GEOMETRIA AFRICANA:

UMA ABORDAGEM ETNOMATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dayene Ferreira dos Santos

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, sob orientação de Profº. Me. José Maria Carlini e co-orientação de Profª. Drª. Elisabete Teresinha Guerato.

IFSP
SÃO PAULO
2017

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
Câmpus São Paulo

DAYENE FERREIRA DOS SANTOS

GEOMETRIA AFRICANA:

UMA ABORDAGEM ETNOMATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, orientada pelo profº. Me. José Maria Carlini e co-orientada pela profª. Drª Elisabete Teresinha Guerato, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

SÃO PAULO

2017

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237g Santos, Dayene Ferreira dos
Geometria africana: uma abordagem etnomatemática para o ensino de matemática / Dayene Ferreira dos Santos. São Paulo: [s.n.], 2017.
89 f. il.

Orientador: José Maria Carlini
Co-orientadora: Elisabete Teresinha Guerato

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2017.

1. Educação Matemática. 2. Etnomatemática. 3. Geometria Sona. 4. Afromatemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

DAYENE FERREIRA DOS SANTOS

GEOMETRIA AFRICANA: UMA ABORDAGEM ETNOMATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 22/11/2017 **CONCEITO:** dez

Prof. Dr. Silvio De Liberal
Membro da Banca

Prof. Me. Wellington Pereira das Virgens
Membro da Banca

Prof. Me. José Maria Carlini
Orientador

Profª. Dra. Elisabete Teresinha Guerato
Co-orientadora

Aluna: Dayene Ferreira dos Santos

"So let us then try to climb the mountain, not by stepping on what is below us, but to pull us up at what is above us, for my part at the stars.[1]"

- Maurits Cornelis Escher

[1] "*Então tentemos escalar a montanha, não pisando sobre o que está abaixo de nós, mas para nos puxarmos ao que está acima de nós, por minha parte nas estrelas."* Tradução nossa.

Dedico este trabalho aos meus amados pais e a todos os professores que se empenham pela melhoria da nossa educação.

Agradecimentos

Escrevo para agradecer a Deus por me fortalecer todos os dias, pois dediquei essa força para realizar este trabalho. Agradeço imensamente à minha família. Aos meus pais pelo apoio, pelo carinho e a paciência, por acordarem cedo comigo durante todos esses anos e pelo incentivo que sempre me manteve firme e não me deixou desistir. Aos meus irmãos por me acompanharem nesta jornada.

Agradeço a todos os meus queridos professores que me ajudaram a entender o papel do verdadeiro professor de Matemática. Em especial, agradeço aos meus orientadores Me. José Maria Carlini e Drª. Elisabete Teresinha Guerato por me guiarem na elaboração deste trabalho e, mais que isso, por me mostrarem uma nova forma de ver o mundo.

Agradeço aos professores Dr. Paulus Gerdes (*in memorian*) e Dr. Ubiratan D'Ambrosio, o qual tive a grande oportunidade de conhecer pessoalmente, pelos seus estudos que fundamentaram este trabalho.

Sou imensamente grata aos meus colegas e amáveis amigos que cultivei durante essa jornada. Em especial, agradeço à Thaynara pelas broncas, pelos conselhos e por ser uma amiga incrível; à Renata pela rica amizade, por me ouvir e pelo apoio aos meus estudos e artes; à Priscila por ser tão adorável e por mostrar que felicidade não tem tamanho; ao Lucas por me fazer rir e acreditar que sou capaz de alcançar meus objetivos; ao Phelipe por ser minha inspiração e um exemplo de disciplina que espero ter um dia; ao Polion por me incentivar toda vez que desacreditei em mim; aos gêmeos Augusto e Gabriel por me mostrarem que um dia só valeu a pena ser vivido se sorrimos.

Agradeço a todos os amigos e colegas cujos nomes não citei, pois são muitos, mas eles sabem o quanto sou grata por acreditarem em mim e me apoiarem durante a minha formação.

Resumo

Este trabalho descreve a Geometria *Sona* com enfoque nas manifestações matemáticas encontradas nos *sona:* desenhos africanos feitos na areia. Com base nos estudos do pesquisador holandês Paulus Gerdes, o objetivo principal é apresentar essa Matemática característica desse povo como alternativa para o ensino de alguns conceitos matemáticos além de mostrar a existência desse conhecimento em determinadas culturas e conscientizar alunos e professores sobre o respeito a outras tradições e costumes, pois os conceitos matemáticos descritos satisfazem às necessidades de cada povo. A fundamentação teórica é a Etnomatemática, desenvolvida pelo matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrosio. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica baseada em escritos acadêmicos voltados para o tema. Apresenta-se algumas atividades com base nos estudos dos *sona* e elaboradas conforme aspectos da Teoria Histórico Cultural (THC), uma vez que essa teoria é retomada apenas para fins metodológicos e justifica as abordagens elegidas nas atividades.

Palavras - chave: Geometria *Sona*. Desenhos africanos. Etnomatemática.

Abstract

This work describes *Sona* Geometry focusing on the mathematical manifestations found in the *sona*: african drawings made in the sand. Based on the studies of the dutch researcher Paulus Gerdes, the main objective is to present this mathematical characteristic of this people as an alternative to the teaching of some mathematical concepts besides showing the existence of this knowledge in certain cultures and to make students and teachers aware of respect for other traditions and customs, for the mathematical concepts described above satisfy the needs of each people. The theoretical basis is Ethnomathematics, developed by the brazilian mathematician Ubiratan D'Ambrosio. It is a bibliographical research based on academic writings focused on the theme. Some activities based on *sona* studies and elaborated according to aspects of Cultural Historical Theory (THC, in portuguese) are presented, since this theory is used only for methodological purposes and justifies the chosen approaches in the activities.

Keywords: *Sona* Geometry. African drawings. Ethnomathematics.

Lista de figuras

Figura 1: Vista aérea das três grandes pirâmides de Gisé 25
Figura 2: A cegonha e o leopardo...27
Figura 3: Gravura em madeira de problemas de Sangaku..28
Figura 4: Padrões planares compostos por combinações de *mariposas*..................................28
Figura 5: Mosaicos do interior de Alhambra..29
Figura 6: Alguns fractais e suas respectivas equações complexas..30
Figura 7: Pinturas na parede de uma caverna em Lascaux, França. 40
Figura 8: Divulgação da tradição dos *sona* 41
Figura 9: Arte quioca..41
Figura 10: *Lusona* que representa pessoas coletando cogumelos...42
Figura 11: Marcação de pontos 43
Figura 12: Desenhando as linhas do *lusona* 43
Figura 13: Desenhando *sona* 44
Figura 14: Bando de pássaros *qundu*...46
Figura 15: Galinha em fuga...47
Figura 16: Tartaruga..48
Figura 17: *Sona* da terna pitagórica 3 - 4 - 5 49
Figura 18: Simetria axial dos *sona* 50
Figura 19: Simetria dupla axial e simetria central dos *sona*...50
Figura 20: Simetria rotacional dos *sona*..51
Figura 21: Malha do *lusona* Leoa e seus dois filhotes 52
Figura 22: Leoa e seus dois filhotes 53
Figura 23: Curvas fechadas na representação da cabeça de antílope 54
Figura 24: Ângulo de inclinação das curvas fechadas...54
Figura 25: Curvas fechadas em malhas 3 x 6 (a) e 4 x 6 (b) 55
Figura 26: Curvas fechadas e pontos "abraçados" pelas curvas numa malha 9 x 12 56
Figura 27: Desenho de malha 15 x 21 57
Figura 28: Caminho para a execução do desenho 58
Figura 29: Segmentos do desenho..58
Figura 30: Caminho aberto para o mesmo desenho 59
Figura 31: Exemplos de grafo simples (a) e grafo (b)..60
Figura 32: Passos *dyahotwa* 61
Figura 33: Representação de um casal 61
Figura 34: O caçador e o cão..63
Figura 35: O galo e a raposa...63
Figura 36: Antílope...64
Figura 37: Estômago de um leãozinho 64
Figura 38: Curral de bois e quatro casas...65
Figura 39: Três morcegos..65
Figura 40: Caminho para Deus..66
Figura 41: Desenhando A cegonha e o leopardo...73
Figura 42: Desenhando O caçador e o cão 73

Figura 43: Desenhando O galo e a raposa 73
Figura 44: Desenhando a leoa e o leãozinho 75
Figura 45: Realocando uma coluna da malha 3 x 4 77
Figura 46: Representação dos 3 primeiros ímpares 78
Figura 47: Malha da terna pitagórica (3,4,5) 78
Figura 48: Possível *lusona* de uma terna (3,4,5) 79
Figura 49: Representações do estômago de leão 80
Figura 50: Ritmo do estômago de leão 81

Lista de tabelas

Tabela 1: Coleção de *sona*......45
Tabela 2: Quantidade de curvas do tipo "estômago de leão" em uma malha *m* x *n*......82
Tabela 3: Extrapolação dos dados da Tabela 2......82

Sumário

Introdução 21

1 A origem da Geometria 23

2 Etnomatemática 33

2.1 Etnogeometria 39

3 Geometria Sona 41

3.1 Cokwe (Quioco) 41

3.2 Os *Sona* 42

3.3 Propriedades matemáticas dos *sona* 46

3.4 Exemplos de *sona* 62

4 Atividades 69

4.1 Teoria Histórico Cultural 70

4.2 Atividade 1: Reprodução de *sona* 72

4.3 Atividade 2: Proporcionalidade 74

4.4 Atividade 3: Progressões aritméticas e teorema de Pitágoras 76

4.5 Atividade 4: Construção de desenhos monolineares como “estômago de leão” 80

5 Conclusão 85

Referências 87

Introdução

O presente trabalho descreve as possíveis aplicações em sala de aula da Geometria *Sona*, peculiar aos povos oriundos da África e que resiste até os dias atuais, recorrendo ao estudo da Etnomatemática. Fundamentamos nossa pesquisa nos estudos de Ubiratan D'Ambrosio, pesquisador na área da Educação Matemática conhecido como fundador da Etnomatemática.

Ressaltamos a realização de pesquisa bibliográfica feita por meio de consultas aos livros e artigos físicos e bancos de teses. As fontes foram selecionadas de acordo com o tema tratado e com os estudiosos mais relevantes na área da Etnomatemática, como Paulus Gerdes (1993, 1994, 2003, 2012, 2014) e Fontinha (1983).

Como objetivo geral temos de apresentar a Geometria *Sona* como alternativa para o ensino de alguns conceitos matemáticos. Paralelamente, também são nossos objetivos mostrar que há outras matemáticas em diferentes culturas; conscientizar alunos e professores sobre o respeito à diversidade cultural e resgatar os contextos históricos sobre os quais a Matemática, em especial a Geometria, fundamentou-se para ser o que conhecemos hoje.

As atividades mostradas são de nossa autoria, frutos dessa pesquisa e apresentadas como propostas. Mais uma vez, as atividades selecionadas estão de acordo com o objetivo educacional que buscamos sendo este o de mostrar como o estudo da geometria Sona auxilia na compreensão de alguns conceitos matemáticos.

Este trabalho está constituído, além da introdução, de 4 capítulos e conclusão. Primeiramente tratamos de descrever a História da Geometria seguida pela descrição da teoria Etnomatemática. Em sequência, tratamos de caracterizar a geometria *Sona*[2] resgatando sua identidade histórica e cultural. Conforme as pesquisas de Paulus Gerdes (1953, 2014), matemático holandês que estudou as diversas manifestações matemáticas de povos tribais residentes em regiões da África, como em Angola, e da América Latina, como no Peru, discorremos sobre os conceitos geométricos, além de outros, detectados na construção de desenhos feitos na areia.

[2] ***Sona*** é o nome dado ao conjunto de desenhos feitos na areia pelo povo da tribo dos Cokwe, localizada no nordeste da Angola. (GERDES, 2014).

Em seguida, buscamos relacionar as construções desses desenhos com o ensino da Matemática em uma tentativa de inovar o modo como lecionamos e, ao mesmo tempo, ampliar o conhecimento dos alunos a respeito da diversidade cultural especialmente por conta do elo existente entre o povo brasileiro e o africano.

Finalmente, apresentamos atividades como sugestões para realizar as aplicações dos estudos realizados e as considerações finais. Acreditamos que os resultados das pesquisas feitas para a elaboração deste trabalho têm sua importância por explorar outra cultura que mantém alguma relação com a cultura brasileira, com o objetivo de utilizar as informações obtidas para o ensino da Matemática. Não se trata apenas de uma tentativa de inovação no modo como ensinamos, mas também de uma contribuição para o desenvolvimento cultural e social dos alunos.

Segundo Paulo Freire (1982) o educador precisa sonhar o sonho possível, precisa visar a necessidade de estudar e ensinar sobre outras culturas que ajudaram a formar a nossa. Além disso, Freire (1996) ressaltou que para transformar o mundo precisamos conhecê-lo antes, saber das origens, manifestações culturais e sociais, pois um dos papéis que devemos exercer é justamente voltado para a formação da cidadania.

1 A origem da Geometria

Segundo Boyer (1974) a origem da Geometria é, até hoje, tema de discussão entre os historiadores e matemáticos uma vez que, assim como boa parte da História da Matemática, torna-se difícil estabelecer o momento exato em que os conceitos geométricos surgiram. Como aponta Boyer (1974), qualquer afirmação sobre as origens matemáticas são imprecisas, pois o homem pode ter se utilizado das ideias matemáticas antes mesmo de aprender a registrar os fatos por meio das artes ou da escrita.

Os apontamentos e suposições em relação aos primórdios da Geometria estão embasados nas observações antropológicas dos objetos e registros sobreviventes desde a época primitiva da humanidade. Embora muitos dos antigos estudiosos tenham defendido que a Geometria surgiu no Egito, eles não conseguiram acordar sobre os motivos que desencadearam o advento do pensamento geométrico. Boyer (1974) exemplifica o dilema ao escrever que Heródoto e Aristóteles não propuseram uma origem dos estudos da Geometria que fosse anterior à civilização egípcia, embora saibamos que os pensamentos a respeito dos conceitos geométricos até então conhecidos foram anteriores ao seu surgimento.

Para Heródoto, o motivo que desencadeou o início dos estudos geométricos teria sido a necessidade de medir as terras ao redor do rio Nilo devido à inundação anual. Já Aristóteles acreditava que a Geometria foi criada para satisfazer as vontades da classe sacerdotal egípcia (BOYER, 1974). Duas teorias fundamentadas em finalidades distintas mostram a incerteza quanto ao início da Geometria e o que teria sido o motivador para seu estudo, mas de fato os estudiosos não afirmam qual poderia ter sido o tempo em que o assunto começou a ser pensado, discutido e posto em prática.

Apesar das dificuldades em estabelecer datas ou períodos mais precisos de quando surgiu a Geometria, alguns indícios foram deixados ao longo da história para nos mostrar que os conceitos geométricos são tão antigos quanto podemos imaginar. De acordo com Boyer

> Para o período pré - histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da Matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Mas ideias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma ideia muito mais antiga que ficara esquecida. (BOYER, 1974, p. 5).

Independente de onde a Geometria surgiu, os conceitos geométricos que atualmente trabalhamos nas escolas de Educação Básica são de origem grega.

Por volta do ano 300 a.C., conforme Ávila (2001), viveu o grego Euclides[3] famoso por seu trabalho "Os Elementos" que reunia todo o conhecimento matemático da época. Entre os conteúdos constavam os postulados que constituíram toda a Geometria Euclidiana. Embora, muitos pensem que "Os Elementos de Euclides" apenas descreviam a Geometria, na verdade havia muito sobre Álgebra e Aritmética. Acontece que a Matemática grega era toda geometrizada (ÁVILA, 2001).

Ávila (2001) nos sugere que as figuras eram imprescindíveis para o entendimento e a comprovação dos próprios postulados da Geometria e demais conceitos seguindo uma lógica dedutiva. Entretanto, com a evolução histórica das Ciências Exatas, a Geometria Euclidiana levantou questionamentos quanto à sua veracidade, especialmente pelo postulado das paralelas[4].

Além do desafio de encontrar as origens da Geometria, também temos a dificuldade em desassociar as representações geométricas e da escrita algébrica, seja por meio de desenhos, seja por meio de fórmulas. Durante muito tempo, matemáticos do mundo todo procuraram traduzir os desenhos geométricos para uma linguagem escrita e independente das representações, porém, a criação de uma Geometria livre de ilustrações tornou-se uma árdua tarefa e provocou discussões sobre a fidelidade da tradução dos desenhos às fórmulas.

Conforme Blanché (1965), tentar imaginar a Geometria axiomatizada pelo grego Euclides sem as figuras torna toda a teoria inconsistente. A respeito da dedução de qualquer postulado de Euclides, o autor afirma que

> Em um sentido, nada era ainda mais evidente: as figuras mesmas o declaravam. Mas o texto não o dizia expressamente em modo algum; faz acreditar que as figuras não estão ali senão como simples auxiliares do raciocínio, as quais duplicam em certa forma a demonstração lógica mediante uma ilustração sensível, sem lhe ser indispensável. Não há nada dele: suprima a figura, traçada ou imaginada, e a

[3] "É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas." (ÁVILA, 2003, p. 12).

[4] Uma das versões para o postulado é: "num plano, por um ponto fora de uma reta existe uma e somente uma paralela à reta dada", porém alguns matemáticos descobriram que era possível existir outra(s) reta(s) paralela(s) dando início às nomeadas Geometrias Não-Euclidianas. (ÁVILA, 2001).

> demonstração vem abaixo. Não vamos além da primeira proposição de Euclides... (BLANCHÉ, 1965, p. 11 e 12 – tradução nossa)[5]

Com esse trecho, percebemos que a imagem e a escrita se conectam para complementar uma a outra de tal forma que em alguns momentos não é possível fazer uso de uma em detrimento da outra. O autor aponta uma falha na teoria, pois os axiomas da Geometria Euclidiana dependem das imagens para serem compreendidos. As duas linguagens conversam entre si e declaram os mesmos conceitos, ainda que o objeto geométrico a ser trabalhado possa assumir diversos significados. A discussão da relação entre linguagem não verbal (imagens) e a linguagem verbal (escrita) tem perdurado anos da História da Matemática.

Povos como egípcios e gregos, principais contribuintes para a teorização da Geometria que conhecemos, são exemplos de como um mesmo objeto geométrico pode assumir significados diferentes e de como as figuras são extremamente importantes para a compreensão do que está escrito.

Segundo Boyer (1974) os egípcios se preocupavam com as formas das figuras, como o formato das pirâmides (Figura 1), enquanto os gregos procuraram desenvolver uma escrita elaborada para dar conta das propriedades envolvidas nessas figuras: semelhanças, áreas, contornos, entre outras. Entretanto, cada povo atribui significados distintos sobre o mesmo objeto geométrico.

Figura 1: Vista aérea das três grandes pirâmides de Gisé

Fonte: DOBERSTEIN, 2010, p.92

[5] Trecho original: " En un sentido, nada era sin embargo más manifiesto: las figuras mismas lo declaran. Pero el texto no le dice expresamente en modo alguno; hace crer que las figuras no están ahí sino como simples auxiliares del razonamiento, las cuales duplican en cierta forma la demostración lógica mediante una ilustración sensible, sin serles indispensables. No hay de ello: suprimid la figura, trazada o imaginada, y la demostración se viene abajo. No vayamos más lejos de la primera proposición de Euclides [...]"

Segundo Boyer (1974) uma figura geométrica utilizada para a construção de templos e altares, como as pirâmides (Figura 1) que para os egípcios poderia simbolizar uma ligação sagrada entre os deuses e o povo, era para os gregos apenas uma representação de algum objeto geométrico que mantinha um conjunto padrão de propriedades.

Independente das atribuições de sentidos para um mesmo objeto geométrico que gregos e egípcios conferiam, devemos considerar que as linguagens utilizadas para descrever esse objeto estão interligadas de modo que é permitida a passagem de uma para outra sem tantas dificuldades, como enfatiza Serres (2010):

> ...a relação histórica da Grécia com o Egito é concebível em termos da relação de um alfabeto para um conjunto de ideogramas, e como a Geometria não poderia existir sem a escrita, a Matemática sendo escrita ao invés de falada, essa relação é trazida de volta para a Geometria como uma operação usando um sistema duplo de escrita. Há uma fácil passagem entre a língua natural e a língua nova, uma passagem que pode ser realizada na circunstância múltipla que nós tomamos na consideração de duas línguas diferentes, dois sistemas de escrita diferentes e seus laços comuns. (SERRES, 2010, p.3 – tradução nossa)[6]

Dentre as diversas tentativas em desenvolver a Geometria de modo que se satisfaça o rigor que as Ciências Exatas exigem, surgiram novas geometrias que nasciam para contornar as discussões da Geometria Euclidiana, em especial sobre o seu quinto postulado, ainda assim aceita como verdade absoluta e utilizada por quase todo o mundo.

Boyer (1974) afirma que as ideias revolucionárias de Lobachevsky[7] sobre Geometria deram início às chamadas Geometrias Não-Euclidianas, no ano de 1829, com a publicação do artigo "*On The Principles of Geometry*[8]", embora outros matemáticos já discutissem a respeito da existência de outras geometrias.

Além das teorias criadas para fundamentar as novas geometrias e aproximá-las da realidade, foram descobertas diversas manifestações que usufruem de conceitos geométricos e satisfazem as necessidades cotidianas de determinados povos. Um exemplo é a chamada

[6] Trecho original: "the historical relation of Greece to Egypt is thinkable in terms of the relation of an alphabet to a set of ideograms, and since geometry could not exist without writing, mathematics being written rather than spoken, this relation is brought back into geometry as an operation using a double system of writing. There we have an easy passage between the natural language and the new language, a passage which can be carried out on the multiple condition that we take into consideration two different languages, two different writing systems and their common ties."

