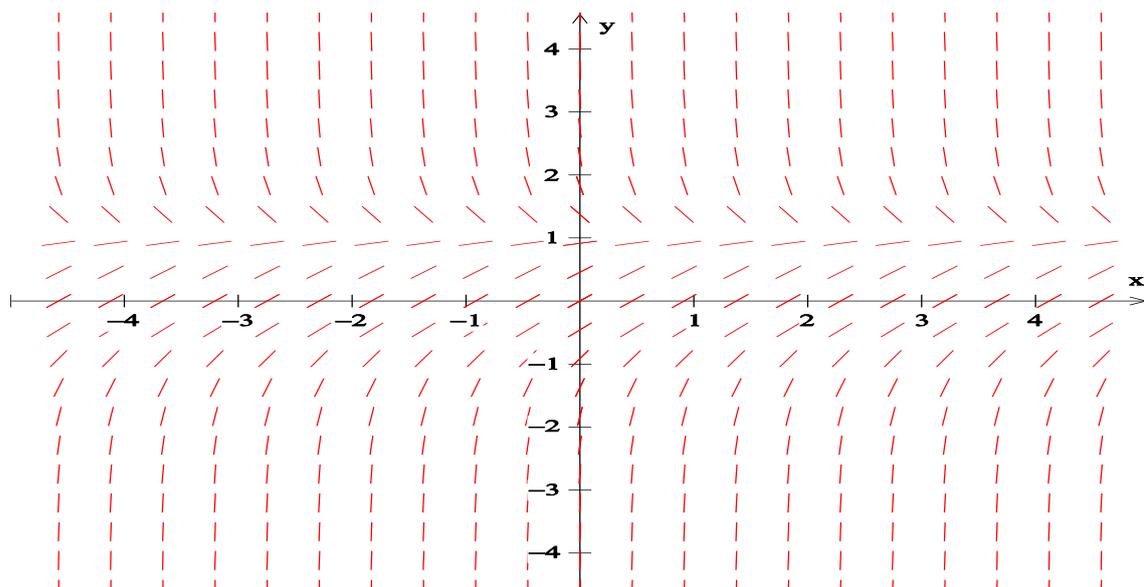


Figura 4.25 – Campo de direções da equação (4.11) (construído no Winplot).

Faz-se agora o estudo qualitativo para o caso $b = 1$, então a equação será:

$$x' = -x^3 - 1 \quad (4.12)$$

Veja abaixo o gráfico de x' por x para esta equação:



Figura 4.26 – Gráfico de x' por x dado por: $x' = -x^3 - 1$ (construído no Geogebra).

Observa-se que a solução de equilíbrio “andou” para esquerda de $x = 0$, mas não houve mudanças qualitativas.

O campo de direções e a reta de fase seguem abaixo:

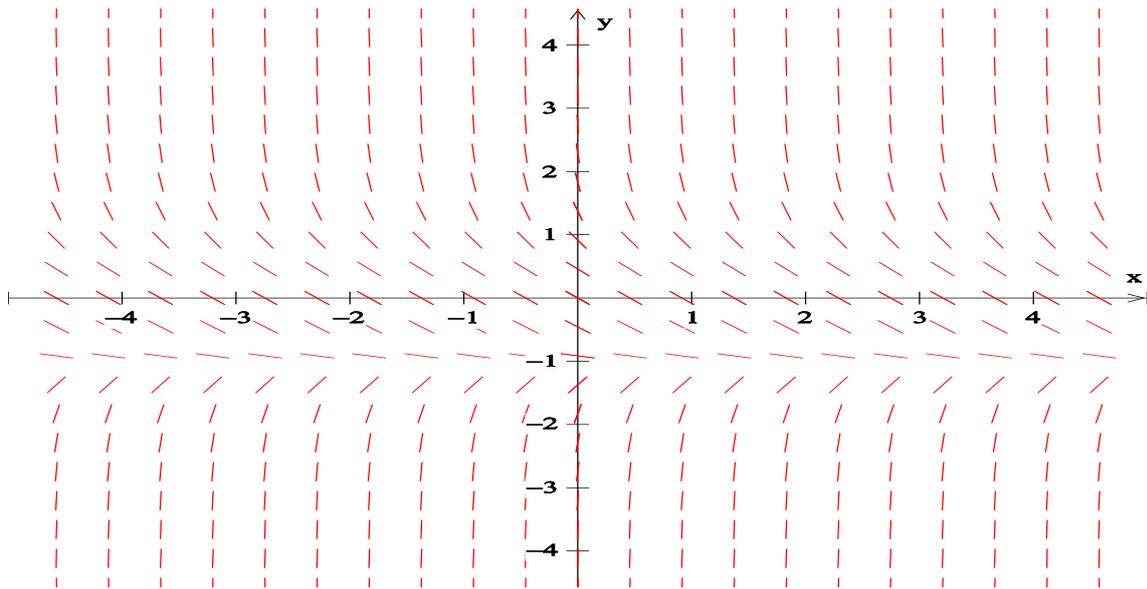


Figura 4.27 – Campo de direções da equação (4.12) (construído no Winplot).



Figura 4.28 – Reta de fase para $x' = -x^3 - 1$.

Pode-se afirmar que não há mudanças qualitativas para outros valores $b > 1$, a equação sempre terá apenas único ponto de equilíbrio, que é estável (ou atrator).

Abaixo o diagrama de bifurcação para equação (4.9):

