Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

Subprojeto de Matemática

Aplicações no Winplot para Ensino Médio

Equipe PIBID – UFBA – Matemática

Salvador – Bahia

2009

Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

Subprojeto de Matemática

Aplicações no Winplot[1] para o Ensino Médio

Material desenvolvido pelos bolsistas do PIBID – UFBA – Matemática sob orientação da professora Eliana Prates Soares para a oficina "Aplicações no Winplot para o Ensino Médio" apresentada no XII Encontro de Matemática da UFBA.

Salvador – Bahia

2009

[1] Software gratuito disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.

P I B I D – U F B A – M a t e m á t i c a

www.pibidmatematica.hd1.com.br

Coordenadora

Professora Eliana Prates Soares – Departamento de Matemática da UFBA

Bolsistas

Bruno César Conceição dos Santos

Calebe Miranda da Silva

Caroline Martins da Silva Sabá

Cristiane dos Santos Pedrosa

Danilo de Jesus Ramos

Dimas Oliveira Pedreira

Felipe Carlo de Freitas Pinto

Jeidsan Alcântara da Conceição Pereira

Juliane Fonseca de Oliveira

Julio César Carvalho Pereira

Luciano de Souza Cerqueira Junior

Marcus Vinicius Oliveira Lopes da Silva

Patrícia Nascimento Fernandes

Renata de Moura Issa Vianna

Rhuliane Mendonça da Silva

Ruy Pereira da Paz Jr.

Suede Santos Barbosa

Tâmara Paiva Santiago

Técio Santos Pellegrino

(Todos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFBA)

Sumário

01 – Funções Afins **06**

01.1 – O gráfico de uma função afim 06
01.2 – Coeficiente angular da reta ou taxa de variação da função 06
01.3 – Coeficiente linear da reta que é gráfico de uma função afim 07

02 – Funções Quadráticas **08**

02.1 – O gráfico de uma função quadrática 08
02.2 – O vértice da parábola que é gráfico de uma função quadrática 09
02.3 – A imagem de uma função quadrática 09
02.4 – Zeros de uma função quadrática 10
02.5 – Sinal de uma função quadrática 10
02.6 – Coeficientes da função quadrática 10

03 – Funções exponenciais e logarítmicas **11**

03.1 – Os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas 11
03.2 – Crescimento e decrescimento 11
03.3 – Relação entre as funções $f(x)=a^x$ e $g(x)=\log_a x$ 12

04 – Função Modular **13**

04.1 – O gráfico 13
04.2 – Usando o módulo para obter outras funções 13

05 – Trigonometria **15**

05.1 – O círculo trigonométrico 15
05.2 – Funções trigonométricas 16

06 – Transladando o gráfico de uma função na direção do eixo OY **17**

07 – Transladando o gráfico de uma função na direção do eixo OX **17**

08 – Exercícios extras **18**

Funções Afins

I – O gráfico de uma função afim

Uma função f: R $\rightarrow$ R, dada por $f(x) = ax + b$, com a e b números reais, é o que chamamos de função afim.

Para esboçar o gráfico de uma função afim e pontos onde corta os eixos coordenados, usando o Winplot, por exemplo, a que é dada por $f(x) = 2x + 6$:

1) Use os comandos **Janela → 2 dim → Equação → Explicita**;
2) Digite **2x + 6** e clique em **ok**;
3) Represente o ponto $P_1 = (-3, 0)$, utilizando os comandos **Equação → Ponto → (x, y),** digite em **x =** -3 e em **y =** 0, clique em **ok.** Use o mesmo processo para o ponto $P_2 = (0,6)$.

Obs.: De modo geral, a reta que é gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, corta os eixos Ox e Oy, nos pontos $P_1 = (-b/a, 0)$ e $P_2 = (0, b)$, respectivamente.

4) Acrescente mais uma função ($f(x) = 4x - 5$), utilizando os comandos **Equação Inventário** (ou Ctrl + I) → **dupl.**

(Feche a janela).