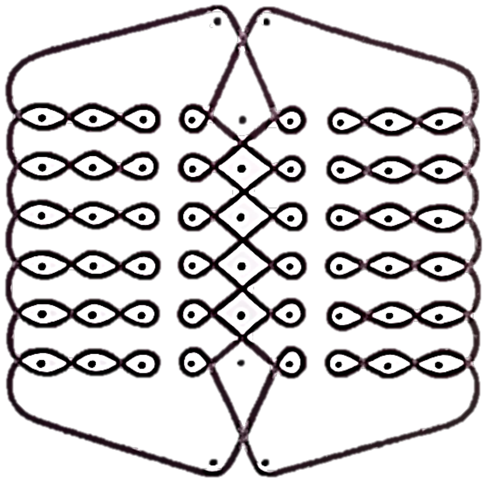
[7] **Nikolai Ivanovich Lobachevisky (1792 – 1856):** Matemático russo conhecido por sua "geometria imaginária" desenvolvida por volta dos anos de 1830 na qual acreditava ser um possível modelo para o mundo real. (MILNOR, 1982, p. 9)

[8] Nos Princípios da Geometria – tradução nossa.

Geometria *Sona* (Figura 2), estudada por Paulus Gerdes[9] (1993a) ao trabalhar com a Matemática expressa nos desenhos feitos na areia pelos povos da tribo dos Cokwe[10], em Angola.

Figura 2: A cegonha e o leopardo

Os pontinhos representam o pântano e o contorno é o caminho por onde a cegonha fugiu do leopardo.



Fonte: GERDES, 1993b, p.9

Essas descobertas, que não foram somente nos povos tribais de Angola, mas também em tribos da América Latina[11] (Figura 4) além dos achados de escritos antigos com problemas matemáticos (especialmente geométricos) em países do Oriente[12] (Figura 3), permitem-nos levantar a hipótese de que a Geometria é muito mais antiga do que se imaginava.

[9] Matemático holandês nascido em 1953, pesquisador reconhecido internacionalmente por suas contribuições na área de Etnomatemática. Paulus Gerdes foi um dos responsáveis pela teorização das técnicas de artesanato, pela formulação e solução de questões matemáticas do imaginário e artesanato popular e trouxe grandes contribuições pedagógicas para o ensino de matemática com fortes raízes sócio-culturais. Faleceu em 10 de novembro de 2014, vítima de uma complicação na operação da próstata. (ENTREVISTA [...], 2015)

[10] A cultura *cokwe* pertence a um grande círculo cultural de carácter bastante uniforme, que engloba todo o Leste de Angola, o Noroeste da Zâmbia e zonas circunvizinhas do Congo / Zaire. (GERDES, 1993a, p. 19)

[11] Um dos trabalhos mais conhecidos sobre as manifestações da Geometria em tribos latinas está descrito no livro **Geometria e Cestaria dos Bora na Amazônia Peruana**, que apresenta aspectos geométricos da fabricação e decoração de cestos na cultura Bora. (GERDES, 2003)

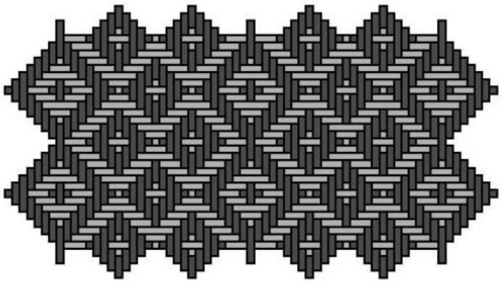
[12] Como principal exemplo da geometria oriental estão os *Sangaku* que significam “tábuas de madeira”, datadas desde os anos 1600. Os *Sangaku* são também chamados de “A Geometria Sagrada Japonesa”, pois as tábuas com problemas matemáticos escritos eram penduradas em templos sagrados. Muitos problemas tratavam de Geometria Plana, mas havia problemas algébricos e até de Cálculo. (MIYATA, 2014, p.10)

Figura 3: Gravura em madeira de problemas de Sangaku

Fonte: MIYATA, 2014, p. 15

Figura 4: Padrões planares compostos por combinações de *mariposas*

As cestarias dos Bora, povo tribal da Amazônia Peruana, são ricas em padrões geométricos.



Fonte: GERDES, 2003, p. 12

Outro aspecto a ser considerado está relacionado com as necessidades que cada povo possui e como isso reflete no desenvolvimento de “matemáticas” próprias que comportem as soluções dos problemas cotidianos de uma população. Por esse lado, a Geometria também pode ser própria de um povo: várias tribos se utilizam de figuras geométricas para representar entidades e locais sagrados, animais, construir utensílios ou para organizar seus assentamentos (SILVA, 2015), como mostram os trabalhos de Paulus Gerdes (1993a, 2014)[13], Henrique Cunha Júnior (2004)[14], Arno Bayer e Beatriz dos Santos (2003)[15], Cunha Jr. e Marizilda Menezes (2003)[16] e muitos outros.

Um exemplo de teoria Matemática diferente da usual é a geometria denominada *Mudéjar*[17] criada pelos mouros, povo conquistador da Península Ibérica durante a Idade Média (HARRIS; MONASTERIO, 2010), que tem como principal atrativo os padrões geométricos. Os estudos realizados por outros pesquisadores apontaram para o forte uso de

[13] A coleção **Geometria Sona**, com 3 volumes, publicada em várias línguas incluindo português, é um exemplar sobre o estudo das manifestações de uma geometria muito diferente da qual estamos habituados, mas que tem sua importância e veracidade para povos africanos, especialmente os *Cokwe*, povo tribal da Angola. (Nota dos autores)

[14] O autor discute em seu artigo **Afroetnomatemática, África e Afrodescendência** sobre a Matemática utilizada pelos povos africanos, além da contribuição dos negros na área das ciências exatas, colocando os leitores para refletir sobre o preconceito ainda existente quanto à credibilidade que a população negra não tem diante a sua produção acadêmica para a Matemática. (CUNHA JUNIOR, 2004).

[15] No artigo **A Cultura Indígena e a Geometria: Aprendizado pela Observação** os autores abordam sobre como os índios brasileiros desenvolveram técnicas de cestarias utilizando a geometria. (BAYER; SANTOS, 2003).

[16] Os autores sugerem a leitura de: **Formas geométricas e estruturas fractais na cultura africana e afrodescendentes.** (CUNHA JR.; MENEZES, 2003).

[17] **Mudéjar** é uma arte islâmica tradicional que faz grande uso de formas geométricas e padrões. As cores utilizadas são destaque nesse tipo de arte. (HARRIS; MONASTERIO, 2010).

conceitos geométricos tais como a composição de figuras a partir de polígonos regulares, rotações e translações, sobreposição de ângulos e outros.

Figura 5: Mosaicos do interior de Alhambra

Fonte: ALVES, 2014, p. 15.

O artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher utilizou a geometria dos mouros para compor suas obras mundialmente famosas. Esse artista explorou esses padrões geométricos, criando ilusões de óticas e construções impossíveis com base nos mosaicos vistos nos interiores de Alhambra[18], em sua viagem à Espanha (ALVES, 2014). Conforme Cascudo (1984), a cultura moura influenciou parte da nossa própria cultura e acreditamos que estudar sobre os *mudéjares* pode ser uma maneira interessante de tratar sobre os conceitos geométricos em sala de aula.

Podemos entender melhor isso quando olhamos para a Geometria Fractal[19] (Figura 6), uma das geometrias Não - Euclidianas que "expõe o traçado de formas irregulares e fragmentadas que a Geometria Euclidiana não apresenta" (RINALDI; MENEZES, 2007, p.02). Alguns fractais podem ser encontrados na natureza como nos formatos das nuvens, nos desdobramentos dos galhos de árvores e na formação de corais (RINALDI; MENEZES, 2007,

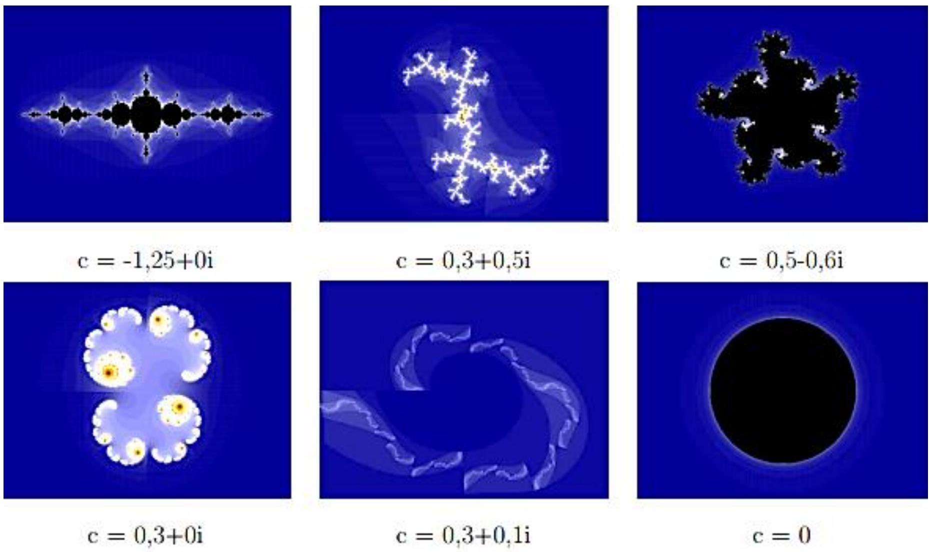
[18]**Alhambra** (em árabe: الحمراء; "a Vermelha") localiza-se em Granada, Espanha. É um rico complexo de palácios e fortalezas construído durante a Dinastia Nasrida e a corte do Reino de Granada. O que mais chama a atenção são os azulejos e a arte islâmica que decoram os interiores dos palácios. (HARRIS; MONASTERIO, 2010).

[19] "Mathematicians have disdained this challenge, however. and have increasingly chosen to flee from nature by devising theories unrelated to anything we can see or feel. Responding to this challenge, I conceived and developed a new geometry of nature and implemented its use in a number of diverse fields. It describes many of the irregular and fragmented patterns around us, and leads to full-fledged theories, by identifying a family of shapes I call fractals." (MANDELBROT, 1977, p. 1)

p. 02) além de estarem presentes nos penteados, nas vestimentas e na organização das aldeias de povos africanos (SILVA, 2015).

Figura 6: Alguns fractais e suas respectivas equações complexas

Cada representação possui a equação do complexo *c*.



Fonte: NUNES, 2006, p. 49

Diante dessas observações, podemos perceber que a Geometria está presente em nossas vidas, seja na natureza seja nas obras humanas. Porém, ainda que não se saiba exatamente quando surgiu a Geometria, acreditamos que a humanidade cria e apropria-se de conceitos geométricos desde a sua existência, como aponta D'Ambrosio (2007) ao fazer uma análise sobre o desenvolvimento do pensamento matemático do homem primitivo até o atual.

> Na hora em que esse australopiteco escolheu e lascou um pedaço de pedra, com objetivo de descarnar um osso, a sua mente matemática se revelou. Para selecionar a pedra, é necessário avaliar suas dimensões, e, para lascá-la o necessário e o suficiente para cumprir os objetivos a que ela se destina, é preciso avaliar e comparar dimensões. Avaliar e comparar dimensões é uma das manifestações mais elementares do pensamento matemático. (D'AMBROSIO, 2007, p.33)

O autor discorre que a espécie *australopiteco* desenvolveu uma ferramenta para descarnar presas abatidas a fim de aproveitar o alimento obtido e, para isso, o indivíduo lascou uma pedra que fosse útil para essa tarefa utilizando a noção de formatos, uma das principais abordagens da Geometria.

Talvez essa seja uma das primeiras manifestações da noção geométrica feita pelo homem. Mas nosso foco está em discutir sobre manifestações da Geometria, euclidiana ou não, dentro de culturas diferentes. Para isso, abordaremos um pouco a respeito das ainda referidas “matemáticas escondidas” (GERDES, 2012a) das culturas não europeias: o campo da Etnomatemática aborda as ideias matemáticas desconhecidas por nós, mas velhas conhecidas de outros povos, especialmente os que foram colonizados por europeus.

2 Etnomatemática

O nome Etnomatemática foi utilizado pela primeira vez pelo pesquisador brasileiro Ubiratan D'Ambrosio, em 1985. Diferentemente do que sugere, o termo vai além de simplesmente ser a Matemática de determinada etnia ou população. D'Ambrosio (2013) utilizou das raízes *tica, matema* e *etno* para compor a palavra *Etnomatemática* para evidenciar "que há várias maneiras, técnicas, habilidades (*tica*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (*matema*) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etno*)" (D'AMBROSIO, 2013, p. 101).

Conforme assume D'Ambrosio (2013), a Etnomatemática como ciência se propõe a procurar entender as manifestações matemáticas (entendamos como "manifestações" a ação do fazer e do saber) observadas e realizadas ao longo da história da humanidade, respeitando as diversidades de cada grupo étnico e suas necessidades.

Por se tratar de um estudo sobre o comportamento do homem, indivíduo e coletivo, essencialmente sobre suas ideias matemáticas, essa ciência utiliza-se principalmente dos estudos antropológicos, sociais, econômicos e históricos para fundamentar determinados conceitos importantes para a compreensão dessa teoria como, por exemplo, o conceito de cultura.

Para entendermos melhor sobre as idealizações da Etnomatemática, acreditamos que seja necessário compreender o que vem a ser cultura. De acordo com Santos (1996), existem duas concepções para cultura

> A primeira dessas concepções preocupa-se com todos os aspectos de uma realidade social. Assim, cultura diz respeito a tudo aquilo que caracteriza a existência social de um povo ou nação ou então de grupos no interior de uma sociedade. [...] Embora essa concepção de cultura possa ser usada de modo genérico, ela é mais usual quando se fala de povos e de realidades sociais bem diferentes das nossas, com os quais partilhamos de poucas características em comum, seja na organização da sociedade, na forma de produzir o necessário para a sobrevivência ou nas maneiras de ver o mundo. [...] Vamos à segunda. Neste caso, quando falamos em cultura estamos nos referindo mais especificamente ao conhecimento, às ideias e crenças, assim como às maneiras como eles existem na vida social. (SANTOS, 1996, p. 24)

Com base nessas concepções, podemos justificar a importância da Etnomatemática, especialmente na Educação Matemática, pois a teoria que fundamenta essa ciência surgiu da necessidade despertada em educadores matemáticos preocupados em melhorar suas práticas de ensino sem desvalorizar a identidade cultural da sociedade.

Historicamente, a Matemática que predomina em muitas escolas do mundo, especialmente as ocidentais, baseia-se nos currículos escolares formulados pelos europeus. Embora muito do que conhecemos como Matemática também tenha origem hindu-arábica, foram os conquistadores europeus que disseminaram suas ideias e conhecimento, rejeitando quaisquer manifestações ideológicas diferentes das impostas pelos colonizadores.

Como reforça D'Ambrosio (2007), hoje a Matemática é rotulada como inacessível, servindo muitas vezes para elitizar alguns grupos sociais quando estes dominam as técnicas e conceitos da Ciência "Exata". Isso devido à desvalorização ou mesmo do declínio dos saberes matemáticos que existiam (e alguns ainda existem) nas culturas dos colonizados. Só é inteligente aquele que sabe Matemática; a matemática dos eruditos, incontestável e imutável, absoluta por si ainda que para muitos essa matemática possa não fazer sentido algum, nem mesmo para o dito "inteligente".

O fato de ser tão rigorosa e muitas vezes parecer ser sem sentido, a Matemática tem sido vista com um meio de obter o poder (social, econômico, político, etc) e também como o terror de alunos e professores: ora porque é difícil aprender, ora porque é difícil ensinar. Por mais que os educadores procurem contextualizar os exercícios para que possam ser resolvidos como maior apropriação do conhecimento envolvido, não há garantia de que este objetivo seja realmente alcançado.

Para que se possa contextualizar a Matemática, no ponto de vista educacional, faz - se mais do que necessário conhecer a realidade local, o cotidiano do aluno e uma série de outros fatores que nortearão esse processo de contextualização. Porém, mesmo assim, pode ser que nos deparemos com situações em que não será possível concluir o processo, especialmente quando se trata de realidades para as quais a matemática acadêmica não se aplica.

Muitos educadores já vivenciaram a situação descrita e com base nela procuraram compreender os motivos que desencadearam as conhecidas dificuldades em se aprender e ensinar Matemática. Ubiratan é um desses educadores preocupados com o processo de ensino e aprendizagem e ao desenvolver a teoria da Etnomatemática, o autor recorreu à História para justificar as falhas do atual ensino matemático. D'Ambrosio (2007) afirmou que, durante e após o processo de colonização, tudo o que era diferente foi rotulado como inútil ou mera curiosidade, como descrito no trecho a seguir:

> Mas isso se faz com povos, em especial os indígenas. Sua nudez é indecência e pecado, sua língua é rotulada inútil, sua religião se torna “crendice”, seus costumes são “selvagens”, sua arte e seus rituais são “folclore”, sua ciência e medicina são “superstições” e sua matemática é “imprecisa”, “ineficiente” e “inútil”, quando não “inexistente”. Ora, isso se passa da mesmíssima maneira com as classes populares, mesmo não índios. (D’AMBROSIO, 2007, p.79)

Ao comparar a situação do povo indígena com as classes populares, o autor evidencia a nossa falta de consideração quanto à diversidade existente entre grupos sociais distintos. Parece que temos uma necessidade em desvalorizar a cultura do outro pelo simples fato de não ser como a nossa.

Como afirma D’Ambrosio (2007) esse pensamento hostil é recorrente do processo de colonização, em que europeus dominaram terras americanas e africanas, sem mencionar as demais, enraizando seus costumes e cobrindo (quando não, aniquilando) os costumes já existentes entre os povos conquistados. Desde então, a humanidade passou a se espelhar em um único modelo de organização que foi justamente criado pelos habitantes europeus.

Com a Educação não foi diferente, afinal, esta é fruto dos fazeres e saberes da humanidade. Em especial, a Matemática que aprendemos nas escolas ainda se volta para os contextos da realidade do “homem branco”. Os nomes que vimos nos livros didáticos são de estudiosos franceses, alemães, holandeses, ingleses e entre outras nacionalidades europeias. Quando surgem nomes de estudiosos de outros continentes, pouco se trata sobre eles e este pouco apenas se refere a uma breve biografia ou às suas fórmulas matemáticas.

Conforme conclui D’Ambrosio (2007) “chegamos a uma estrutura de sociedade, a conceitos perversos de cultura, de nação e soberania, que impõe a conveniência e mesmo a necessidade de ensinar a língua, a matemática, a medicina, as leis do dominador aos dominados [...]”(D’AMBROSIO, 2007, p.80). Desde muito tempo, ensinamos a Matemática e outras ciências que são da realidade dos nossos colonizadores, mas mesmo essa Matemática é na verdade uma Etnomatemática dentre as demais que existem pelo mundo. Contextualizar a Matemática que se ensina é umas das eficientes formas de elevar a qualidade do ensino matemático, como aponta D’Ambrosio (2007)

> A matemática contextualizada se mostra como mais um recurso para solucionar problemas novos que, tendo se originado da outra cultura, chegam exigindo os instrumentos intelectuais dessa outra cultura. A etnomatemática do branco serve para esses problemas novos e não há como ignorá-la. A etnomatemática da comunidade serve, é eficiente e adequada para muitas outras coisas, próprias àquela cultura, aquele *etno* e não há porque substituí-la. (D’AMBROSIO, 2007, p. 80)

Um exemplo a respeito da descrição do trecho acima é a substituição do sistema numérico dos indígenas pelo sistema decimal. Ora, mesmo que a base numérica de algumas tribos indígenas brasileiras fosse 3, 4 ou 5, não havia a necessidade de substituí-la uma vez que, para aquela população, seu sistema numérico era eficiente e servia para suas contagens. Por outro lado, fez - se necessário que os índios aprendessem a usar o sistema decimal para lidar com as transações com o homem branco, por exemplo, no comércio para evitar que fossem enganados. D'Ambrosio (2007) evidencia que o mais apropriado seria que os nativos aprendessem os dois sistemas para manter a sua identidade cultural e sobreviver ao mundo moderno.

A Matemática que aprendemos é importante: precisamos desse conhecimento para viver e suprir as necessidades do mundo contemporâneo. O programa Etnomatemática [20] não objetiva excluir a Matemática que estudamos nas escolas e substituí-la pela Matemática local, pois pode ser que essa Matemática não contemple as ferramentas precisas para solucionar os problemas da vida moderna, mas sugere que façamos um resgate das tradições e dos aspectos culturais da localidade e ensine esse conhecimento, especialmente matemático, para a população a fim de manter a sua identidade cultural.

Foi pensando nisso que Paulus Gerdes se interessou pela Matemática dos povos africanos, em especial de Moçambique, quando percebeu que a Matemática ensinada aos futuros professores locais não condizia com a realidade africana, como está descrito no trecho a seguir:

> [...] a disciplina é ensinada de maneira desconectada do mundo dos aprendizes. Muitas crianças nas escolas africanas, e futuros professores, sentem que a matemática lhes é apresentada como uma disciplina bastante estranha. Realmente, o autor observou, há algumas décadas, que para os estudantes que frequentaram o primeiro curso de formação de professores de Matemática em Moçambique, a disciplina lhes parecia estranha, importada de Europa e sem raízes na sociedade e cultura de Moçambique. (MOHAMED, 2013 *apud* GERDES, 2014, p.12)

Durante sua estadia em território africano, Gerdes se dedicou ao estudo das Matemáticas "escondidas" nas tradições das tribos nativas. De origem holandesa, Gerdes estudou as manifestações matemáticas que surgiam durante a construção de cestos, organização das aldeias e até nos modos como os anciãos transmitiam o conhecimento de seu

[20] Ubiratan D'Ambrosio (2007) denomina sua teoria como Programa Etnomatemática para evidenciar que não se trata de uma proposta epistemológica apenas, mas uma forma de entender a busca pelo conhecimento do ser humano e justificar as ações/ comportamentos adotados por ele. (D'AMBROSIO, 2007)

povo por meio de desenhos feitos na areia. Em particular, esses desenhos são chamados de *Sona*, os quais apresentaremos mais adiante.

Conforme Mohamed (2013 *apud* GERDES, 2014) o pesquisador holandês foi um dos pioneiros nos estudos etnomatemáticos na África. De acordo com o próprio Gerdes (2012a) para se referir às manifestações matemáticas utilizou o termo "matemática escondida", pois acreditava que o pensamento matemático dos povos tribais africanos estava escondido entre a Matemática elitizada trazida pelos colonizadores europeus, quase que esquecida.