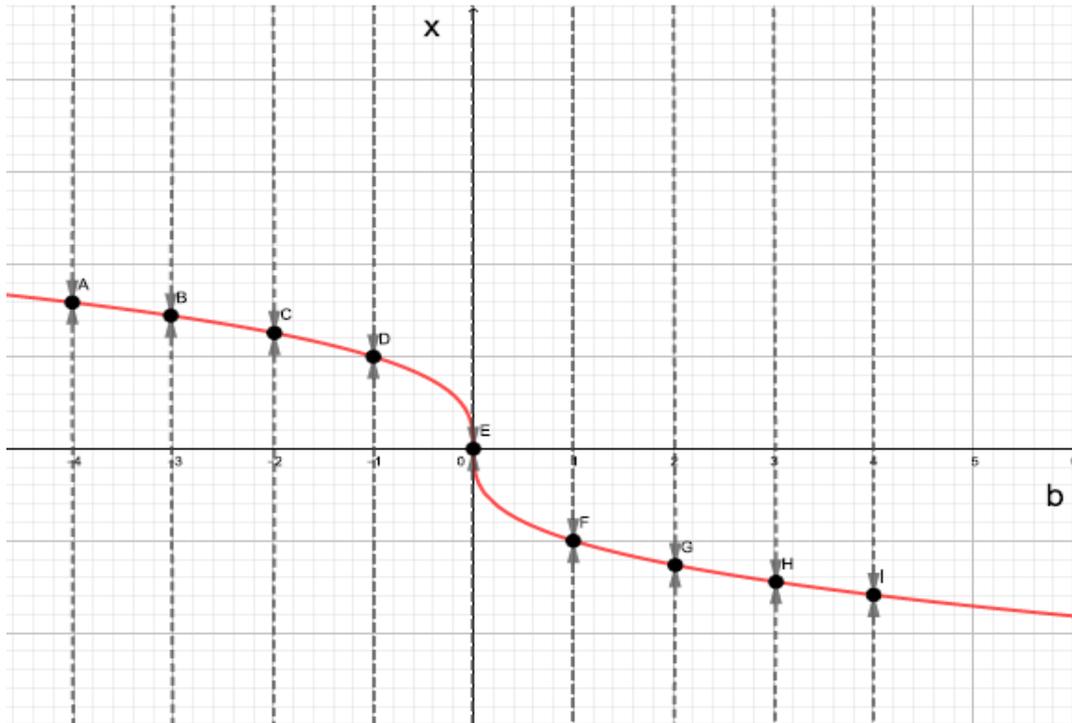


Figura 4.29 – Diagrama de bifurcação para $a = 0$.

Etapa 3

Nesta etapa será descrita qualitativamente a família de EDO's $x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b$, quando $a = -1$, de forma que a equação (4.1) se torna:

$$x' = f_{-1,b}(x) = -x - x^3 - b \quad (4.13)$$

note que novamente x' é uma família de EDO's a um parâmetro. Será feita uma análise a partir das variações possíveis nos valores de b . Se iniciou $b = 0$ e tem-se a seguinte equação de 1º ordem:

$$x' = -x - x^3 \quad (4.14)$$

Observe abaixo o gráfico de x' por x :

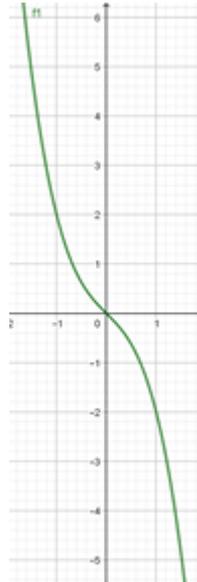


Figura 4.30 – Gráfico de x' por x dado por $x' = -x - x^3$ (construído no Geogebra).

Pode ser notado que 0 é a única raiz. Sendo assim 0 é o único ponto de equilíbrio, que no caso é estável.

Facilmente se constrói o campo de direções da equação; para isso, se usa o seguinte quadro:

- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) > 0$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 0$.
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) < 0$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para a solução de equilíbrio $x \equiv 0$.

O campo de direção da equação (4.14) é como segue:

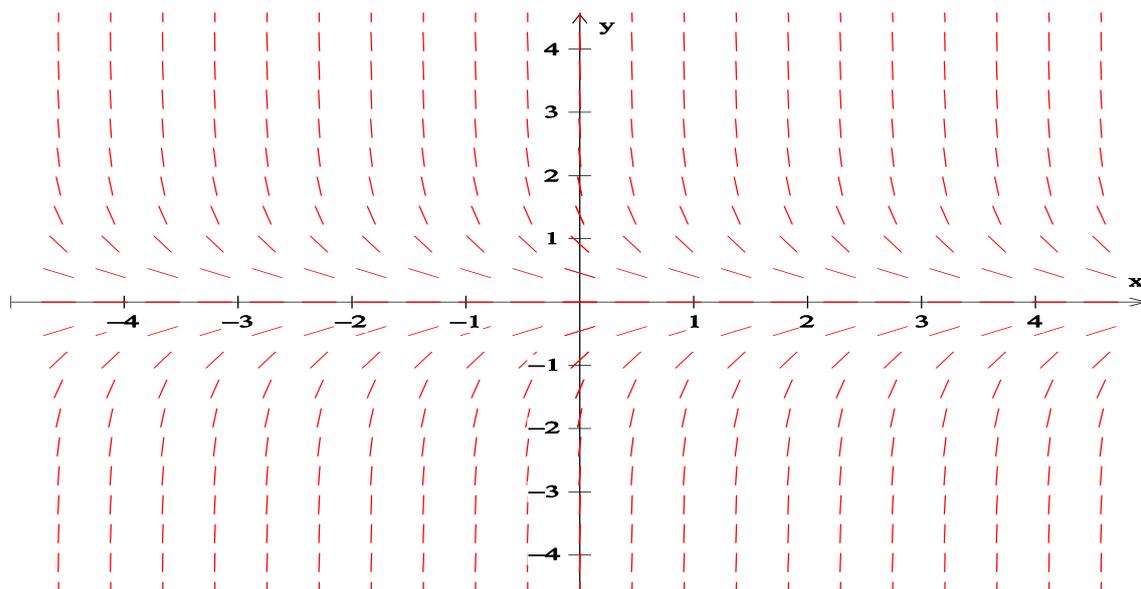


Figura 4.31 – Campo de direções para $x' = -x - x^3$, construído no Winplot.

A equação 4.14 não possui pontos de máximos e/ou mínimo; pode-se ver isso facilmente a partir do seu gráfico (figura 4.30).

A linha de fase da equação (4.14) é como segue:

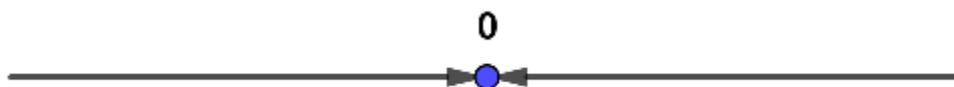


Figura 4.32 – Linha de fase da equação (4.14).

Sobre a análise qualitativa da equação quando $b = -1$, então:

$$x' = -x - x^3 + 1 \quad (4.15)$$

Como a equação não possui pontos de máximos e/ou mínimos ela não terá mudanças nas suas propriedades qualitativas para $b < -1$. Veja abaixo o gráfico da equação (4.15):

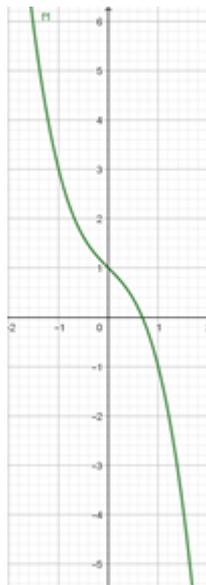


Figura 4.33 – Gráfico de x' por x dado por: $x' = -x - x^3 + 1$ (construído no Geogebra).