II – Coeficiente angular da reta ou taxa de variação da função afim

Sejam as funções f: R $\rightarrow$ R, dadas por $f(x) = ax + 2$.

Variando a constante a em R obtemos retas diferentes, mas qual será o resultado dessa variação?

Vamos representar essas funções no plano cartesiano utilizando o software Winplot.

1) Utilize os comandos **Janela → 2 dim → Equação → Explicita**;
2) Digite $ax + 2$ e clique em **ok**;

Vamos agora criar uma animação variando a constante a em um intervalo de R e verificar o que acontece com o gráfico da função.

3) Utilize os comandos **Anim** $\rightarrow$ **Parâmetros A -W…**;
4) Escolha o parâmetro **A**, utilize a barra de rolagem para variar o parâmetro **A**, e verifique o que ocorre com o gráfico de *f*.

Obs.: Note que quando **A** percorre o intervalo $[-5, 0[$, a reta apresenta ângulo de inclinação obtuso, mas quando **A** varia em$]0, 5]$ a reta apresenta ângulo de inclinação agudo. Quando **A** = 0, temos que a reta é paralela ao eixo *Ox***.**

5) Para fazer a constante variar automaticamente clique em **aut. rev.** (Para interromper a animação clique em S).

Vamos agora representar uma família de retas da função *f*.

6) Use os comandos **Equação** $\rightarrow$ **Inventário**;
7) Clique em **família** e escolha parâmetro **A**, passos **5** (o número de passos é a quantidade de retas a serem geradas) e clique em **definir**;

Observe que todas as retas desta família se cortam no ponto (0,2), e distinguem-se apenas pelo ângulo de inclinação.

Para desdefinir a família, use os comandos **Equação** $\rightarrow$ **Inventário (Ctrl + I)**, clique em **família**, depois em **desdefinir**.

(Feche a janela)

III – Coeficiente linear da reta que é gráfico de uma função afim

Sejam as funções f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x + b$.

Fazendo a constante b variar em $\mathbb{R}$, obtemos retas distintas, mas como será que se comportam estas retas?

Vamos novamente representar as retas com o Winplot e observar o que acontece.

1) Use os comandos **Janela** $\rightarrow$ **2 dim** $\rightarrow$ **Equação** $\rightarrow$ **Explicita;**
2) Digite 3x + *b* e clique em **ok**;

Criemos uma animação para ver o que acontece com as retas.

3) Use os comandos **Anim** → **Parâmetros A – W…**;
4) Escolha o parâmetro **B,** utilize a barra de rolagem para fazer **B** variar e verifique o que ocorre com o gráfico de *f*.

Observe que à medida que *b* varia em R, a reta que é gráfico de *f*, é transladada para cima (ou, equivalentemente, para a esquerda) quando *b* é positivo, e é transladada para baixo (ou, de modo equivalente, para a direita) quando *b* é negativo. Quando *b* é igual à zero, a reta intersecta a ambos os eixos *Ox* e *Oy*, isto é, $(0,0) \in$ graf(*f*).

Vamos representar uma família de retas definidas por *f*.

5) Use os comandos **Equação** → **Inventário**;
6) Clique em **família** e escolha parâmetro **B**, passos 5 e clique em **definir**;

Para desdefinir a família, use os comandos **Equação** → **Inventário**, clique em **família**, depois em **desdefinir**.

Observe que todas as retas desta família são paralelas, i.e., $\bigcap_{i \in I} r_i = \phi$ onde r_i representa a i-ésima reta que é definida por *f* e I é um conjunto de índices.

(Feche a janela)

Funções Quadráticas

I – O gráfico de uma função quadrática

Uma função *f*: R → R, dada por $f(x) = h + bx + $ c, com *a, b* e *c* números reais e $a \neq 0$, é o que chamamos de função quadrática.