Em uma tentativa de amenizar o estranhamento por parte dos estudantes africanos com a matemática ensinada, Gerdes publicou livros e outros trabalhos acadêmicos com o objetivo de apresentar metodologias de ensino que valorizassem a matemática local e, consequentemente, a cultura.

Embora as expectativas de estudiosos matemáticos como D'Ambrosio e Gerdes fossem positivas quanto aos objetivos da Etnomatemática, outros estudiosos criticaram o modo como os estudos etnomatemáticos são dirigidos.

Como aponta Ferreira (2007), autores como Paul Dowling (1993), Taylor (1993) e Millroy (1992) discordaram dos estudos da Etnomatemática: o primeiro disse a respeito do "monoglossismo plural" afirmando que a Etnomatemática privilegia uma única cultura, descartando as outras culturas que compõem a sociedade, afinal, esta é heteroglóssica, ou seja, mantém uma pluralidade cultural; o segundo aponta a ciência étnica como uma manifestação política pedagógica que se distancia da epistemologia; e por último, Millroy acredita ser impossível que uma pessoa escolarizada com a Matemática ocidental seja capaz de "ver" outro tipo de Matemática sem que esta se assemelhe com a Matemática convencional. (FERREIRA, 2007, p.278)

Os apontamentos feitos por esses estudiosos foram refutados por Knijnik (1996), como descreveu Ferreira (2007). Martin Gardner (1998) em artigo na revista "*New York Review of Books*[21]" sobre o livro de Ascher, publicado em 1994, "*Multicultural View of Mathematical Ideas*[22]", afirma que

[21] Revisão de livros Nova Iorque – tradução nossa.
[22] Visão Multicultural das Ideias Matemáticas – tradução nossa.

> O estudo de como as culturas pré-industriais, antigas e modernas, trata os conceitos matemáticos tem um valor histórico, mas é vital que tenhamos em vista que a Matemática, como outras ciências, é um processo de permanente acúmulo de conhecimento, conhecimento esse que é o mesmo em todas as partes do mundo. Tribos nativas podem usar sistemas de numeração diferente do nosso, mas a matemática por trás do simbolismo é a mesma. Dois elefantes mais dois elefantes são quatro elefantes em todas as tribos africanas. (GARDNER, 1998 *apud* FERREIRA, 2007, p. 278)

Outros autores também criticaram o programa Etnomatemática, mas boa parte foi refutada pelos próprios etnomatemáticos[23]. As críticas e apontamentos feitos a respeito da Etnomatemática são fundamentais para fortalecer sua teoria. Além disso, muitos trabalhos sobre a ciência étnica têm sido elaborados e já existem resultados de pesquisas de campo em boa parte do mundo, especialmente na África e na América Latina.

Alguns dos trabalhos sobre Etnomatemática podem ser encontrados no site da revista *RLE – Red Latinoamericana de Etnomatematica*[24], em que todos os seus estudos são de países latino-americanos e estão escritos em língua portuguesa, espanhola e inglesa. No ano de 1985 foi fundado o *International Study Group of Ethnomathematics- ISGEm*[25] que vem divulgando as pesquisas sobre Etnomatemática realizadas pelo mundo. Livros e artigos que abordam não somente a Etnomatemática, mas também a História da Matemática e da Educação Matemática têm sua importância por complementarem a teoria Etnomatemática[26].

Ressaltamos que a maioria dos estudos etnomatemáticos começou quando pesquisadores encontraram ideias matemáticas expressas em desenhos, não somente africanos como Paulus Gerdes nos mostrou, mas também achados em comunidades de outros países como a Índia e o Japão. Anterior à Etnomatemática, a Etnogeometria já vinha abordando sobre as questões étnicas nas expressões matemáticas que povos antigos carregaram durante gerações, especialmente sobre as manifestações geométricas.

---

[23] Autores como John Saxon, "publicou sua crítica no NCTM de 1996; Bernard Ortiz de Montillano, no "*American Journal of Physics*", de 4 de outubro de 1997; John Leo, com o artigo: "*The so called Pythagoras*" , no "US News & Word Report", de 26 de maio de 1997. Outros que conseguiram refutar as críticas ao programa foram A. Pais; H. Geraldo e V. Lima, num artigo também muito importante. Eles refutam as críticas levantadas por Skovsmose, Ernet, Abraham e Bibbby (PAIS et al., 2001) e mais outros." (FERREIRA, 2007, p. 278)

[24] Site oficial RELAET: http://www.etnomatematica.org. Revista REL: http://www.revista.etnomatematica.org.

[25] Mais informações: http://isgem.rpi.edu/.

[26] Sugerimos as seguintes leituras: *Origens da Matemática*, de Manoel de Campos Almeida (1998); *Os Kanhgág da Bacia do Tibagi: Um estudo etnomatemático em comunidades indígenas*, de Chateaubriand Nunes (1999); *Code of the Quipus: a study in media, mathematics and culture*, de Marcia Ascher e Robert Ascher (1981); *Etnomatemática: relações e tensões entre distintas formas de explicar e conhecer*, de Samuel López (2000); *A matemática na época das grandes navegações e início da colonização* e *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer*, de Ubiratan D'Ambrosio (2001 e 1990 resp.); *Sobre o despertar do pensamento geométrico*, de Paulus Gerdes (1992); *Etnomatemáticas. Formación de profesores e inovación curricular*, de Maria Luisa (1996); *Africa Counts. Number and Pattern in African Cultures*, de Claudia Zaslavsky (1999).

2.1 Etnogeometria

Em seu livro *Etnogeometria: Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico*, Paulus Gerdes (2012b) expõe a possível origem da Geometria, como já discutimos neste trabalho, que pode ter suas raízes anteriores ao povo egípcio. Apresenta-nos ainda a possibilidade da própria natureza ter originado a essência do que é a Geometria e o homem, talvez, apenas observou e adaptou o que viu para suprir suas necessidades de sobrevivência.

> Formas geométricas aparecem tanto na natureza "inanimada" como na vida orgânica e estes fenômenos podem ser explicados na base de causas mecânicas e fisiológicas. Além desta necessidade mecânica, prossegue Coolidge, qual é o exemplo mais antigo de uma construção geométrica intencional? Talvez a feitura de uma cela de colmeia, se evitarmos dificuldades metafísicas respeitantes ao problema da liberdade do querer. Não, a abelha só otimiza, mas o geômetra mais capaz no seio dos animais é, de certeza, a aranha, que tão belas teias tece! (COOLIDGE, 1963, p. 2 *apud* GERDES, 2012b, p. 24)

Sendo assim, temos que "a Geometria nasceu das necessidades dos homens" (GERDES, 2012b), uma vez que o ser humano primitivo sentiu a necessidade de medir e comparar objetos e esse conhecimento lhe era natural. A partir das observações do homem, a Geometria teria surgido com uma ciência empírica e intuitiva a qual chamaremos de "Geometria Subconsciente" como nos apresenta Eves (1992).

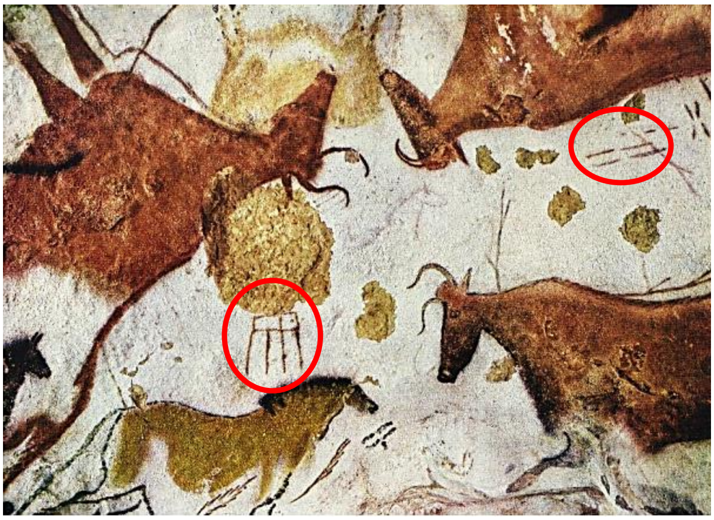
Ao longo da História, o ser humano examinou as simetrias e formas encontradas na natureza e passou a utilizá-las para a manufatura de utensílios como cestos, por exemplo, que podem ser feitos apenas usando folhas de palmeiras entrelaçadas. Conceitos como de ângulos, retas paralelas e espirais são antecedentes até mesmo à tecelagem, pois foram encontrados traços de ângulos retos e retas paralelas em pinturas rupestres nas cavernas de Lascaux[27] (Figura 7), como nos conta Bernal (1971).

[27] "A caverna de Lascaux foi descoberta numa quinta-feira, 12 de Setembro de 1940, por rapazes de Montignac (ou que residiam na altura em Montignac). [...] A caverna de Lascaux no vale da Vézère, a dois quilómetros da pequena cidade de Montignac, não é só a mais bela, a mais rica das cavernas pré-históricas com pinturas; mas

desde logo o primeiro sinal sensível que nos chegou do homem e da arte." As pinturas que resistiram às intempéries contam com diversas formas geométricas incluindo quadrados e círculos. (BATAILLE, 2016, p 13 e 15).

Figura 7: Pinturas na parede de uma caverna em Lascaux, França.

Observe que há algumas retas desenhadas entre os animais



Fonte: Adaptada- Destaques nossos. BATAILLE, 2016, p. 29

Com a evolução da nossa espécie, grupos de etnias distintas se formaram e se espalharam por todo o globo terrestre. Cada grupo passou a exercer suas próprias atividades e criaram suas culturas, desenvolveram hábitos e costumes próprios e também maneiras diversificadas de transmitir o conhecimento. A transcendência de saberes era, muitas vezes, ilustrada: desenhos que remontam episódios cotidianos de caças ou mesmo de acontecimentos místicos, entre outros temas foram encontrados em várias expedições arqueológicas. Dessa forma o conhecimento se transmitia de uma geração para outra sendo em alguns países da mesma forma.

Com base em Gerdes (2012b), a Etnogeometria vem estudando essas maneiras de o homem transmitir o conhecimento matemático por meio das formas geométricas, sendo que esse saber geométrico serve para construir objetos de modo mais eficientes como cestos, esteiras, redes e outros utensílios necessários à sobrevivência de dado povo.

Uma das geometrias mais conhecidas nessa área é a Geometria Sona que se baseia nos desenhos africanos feitos na areia, estudados por Paulus Gerdes quando residiu em Moçambique e em Angola. Trataremos mais detalhadamente sobre ela nas próximas páginas.

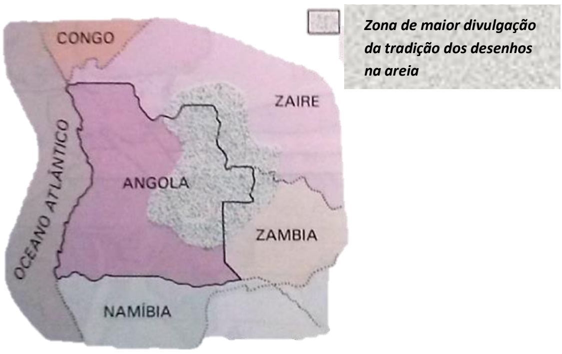
3 Geometria Sona

Em seu livro "*Geometria Sona de Angola: Matemática duma tradição africana",* o primeiro volume da coleção "Geometria Sona de Angola", Paulus Gerdes (1993a) descreve como despertou seu interesse em estudar sobre os desenhos africanos. Gerdes (1993a) relata que ao ler o livro "*Desenhos na Areia dos Quiocos do Nordeste de Angola"* (FONTINHA, 1983) percebeu algumas propriedades matemáticas nos desenhos estampados nas páginas do livro e queria descobrir mais sobre eles. Foi então que iniciou sua jornada com o intuito de revelar a Geometria Sona para o mundo.

3.1 Cokwe (Quioco)

"A tradição dos *sona* pertence à cultura dos *Cokwe* (ou Quioco) e de povos relacionados como os *Luchazi* e *Ngangela* que vivem no Leste de Angola e em zonas vizinhas do Noroeste da Zâmbia e do Congo (Zaire)" (GERDES, 1993a, p.13). Conforme Gerdes (1993b) a população quioca é encontrada no nordeste da Angola (Figura 8) e vivem da caça e da agricultura.

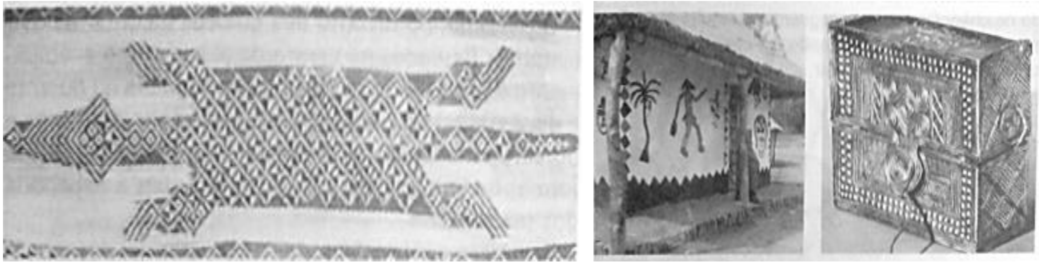
Figura 8: Divulgação da tradição dos *sona*



FONTE: GERDES, 1993b, p.6

Os quiocos são muito conhecidos por sua arte: ricos desenhos nas paredes de suas casas, cerâmicas, trabalhos na madeira, forjam ferros, fabricam esteiras e cestos decorados, como mostrados nas fotos a seguir (Figura 9):

Figura 9: Arte quioca



FONTE: Adaptada. GERDES, 1993b, p.7

O pesquisador matemático quando fez sua viagem a Angola buscou por (GERDES, 1993a, p.13):

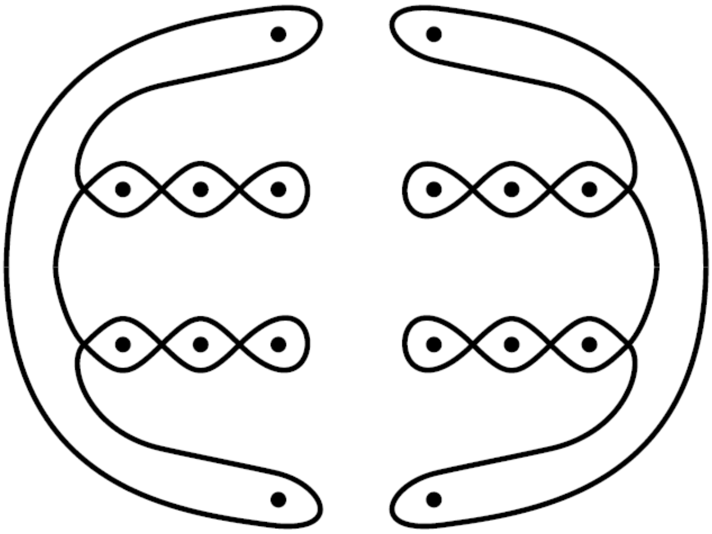
- Analisar os elementos matemáticos da tradição *sona*;
- Explorar os usos dos *sona* na Educação Matemática;
- Explorar conceitos matemáticos dos *sona;*
- Estudar outras tradições que se assemelham com a tradição *sona*.

Para o presente trabalho, nosso foco será a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na execução dos *sona* e a possibilidade de aplicação em uma sala de aula.

3.2 Os *Sona*

Consideramos os *sona* como sendo desenhos feitos na areia (FONTINHA, 1983), enquanto *lusona* é a forma singular. Esses desenhos eram executados com máxima precisão, pois serviam para transmitir o conhecimento do povo tribal para as outras gerações. Vejamos a seguir um exemplo de *lusona* (Figura 10):

Figura 10: *Lusona* que representa pessoas coletando cogumelos

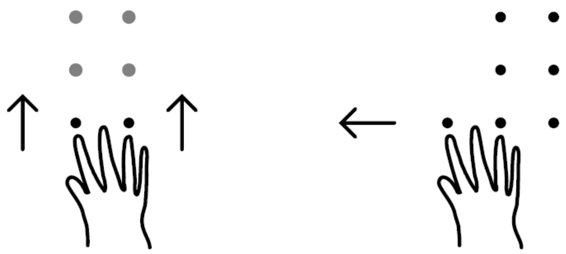


FONTE: GERDES, 1993a, p. 32

Conforme Gerdes (1993a), de acordo com a tradição *sona*, apenas os *akwa kuta sona* – conhecedores dos desenhos – podem executar a tarefa de desenhar esses grafos, pois eles pertencem à elite da tribo e conhecem as regras para desenhar. Uma delas é que a malha onde será feito o desenho deve ser ortogonal com os pontinhos espaçados igualmente e, para isso, os *akwa kuta sona* utilizam os dedos para demarcar as distâncias entre os pontos, conforme ilustra a Figura 11:

Figura 11: Marcação de pontos

Observe que a distância entre os pontos equivale à distância entre o dedo anelar e o indicador.



FONTE: GERDES, 1993a, p. 24

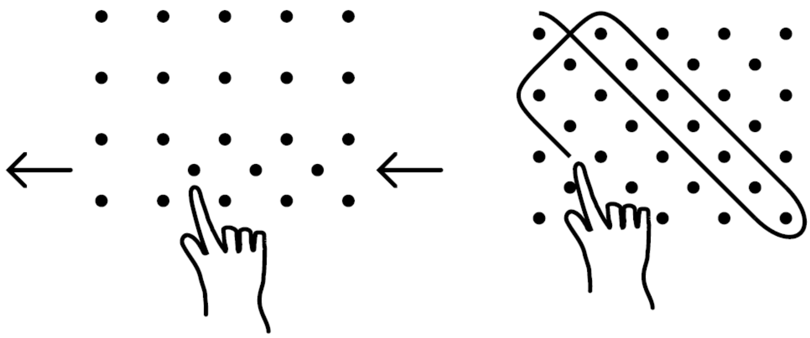
Antes mesmo de marcar os pontos, chamados de *tobe,* o desenhista precisa limpar e alisar o chão para finalmente desenhar. Além disso, o desenho precisa ser executado sem interrupções, pois qualquer parada durante a execução do *lusona* significa que o seu desenhista não tem conhecimento sobre o que está fazendo.

Gerdes (1993a) anuncia que durante a construção do desenho, os *akwa kuta sona* contam uma história que pode estar entre os mais variados temas, geralmente relatando acontecimentos cotidianos da tribo ou explicando algum fenômeno místico. Essa é uma forma de se transmitir o conhecimento adquirido pelos ancestrais às novas gerações.

Dependendo do motivo a ser representado pelo *lusona*, podem ser utilizadas uma ou mais linhas. A quantidade de linhas e colunas da malha dependerá também do motivo. As linhas do desenho, chamadas de *mufunda* (pl. *mifunda*), “abraçam” os pontinhos e formam todo o *lusona* (GERDES, 1993a). A Figura 12 ilustra a execução das linhas em torno dos pontos da malha:

Figura 12: Desenhando as linhas do *lusona*

Normalmente, as linhas são desenhadas da direita para a esquerda da malha



FONTE: GERDES, 1993a, p. 25

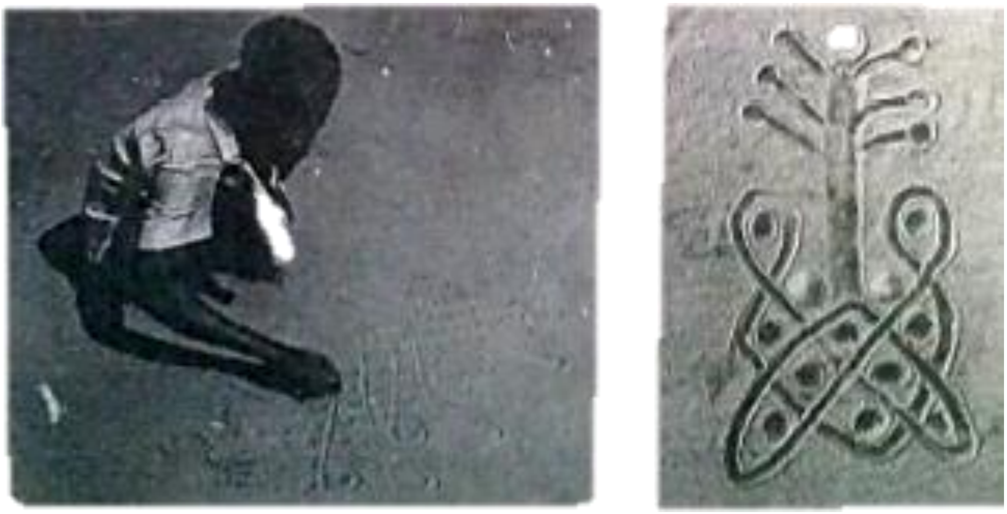
Nas observações de Fontinha (1983), a execução dos *sona* exige que os *akwa kuta sona* memorizem apenas dois números (de linhas e colunas) e um padrão geométrico, mas devem obedecer às normas bem rigorosas de iniciar e terminar o desenho, como destaca o autor.

Infelizmente, não há muitos registros referentes às normas de iniciação e término dos *sona*, pois com o processo de colonização, a tradição *sona* entrou em decadência uma vez que os colonizadores trataram de extingui-la. Fontinha (1983) faz uma triste revelação ao afirmar que para cada ancião conhecedor dos *sona* que falece, parte da tradição *sona* desparece junto a ele.

Atualmente, só temos conhecimento de algumas centenas de *sona*. Pesquisadores como Fontinha se dedicaram a encontrar homens que soubessem um pouco mais sobre esses desenhos. Os *sona* mais simples eram bem mais populares enquanto os mais complicados dificilmente eram vistos e somente os mais velhos tinham conhecimento destes. Como aponta o próprio Fontinha (1983), mesmo quando os anciãos diziam aos pesquisadores que sabiam de alguns dos *sona* mais complexos, nem sempre os executavam, pois afirmavam que, além de a visão estava prejudicada, já não tinham mais cabeça ou habilidade para isso.

Por serem feitos na areia, como mostrado na Figura 13, os desenhos não são preservados já que, assim que concluídos, são apagados ou deixados ao relento e o vento se encarrega de apagá-los (FONTINHA, 1983). Isso dificultou, ao longo dos anos, que os *sona* pudessem ficar registrados de algum outro modo que não apenas por memorização de poucos.