O campo de direções e reta de fase seguem abaixo:

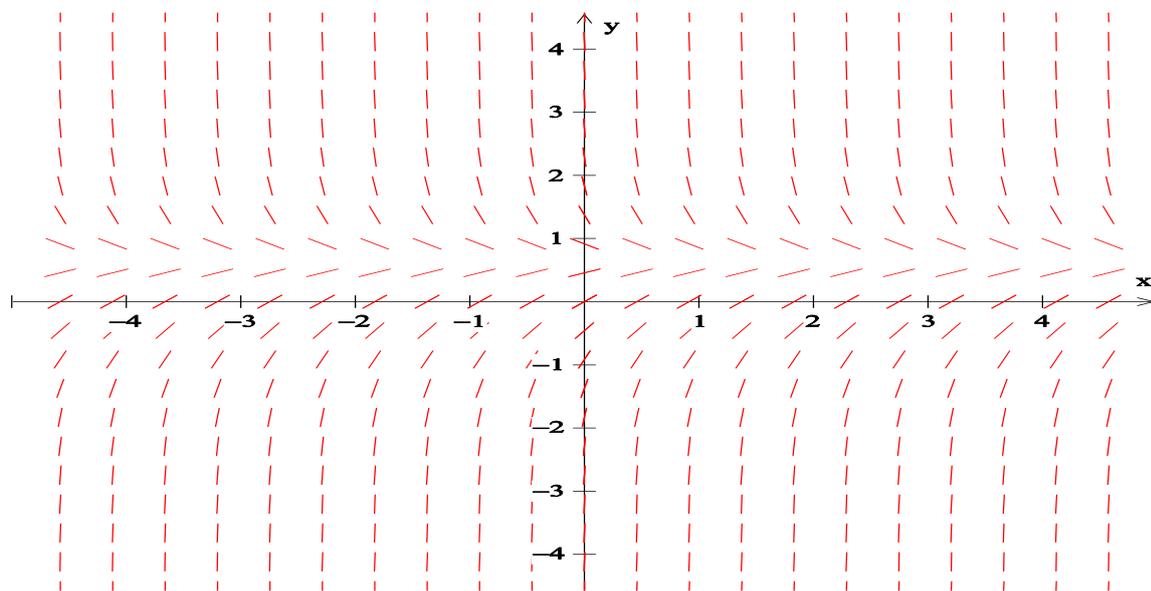


Figura 4.34 – Campo de direções para $x' = -x - x^3 + 1$ (construído no Winplot).

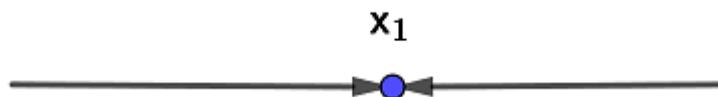


Figura 4.35 – Reta de fase quando $x' = -x - x^3 + 1$.

A respeito da descrição qualitativa para:

$$x' = -x - x^3 - 1 \quad (4.16)$$

Veja abaixo o seu respectivo gráfico:

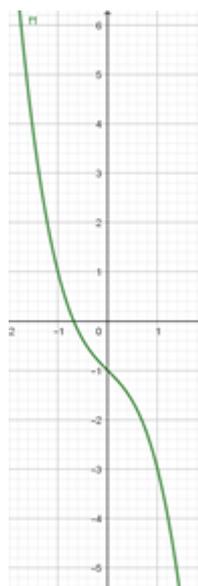


Figura 4.36 – Gráfico de x' por x dado por: $x' = -x - x^3 - 1$ (construído no Geogebra).

Veja agora o campo de direções para equação (4.16) e reta de fase seguem abaixo:

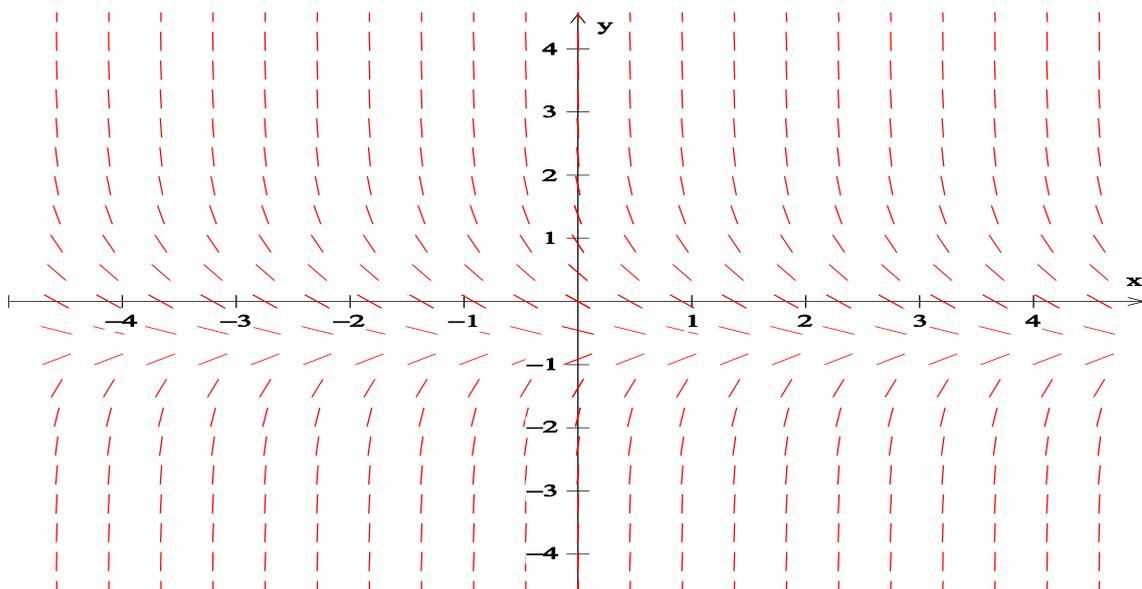


Figura 4.37 – Campo de direções para $x' = -x - x^3 - 1$ (construído no Winplot).



Figura 4.38 – Reta de fase da equação (4.16).

Pode-se afirmar que não há mudanças qualitativas para outros valores de $b > 1$, e a equação sempre terá apenas um ponto de equilíbrio que é estável (ou atrator).