Vamos representar no Winplot a função y = -x²/4:

1) Use os comandos **Janela** → **2 dim** → **Equação** → **Explicita**;
2) Digite –x^2/4 e clique em **ok**;

Qual o sinal de a e qual a concavidade da parábola (através do gráfico)?

3) Agora repita o mesmo exercício para a função $y = x^2/4$.

Obs.: $a > 0$ implica CVC (Concavidade Voltada para Cima) e $a < 0$ implica CVB (Concavidade Voltada para Baixo).

(Feche a janela).

II – O vértice da parábola que é gráfico de uma função quadrática

Seja a função dada por $y = x^2 + 2x + 1$.

1) Represente esta função usando os comandos **Janela** $\rightarrow$ **2 dim** $\rightarrow$ **Equação** $\rightarrow$ **Explicita** e digite x^2+2x+1.
2) Calcule o vértice $V = (X_v, Y_v)$, $X_v = -\ b/2a$ e $Y_v = -\ \Delta/4a$ da parábola.
3) Verifique o X_v e Y_v que foi encontrado usando os comandos: **Um** $\rightarrow$ **Extremos**

(Feche a janela).

III – A imagem de uma função quadrática

1) Represente as funções abaixo e determine o conjunto imagem das mesmas:

   a) $y = x^2 - 4$

   b) $y = -2x^2 + 5$

Obs.: O conjunto imagem é determinado a partir do valor Y_v.

2) Calcule o valor máximo da função do item b) da questão 1) e calcule o valor mínimo da função do item a) da questão 1).

(Feche a janela).

IV – Zeros da função quadrática.

1) Represente as funções abaixo e ache os zeros das mesmas usando os comandos **Um → Zeros → Marcar Ponto.**

Obs.:Os zeros são os valores que x assume quando y = 0, isto é, onde o gráfico corta o eixo OX

a) $y = x^2 + 4x + 4$

b) $y = x^2 + 6x + 5$

c) $y = -x^2 + 3x - 4$

(Feche a janela).

V – Sinal da função quadrática.

1) Represente as funções abaixo e verifique o sinal delas (para quais valores de x o y é positivo? E negativo?). Os comandos do Winplot que facilitam essa tarefa são **Um → Traço → Marcar Ponto.**

a) $y = - x^2 + 4$

b) $y = x^2 + x + 2$

VI – Coeficientes da função quadrática.

Sejam as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = ax^2 + 4x + 4$, com $a \neq 0$.

Variando a constante a em $\mathbb{R}$ obtemos parábolas diferentes, mas qual será o resultado dessa variação?

Vamos representar as parábolas com o Winplot e observar o que acontece.

1) Use os comandos **Equação → Explicita.**
2) Digite ax^2+4x+4.
3) Use os comandos **Anim → Parâmetros A – W…**;
4) Escolha o parâmetro **A,** utilize a barra de rolagem para fazer **A** variar e verifique o que ocorre com o gráfico de *f*.

(Feche a janela).

5) Represente as parábolas y = x² + bx + 2, use animação no parâmetro B e a barra de rolagem para ver como são.

(Feche a janela).

6) Represente as parábolas y = x² + 3x + c, use animação no parâmetro C e a barra de rolagem para ver como são.

(Feche a janela).

Funções Exponenciais e Logarítmicas

I – Os gráficos.

Uma função *f*: R → R, dada por $f(x) = a^x$, com *a um* número real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, é o que chamamos de função exponencial de base a.

Uma função *f*: R → R, dada por $f(x) = log_a x$, com *a um* número real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, é o que chamamos de função logarítmica de base a.

1) Represente a função $f(x) = 2^x$ usando os comandos **Janela** → **2 dim** → **Equação** → **Explicita** e digite 2^x.
2) Represente a função $f(x) = log_2 x$ usando os comandos **Equação** → **Explicita** e: digite $log(2,x)$.

(Feche a janela).