Figura 13: Desenhando *sona*



FONTE: GERDES, 1993b, p.7

Durante nosso estudo, percebemos que os autores trabalhados por nós descreviam que os *sona* eram (e ainda são) executados quase sempre por homens. Em algumas tribos, onde esses desenhos recebem até outros nomes como *tusona* (pl. *kasona*) na língua *ngangela*, as ideias transmitidas pelos desenhos eram para a comunidade masculina e se referiam às instituições existentes, ao estímulo da fantasia, exercício do pensamento lógico abstrato e até mesmo como uma forma de meditação (KUBIK, 1987a, p.58 *apud* GERDES, 1993a, p. 27 e 28).

Vale ressaltar que, culturalmente, boa parte das tribos africanas tem como principal ideologia a superioridade do ser masculino sobre o feminino e, talvez, este seja um dos fatores por que a maioria dos desenhistas sejam homens, embora crianças e mulheres também executem alguns *sona* mais simples.

Diante da dificuldade de encontrar quem saiba mais sobre *sona* nas comunidades africanas, os pesquisadores reuniram cerca de 500 *sona*. Na Tabela 1 vemos a relação de *sona* encontrados e os pesquisadores que os registraram até 1983, conforme nos apresenta Gerdes.

Tabela 1: Coleção de *sona*

Coleccionador	Período de colecção	Data(s) de publicação	Número de *sona* relatados
Emil Pearson	Principalmente os anos 1920	1977	69
Hermann Baumann	1930	1935	4
Mário Fontinha	1945 – 1955	1983	287
E. Hamelberger	Ca. 1947-1950	1951, 1952	28
José Redinha	Antes de 1953	1953	8
Eduardo dos Santos	Ca. 1955–1960	1961	94
Th. Centner	Antes de 1963	1963	13
Gerhard Kubik	1973, 1977–1979	1975, 1987	25

Fonte: GERDES, 1993a, p. 28

Porém, podemos nos questionar: “mas como esses desenhos que, aparentemente, pertencem a uma tradição tão antiga conseguiram resistir e chegar até nós?”. A resposta que encontramos é que provavelmente os *sona* tenham surgido a partir de uma necessidade humana de compartilhar suas histórias. Como apresenta Kubik

> A partir de toda a evidência disponível parece que essas descobertas eram feitas por indivíduos em solidão durante longas viagens através de áreas desabitadas. A tradição oral confirma que no passado os *sona* eram frequentemente desenhados por caçadores, quando se sentavam para descansar e queriam passar o seu tempo. (KUBIK, 1987b, p. 245 *apud* GERDES, 1993a, p.28)

Por conta dessa transmissão oral da tradição *sona*, alguns dos desenhos que conhecemos podem conter “erros”. Como Gerdes (1993a) define que os erros podem ser devido à idade dos desenhistas, erros de transmissão de conhecimento entre gerações ou algo consciente para preservar e proteger o conhecimento a fim de enganar os pesquisadores, como uma forma de resistência cultural contra os estrangeiros.

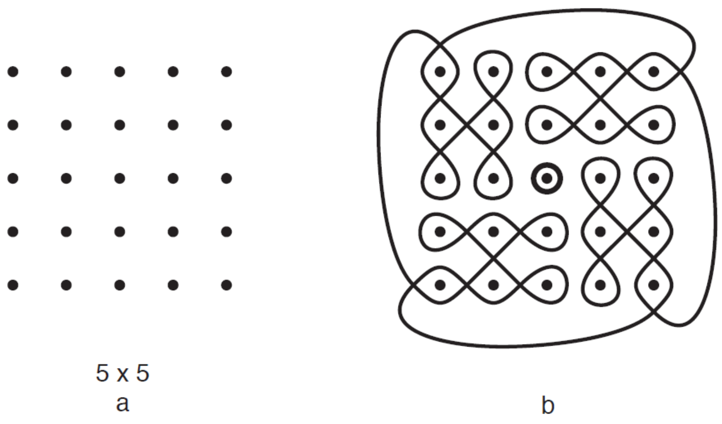
Apesar das dificuldades sobre os estudos dos *sona*, pesquisadores como Gerdes descobriram que existem propriedades matemáticas envolvidas na construção desses desenhos, algumas muito peculiares. Tratamos, principalmente, de propriedades aritméticas e geométricas, pois são as mais estudadas durante o Ensino Básico.

3.3 Propriedades matemáticas dos *sona*

Com base na distribuição dos pontos pela malha do desenho, é possível estabelecer relações entre algumas propriedades aritméticas e geométricas conhecidas por nós e as encontradas nos *sona*, como afirma Gerdes (2014). Como exemplo, temos a Figura 14 que representa um bando de pássaros *qundu*:

Figura 14: Bando de pássaros *qundu*

Observe que a malha é composta por 25 pontos.



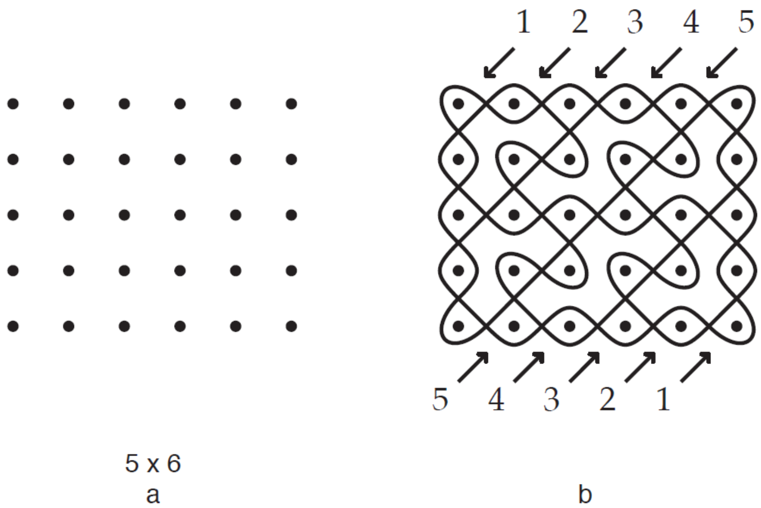
Fonte: GERDES, 2014, p. 21.

A malha composta por 25 pontos pode ter essa quantidade distribuída de modo que $25 = 5^2 = (4 \times 6) + 1$. Sendo assim, há 4 grupos de 6 pontos que representam os pássaros e um único ponto em destaque, ao centro. Seguindo esse raciocínio, podemos decompor o número que representa a quantidade de pontos da malha em parcelas e fatores, convenientemente, de acordo com a história a ser contada. Analisamos outras malhas que obedecem às propriedades das progressões aritméticas, apresentadas a seguir.

3.3.1 Progressões aritméticas

Podemos verificar uma progressão aritmética no desenho de uma galinha em fuga (Figura 15):

Figura 15: Galinha em fuga



Fonte: GERDES, 2014, p. 22.

A linha ao redor dos pontos ilustra o caminho que a ave faz quando está fugindo de predadores. Analisando esta figura percebemos que a expressão 5 x 6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) é a progressão aritmética que representa a situação, pois devemos contabilizar os pontos que estão envolvidos pelas linhas nas diagonais. Existem outras figuras que podem ser representadas por progressões como essa e basta considerar a quantidade de linhas da malha. Indutivamente, uma malha com n linhas terá progressão aritmética do tipo:

$$2(1+ 2 + \ldots + n) = n\,(n + 1)$$

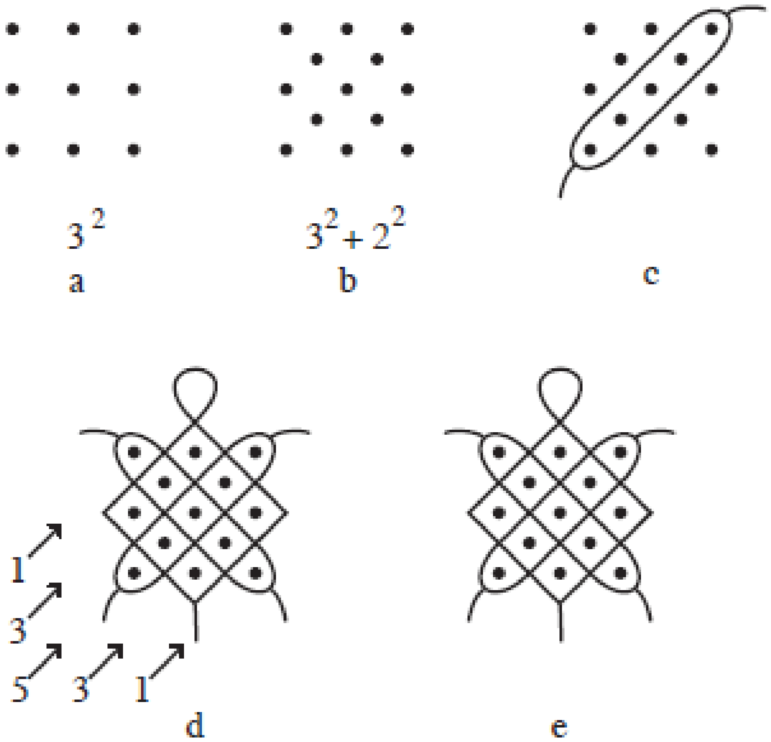
Ou ainda,

$$2(1+ 2 + \ldots + n) = (n + 1)^2 - (n + 1)$$

Com essa fórmula, podemos representar diversas malhas por meio de uma progressão aritmética. Entretanto, alguns desenhos precisam sobrepor duas malhas ortogonais, “de tal maneira que os pontos da segunda são os centros dos quadrados unitários da primeira rede, formando assim um retículo novo” (GERDES, 2014, p.22), como mostrado no exemplo a seguir (Figura 16). A quantidade de pontinhos será de $3^2 + 2^2 = 1 + 3 + 5 + 3 + 1$. Reparamos que a progressão é composta por termos ímpares e positivos.

Figura 16: Tartaruga

O desenho da tartaruga precisa de duas malhas
sobrepostas: uma 3 x 3 e uma 2 x 2.

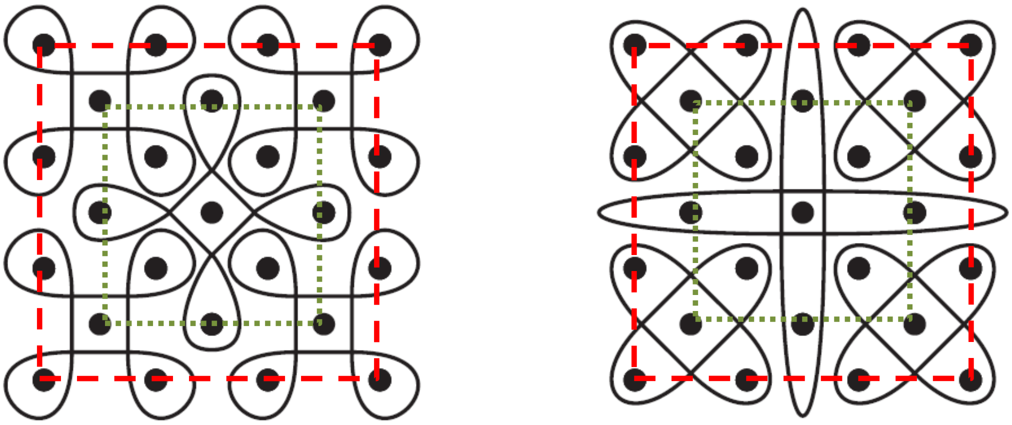


Fonte: GERDES, 2014, p. 25.

Questionamos se desenhos que precisam sobrepor malhas ortogonais serão representados por progressões de termos ímpares. De acordo com Gerdes (2014), os *sona* que utilizam de malhas ortogonais são representados por essas expressões, pois basta considerar que $n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n – 1)$, ou seja, o quadrado de um número n é sempre igual à soma dos n primeiros números ímpares. Assim, com base no exemplo anterior, $3^2 = 1 + 3 + 5$ (soma dos três primeiros ímpares) e $2^2 = 1 + 3$ (soma dos dois primeiros ímpares), logo $3^2 + 2^2 = (1 + 3 + 5) + (1 + 3) = 1 + 3 + 5 + 3 + 1$.

De acordo com os estudos de Gerdes (2014) e de pesquisadores como Fontinha (1983), foi notado que alguns dos *sona* que possuem malhas ortogonais sobrepostas podem ser representados por ternas pitagóricas. Por exemplo, a terna (3, 4, 5) pode ser contemplada na Figura 17:

Figura 17: *Sona* da terna pitagórica 3 - 4 - 5



Fonte: Adaptada: Tracejados nossos. GERDES, 2014, p. 28.

Observamos que a expressão $3^2 + 4^2 = 5^2$ representa as figuras anteriores, ou seja, a quantidade de pontos da malha 3 x 3 (em verde) adicionado à quantidade de pontos da malha 4 x 4 (em vermelho), que estão sobrepostas, resulta em 25 pontos que corresponde a uma malha 5 x 5. Desse modo, será possível desenhar figuras múltiplas da terna $[n, (n+1), n^2 + (n+1)^2]$.

Além da Aritmética, a tradição dos *sona* revela que há uma utilização frequente das propriedades geométricas. As figuras exibem simetrias, rotações, semelhanças e padrões que são conceitos geométricos. Tratamos de estudar os tipos de simetrias encontrados nos *sona*.

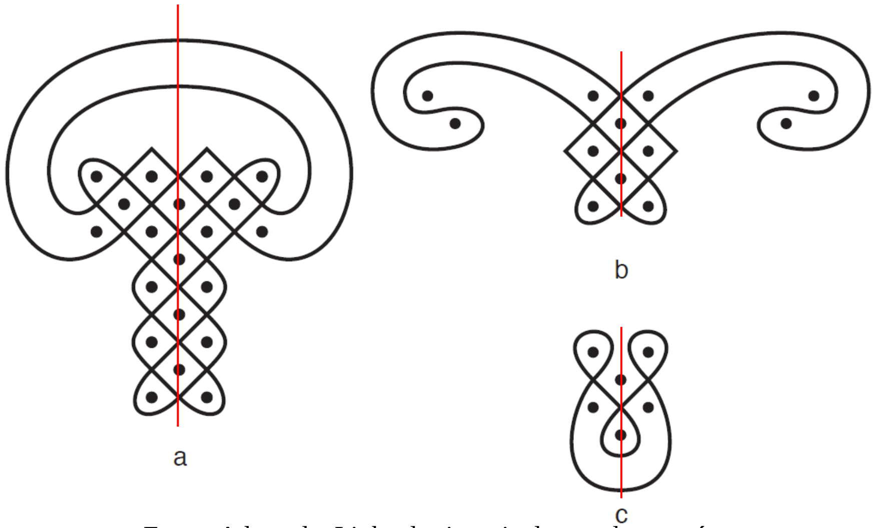
3.3.2 Simetria

Para melhor compreensão, precisamos definir que “simetria é a semelhança exata de uma forma em torno de um eixo de simetria, em torno de um ponto ou em torno de um plano.” (ALVES, 2014, p. 27).

De acordo com Gerdes (2014) alguns *sona* apresentam uma simetria *axial*: dois pontos que se correspondem estão equidistantes do eixo de simetria, como mostrado na Figura 18:

Figura 18: Simetria axial dos *sona*

O segmento em vermelho representa o eixo principal de simetria.

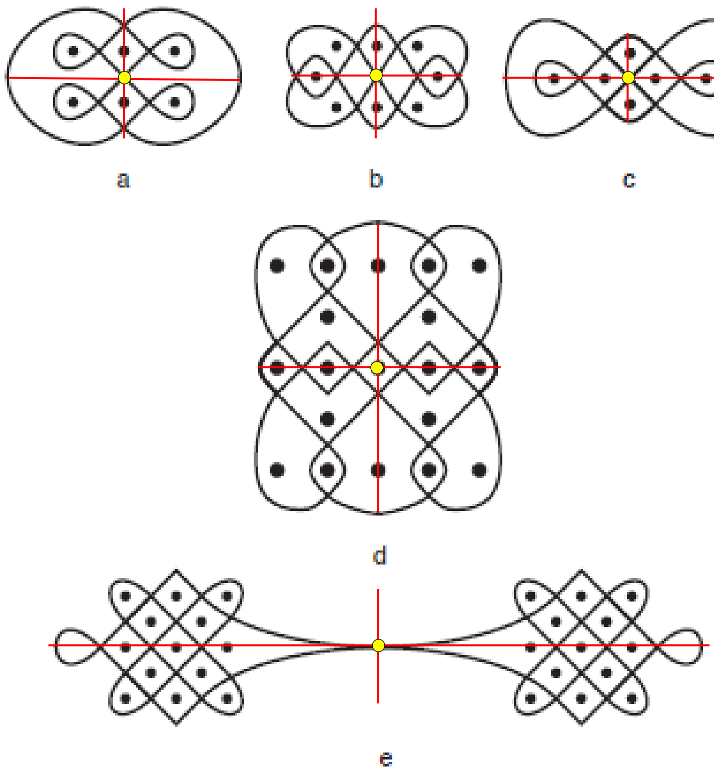


Fonte: Adaptada: Linha de simetria destacada por nós.
GERDES, 2014, p. 28.

Alguns desenhos mostram uma simetria *dupla axial e central* que distribui os pontos correspondentes a uma mesma distância do centro de simetria, como vimos na Figura 19:

Figura 19: Simetria dupla axial e simetria central dos *sona*

Os segmentos em vermelho representam os eixos de simetria: pontos correspondentes estão equidistantes do eixo horizontal e vertical. O ponto amarelo é o centro de simetria.

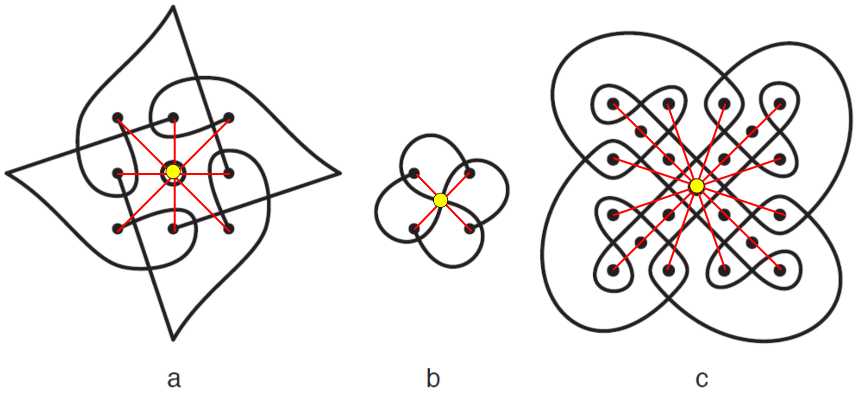


Fonte: Adaptada: Linhas de simetria destacada por nós.
GERDES, 2014, p. 29.

Outros *sona* apresentam uma simetria do tipo *rotacional* em que pontos correspondentes estão equidistantes do centro de rotação. Entre os eixos de correspondência está o ângulo de rotação, como ilustrado na Figura 20:

Figura 20: Simetria rotacional dos *sona*

Os segmentos vermelhos representam a correspondência dos pontos. O ponto amarelo é o centro de rotação e α é o ângulo formado entre os eixos de correspondência.



α = 45º α = 90º α = 30º

Fonte: Adaptada: Linhas de rotação destacadas por nós.
GERDES, 2014, p. 30.

Observamos que o ângulo formado entre as partes que se repetem é de 90º, mas o ângulo entre os eixos de correspondência pode variar. As partes das figuras mostradas mantêm uma semelhança que também é outra propriedade notável nos *sona*.

3.3.3 Semelhança

Nas observações feitas por Gerdes (2014) vimos que existe a propriedade de *semelhança* nos *sona*. Por exemplo, no desenho da leoa com seus filhotes (Figura 21 e Figura 22), verificamos a relação entre o tamanho da malha que representa a leoa e o tamanho das malhas que representam os filhotes. Existe uma proporção entre as figuras dada pela razão:

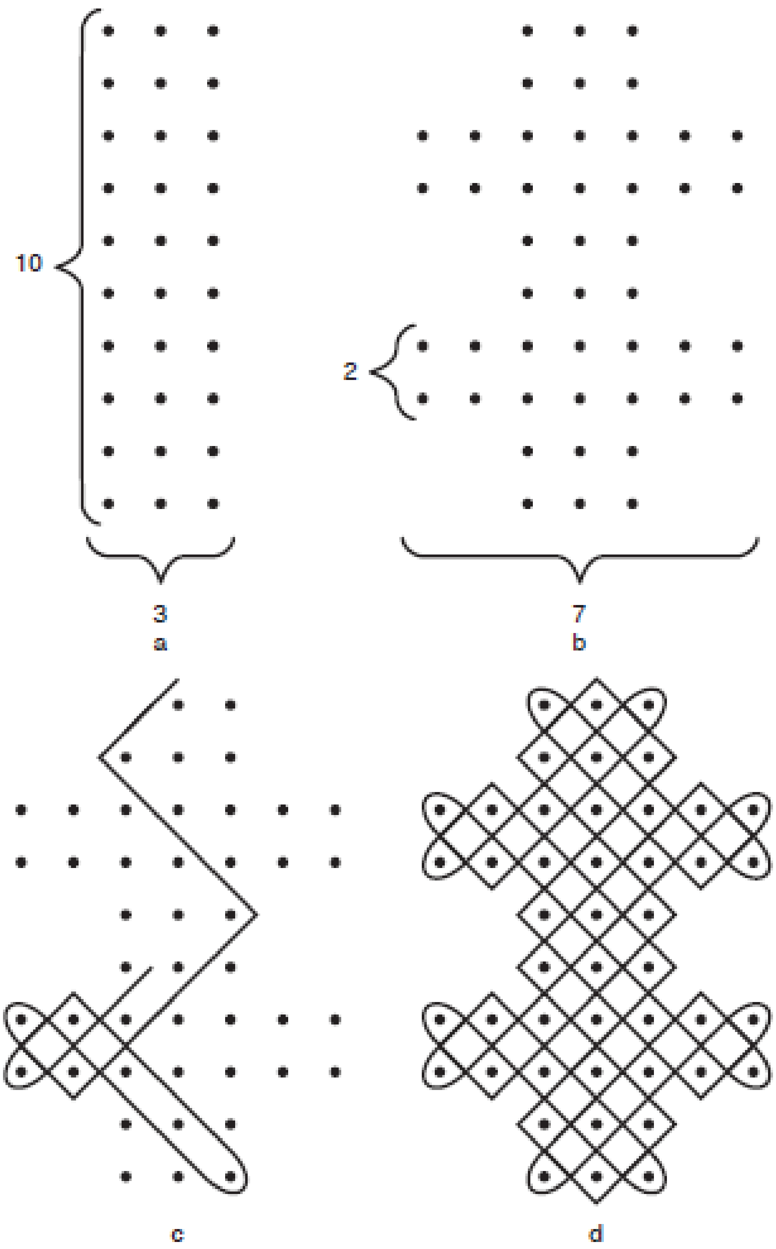
$$\frac{L_M}{C_M} \approx \frac{l_m}{c_m}$$

Em que: $\begin{cases} L_M \text{ é a quantidade de } \textbf{linhas} \text{ da figura } \textbf{maior}; \\ C_M \text{ é a quantidade de } \textbf{colunas} \text{ da figura } \textbf{maior}; \\ l_m \text{ é a quantidade de } \textbf{linhas} \text{ da figura } \textbf{menor}; \\ c_m \text{ é a quantidade de } \textbf{colunas} \text{ da figura } \textbf{menor}. \end{cases}$

Ressaltamos que o coeficiente de proporcionalidade de ambos os desenhos é aproximado, como visto na figura seguinte.