Segue abaixo o diagrama de bifurcação para a equação (4.13):

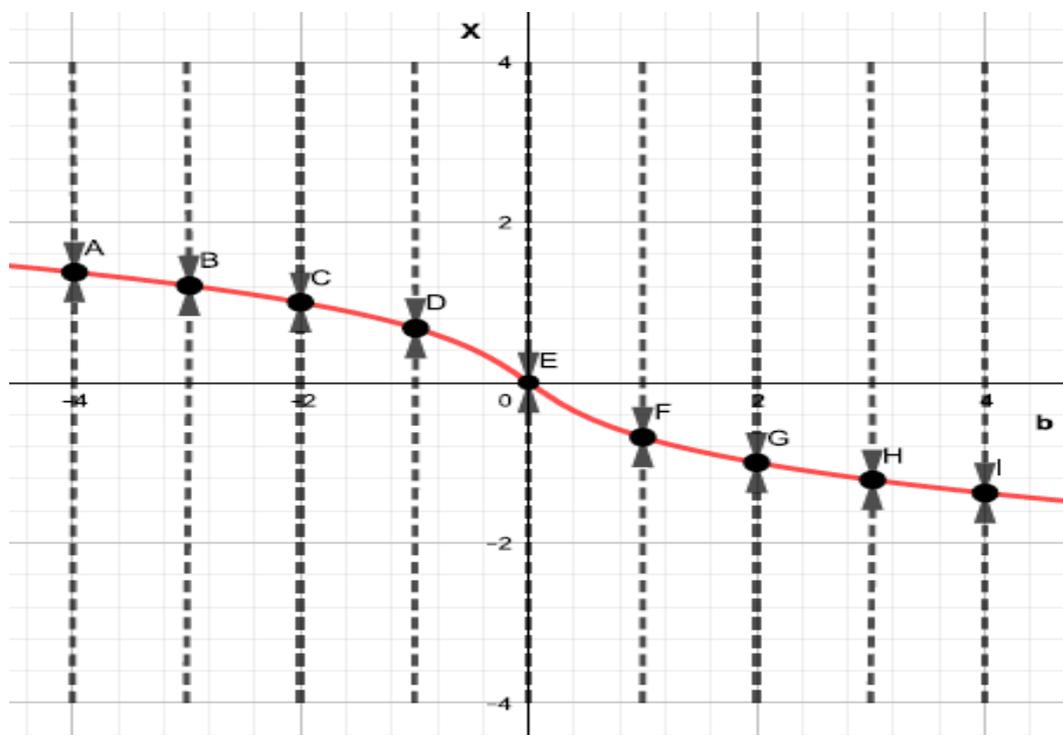


Figura 4.39 – Diagrama de bifurcação quando $a = -1$.

Etapa 4

Finalmente será realizado o estudo qualitativo da família de EDO's dada por (4.1) para valores de $a > 0$, e $a \neq 1$.

Para iniciar a análise toma-se $a = 2$. Têm-se

$$x' = f_{2,b}(x) = 2x - x^3 - b \quad (4.17)$$

Considerando $b = 0$ se obtém a equação.

$$2x - x^3 = x' \quad (4.18)$$

O gráfico de x' por x é o que segue:

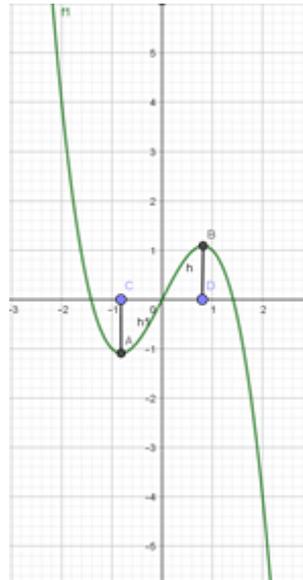


Figura 4.40 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 2x - x^3$ (construído no Geogebra).

A curva acima intercepta o eixo x em $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. Compare com o caso $a = 1$, no qual as raízes eram $0, -1$ e 1 .

Podemos descrever qualitativamente a situação da seguinte maneira:

- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) > \sqrt{2}$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv \sqrt{2}$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $0 < x(0) < \sqrt{2}$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv \sqrt{2}$, se afastando da solução de equilíbrio $x \equiv 0$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $-\sqrt{2} < x(0) < 0$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv -\sqrt{2}$, se afastando da solução de equilíbrio $x \equiv 0$;
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) < -\sqrt{2}$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv -\sqrt{2}$.

Veja abaixo o campo de direções para a equação (4.18):

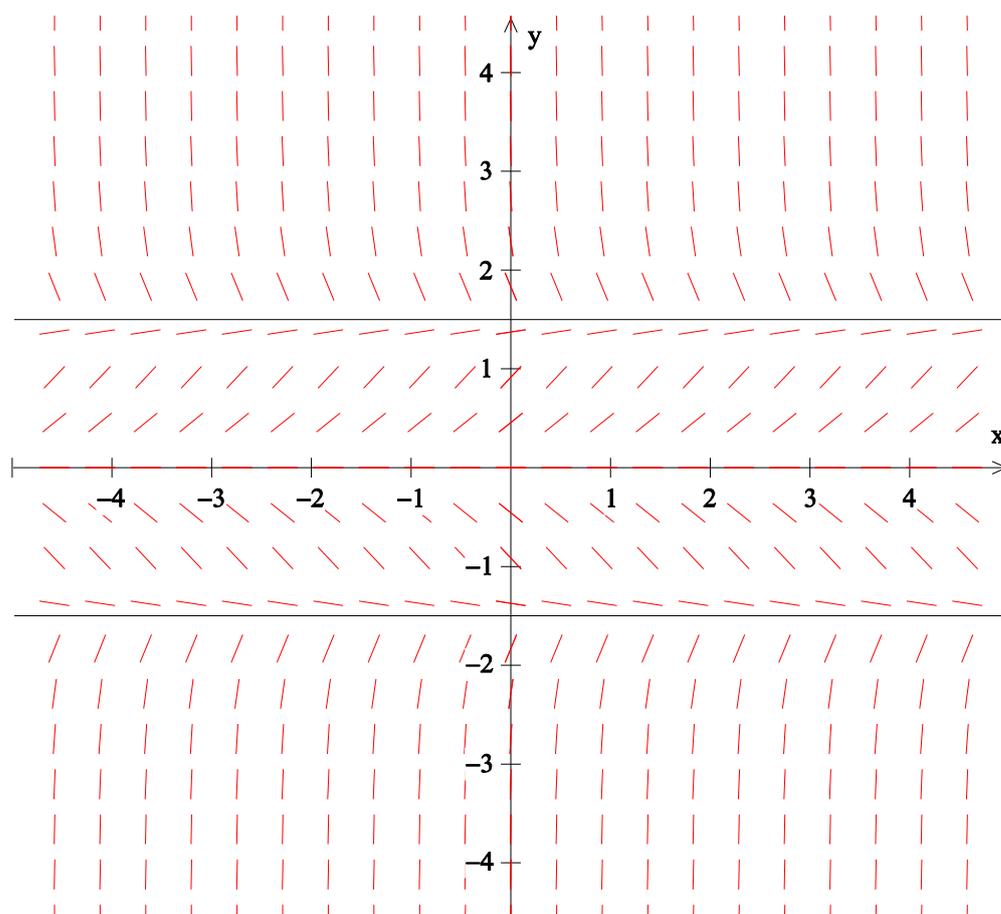


Figura 4.41 – Campo de direções para $x' = 2x - x^3$, construído no Winplot.