II – Crescimento e decrescimento

1) Use o Winplot para representar graficamente as funções exponenciais dadas abaixo:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

Obs.: Quanto ao crescimento da função exponencial $f(x) = a^x$ temos:

f é decrescente se $0 < a < 1$.

f é decrescente se $a > 1$

(Feche a janela).

2) Use o Winplot para representar graficamente as funções logarítmicas dadas abaixo:

a) $f(x) = log_3 x$ b) $f(x) = log_{1/3} x$

Obs.: Quanto ao crescimento da função logarítmica $f(x) = log_a x$ temos:

f é decrescente se $0 < a < 1$.

f é decrescente se $a > 1$

(Feche a janela).

Com animações ilustraremos o crescimento das funções exponenciais e logarítmicas.

3) Escreva a equação $f(x) = a^x$ usando os comandos **Equação** $\rightarrow$ **Explicita** e digite a^x (perceba que não é possível visualizar o comportamento da função, pois a mesma está sobre o eixo x)
4) Use os comandos **Anim** $\rightarrow$ **Parâmetros A – W…**;
5) Escolha o parâmetro **A,** utilize a barra de rolagem para fazer **A** variar e verifique o que ocorre com o gráfico de *f*.
6) Esconda o gráfico da função para isso, vá em inventário, selecione a função e clique no botão gráfico
7) Repita os passos de 3) a 5) para a função $g(x) = log_a x$

(Não feche a janela)

III – Relação entre as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = log_a x$

A função $f(x) = a^x$ é a inversa da função $g(x) = log_a x$ e por isto seus gráficos são simétricos em relação à reta y = x. Ilustraremos esse fato usando animação.

1) Faça o gráfico da função $f(x) = a^x$ ficar visível para isto vá em inventário selecione a função e clique no botão gráfico.
2) Represente o gráfico da função y = x.
3) Use animação no parâmetro A

(Feche a janela).

Função Modular

I – O gráfico.

O módulo (ou valor absoluto) de um número real *x*, que se indica por | *x* | é definido da seguinte maneira:

$$| x | = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, se x é positivo ou zero, | x | é igual ao próprio x e se x é negativo, | x | é igual a –x.

À função *f*: R → R dada por *f*(*x*) = | *x* | chamamos de função modular

Vamos usar o Winplot para representar o gráfico da função *f*(*x*) = | *x* |

1) Use os comandos **Janela** → **2 dim** → **Equação** → **Explicita**;
2) Digite **abs(x)** e clique em **ok**;

(Feche a janela)

II – Usando o módulo para obter outras funções

1) Utilizando o Winplot construa, na mesma tela, os gráficos das funções f(x) = x – 2 e g(x) = | x – 2 |.
2) Estabeleça uma comparação entre os mesmos: Em cada gráfico utilize uma cor diferente, Para isso clique no item cor na janela da equação explícita, se necessário utilize a opção de esconder gráfico usando os

comandos; **Equação → Inventário → (clicar na equação a ser escondida) → Gráfico.**

Obs.: De modo geral, dada uma função f(x), o gráfico da função g(x) = |f(x)| coincide com o gráfico de f(x) em todos os pontos x tais que f(x) ≥ 0 e, nos pontos x tais que f(x) < 0, é igual à reflexão em torno de OX do gráfico de f(x).

(Feche a janela).

3) Trabalhe de modo análogo com as funções $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $f(x) = | x^2 - 3x + 2 |$

(Feche a janela).

4) Utilizando o Winplot construa, na mesma tela, os gráficos das funções f(x) = x + 3 e g(x) = | x | + 3.
5) Aja como no item 2) dado acima

Obs.: De modo geral, dada uma função f(x), o gráfico da função g(x) = f(| x |) coincide com o gráfico de f(x) em todos os pontos x ≥ 0 e completa-se com a reflexão desse arco de curva em relação à OY.

(Feche a janela).

6) Trabalhe de modo análogo com as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{|x|}$

(Feche a janela).