Figura 21: Malha do *lusona* Leoa e seus dois filhotes

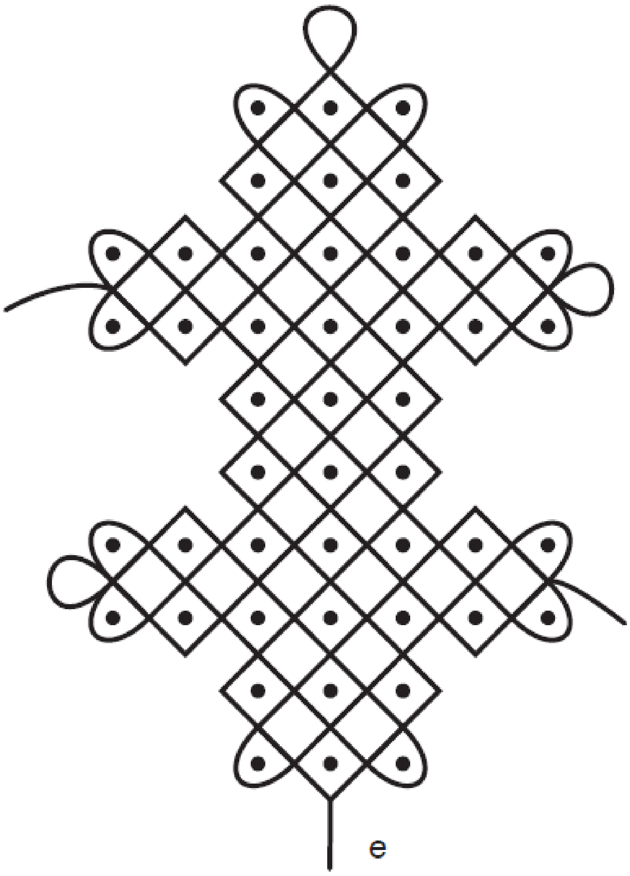
A malha maior representa a leoa e as menores, ortogonais a primeira, representam os filhotes deitados sobre a mãe.



Fonte: GERDES, 2014, p. 31.

Figura 22: Leoa e seus dois filhotes

Os filhotes estão sobre a barriga da mãe. Os traços são as caudas dos felinos.



Fonte: GERDES, 2014, p. 32.

Notamos que a quantidade de linhas para a leoa é 10 e a quantidade de colunas é 3; analogamente, a quantidade de linhas para um dos filhotes é 7 e a quantidade de colunas é 2. Assim, pela expressão anterior:

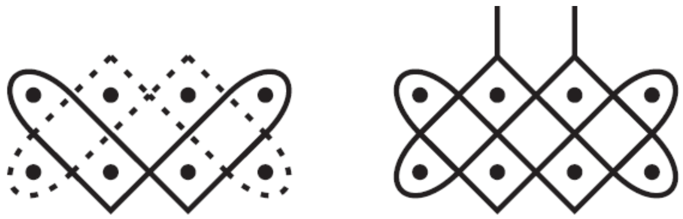
$$\frac{10}{3} \approx \frac{7}{2} \rightarrow 10 \times 2 \approx 7 \times 3 \rightarrow 20 \approx 21$$

Com isso, percebemos que o valor das taxas de proporção das figuras se mantém próximo um do outro. Assim, é possível ampliar e reduzir outros desenhos, especialmente os que representam animais, pois estes costumam ser semelhantes aos adultos quando filhotes.

3.3.4 Máximo divisor comum

Conforme apresenta Gerdes (2014), os *akwa kuta sona* desenvolveram uma forma de descobrir o número de curvas fechadas que um *lusona* precisaria ter. Entendamos como curvas fechadas sendo linhas que "abraçam" os pontinhos da malha, representadas na Figura 23:

Figura 23: Curvas fechadas na representação da cabeça de antílope

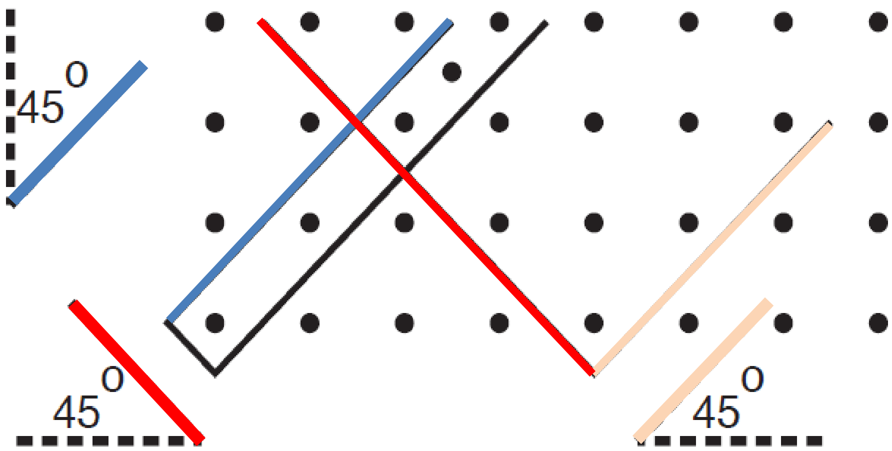


Fonte: GERDES, 2014, p. 34.

Observamos que a malha 2 x 4 tem duas curvas fechadas que envolvem os pontinhos onde na figura uma está pontilhada e a outra lisa. Esse padrão foi observado em muitos *sona* e os pesquisadores compreenderam que era possível relacionar a quantidade de curvas fechadas com a quantidade de linhas e colunas de uma matriz *m* x *n* (*m* linhas e *n* colunas), obviamente, sendo *n* e *m* valores naturais, pois não existem *sona* com quantidades de linhas e colunas fracionárias, negativas ou nulas.

Para melhor entendimento, Gerdes (2014) sugere uma observação da inclinação das linhas dos *sona* conhecidos em relação aos lados da malha. Em todos os casos, o ângulo de inclinação das curvas é de 45º, como ilustrado na Figura 24:

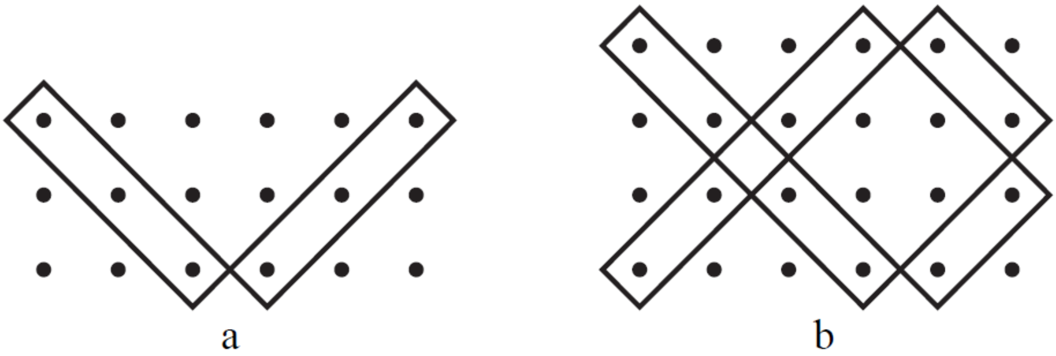
Figura 24: Ângulo de inclinação das curvas fechadas



Fonte: Adaptada: Linhas destacadas por nós.
GERDES, 2014, p. 35.

Além dessa observação, o autor mostra que há sempre uma padronização na quantidade de curvas fechadas como é possível notar na Figura 25:

Figura 25: Curvas fechadas em malhas 3 x 6 (a) e 4 x 6 (b)



Fonte: GERDES, 2014, p. 35.

Por meio de uma função *f(m,n)= quantidade de curvas fechadas* conseguimos encontrar quantas curvas fechadas o *lusona* precisa ter para "abraçar" todos os pontinhos de uma malha *m* x *n.* No caso da Figura 25a foram necessárias três curvas fechadas iguais à curva destacada e na Figura 25b apenas duas iguais à curva destacada, matematicamente:

$$f\,(3,6) = 3 \text{ e } f\,(4,6) = 2$$

Percebemos que os resultados encontrados são sempre divisores dos números que representam as linhas e as colunas das malhas. Mais que isso, o resultado é o máximo divisor comum (*mdc)* entre *m* e *n.* Dessa forma, para qualquer malha com *m* linhas e *n* colunas, temos:

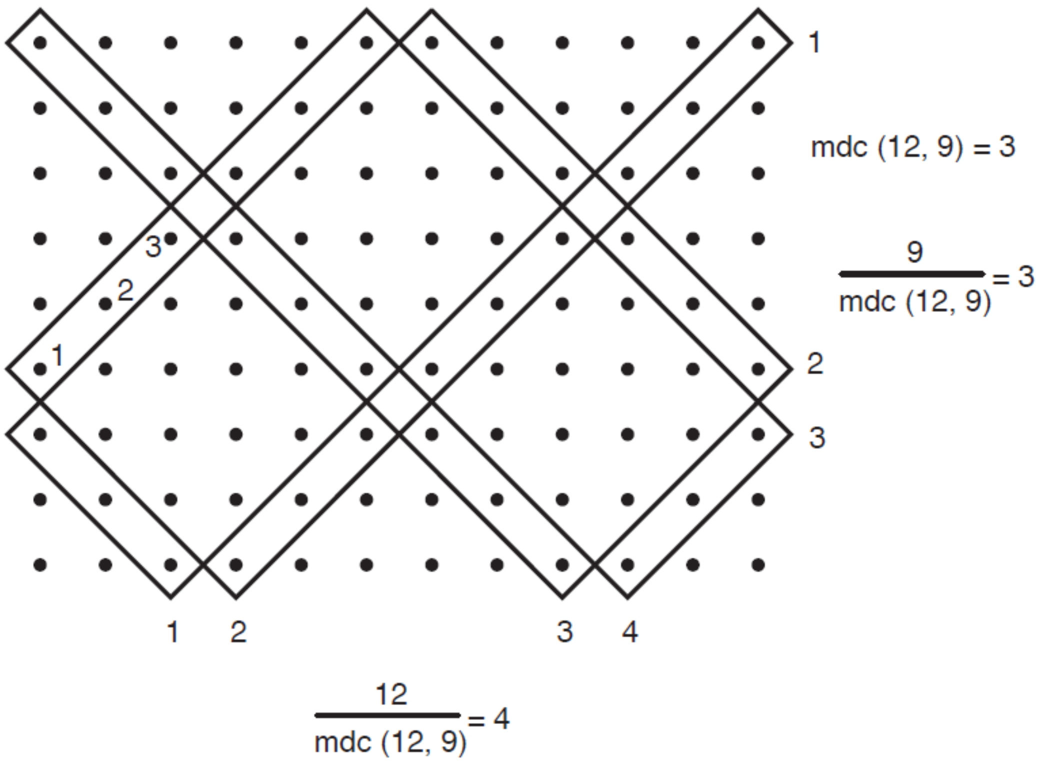
$$f\,(m,n) = mdc\,(m,n)$$

Em que *f (m,n)* representa não só a quantidade de linhas fechadas necessárias pra envolver todos os pontinhos do desenho em função da quantidade de linhas e colunas da malha, mas também indica quantos pontos existem entre as interseções das curvas. Outro fato observável nos *sona* é que a quantidade de pontinhos onde as curvas mudam de direção também se relaciona com o *mdc(m,n).* Gerdes (2014) mostra que essa relação é dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{mdc(m,n)} = P_m \\ \dfrac{n}{mdc(m,n)} = P_n \end{cases}$$

No caso, P_m representa a quantidade de pontinhos onde a curva muda de direção na vertical, já P_n representa a quantidade de pontinhos onde a curva muda de direção na horizontal. Um exemplo está mostrado na Figura 26:

Figura 26: Curvas fechadas e pontos "abraçados" pelas curvas numa malha 9 x 12



Fonte: GERDES, 2014, p. 36.

Após todas essas observações, Gerdes (2014) percebeu que podemos relacionar os resultados obtidos com o algoritmo euclidiano.

3.3.5 Algoritmo euclidiano

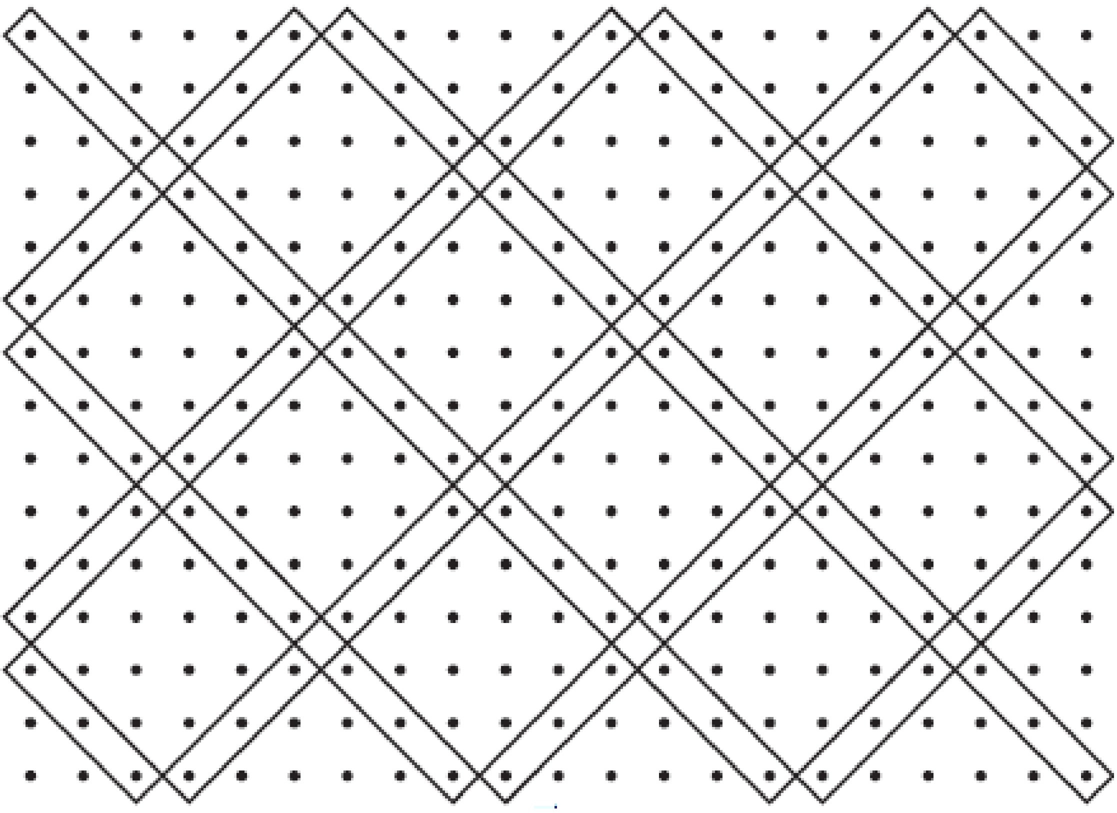
Conforme Silva (2014) o algoritmo de Euclides nos auxilia a encontrarmos o quociente e o resto da divisão de n por m. Em geral, temos que dados "$m \in Z_*^+$ e $n \in$ Z. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $n = mq + r$, com $0 \leq r < m$." (SILVA, 2014, p.

30). Novamente, vamos considerar apenas valores para *m* e *n* naturais, pois estamos tratando de quantidade de linhas e colunas. No exemplo da Figura 26, temos:

$$mdc(12{,}9) = 3 \quad \begin{cases} \dfrac{9}{mdc(12{,}9)} = 3, pois\ 9 = 3 \times 3 + 0\ (q = 3\ e\ r = 0); \\ \dfrac{12}{mdc(12{,}9)} = 4, pois\ 12 = 4 \times 3 + 0\ (q = 4\ e\ r = 0). \end{cases}$$

Desse modo se torna possível relacionar a propriedade do máximo divisor comum dos *sona* com a que ensinamos em sala de aula. Gerdes (2014) faz uma sugestão de mostrarmos essa relação na aula de divisibilidade como uma alternativa para o ensino. Também é possível encontrar o caminho para execução de um desenho na areia por meio do *mdc*, como mostrado na Figura 27:

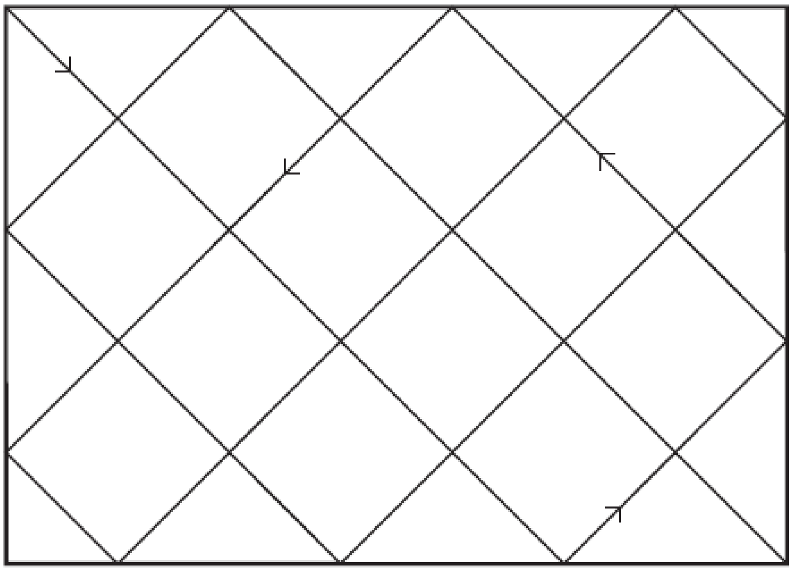
Figura 27: Desenho de malha 15 x 21



Fonte: GERDES, 2014, p. 38.

Nas figuras seguintes, vemos como os grafos podem ser desenhados para indicar os caminhos certos que devem ser feitos na execução do desenho anterior.

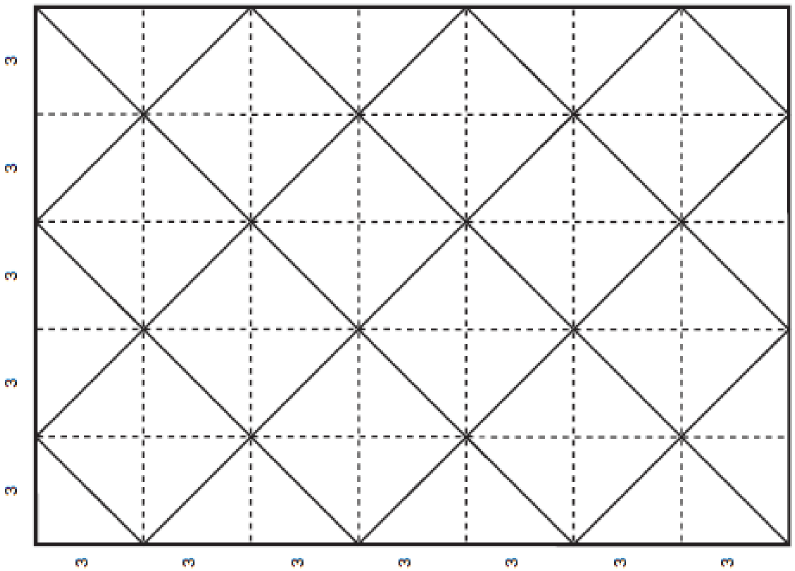
Figura 28: Caminho para a execução do desenho



Fonte: GERDES, 2014, p. 39

Observe que por esse caminho só se passa pelo mesmo segmento uma única vez.

Figura 29: Segmentos do desenho

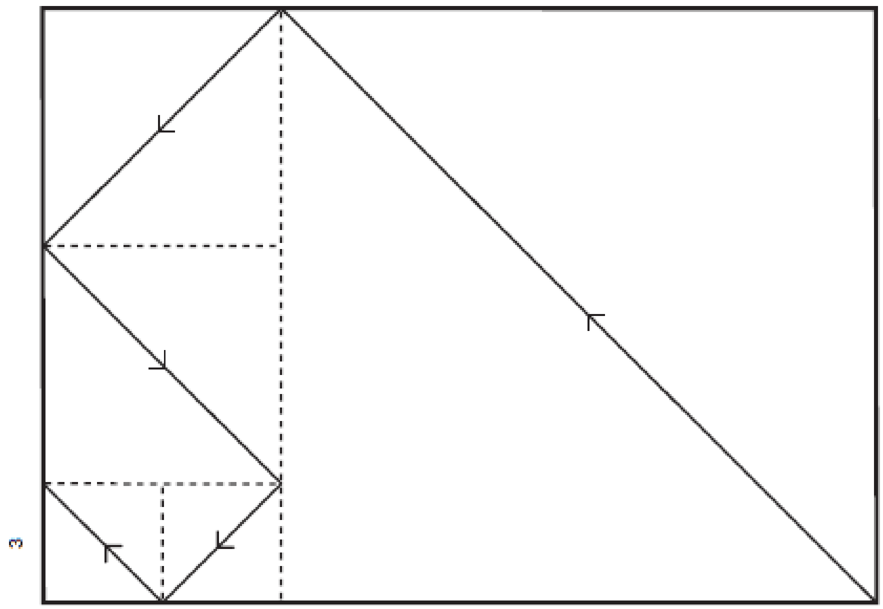


Fonte: GERDES, 2014, p. 40.