No gráfico acima, os pontos de equilíbrio estão em destaque em linhas horizontais contínuas. A reta de fase de (4.18) segue abaixo:

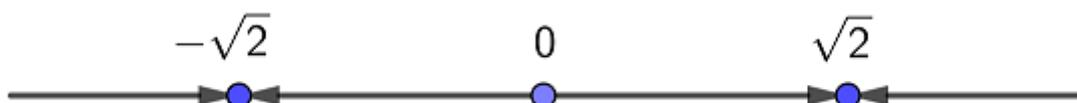


Figura 4.42 – Reta de fase para $x' = 2x - x^3$.

A conclusão é a de que $-\sqrt{2}$ é um ponto de equilíbrio estável, 0 é uma solução instável, e $\sqrt{2}$ também é estável.

Para entender mais claramente o comportamento qualitativo da família (4.17) e suas retas de fase para demais valores de b , é preciso encontrar os pontos de máximos e/ou mínimos locais da equação (4.18).

Seja $x' = F(x) = 2x - x^3$, tem-se que $F'(x) = 2 - 3x^2$ e $F''(x) = -6x$. As raízes de $F'(x)$ são $x = \pm\sqrt{2/3}$ e como $F''\left(\sqrt{2/3}\right) < 0$ e $F''\left(-\sqrt{2/3}\right) > 0$, se deduz que o ponto cujas coordenadas são $x = \sqrt{2/3}$ e $F(x) = 4/3\sqrt{2/3} = h$, corresponde ao ponto de máximo local e $x = -\sqrt{2/3}$ e $F(x) = -4/3\sqrt{2/3} = -h$, corresponde ao ponto de mínimo local. A quantidade h é de muita utilidade para a descrição do comportamento das soluções de equilíbrio. Deve ser lembrado também que a maior inclinação positiva das soluções no intervalo $0 < x(t) < \sqrt{2}$ é dada por h e a inclinação negativa de maior valor absoluto é $-h$, para as soluções no intervalo $-\sqrt{2} < x(t) < 0$.

Se em (4.17) for tomado valores de b tais que $|b| < h$, cada equação da família terá três pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis e um instável. Por exemplo, para $b = 0,2 < h$, o respectivo gráfico x' versus x da EDO é como segue:

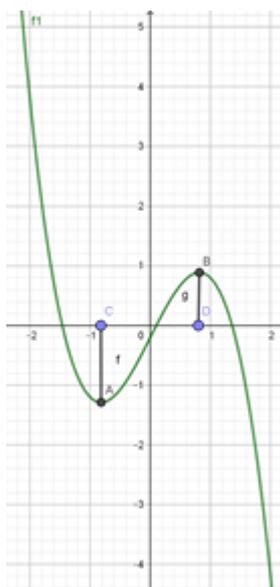


Figura 4.43 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 2x - x^3 - 0,2$ (construído pelo Geogebra).

Pode-se notar que as mudanças essenciais foram que os pontos de equilíbrio $x = 0$ (instável), e $x = -\sqrt{2}$ (estável), que foram exibidos em $b = 0$, se “aproximaram”, sendo que o primeiro “caminhou” para esquerda e o segundo

para direita. Denominando estes valores respectivamente por x_1 e x_2 , temos que $-\sqrt{2} < x_2 < x_1 < 0$; também, a solução estável no caso $b = 0$ correspondente a $x = \sqrt{2}$, “caminhou” para direita. Se este ponto for denominado x_3 , tem-se que $x_3 > \sqrt{2}$. Como pode ser deduzido facilmente, o deslocamento do gráfico no sentido vertical por uma quantidade $-b < h$ não resulta em uma mudança significativa na descrição qualitativa dos pontos de equilíbrio.

Atribuindo agora o valor $a = 3$, se obtém:

$$x' = f_{3,b}(x) = 3x - x^3 - b \quad (4.19)$$

Considerando $b = 0$, vem:

$$x' = 3x - x^3 \quad (4.20)$$

O gráfico de x' por x é o que segue:

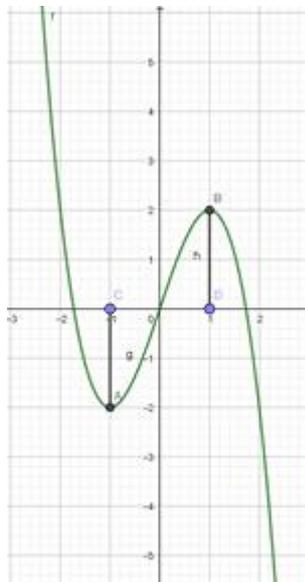


Figura 4.44 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 3x - x^3$, construído no Geogebra.

Os pontos de equilíbrio de (4.20) são $\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}$. A descrição qualitativa para os respectivos pontos da equação é como segue:

- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $x(0) > \sqrt{3}$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv \sqrt{3}$.

- Para todas as soluções $0 < x(0) < \sqrt{3}$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv \sqrt{3}$, se afastando da solução $x \equiv 0$.
- Para todas as soluções $x(t)$ tais que $\sqrt{3} < x(0) < 0$, a derivada é negativa e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv -\sqrt{3}$, se afastando da solução $x \equiv 0$.
- Qualquer solução $x(t)$ tal que $x(0) < -\sqrt{3}$, a derivada é positiva e as soluções tendem assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x \equiv -\sqrt{3}$.

O campo de direção para a equação (4.18) pode ser visto abaixo:

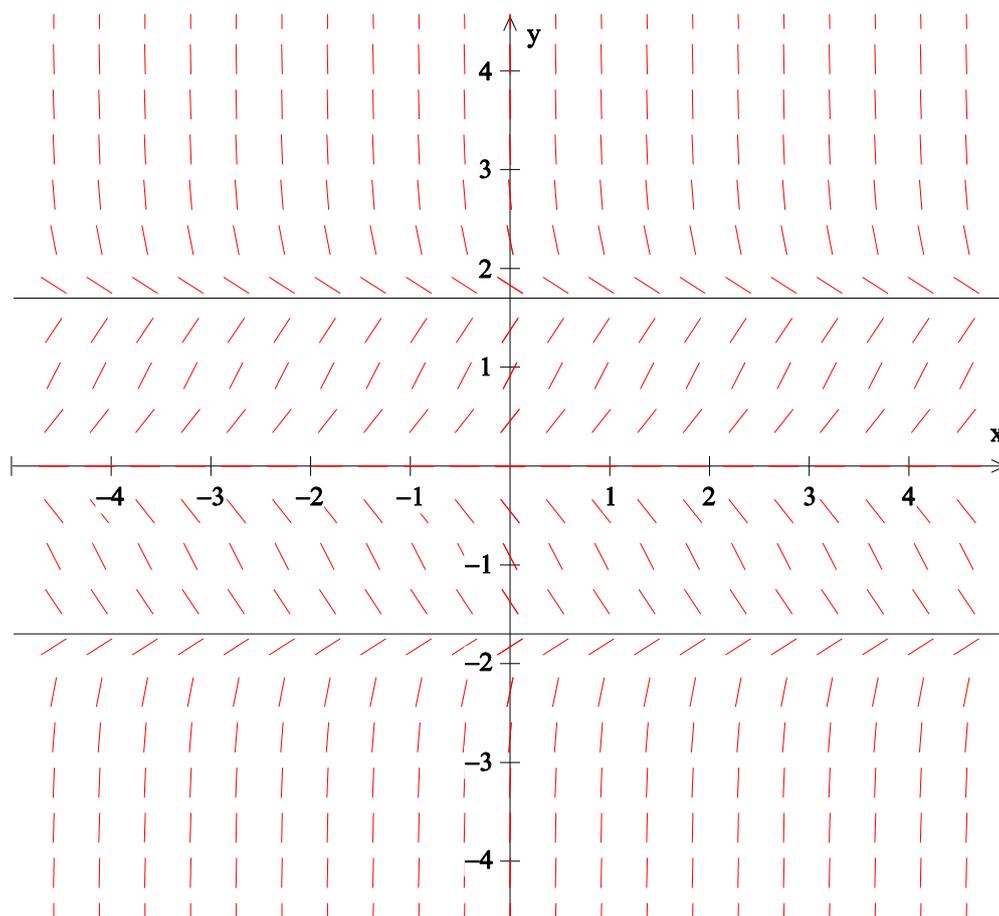


Figura 4.45 – Campo de direções para $x' = 3x - x^3$, construído no Winplot.

Na figura acima, para cada ponto de equilíbrio, foi desenhado uma linha horizontal contínua. A reta de fase pode ser vista abaixo:

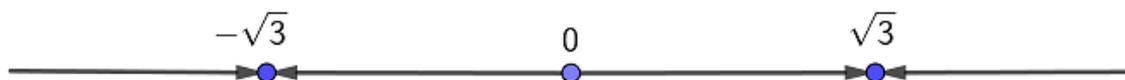


Figura 4.46 – Reta de fase para $x' = 3x - x^3$.

Seja $x' = F(x) = 3x - x^3$, tem-se que $F'(x) = 3 - 3x^2$ e $F''(x) = -6x$. Assim as raízes de $F'(x)$ são ± 1 e como $F'(1) < 0$ e $F'(-1) > 0$, pode-se dizer que $x = 1$ e $F(1) = 2 = h$, correspondente a um ponto de máximo local e $F(-1) = -2 = -h$, corresponde a um ponto de mínimo local.

Observa-se pelo gráfico que o ponto de maior inclinação da curva solução é h no intervalo $0 < x(t) < \sqrt{3}$ e $-h$ quando $-\sqrt{3} < x(t) < 0$.

Se em (4.19) se assumir $|b| < h$, a família I sempre terá três pontos de equilíbrio sendo dois estáveis e um instável. Como exemplo, vamos ilustrar o caso em que $b = 0,2 < h$ o respectivo gráfico da EDO é como segue:

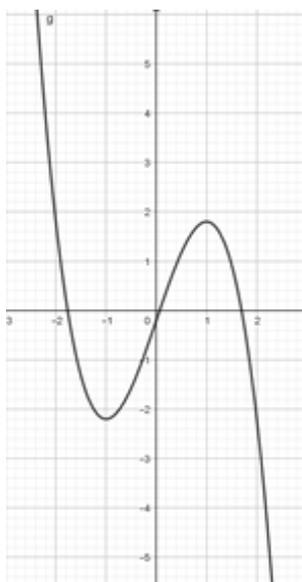


Figura 4.47 – Gráfico de x' por x dado por $x' = 3x - x^3 - 0.2$, construído no Geogebra.

Pode ser observado que o ponto de equilíbrio $x = -\sqrt{3}$ é estável, já a solução $x = 0$ afasta as soluções nas suas proximidades, portanto instável e que foram exibidos em $b = 0$ se “aproximaram”, sendo que o primeiro “caminhou” para esquerda e o segundo “andou” para direita Denotando novamente estes valores por x_1 e x_2 temos que $-\sqrt{3} < x_2 < x_1 < 0$, também é

fácil ver que a solução estável no caso $b = 0$ correspondente a $x = \sqrt{3}$ “caminhou” para direita. Se este ponto for chamado por x_3 , tem-se que $x_3 > \sqrt{3}$.

Quando $-b < h$, o gráfico “sobe” e só haverá um único ponto de equilíbrio estável que se localiza a direita de $\sqrt{3}$.

Na sequência, são plotados alguns diagramas de fase para alguns valores de $a > 0$. Estes diagramas são obtidos através das conclusões que foram obtidas a partir dos casos $a = 1, 2$ e 3 já feitos.