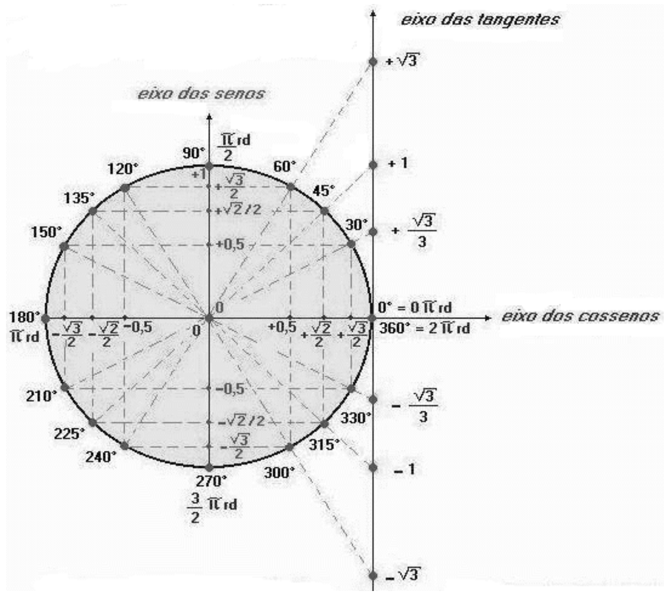
7) Trabalhe de modo análogo com as funções $f(x) = log_{1/3}(x)$ e $g(x) = log_{1/3}(|x|)$

(Feche a janela).

Trigonometria

I – O Círculo trigonométrico.

O círculo unitário, com centro na origem do plano cartesiano, é o que chamamos de ciclo trigonométrico.



No círculo trigonométrico, temos que dado um ponto P pertencente a este círculo, sua abscissa será o cosseno do ângulo formado entre o segmento OP e o eixo OX, bem como sua ordenada será o seno do mesmo ângulo.

Para esboçar o círculo trigonométrico, no Winplot, utilizamos:

1) Os comandos **Janela** → **2 dim** → **Equação** → **Implícita** (ou utilize o atalho F3 e substitua 13 por 1);
2) Digite xx + yy = 1 e clique em **ok**;

Para representar ângulos e senos e cossenos correspondentes no ciclo trigonométrico:

3) Marque os segmento de extremos (0,0) e (cos(t), sin(t)) com os comandos: **Equação** → **Segmento** → (x.y) e digite as coordenadas dos extremos do segmento, marque pontos e clique em **ok.** Em seguida, acrescente o ponto (cos(t), sin(t)) e marque âncoras.
4) Use os comandos **Anim** → **Parâmetros A – W…**;
5) Escolha o parâmetro **T,** utilize a barra de rolagem para fazer **T** variar.

Para representar as tangentes correspondentes no ciclo trigonométrico:

6) Esboce a reta x = 1 com os comandos **Equação** $\rightarrow$ **Implícita**
7) Digite x = 1 e clique em **ok**;
8) Repita o procedimento de 3) a 5) para o segmento de extremos (0,0) e (1, tan(t)).

(Feche a janela).

II – Funções trigonométricas.

A princípio, é necessário que mudemos o eixo das abscissas para que sua variação esteja em função do valor de π (Pi). Use os comandos:

1) **Ver** $\rightarrow$ **Grade** (ou utilize o atalho Ctrl+G). Modifique o intervalo de x, substituindo 1.00000 por palavra pi/2 (mantenha o valor de y 1.00000)
2) Clique em “aplicar” e logo após em “fechar”.
3) Esboce os gráficos das funções abaixo:
   a) y = sen(x) (sen(x) escreve-se como sin(x))
   b) y = cos(x)
   c) tan(x)

(Feche a janela).