Como o mdc (15,21) = 3, então o comprimento de cada segmento será equivalente a 3 pontinhos.

Além dos caminhos fechados que podem ser feitos de uma única vez, observamos que existem caminhos abertos que podem ser seguidos para executar o mesmo desenho, porém sem ser de modo único, como mostra a Figura 30:

Figura 30: Caminho aberto para o mesmo desenho



Fonte: GERDES, 2014, p. 41.

Ao analisar os caminhos possíveis para executar um *lusona*, outra propriedade que também pode ser relacionada com os *sona* é a representação dos grafos de Euler.

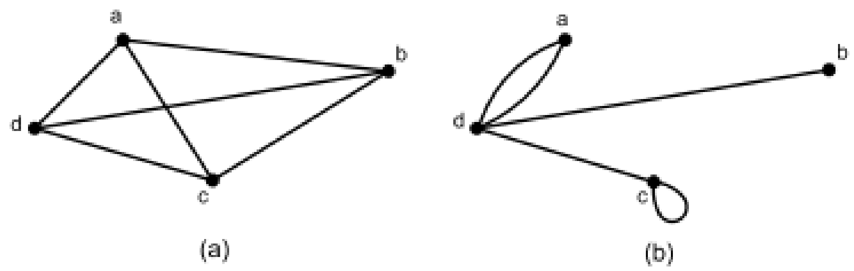
3.3.6 Grafos de Euler

Analisando a forma como as linhas são traçadas, Gerdes (2014) relaciona o sentido e direção das linhas com os grafos de Euler. Por definição, formalmente, dizemos que:

> Um grafo (finito) G é formado por um par (V (G), A(G)) onde V (G) é um conjunto finito não vazio e A(G) uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de V (G). Uma família é uma coleção de elementos, os quais podem ser repetidos. (COSTA, 2011, p. 17)

Em outras palavras, um *grafo* é determinado por um par formado entre um conjunto finito com pelo menos um elemento e outro conjunto formado pelos pares de elementos quaisquer do primeiro conjunto, podendo repetir ou não esses elementos. Vimos exemplos de representação de grafos na Figura 31:

Figura 31: Exemplos de grafo simples (a) e grafo (b)



Fonte: COSTA, 2011, p. 18.

Percebemos que há ligações entre os vértices (pontos) dos grafos, podendo ser entre todos os vértices ou não e essas ligações são as arestas do grafo. As arestas podem formar os caminhos e trilhas do grafo. Cada ponto representa os elementos dos conjuntos envolvidos. Há diferença entre trilhas e caminhos, mas para isso, recorremos às definições:

> Um *percurso* $v_1\ v_2\ .\ .\ .\ v_n$ em um grafo G é uma sequência de vértices (não necessariamente distintos) $v_1, v_2, . . . , v_n$ tal que $v_iv_{i+1} \in A(G)$, para $1 \leq i \leq n-1$. Dizemos que este é um *percurso* $v_1 - v_n$, e que v_1 e v_n são, respectivamente, os pontos inicial e final do percurso. O *comprimento* de um percurso é o número de arestas do percurso (considerando repetições). [...] Dizemos que um percurso em um grafo G, tal que $v_iv_{i+1} \leq v_jv_{j+1}$, $1 \leq i, j \leq n - 1$, é uma *trilha* em G e um percurso tal que $v_i \leq v_j$, exceto possivelmente $v_1 = v_n$, é um *caminho* em G. (COSTA, 2011, p.23)

Os caminhos de um grafo podem ser abertos ou fechados, mas sem repetir vértices ou arestas, já as trilhas não permitem repetir os vértices. Como nos apresenta Costa (2011 p. 24) “uma trilha que contém todas as arestas de um grafo G é chamada *Trilha Euleriana*. Da mesma forma, um circuito que contém todas as arestas de G é dito *Circuito Euleriano*. Se G contém um circuito Euleriano dizemos que G é um *grafo Euleriano*.”.

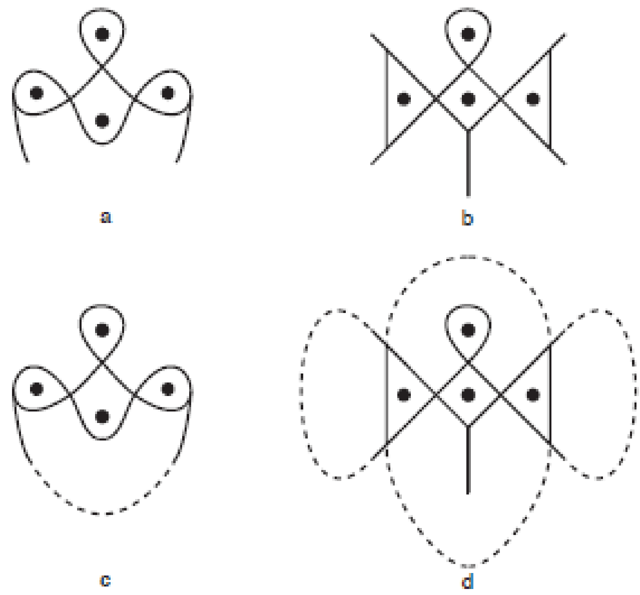
Diante dessas informações conseguimos compreender melhor a proposta de Gerdes. O estudioso propôs que fossem observados caminhos possíveis para desenhar um *lusona* sem que fossem repetidas as arestas ou vértices na mesma curva. Com essa ideia, podemos pensar em desenhos onde seja possível desenhar sem levantar os dedos durante a execução.

Os exemplos apresentados por Gerdes (2014) foram as representações de um passo *dyahotwa* (Figura 32) em que, por meio de extensão das linhas, conseguimos encontrar pelo menos um caminho em que “percorre a figura sem passar mais do que uma vez sobre o mesmo segmento se, e somente se, existem menos que 3 vértices pertencendo a um número ímpar de segmentos.” (GERDES, 2014, p. 37-38).

Notamos nos desenhos seguintes que no mesmo segmento há três vértices (3 pontos de interseção) que ao se estender as linhas do desenho original podemos tornar a figura aberta em fechada, formando um circuito. Para desenhar os passos é necessário que se levante o dedo a fim de terminar um segmento e partir para o outro.

Figura 32: Passos *dyahotwa*

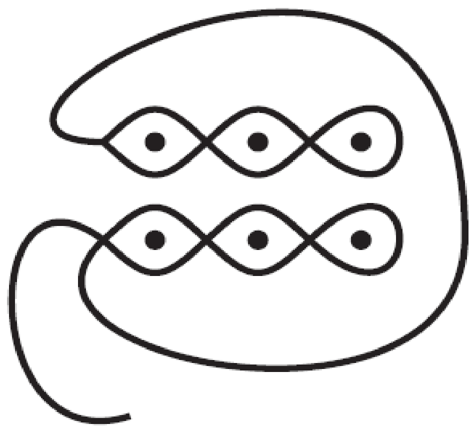
As figuras 32a e 32b são as originais e as figuras 32c e 32d são as extensões das originais.



Fonte: GERDES, 2014, p. 42

Existem alguns *sona* que se comportam como grafos de Euler que é o caso da representação de um casal, elucidado na Figura 33:

Figura 33: Representação de um casal



Fonte: GERDES, 2014, p. 42

Para a execução desse desenho, poderíamos utilizar uma única linha que começa e termina em vértices distintos, mas também é possível traçá-lo com dois segmentos em que admitissem apenas 3 vértices cada.

Todas as propriedades apresentadas são apenas algumas das várias que podem ser estudadas por meio dos desenhos africanos. Ressaltamos que é importante considerar não somente os aspectos acadêmicos dos *sona*, mas também as características culturais dos mesmos e como esses desenhos intrigantes podem nos auxiliar em sala de aula.

3.4 Exemplos de *sona*

Gerdes (1993b) disponibiliza em seu livro "*Desenhos da África*", da coleção Vivendo a Matemática, algumas histórias de *sona*. Optamos por transcrevê-las neste trabalho. A primeira história é sobre a cegonha e o leopardo

> Certo dia, o leopardo Kajama pediu à cegonha Kumbi algumas penas para forrar sua toca. Passado um tempo, foi a ave que pediu a Kajama um pedaço da sua pele. Ao atender ao pedido, o leopardo Kajama veio a morrer. Seus filhos procuraram vingar-se, mas Kumbi, que dominava bem o pântano, conseguiu escapar. (GERDES, 1993b, p. 9)

Analisando a Figura 2 (p. 19), vemos que as linhas indicam o caminho por onde a cegonha fugiu e os pontinhos são a representação do pântano. Essa é uma história que remete às nossas fábulas contadas na infância.

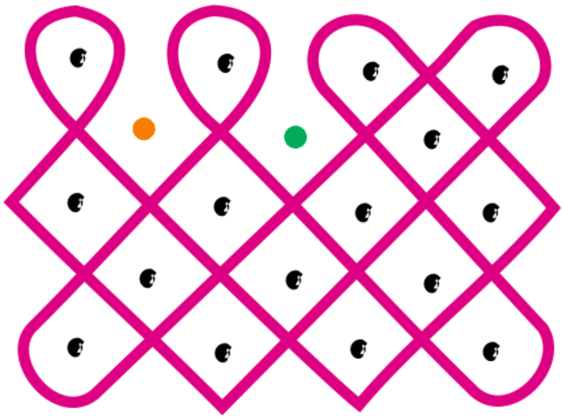
A seguinte história trata de um episódio de caça em que o caçador se desentende com seu fiel companheiro.

> Conta um velho narrador que certo caçador, chamado Tshipinda, foi à caça levando o cão Kawa, e apanhou uma cabra do mato. De volta à aldeia, o caçador dividiu a carne com Calala, o dono do cão. Kawa ficou apenas com os ossos. Depois de algum tempo, voltou Tshipinda a pedir serviços do cão, mas este recusou-se a ajudá-lo. Disse ao caçador que levasse Calala, pois era com ele que costumava dividir a carne. (GERDES, 1993b, p.10)

Algumas histórias narram os acontecimentos possíveis, como a caça com ajuda de um cão, mas em alguns momentos essas histórias podem adquirir um caráter mais fantástico como, por exemplo, o animal dirigir a palavra ao homem.

Essa era uma forma dos mais velhos da tribo, conhecedores dos *sona* e de sua execução, transmitirem seus saberes mais valiosos, no caso entendemos que o caçador deveria ser respeitoso com o cão, pois esse lhe ajudou na caça e merecia mais que ossos. Essas ideias podem ser estendidas para o convívio entre seres humanos. A situação está ilustrada na Figura 34, e vimos que o caçador está representado pelo ponto verde (à direita) e o cão pelo ponto laranja (à esquerda).

Figura 34: O caçador e o cão

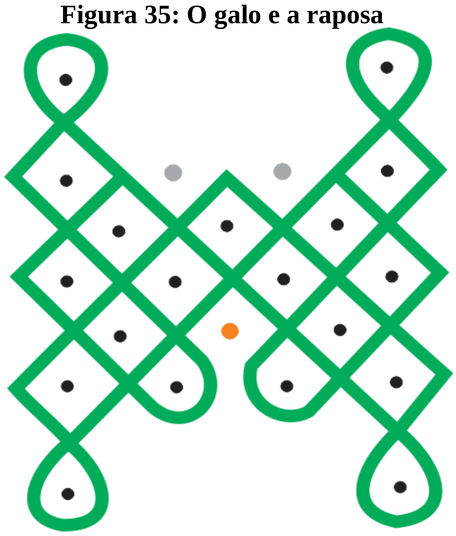


Fonte: GERDES, 1993b, p.10.
Ilustração reproduzida pelos autores.

Alguns *sona* tratavam de histórias de romance, como no conto seguinte:

> O galo Kanga e a raposa Mukuza pretendiam a mesma mulher. Pediram-na em casamento a seu pai que exigiu de ambos pagamento adiantado. Eles concordaram prontamente. De repente, correu o boato de que a prometida havia falecido. Kanga rompeu num choro incontrolável, enquanto Mukuza apenas lamentava ter perdido o pagamento adiantado. Então o pai, que de propósito tinha espalhado o boato para ver quem mereceria sua filha, entregou-a ao galo, quer revelou ter bom coração. (GERDES, 1993b, p. 11)

Figura 35: O galo e a raposa

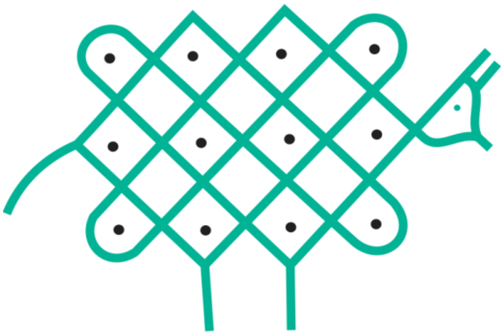


Fonte: GERDES, 1993b, p.11.
Ilustração reproduzida pelos autores

Na Figura 35 o ponto laranja (mais abaixo) representa a prometida e os pontos cinzas representam o galo e a raposa. Nesse conto há uma valorização do amor verdadeiro, pois ao ver que o galo sofreu pela perda da amada, o pai da moça entregou a recompensa (a mão dela) para ele, enquanto a raposa perdeu o casamento e o dinheiro.

Outros *sona* nada contam, mas podem representar lugares, pessoas em alguma atividade comum das aldeias, animais ou partes deles, utensílios e objetos, entre outros. Nas ilustrações seguintes temos algumas dessas representações, como na Figura 36 que é um antílope.

Figura 36: Antílope

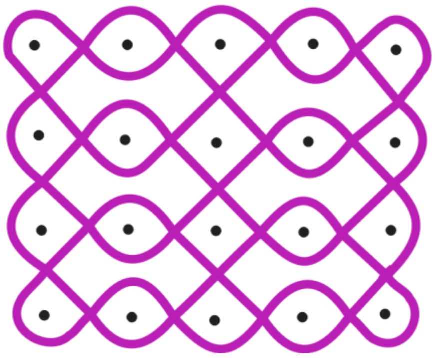


Fonte: GERDES, 1993b, p.16.
Ilustração reproduzida pelos autores

O antílope foi desenhado sobre uma malha 3 x 4 e tem uma linha fechada. A cabeça, o olho, os chifres, as patas e o rabo do animal são acrescentados com outras linhas de modo que se aproximasse a representação da forma real do mamífero.

Na Figura 37 encontramos uma representação do estômago de um pequeno leão. Neste caso, as dimensões da rede são de 4 x 5, mas para representar o estômago de um leão adulto os desenhistas utilizavam uma rede de 7 x 9. A execução dos dois *sona* é semelhante e por isso deixamos a cargo do leitor que tente representar o estômago de um leão adulto.

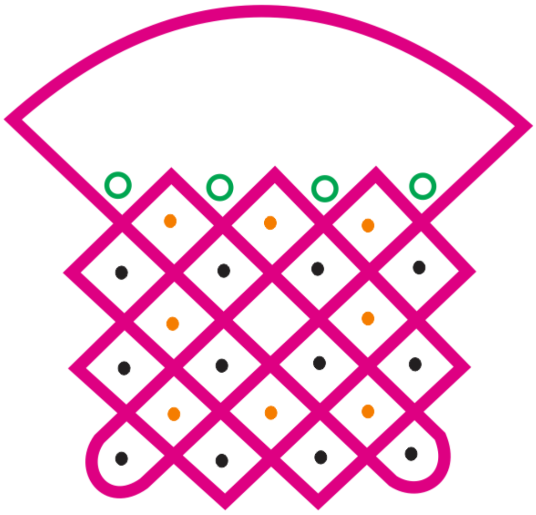
Figura 37: Estômago de um leãozinho



Fonte: GERDES, 1993b, p.32.
Ilustração reproduzida pelos autores

Ilustrações de lugares como estábulos e casas foram encontradas nos desenhos africanos. Na Figura 38 vimos um curral de bois com quatro casas de pastores que estão representadas pelas circunferências verdes (mais acima) e os pontinhos laranja representam os animais.

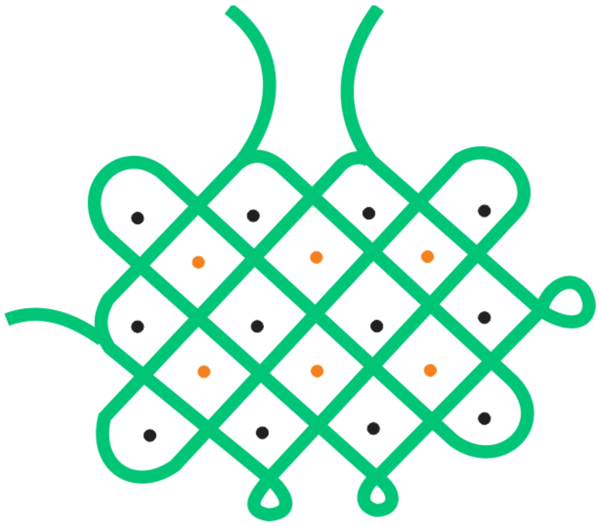
Figura 38: Curral de bois e quatro casas



Fonte: GERDES, 1993b, p.37.
Ilustração reproduzida pelos autores.

Observe que as três últimas figuras mantêm um padrão simétrico e todas foram feitas com uma única linha fechada. A Figura 39 representa três morcegos e, do modo como está, não apresenta simetria, porém ao reparar apenas no desenho principal vimos que há uma correspondência entre os pontos e que, novamente, a simetria se exibe.

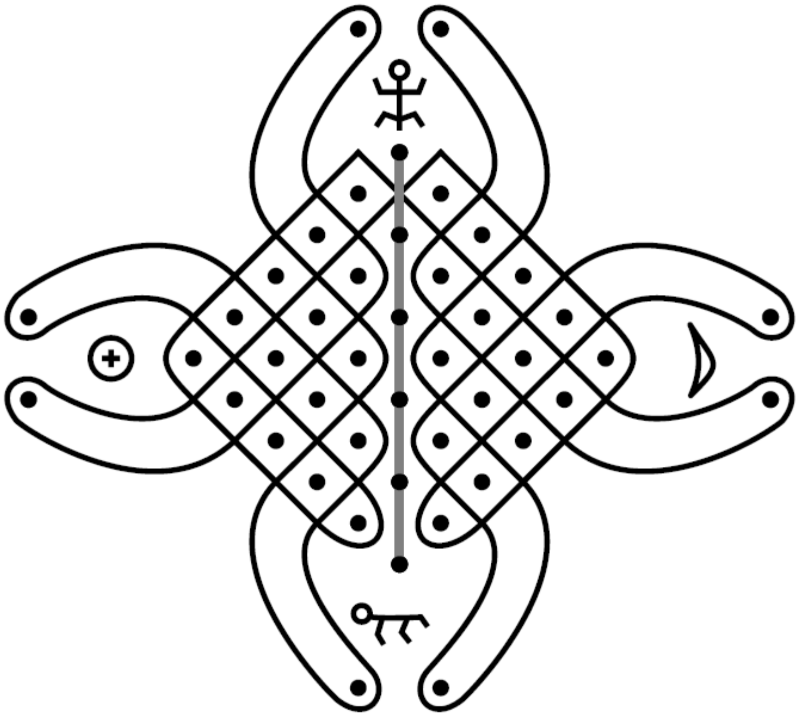
Figura 39: Três morcegos



Fonte: GERDES, 1993b, p.49.
Ilustração reproduzida pelos autores

Um dos *sona* mais estudados é a representação de Deus e como a vida foi definida de acordo com a tradição dos quiocos. A ilustração está apresentada na Figura 40 onde contemplamos a representação de Deus ao topo, o homem no inferior da figura e os astros Sol e Lua na esquerda e direita, respectivamente.

Figura 40: Caminho para Deus



Fonte: GERDES, 1993a, p.123.

De acordo com Fontinha (1983, p. 178) o traço indica o caminho para Deus e a história narra sobre a vida. Diz a lenda que o Sol foi visitar Deus (*Nzambi* ou *Kalunga* na língua dos quiocos) e ganhou uma galinha para o jantar sob a condição de que assim que ela cacarejasse, o astro deveria voltar para Deus. Na manhã seguinte, a galinha cacarejou bem cedo e o Sol regressou. Quando Deus viu que a galinha ainda estava viva, mesmo sendo para o jantar, disse ao Sol que poderia ficar com ela e que deveria voltar ali todos os dias. Por isso o Sol nasce todas as manhãs. A Lua também visitou Deus e ganhou uma galinha para o jantar. Nas mesmas condições, a Lua deveria regressar assim que a galinha cacarejasse. Após 28 dias a galinha cacarejou e a Lua voltou para Deus. Vendo que a Lua não matou a galinha dada para o jantar, Deus ordenou que ela voltasse a cada 28 dias e por isso o ciclo da Lua é de 28 dias. O homem também foi visitar Deus e também ganhou uma galinha. Porém, a viagem foi tão longa e cansativa que quando a Lua brilhou na imensa escuridão da noite, o homem matou a galinha e comeu metade antes de dormir. Na manhã seguinte, o Sol estava alto e caloroso, fazendo com que o homem acordasse desesperado. Para não levar os restos do animal, o homem comeu a metade que sobrou e se apressou para ver Deus. Chegando lá, Deus viu que não havia mais galinha e o homem confessou o que fez. Deus não culpou o homem, pois sabia que agiu por necessidade, mas para ser justo com o Sol e a Lua, que pouparam a vida do animal, Deus disse que o homem poderia voltar só que sua vida não seria eterna como a dos astros, pois o homem deveria morrer já que tirou a vida da galinha. E assim continua sendo até os dias atuais.

Essas foram algumas das histórias e sentidos atribuídos aos *sona* apresentados. Como aponta Gerdes (2014, p. 13) “a maior parte destes desenhos pertencem a uma longa tradição; referem-se a provérbios, fábulas, jogos, adivinhas, animais, etc. e desempenham um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração a outra.”.