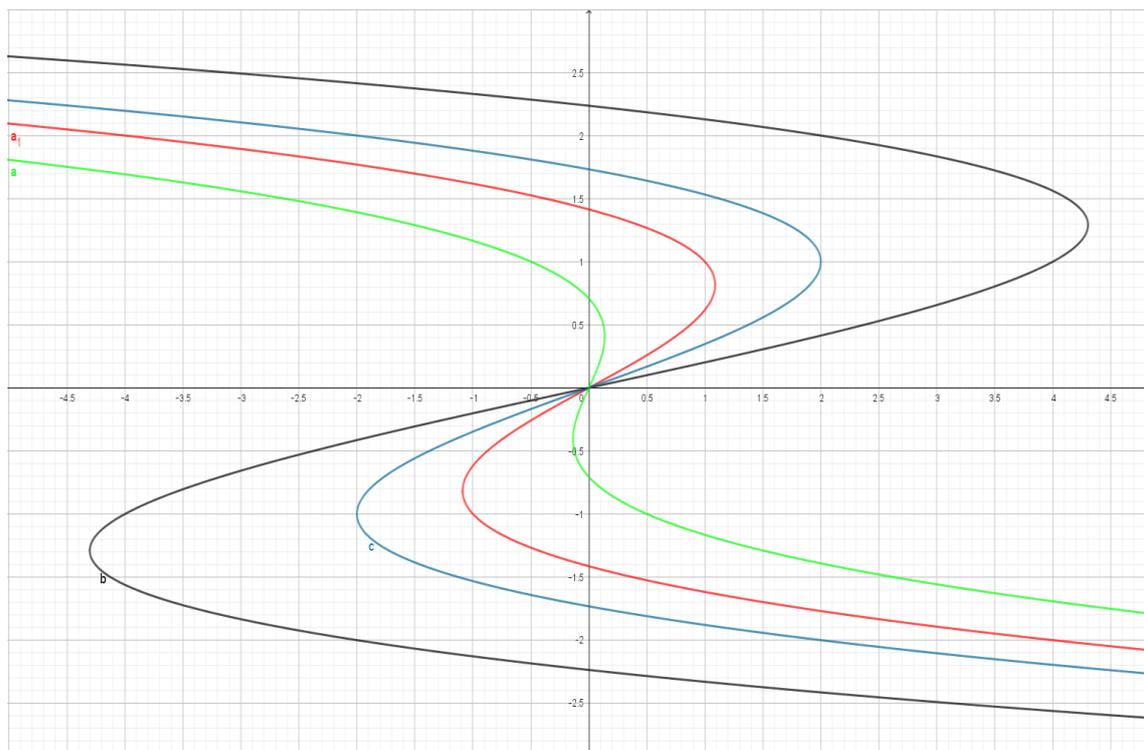


Figura 4.48 - diagramas de fase de $x' = a \cdot x - x^3 - b$ para os seguintes valores de a : 0.5 (curva verde), 2 (curva vermelha), 3 (curva azul) e 5 (curva preta).

Os diagramas de fase se referem a $x' = a \cdot x - x^3 - b$ para os seguintes valores de a : 0.5 (curva verde), 2 (curva vermelha), 3 (curva azul) e 5 (curva preta). O aspecto do diagrama de fases para demais valores de a positivos são semelhantes aos apresentados acima; conforme a aumenta, os interceptos do diagrama com o eixo x se afastam da origem, sendo esta sempre um ponto de equilíbrio.

Outro aspecto interessante a ser notado é o seguinte: conforme dito anteriormente, os diagramas de fase no plano x por b podem ser obtidos através da plotagem da equação

$$b = ax - x^3 = x \cdot (a - x^2)$$

Donde é claro que o diagrama interceptará o eixo vertical x para $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{a}$ (lembre-se que isto faz sentido para cada $a > 0$). Fazendo $F(x) = ax - x^3$ se obtém $F'(x) = a - 3x^2$ e $F''(x) = -6x$, a partir de onde se conclui que os valores de máximo e mínimo de $F(x)$ são dados, respectivamente, pelos pontos $\left(\sqrt{\frac{a}{3}}; 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right)$ e $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}; -2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right)$. Assim, tomando $h(a) = 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$, $a > 0$, temos que, uma vez fixado a positivo, para valores de b tais que $-2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2} < b < 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$ existirão três pontos de equilíbrio, dois estáveis e um instável, para valores de b com $b > 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$ e $b < -2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$ existirá apenas um ponto de equilíbrio estável e para os valores $b = \pm 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$ existirão dois pontos de equilíbrio, um estável e o outro de sela. Isto conclui a análise da família de equações (4.1) em termos de seus parâmetros livres a e b .

Etapa 5

Vai ser agora analisado qualitativamente a equação (4.1) quando $a < 0$ e $a \neq -1$. Sejam $f(x) = ax - x^3$ e $f'(x) = a - 3x^2$, como as raízes de $f'(x) \notin \mathbb{R}$, segue que $f(x)$ não possui pontos de máximos e/ou mínimos, pode-se notar também que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo assim a função é decrescente em \mathbb{R} e ela cruza o eixo x uma única vez, com isso ela possui apenas um ponto de equilíbrio que é estável.

Etapa 6

Nesta altura é interessante fazer um diagrama no plano a versus b , de forma que para cada região do plano fique explicito quantos pontos de equilíbrio existem para os valores de a e b para pontos naquela região ou sobre uma curva. Baseado no estudo feito acima, se obtém o seguinte diagrama.