Vamos verificar as propriedades sen(-x) = -sen(x), cos(-x) = cos(x) e tan(-x)= -tan(x), construindo os gráficos das funções correspondentes. Para sen(-x) = -sen(x):

4) Esboce os gráficos das funções f(x) = sen(-x) e g(x) = -sen(x) em cores diferentes.
5) Use esconder um dos gráficos para observar o outro e constatar que eles são iguais.
6) Repita o procedimento 4) e 5) para os outros casos

(Feche a janela).

Vamos explorar os gráficos de funções da forma f(x) = bsen(x), variando a constante b, em uma mesma tela.

7) Use os comandos **Equação** → **Explícita** e digite bsin(x)
8) Faça animação no parâmetro B, tomando -3 def L, 3 Def R

Obs.: Os valores máximo e mínimo da função bsen(x) são respectivamente |b| e -|b| e o período é 2π.

Vamos explorar os gráficos de funções da forma f(x) = sen(bx), variando a constante b, em uma mesma tela.

9) No Inventário substitua bsin(x) por sin(bx)
10) Faça animação no parâmetro B

Obs.: Os valores máximo e mínimo da função sen(bx) são respectivamente 1 e -1 e o período é $2\pi/b$.

Transladando o gráfico de uma função na direção do eixo OY

Dados a função *f(x)* e a um número real, o gráfico da função *g(x) = f(x) + a* pode ser obtido transladando o gráfico de f(x) de a unidades na direção de OY .

1) Apresente uma animação para as seguintes funções:
   a) y = |x| + a
   b) $y = 3^x + a$
   c) $log(x) + a$
   d) cos(x) + a

Transladando o gráfico de uma função na direção do eixo OX

Dados a função *f(x)* e *a* um número real, o gráfico da função *g(x) = f(x+a)* pode ser obtido transladando o gráfico de f(x) de - a unidades na direção de OX .

1) Apresente uma animação para as seguintes funções:

a) $y = |x + a|$

b) $y = 3^{x+a}$

c) $y = log(x + a)$

d) $y = sec(x+a)$

Exercícios extras

01 – Para as funções a seguir, calcule o Δ e verifique a existência de zeros através do sinal do Δ.

a) $y = x^2 + 4x + 4$

b) $y = x^2 + 6x + 5$

c) $y = -x^2 + 3x - 4$

02 – Para as funções a seguir, calcule o Δ, observe o sinal de a e conclua que o valor de Δ e de a influenciam no sinal da função. Mas de que forma?

a) $y = - x^2 + 4$

b) $y = x^2 + x + 2$

03 – **Situações problemas**.

a) Uma imobiliária credita que o valor v de um imóvel no litoral varia segundo a lei v(t) = 60.(0,9)t, em que t é o número de anos a partir de hoje. Mostre o gráfico de valores deste imóvel e faça a análise, se o imóvel irá aumentar ou diminuir seu valor num período de 10 anos (Use x no lugar de t e para visualizar a curva use os comandos **Ver → Ver** , selecione **cantos**, e digite **esquerdo –1**, **direito 11**, **inferior –1**, **superior 100**).

b) A expressão $P(n) = 40 – 40.2^{- 0,3n}$ permite calcular o número de artigos que um operário recém contratado é capaz de produzir diariamente, após n dias de treinamento.

Verifique o comportamento gráfico deste serviço prestado e faça análise quanto ao crescimento ou decrescimento da função. (Observação digite 40 – 40*2^(-0.3x))

04 – Represente graficamente e compare os gráficos das funções:

a) f(x) = cos(x) e g(x) = |cos(x)|

b) f(x) = sin(x) e g(x) = sin(|x|).

05 – Discuta o que acontece com os gráficos de funções da forma f(x) = a + bsen(cx + d), na qual a, b, c, d são constantes.

06 – Dadas as funções f(x) = | x + a | temos:

À medida que aumentamos a, a curva se desloca para que direção?

Repita os processos para f(x) = | x | + b temos.

À medida que aumentamos b, a curva agora se desloca para qual direção?