Com base nesses desenhos, Gerdes (2014, 1993b) desenvolveu algumas atividades para apresentar e aplicar conceitos matemáticos presentes na execução dos *sona*. Essas atividades se dirigem ao público interessado em compreender um pouco mais sobre os desenhos na areia e descobrir tradições diferentes das nossas por meio da Matemática, mas também são possíveis de utilizarmos em sala de aula. Apresentamos algumas dessas atividades neste trabalho.

4 Atividades

Neste capítulo, tratamos de reunir atividades elaboradas por Gerdes (2014, 1993b) que abordassem os conceitos mostrados e com base nos seguintes requisitos:

- As atividades devem utilizar os *sona* como principais objetos de estudo;

- As propriedades matemáticas a serem estudadas devem ser apresentadas por meio dos *sona*;

- As atividades devem estar de acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular);

- Os recursos utilizados para a execução das atividades devem ser de fácil acesso e os materiais utilizados de fácil manipulação, preferencialmente, utilizando recursos do cotidiano dos alunos, como material escolar básico (lápis, borracha, caneta, folhas de papel);

- Deve haver um resgate histórico e cultural da tradição *sona* com base nas necessidades dos povos africanos ao desenvolver os desenhos na areia, de modo que relacione com a cultura brasileira;

- As atividades precisam ajudar a despertar o pensamento crítico dos alunos acerca das etnomatemáticas existentes em outros continentes e em nosso país.

Durante a descrição das atividades, sugerimos os momentos que acreditamos serem mais adequados para a aplicação das atividades, como devem ser procedidas as etapas de aplicação e adaptamos algumas questões convenientemente. Antes de cada atividade, indicamos os objetivos, público alvo, conteúdo a ser tratado e materiais necessários. Ao final da atividade, ressaltamos as observações que consideramos importantes a serem feitas pelo professor que optar por aplicá-la.

Ao leitor pode surgir a dúvida referente aos procedimentos das atividades expostas e se precisam ser realizadas da maneira proposta. Lembramos que a metodologia é uma sugestão nossa de como proceder para obter melhores resultados, pois nos preocupamos em utilizar as atividades como forma de colocar os alunos em contato com a tradição *sona* para que se apropriem de um conhecimento matemático, mas também cultural. Nossa visão para elaboração das metodologias apresentadas está baseada na Teoria Histórico Cultural que discorremos brevemente a seguir. Evidenciamos que essa teoria não foi contemplada como fundamentação teórica deste trabalho, mas como alicerce para a elaboração das atividades propostas.

4.1 Teoria Histórico Cultural

A humanidade desenvolveu seu conhecimento com base nas suas necessidades surgidas com o passar do tempo. Porém, a humanidade é constituída por uma diversidade de grupos sociais que possuem necessidades próprias e, com isso, criaram suas próprias soluções. A Teoria Histórico Cultural (THC) trata justamente do processo de produção do conhecimento intelectual do homem visto como um ser sociável.

De acordo com Cerezuela e Mori (2015, p. 1253) “a teoria Histórico-Cultural é uma corrente da psicologia soviética de base materialista que parte do entendimento de que o homem é um ser histórico e social e que, pelo processo de aprendizagem e desenvolvimento, participa da coletividade.”. A teoria foi elaborada por Vigotsky[28], Leontiev[29] e Luria[30] e é muito discutida na Psicologia, especialmente para a Educação, pois nos permite compreender como o conhecimento se desenvolveu até os dias atuais.

Assim como as demais ciências, a Matemática surgiu para suprir as necessidades dos homens, solucionando problemas e explicando fenômenos observados até o ponto de tornar-se uma teoria abstrata. Sabemos que por conta da diversidade de culturas que compõem a humanidade, cada povo construiu suas bases ideológicas de acordo com as suas necessidades, como vimos em D’Ambrosio (2007, p. 80).

---

[28] “Vigotsky nasceu em uma família judia de boa instrução e situação financeira favorável para uma excelente formação. [...] Após os quinze anos de instrução com professores particulares, Vigotsky foi um dos melhores alunos do *Gymnasium* judeu particular de Gomel. Em 1913, aos 17 anos já tinha concluído os estudos básicos com medalha de ouro. [...] É inevitável pesquisar sobre Vigotsky e não referenciar a questão pontual sobre as apropriações neoliberais e pós-moderna da teoria vigotskiana que entre outros aspectos cruciais exclui a concepção marxista da teoria, a qual tem como princípio fundamental do ser social, o trabalho.”. (CEREZUELA; MORI, 2015, p. 1256)

[29] Alexei Nikolaievich Leontiev (1903-1979) foi um importante psicólogo russo e seu maior interesse foi com a pesquisa das relações entre o desenvolvimento do psiquismo humano e a cultura de modo a ver como o ser humano se apropriou do conhecimento de acordo com o momento histórico. Unido a Alexander Romanovich Luria (1902-1977), foi um dos principais colaboradores de Vigotsky na elaboração da Teoria Histórico-Cultural (VIGOTSKY; LURIA; LEONTIEV, 2006 *apud* CEREZUELA; MORI, 2015, p. 1253).

[30] Alexander Romanovich Luria entrou para o Departamento de Ciências Sociais, mas seu interesse era a Psicologia. Luria foi convidado a fazer parte do corpo de jovens cientistas do Instituto de Psicologia de Moscou, onde conheceu a Vigotsky e Leontiev e estudaram as bases materiais do desenvolvimento psicológico humano (VIGOTSKY; LURIA; LEONTIEV, 2006 *apud* CEREZUELA; MORI, 2015, p. 1253).

Como nos mostram Cerezuela e Mori (2015) os estudiosos que desenvolveram a THC também se preocuparam com a educação e como ela vem se desenrolando ao longo do tempo. Temos ciência de que a escola é um lugar onde as interações sociais se intensificam e o contato com culturas diferentes, seja por contato direto ou por estudos sobre outros povos, é inevitável. No trecho seguinte, entendemos melhor a visão dos autores sobre o enfoque da THC à educação:

> Quanto mais progride a humanidade, mais rica é a prática sócio-histórica acumulada por ela, mais cresce o papel específico da educação e mais complexa é a sua tarefa. Razão por que toda etapa nova no desenvolvimento da humanidade, bem como os diferentes povos, apela forçosamente para uma nova etapa no desenvolvimento da educação: o tempo que a sociedade consagra à educação das gerações aumenta; criam-se estabelecimentos de ensino, a instrução toma formas especializadas, diferencia-se o trabalho do educador do professor, os programas de estudo enriquecem-se, os métodos pedagógicos aperfeiçoam-se, desenvolve-se a ciência pedagógica. Em relação entre o progresso histórico e o progresso da educação é tão estreita que se pode sem risco de errar julgar o nível geral do desenvolvimento histórico da sociedade pelo nível de desenvolvimento do seu sistema educativo e inversamente (LEONTIEV, 2004, p. 291-292 *apud* CEREZUELA; MORI, 2015, p.1260)

Com base nisso, acreditamos que apresentar o contexto histórico em que os *sona* aparecem e quais necessidades eles suprem desde o início de sua existência, basicamente voltadas para transmissão de conhecimento, logo no começo das atividades propostas seja uma forma de despertar o interesse dos alunos e levá-los a sentir a necessidade de compreender mais sobre os desenhos e se apropriarem do conhecimento envolvido neles, em especial, o conhecimento matemático.

Além disso, nossa principal intenção ao desenvolvermos as metodologias das atividades foi colocar os alunos para refletirem sobre o tratamento que damos às outras culturas distintas da nossa em que, geralmente, menosprezamos o que não está de acordo com os padrões estabelecidos.

De acordo com D'Ambrosio (2007), acostumamo-nos a enxergar a Matemática como inalcançável e difícil, mas isso porque o que vimos na Educação Básica não condiz com todas as nossas reais necessidades. Mostrar novas maneiras de ver e praticar o conhecimento matemático nos ajuda com a formação dos alunos em cidadãos que saibam criticar e procurar entender sobre os conceitos que aprendem, especialmente, se o que aprendem será útil para o desenvolvimento da sociedade na qual estão inseridos. Com base nessa teoria e nas propostas educacionais de Gerdes (2014), apresentamos as atividades seguintes.

4.2 Atividade 1: Reprodução de *sona*

Objetivos: Reproduzir alguns *sona*. Compreender o mecanismo de execução dos *sona* monolineares (de uma única linha). Analisar padrões geométricos dos *sona*.

Ano: Anos iniciais do Ensino Fundamental II (EFII) – 6º e 7º anos.

Conteúdo: Geometria plana: padrões geométricos; simetria.

Materiais: Papel, lápis e borracha.

Atividade:

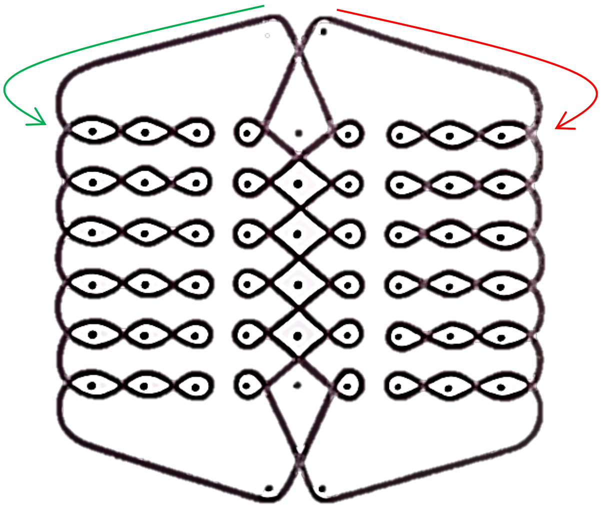
1) Após a apresentação das historias de “A cegonha e o leopardo” (Figura 2) e “O caçador e o cão” (Figura 34), reproduza os desenhos. Vale lembrar que a linha deve ser contínua, isto é, deve ser feita sem tirar o lápis do papel e podendo cruzá-la, mas sem passar sobre ela uma segunda vez.

2) Da mesma maneira e sob as mesmas condições que anteriormente, faça o desenho da Figura 35. Por onde você começou o desenho da história “O galo e a raposa” (Figura 35)?

<u>Resolução</u>: Para executar os desenhos de “A cegonha e o leopardo”, “O caçador e o cão” ou “O galo e a raposa”, comece por onde as setas indicam e siga a linha ao redor dos pontos da malha. O primeiro desenho tem uma malha 6 x 9 (6 linhas e 9 colunas) com 2 pontos na parte inferior e 2 pontos na parte superior; o segundo possui malhas 3 x 4 (exterior) e 2 x 3 (interior); o último possui malha 3 x 4 (exterior), acrescentando um ponto na parte superior na primeira e quarta coluna e um ponto inferior também na primeira e quarta coluna, e uma malha 2 x 3 (inferior). Lembrando que os pontos são equidistantes entre si.

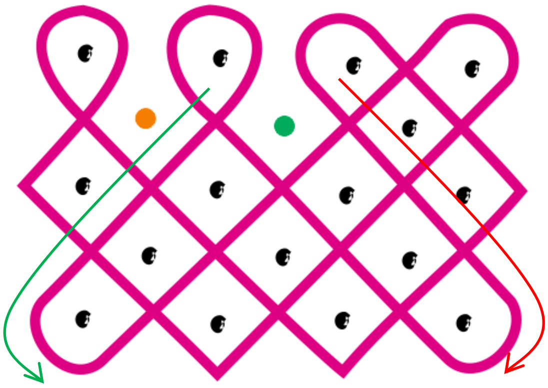
Figura 41: Desenhando A cegonha e o leopardo

Você pode começar pelo caminho indicado pela seta vermelha ou pela seta verde.



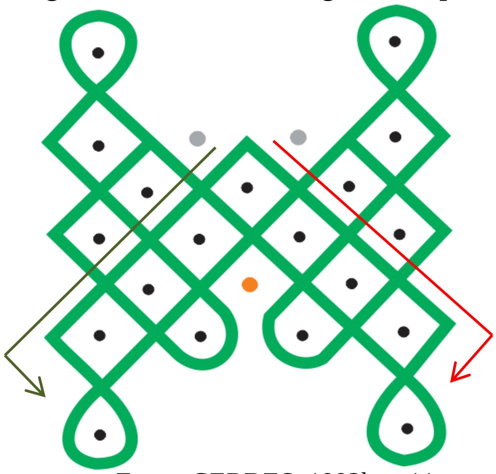
Fonte: Adaptada: Setas nossas. GERDES, 2014, p. 9.

Figura 42: Desenhando O caçador e o cão



Fonte: GERDES, 1993b, p.10.
Ilustração reproduzida pelos autores.

Figura 43: Desenhando O galo e a raposa



Fonte: GERDES, 1993b, p.11.
Ilustração reproduzida pelos autores.

Metodologia: O professor deve apresentar aos alunos uma breve descrição sobre o que são os *sona*, de onde vieram e como são feitos. Após isso, deve contar à classe as três histórias indicadas e mostrar os desenhos. Em seguida, propor a atividade e esperar que os alunos tentem reproduzir os *sona* por conta própria. Ao fim das tentativas e quando os alunos tiverem concluído a atividade, o professor deve explicar como os desenhos podem ser feitos e questionar aos alunos se há mais de uma forma de executar o mesmo desenho. O professor encaminha a discussão de modo que os alunos percebam que existem outras formas de desenhar os mesmos *sona*, mas que existe um padrão para isso.

Observação: O professor deve destacar os padrões existentes nesses desenhos e reforçar que basta repetir esse padrão em pontos correspondentes, iniciando por um dos lados do eixo de simetria. Além disso, é importante que o docente discuta sobre a questão de existirem outras formas de tratar dos conceitos matemáticos que são diferentes das apresentadas nos livros didáticos.

4.3 Atividade 2: Proporcionalidade

Objetivos: Compreender o conceito de proporção. Associar a proporção direta da Matemática com a proporção vista na natureza. Mostrar a admiração e respeito dos povos africanos aos animais. Identificar linhas fechadas nos *sona*.

Ano: 7º e 8º anos (EFII).

Conteúdo: Proporcionalidade. Regra de três. Máximo divisor comum.

Materiais: Papel, lápis e borracha.

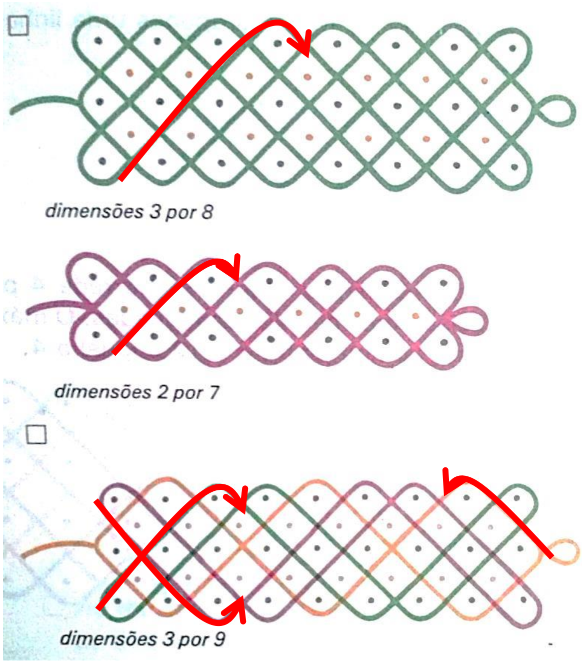
Atividade:

1) Construa uma leoa numa malha 3 x 8 e um leãozinho em uma malha 2 x 7.

2) Construa uma leoa de dimensões 3 x 9 e veja quantas linhas fechadas são necessárias para construir o desenho.

<u>Resolução</u>: Para executar o desenho, pode seguir a seta indicada como início e desenhar sobre a linha do desenho. Para a leoa 3 x 9 são necessárias 3 linhas fechadas, pois basta considerar o mdc (3,9) = 3. Os demais precisam de uma única linha porque seus máximos divisores comuns são iguais a 1, ou seja, uma linha fechada.

Figura 44: Desenhando a leoa e o leãozinho



Fonte: Adaptada: Setas nossas. GERDES, 1993b, p. 55.

Metodologia: O professor inicia contando sobre os *sona* que, em especial, carregam a propriedade da proporcionalidade e expõe aos alunos a semelhança entre as figuras da leoa e do leãozinho (Figura 22). Além disso, o professor precisa mostrar o ritmo do desenho, ou seja, o padrão a ser seguido para executá-lo. Após propor a atividade, o docente deve deixar que os alunos realizem a atividade e a concluam. Feito isso, o professor apresenta as soluções e discute com os alunos sobre a semelhança entre as duas primeiras figuras, mostrando a relação de proporção (vista na seção 3.3.3), lembrando que as proporções são próximas, mas não exatas por se tratar de observações da natureza feitas pelos quiocos

Para a segunda parte da atividade, o professor desenha as três linhas fechadas e discute com os alunos sobre a diferença de execução entre os outros desenhos e o último. Por meio de exemplos, que podem ser retirados da seção 3.3.4, o docente leva os alunos a refletirem sobre a relação entre a quantidade de pontos da malha e o número de linhas fechadas, chegando à relação *número de linhas fechadas* = *mdc(m,n)*, em que *m* é a quantidade de linhas e *n* a quantidade de colunas.

Observação: O docente pode apresentar outros *sona* de animais e enfatizar sobre como os povos tribais africanos respeitam os animais e os consideram como seres sagrados em que, muitas vezes, proporcionam proteção e alimento ao homem. O professor consegue estender essa ideia de admiração pela natureza em tribos indígenas brasileiras que também fazem suas representações próprias dos animais que caçam e observam chegando a admitir alguns animais como entidades sagradas.

4.4 Atividade 3: Progressões aritméticas e teorema de Pitágoras

Objetivos: Identificar as progressões aritméticas e a terna pitagórica por meio dos *sona*. Deduzir as fórmulas de soma dos *n* primeiros números naturais com base nos *sona*. Mostrar que as propriedades aritméticas apresentadas nos livros didáticos estão presentes em uma cultura que não foi escolarizada conforme os padrões europeus.

Ano: 8º e 9º anos do EFII.

Conteúdo: Progressão aritmética. Teorema de Pitágoras.

Materiais: Papel, lápis e borracha.

Atividade:

1) Calcule rapidamente:

a) a soma dos números naturais de 1 a 70;

b) a soma dos números naturais de 1 até 1000;

c) a soma dos números naturais de 61 a 90;

d) a soma dos números naturais de 43 a 120.

2) Como você faria para calcular a soma dos 10 primeiros números pares? E os 50 primeiros?

3) Com raciocínio semelhante ao anterior, calcule a soma dos 15 primeiros ímpares naturais.

4) Desenhe um *lusona* com malhas sobrepostas 3 x 3 e 4 x 4. Calcule quantos pontinhos há no desenho. Qual a relação desse *lusona* com a terna pitagórica (3,4,5)?

<u>Resolução</u>: Com base na seção 3.3.1, vemos que a soma dos *n* primeiros naturais é sempre dada por $S_n = \frac{[n \times (n+1)]}{2}$, em que *n* é a quantidade de linhas e *(n+1)* a quantidade de colunas da malha do desenho. Portanto, temos:

1) a) (70 x 71)/2 = 2485;

b) (1000 x 1001)/2= 500500;

c) (60 x 61)/2 = 1830;

(90x91)/2 = 4095;

Soma de 61 a 90 = 4095 – 1830 = 2265;

d) (120 x 121)/2 – (42 x 43)/2 = 6357.

Para calcular a soma dos números pares, basta pensar que em um desenho com n linhas existe a relação em que a soma dos n primeiros naturais é ($1 + 2 + ... + n$), logo os pares serão dados por $2 \times (1 + 2 + ... + n) = 2 + 4 + ...+ 2n$, ou seja, a soma dos pares será igual a:

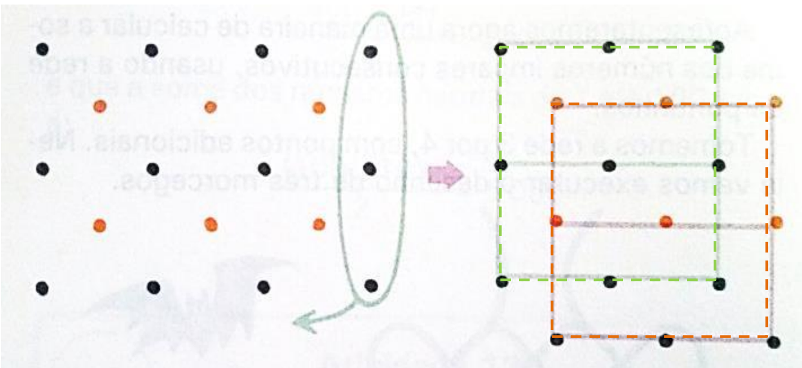
$$2 \times (1 + 2 + ... + n) = 2\times S_n = 2 \times \frac{[n \times (n+1)]}{2} = [n \times (n+1)].$$

Portanto, temos:

2) Os 10 primeiros pares = 10 x 11 = 110. Os 50 primeiros pares = 50 x 51 = 2550.

Para os números ímpares, consideramos a seguinte malha, em que retiramos a última coluna e a colocamos abaixo da última linha:

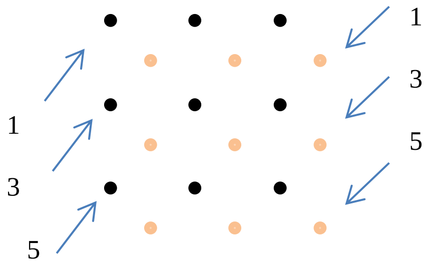
Figura 45: Realocando uma coluna da malha 3 x 4



Fonte: GERDES, 1993b, p. 50.

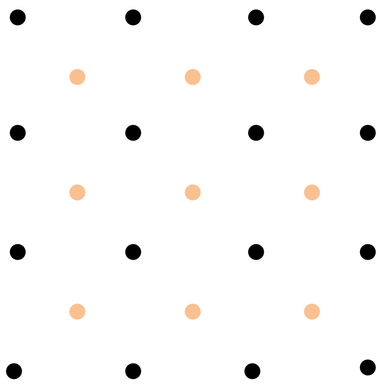
Observe que há duas malhas inicialmente: uma 3 x 4 (em preto) e uma 2 x 3 (em laranja). Realocando a 4ª coluna dessa maneira, temos duas malhas 3 x 3. Essa malha representa os 3 primeiros números ímpares, como mostrado na Figura 46:

Figura 46: Representação dos 3 primeiros ímpares



Fonte: Ilustração feita pelos autores.