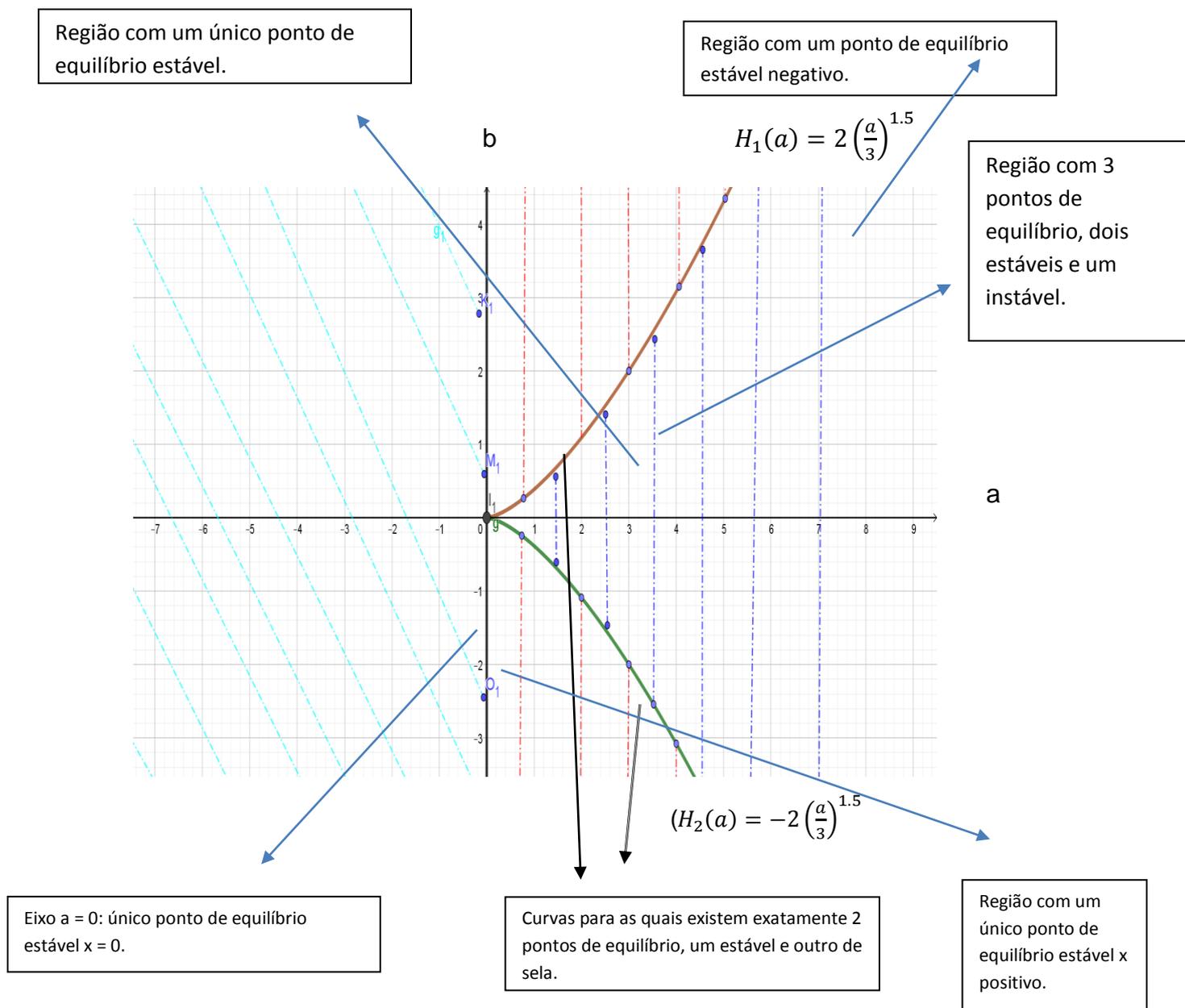


Figura 4.49 – Diagrama no plano b versus a .

Se $a > 0$, para a região dos pontos (a, b) em que $H_2(a) < b < H_1(a)$ (região hachurada azul), existem três pontos de equilíbrio, um instável e dois estáveis. As funções $H_1(a) = 2\left(\frac{a}{3}\right)^{1.5}$ e $H_2(a) = -2\left(\frac{a}{3}\right)^{1.5}$ são obtidas através de uma análise semelhante àquela feita na etapa 4 acima, no cálculo de $h(a)$.

Na região dos pontos (a, b) para os quais $a > 0$ e $b > H_1(a)$ (região hachurada de vermelho acima da curva $H_1(a)$ a equação (3.1) possui apenas um ponto de equilíbrio estável $x < 0$, enquanto que na região dos pontos (a, b) para

os quais $a > 0$ e $b < H_2(a)$ (região hachurada de vermelho abaixo da curva $H_2(a)$) a equação (3.1) possui apenas um ponto de equilíbrio estável $x > 0$,

Para os valores dos parâmetros a e b cujos pontos (a, b) recaem sobre os gráficos das curvas $H_1(a)$ e $H_2(a)$ a equação (4.1) tem exatamente 2 pontos de equilíbrio, um estável e o outro de sela. Já para qualquer valor do parâmetro b quando $a = 0$, se tem um único ponto de equilíbrio estável, correspondente a $x = 0$.

Para os valores do parâmetro a negativos, a equação (4.1) apresenta apenas um ponto de equilíbrio estável, independentemente do valor de b .

A obtenção do diagrama a versus b como acima é muito importante por diversos aspectos. Um deles se apresenta na situação em que se tem a possibilidade da escolha dos parâmetros, de modo a se ter o controle do processo representado pela família (4.1). Esta escolha permite que o processo evolua de acordo com prioridades pré-estabelecidas. Outra situação importante é a de se considerar a confiabilidade do modelo obtido experimentalmente para a representação de um processo. Por exemplo, se os valores obtidos dos parâmetros forem tais que ambos, $|a|$ e $|b|$, sejam muito pequenos, de modo que $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ esteja próximo de zero, o modelo assim obtido é pouco confiável. De fato, a condição implica que está sendo considerado um par de parâmetros próximos do ponto $(0,0)$ no diagrama acima. Mais exatamente, este par de parâmetros se encontra dentro de um círculo de raio muito pequeno e centro na origem. Este círculo intercepta todas as diferentes regiões no diagrama acima, cada uma representando uma situação diferente no que se refere aos pontos de equilíbrio. Qualquer pequeno erro na estimação desses valores poderia “jogar” um ponto de uma região para outra em que o comportamento futuro do sistema previsto pelo modelo obtido seja totalmente diferente daquele observado. Esses erros são próprios dos métodos estatísticos utilizados na estimação dos valores (desvios), além do fato de poder se originar de arredondamentos dos métodos numéricos envolvidos. Em suma, pode-se dizer que a família de equações (4.1) dada no início do capítulo apresenta grande sensibilidade na variação dos parâmetros que estejam próximos da origem do diagrama.

Capítulo 5: Conclusões

Neste trabalho foi estudado o comportamento qualitativo da dinâmica de uma família polinomial de EDO's de 1ª ordem, autônoma, com dois parâmetros reais livres, sendo um deles o termo independente no polinômio, se considera como variável a quantidade dependente da equação. Este estudo foi centrado nos valores dos pontos de equilíbrio de acordo com a variação dos parâmetros. As ferramentas matemáticas utilizadas para tal estudo foram as teorias elementares das funções reais e do cálculo diferencial para uma variável real. A metodologia da pesquisa foi baseada em estudos teóricos e aplicados por parte do orientado, discussões esporádicas entre orientado e orientador e simulações gráficas. A importância de tal estudo reside no fato de que tais equações aparecem como modelo natural de vários fenômenos em diversas áreas do conhecimento, principalmente na biomatemática e ecologia. Além disso, tais famílias de equações tem a propriedade da genericidade (ver Smale et al., 2004, cap. 5), o que torna seu estudo de alta relevância sob o ponto de vista teórico dos sistemas dinâmicos. A seguir, são listados alguns tópicos de sugestões como futuro trabalho:

- A extensão do estudo feito aqui para uma família de EDO's polinomiais de grau maior que 3;
- Fazer um estudo com famílias polinomiais com dois parâmetros livres, sendo que ambos são coeficientes que multiplicam a variável dependente;
- O estudo da equação não-autônoma: $x' = x - x^3 - b \cdot \text{sen}(2\pi t)$; tal equação é importante no estudo do crescimento de populações com colheita sazonal (Smale et al., 2004, pág. 16).

Referências Bibliográficas

Allman, E. S.; Rhodes, J. A.; **Mathematical Models in Biology – An Introduction**; Cambridge: Ed. Cambridge University Press, 2004.

Bassanezi, R. C.; **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**; São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

Blanchard, P.; Devaney, R. L.; Hall, G. R.; **Differential Equations**; 4^a ed. Boston: Ed. Cengage Learning, 2011.

Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**; 9^a ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2006.

Devaney, R.; **A First Course in Chaotic Dynamical Systems (Theory and Experiments)**; New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

Figueiredo, D. G.; Neves, A. F.; **Equações Diferenciais Aplicadas**, Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária IMPA, 2001.

Simmons, G. F.; **Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1**; São Paulo: Makron Books, 1987.

Smale et al; **Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos**; 2^a ed. USA: Ed. Elviesier, 2004.

Stewart, J. **Cálculo, vol. 1**; 7^o ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Zill, D. G.; **Equações Diferenciais – Com Aplicações em Modelagem**; 1^a ed., São Paulo: Ed. Cengage Learning, 2011.