Figura 47: Malha da terna pitagórica (3,4,5)



Fonte: Ilustração feita pelos autores.

Desse modo, temos que a quantidade de pontinhos é dada por:

$$2 \times (1 + 3 + 5) = 2 \times 3^2$$

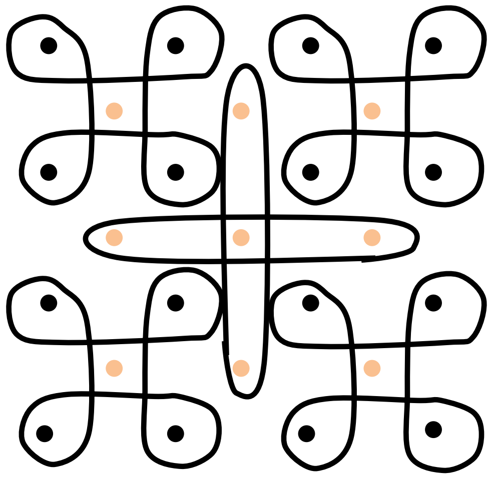
Ou seja, $(1 + 3 + 5) = 3^2$. Estendendo a ideia, para os n primeiros ímpares, temos que a soma deles é dada por $I_n = n^2$. Portanto, chegamos que:

3) A soma dos 15 primeiros ímpares considera duas malhas 15 x 15 sobrepostas. Logo, $I_{15} = 15^2 = 225$.

Como visto na seção 3.3.1, a malha que representa uma terna pitagórica é composta por duas malhas sobrepostas que têm linhas e colunas na mesma quantidade que os catetos do triângulo retângulo equivalente. Assim, a terna (3,4,5) pode ser representada pela rede da Figura 47:

Um possível *lusona* está representado na Figura 48:

Figura 48: Possível *lusona* de uma terna (3,4,5)



Fonte: Ilustração feita pelos autores.

Para relacionar com a terna pitagórica, basta olhar para a quantidade de pontinhos nas "diagonais" e notar que são 1, 3, 5 e 7. A quantidade de pontinhos desse *lusona* é dado por $2 \times (1 + 3 + 5) + 7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = (1 + 3 + 5) + (1 + 3 + 5 + 7) = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$. Portanto, temos que:

4) A malha 3 x 3 tem $3^2 = 9$ pontinhos. A malha 4 x 4 tem $4^2 = 16$ pontinhos. A soma das duas malhas é igual a $3^2 + 4^2 = 25$, mas $25 = 5^2$. Logo, a relação existente é que a malha construída para fazer o *lusona* obedece ao Teorema de Pitágoras.

Metodologia: O docente apresenta os *sona* e explica como são feitos. Em seguida, mostra sobre a contagem da quantidade de pontos feita pelas "diagonais" das malhas usadas para desenhar. O professor propõe a atividade e aguarda que os alunos a concluam. Após a tentativa de conclusão dos alunos, o professor explica sobre os conceitos básicos da progressão aritmética simples. Ao corrigir os exercícios propostos, o docente associa a quantidade de pontinhos das malhas com suas respectivas progressões e como isso pode facilitar cálculos que seriam muito difíceis como, por exemplo, somar os 200 primeiros números naturais. O mesmo raciocínio será utilizado para explicar sobre a relação da malha pitagórica (3, 4, 5) com o Teorema de Pitágoras.

Observações: É interessante que o docente exponha o fato de que essas relações eram vistas pelos povos africanos conhecedores dos *sona*, mesmo que intuitivamente. Mais que isso, esses povos tiveram contato com os europeus (principais colonizadores do continente africano) enquanto a tradição *sona* já era vivida, ainda que os estudiosos não saibam com exatidão a origem desses desenhos, como aponta Kubik (1987b). O educador pode mostrar que a Matemática que hoje conhecemos já vinha se manifestando em outras culturas tão antigas quanto a nossa.

4.5 Atividade 4: Construção de desenhos monolineares como "estômago de leão".

Objetivos: Identificar as regras de composição de alguns *sona*. Deduzir a função que resulta na quantidade de linhas dos *sona* estudados. Associar critérios de divisibilidade com a construção dos *sona*. Compreender sobre como os quiocos sabiam a quantidade de linhas necessárias para desenhar desconhecendo os conceitos formais da divisibilidade.

Ano: 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio (EM).

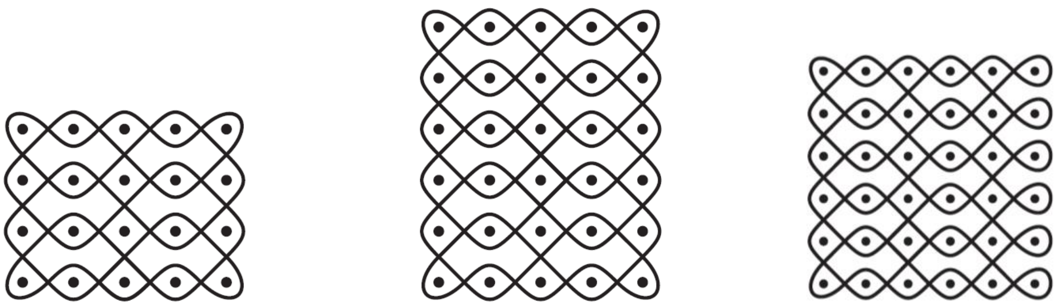
Conteúdo: Funções. Divisibilidade.

Materiais: Papel, lápis e borracha.

Atividade:

1) Observe os *sona* que representam o estômago de leão (Figura 49):

Figura 49: Representações do estômago de leão



Fonte: Adaptada. GERDES, 2014, p. 73 e 74.

Qual a diferença entre as figuras? Considere que o padrão se mantenha para qualquer malha *m* x *n*, quais devem ser as quantidades de linhas e colunas para se obter figuras parecidas com as duas primeiras, da esquerda para a direita? Se achar necessário, desenhe outros *sona* "estômago de leão".

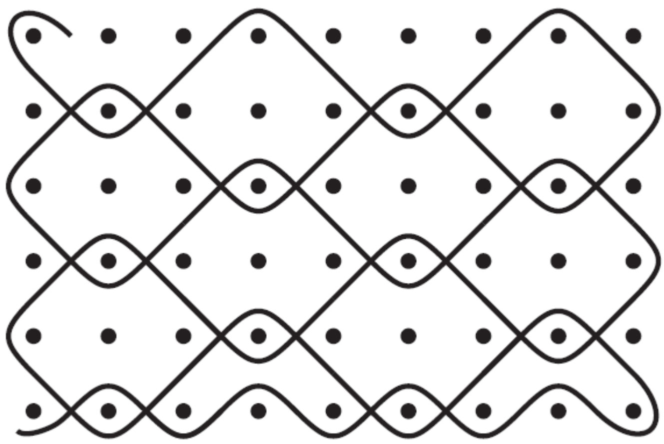
2) Construa uma tabela que associe a quantidade de linhas e colunas com a quantidade de curvas necessárias para desenhar um estômago de leão.

3) Qual deve ser a condição de existência para *m* ou *n* de modo que sempre consigamos desenhar um estômago de leão como as duas primeiras figuras? Pense nos critérios de divisibilidade para chegar a essa relação.

4) Por meio dos dados da tabela, descubra a função que resulta na quantidade de curvas quando dados *m* e *n.*

Resolução: Para desenhar um estômago de leão, seguimos o ritmo mostrado na Figura 50:

Figura 50: Ritmo do estômago de leão



Fonte: GERDES, 2014, p. 73.

1) Ao observar a Figura 49, notamos que para a largura de quantidade ímpar, o desenho se parece com o estômago de leão que utiliza uma única linha em sua construção, mas para uma largura de quantidade par de pontos o desenho não se mantem como os demais. Portanto, a diferença está na execução dos desenhos e as quantidades de linhas necessárias para se obter um estômago de leão semelhantes as duas primeiras figuras deve ser ímpar para a largura e maior ou igual a 2 para a altura.

2) Considerando n ímpar e $m \geq 2$, podemos construir a Tabela 2. Extrapolando os dados e supondo que o padrão se mantem para qualquer m e n condicionados, temos a Tabela 3. Assim, conseguimos fazer uma análise cautelosa sobre m e n.

Tabela 2: Quantidade de curvas do tipo "estômago de leão" em uma malha *m* x *n*

	n	3	5	7	9	11	13	15	17
m									
2		2	1	2	1	2			
3		3	1	3	1				
4		4	1	4					
5		5							
6		6			1				
7									
8									
9									

Fonte: GERDES, 2014, p. 74.

Tabela 2: Extrapolação dos dados da Tabela 2

	n	3	5	7	9	11	13	15	17
m									
2		2	1	2	1	2	1	2	1
3		3	1	3	1	3	1	3	1
4		4	1	4	1	4	1	4	1
5		5	1	5	1	5	1	5	1
6		6	1	6	1	6	1	6	1
7		7	1	7	1	7	1	7	1
8		8	1	8	1	8	1	8	1
9		9	1	9	1	9	1	9	1

Fonte: GERDES, 2014, p. 75.

3) Analisando a Tabela 3, vimos que a quantidade de curvas do tipo "estômago de leão" será igual a m se $n \neq 4k+1$ ou será igual a 1 se $n = 4k+1$, para qualquer k natural.

4) A função que indica a quantidade de linhas do tipo "estômago de leão" necessárias para fazer o desenho é dada por:

$f(m,n) = \begin{cases} m, se\ n \neq 4k+1; \\ 1, se\ n = 4k+1\ ; \end{cases}$ $\forall\ k \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$ e n da forma $2p + 1$, com $p \in \mathbb{N}$.

Metodologia: O professor apresenta os *sona*, suas características e explica como desenhar um estômago de leão (Figura 37). Após as devidas apresentações, o docente propõe a atividade e aguarda os alunos concluírem. Assim que os estudantes finalizam a atividade, o professor inicia a explicação dos conceitos básicos de uma função, ressaltando sobre as condições de existência e os significados de cada parte da representação de uma função. Concluída a explicação sobre funções, o professor relembra sobre critérios básicos de divisibilidade, em especial, com foco para os números da forma ímpar. Desse modo, o docente associa o conteúdo com a quantidade de linhas e colunas dos *sona* do tipo "estômago de leão". Além disso, constrói as tabelas 2 e 3 juntamente com os alunos e encaminha-os para deduzir a função solicitada com base nos dados da Tabela 3 e a imparidade de *n*.

Observações: É importante que o professor ressalte o nível de complexidade que a construção desse simples desenho possui, uma vez que ele obedece a critérios de divisibilidade que podem não ser notórios à primeira vista. Desse modo, pode ser discutida a questão sobre como os quiocos desenvolveram essa técnica e se existem outros *sona* que seguem a mesma ideologia. A Figura 15, "Galinha em fuga", é um exemplo de *lusona* que também obedece a critérios de divisibilidade, discutido na seção 3.3.4.

Ao aplicar essas atividades em sala de aula, o docente consegue perceber as dificuldades dos alunos com algumas das operações e conceitos abordados, uma vez que são atividades diferentes das tradicionais, permitindo o contato com outra cultura e mostrando aos alunos que a Matemática pode ser vista por diversos ângulos.

5 Conclusão

Estudar sobre uma manifestação matemática de outra cultura pode não parecer adequado para quem não convive ou sequer conhece os povos que estão sendo estudados. Porém, Gerdes (2014) afirma que esses estudos não são mera curiosidade ou outra maneira descontextualizada de apresentar conceitos matemáticos em sala de aula. A proposta dos etnomatemáticos e também a nossa é que pensemos em alternativas para o ensino da Matemática de modo que valorize as culturas que ajudaram a compor a nossa própria.

Entre os diversos motivos que nos levaram a tentar compreender sobre os *sona* está a busca pela valorização de uma cultura local, ainda que não faça parte da nossa população. Os quiocos (*cokwe*) estavam perdendo sua identidade como povo e resgatar esses costumes valorizou sua cultura, tornando mais significativos os conceitos matemáticos que atualmente são apresentados conforme os padrões europeus. De acordo com Gerdes (2014), o estudo dos *sona,* para os quiocos, tende a resgatar suas tradições e "pode contribuir na direcção de uma educação matemática mais produtiva e criativa, evitando a alienação sócio-cultural e psicológica. (GERDES, 2014, p. 42-43)".

Nesse sentido, apresentar os *sona* como alternativa para o ensino de conceitos matemáticos mostra-se como uma potencial ferramenta que pode nos auxiliar a despertar o pensamento crítico dos alunos. "Por que vemos a Matemática tal como é apresentada e não de outra forma?", "Qual o verdadeiro significado do conceito que está sendo ensinado?", "Quais contribuições esse ensino matemático trará para a formação da cidadania?". Essas questões permitem desencadear uma reflexão crítica diante da formação cidadã dos alunos e, tratando-se de cidadania, respeitar a cultura do outro é uma regra fundamental. Mais que isso: estudar sobre outras manifestações do pensamento matemático que estão fora da nossa "caixinha", como os *sona,* possibilita o desenvolvimento de uma cultura nacional que não está presa apenas aos padrões impostos pelos colonizadores.

De certo modo, a utilização dos *sona* na educação Matemática não necessariamente precisa se restringir aos povos da Angola ou especificamente africanos. Obviamente, como aponta Gerdes (2014), incorporar os *sona* nos currículos africanos contribui para a valorização das culturas locais e vizinhas, exaltando uma herança artística e científica do próprio continente, trazendo a ideia de que a Matemática não deve ser estranha aos africanos, pois eles criaram a sua maneira de ver o mundo matematicamente. Além disso, o autor reforça que “também noutras sociedades (cf. Zaslavsky, 1973, 1979, 1985) a sua integração ‘multiculturisante’ no currículo pode estimular a interdisciplinaridade, por exemplo: Matemática e Desenho com Educação artístico-estética [...]”(GERDES, 2014, p. 43), o que permite a valorização das ideias matemáticas criadas por cada povo, auxiliando na assimilação com a Matemática do restante do mundo, sem se esquecer das próprias culturas.

Gerdes se referiu à Matemática, convencionalmente estudada, como “Matemática mundial”. Curiosamente, a Matemática ensinada em boa parte do mundo não passa de uma Etnomatemática com suas origens em território europeu. Como sabemos e explica D’Ambrosio (2007, p. 73), “hoje, essa Matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo, devido ao predomínio da Ciência e da Tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa, e servem de respaldo para as teorias econômicas vigentes”.

D’Ambrosio (2007) apresenta a ideia de que estudar Matemática diferente da imposta por nossos colonizadores pode ser visto como uma afronta, pois estaríamos buscando por resgatar nossas tradições que foram esquecidas após o processo de colonização. Por isso defendemos a Matemática contextualizada como um recurso que pode solucionar problemas cotidianos, novos ou mais elaborados.

Os *sona* evidenciam a existência de uma Matemática própria a um povo, no caso os quiocos, capaz de suprir as necessidades deles principalmente em transmitir o conhecimento sobre os animais, as crenças, as formas de caça, plantio e colheita, entre outros conhecimentos essenciais para a sobrevivência daquele povo.

Ensinar os desenhos africanos proporciona um modo diferente de tratar conceitos matemáticos de forma inovadora, apresentando uma nova visão sobre a Matemática e despertando o interesse em estudar outras manifestações como essas que estão próximas à nossa cultura, já que o Brasil possui uma diversidade cultural muito ampla.

Cada vez mais nossas escolas recebem alunos de outros países que trazem consigo tradições diferentes das nossas. Estudar sobre as outras matemáticas não é apenas para o ensino desses estudantes, mas também é para mostrar aos alunos nativos o respeito à pluralidade cultural e incentivá-los em seus estudos, resgatando tradições para ensinar “Matemáticas”.

Referências

ALVES, C. M. F. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação para Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. SBM. Rio de Janeiro. 2014.

ÁVILA, G. **Euclides, Geometria e Fundamentos**. RPM, nº 45. SBM. Brasil. 2001.

ÁVILA, P. **Os elementos de Euclides**. Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade de Florianópolis. Santa Catarina. 2003, p. 12.

BAITALLE, G. **O nascimento da Arte**. Tradução de Aníbal Fernandes. Sistema Solar. 2016.

BAYER, A. SANTOS, B. **A Cultura Indígena e a Geometria: Aprendizado pela Observação**. ACTA SCIENTIAE – v.5 – n.2 – jul./dez. 2003.

BERNAL, J. D. **Science in History**. Cambridge, Mass.: MIT Press. 1971.

BLANCHÉ, R. **La Axiomática.** Traducción de Frederico Osorio Altúzar. Centro de estudios filosóficos. Universidad Nacional Autonóma de México. México. 1965.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.

CASCUDO, L. C. **Mouros, franceses e judeus: Três presenças no Brasil**. Editora Perspectiva. São Paulo. 1984.

CEREZUELA, C. & MORI, N. N. R. **A educação escolar e a Teoria Histórico-Cultural.** Em: XII Educere, 2015, Curitiba. Anais do XII Educere. Curitiba: Editora da PUCPR, 2015. v. 1. p. 1251-1264.

COSTA, P. P. **Teoria de grafos e suas aplicações**. Dissertação para Mestrado. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro. 2011.

CUNHA JUNIOR, H. **Afroetnomatematica, África e Afrodescendência**. Temas em Educação, v. 13, p. 83-95, 2004.

__________________. MENEZES, M. **DE PRETO A AFRODESCENDENTE: trajetos de pesquisa sobre o negro, cultura negra e relações étnico-raciais no Brasil** ed. São Carlos: EduFSCar Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2003, p. 307-320.

D’AMBROSIO, U. **Etnomatemática Elo entre as tradições e a modernidade.** 2 ed. 3ª reimp. Autêntica. Belo Horizonte. 2007.

_________________. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 23ª ed. Papirus. Campinas. São Paulo. 2013.

DOBERSTEIN, A. W. **O Egito Antigo.** Porto Alegre: ediPUCRS, 2010.

DOWLING, P. **Theoretical “Totems”: A Sociological Language for Educational Pratice**. In: Julie, C.; Angelis, D. (Ed.). Political Dimensions of Mathematics Education 2: Curriculum Reconstruction for Society in Transition. Johannesburg: Maskew Miller Longman, 1993.

ENTREVISTA COM PAULUS GERDES. Laboratórios da Faculdade de Educação da USP. São Paulo. 2015. Disponível em: < http://www.labeduc.fe.usp.br/?videos=paulus-gerdes.> . Último acesso em 08.10.2017 às 19h02.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria.** Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, E. S. **Programa de Pesquisa Científica Etnomatemática**. Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007).

FONTINHA, M. **Desenhos na areia dos quiocos do nordeste de Angola**. Estudos, ensaios e documentos nº 143. Angola. 1983.

FREIRE, P. **Educação: o sonho possível**. Em: BRANDÃO, Carlos R. (Org.). O Educador: vida e morte. Rio de Janeiro: Graal, 1982

____________ **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

GARDNE, M. **The new mathematics**. New York Review of Books New York,24 jul.1998.

GERDES, P. **Geometria Sona. Volume 1: Reflexões sobre uma Tradição de Desenho em Povos da África ao Sul do Equador**. Projecto de Investigação Etnomatemática, Universidade Pedagógica, Maputo, 1993a.

_____________. **Desenhos da África. Vivendo a Matemática**. Editora Scipione. São Paulo. 1993b.

_____________. **Etnogeometria: Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico**. Boane. Morrisville. 2012b.

_____________. **Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação**. Reedição da Coletânea de textos 1979-1991. Moçambique. 2012a.

______________. **Geometria Sona de Angola. Volume 2: Explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia.** ISTEG. Belo Horizonte. Boane, Moçambique. 2014.

______________. **Geometria Sona de Angola. Volume 3: Estudos comparativos**. ISTEG. Belo Horizonte. Boane. Moçambique. 1994.

______________. **Níjtyubane — sobre alguns aspectos geométricos da cestaria bora na amazônia peruana.** Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 no 6 - pág. 3 - 22 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática. (outubro/2003 - março/2004). 2003.

HARRIS, A. L. N. C.; MONASTERIO, C. M. C. T.. **O Pavilhão Mourisco da Fiocurz no Rio de Janeiro** - Aspectos históricos, levantamento fotográfico e catálogo da arte geométrica aplicada na arquitetura. 19&20, Rio de Janeiro, v. V, n. 3, jul. 2010. Disponível em: <http://www.dezenovevinte.net/arte%20decorativa/fiocruz_mourisco.htm>. Último acesso em 08.10.2017 às 19h37.

KNIJNIK, G. – **Exclusão e Resistência. Educação Matemática e Legitimidade Cultural**. Porto Alegre: Artes Médicas Ed., 1996.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature.** W. H. Freeman Company. New York. 1977.

MILLROY, W. **An ethno study of mathematical ideas of a group of carpenters**. Reston: NCTM, 1992.

MILNOR, J. **Hyperbolic Geometry: The first 150 years**. 1982. p. 9.

MIYATA, M. **Sangaku - A geometria sagrada.** Curso de Pós-Graduação- Especialização em matemática para professores: ênfase em cálculo. Belo Horizonte. 2014.

NUNES, R. S. R. **Geometria fractal e Aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2006. Disponível em: < http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Último acesso em 08.10.2017 às 20h44.

RINALDI, R. M. & MENEZES, M. S. S. **Geometria fractal: uma nova proposta para o ensino do desenho geométrico**. 2007. Disponível em: < http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/GEOMETRIAFRACTAL.pdf >. Último acesso em 08.10.2017 às 19h51.

SANTOS, J. L. **O que é cultura?** Coleção Os primeiros 110 passos. 12ª reimp. da 16ª ed. Brasiliense. São Paulo. 1996.

SERRES, M. **The Origin of Geometry**. From ed. Harari, Josue V. And David F. Bell, Hermes; Literature, Science, Philosophy. the Johns Hopkins University Press, Baltimore. 2010. Disponível em: < http://mas.caad.arch.ethz.ch/mas1011/wp-content/uploads/2010/09/The-Origin-of-Geometry.pdf>. Último acesso em 08.10.2017 às 18h42.

SILVA, A. S. **Um estudo sobre aplicação do algoritmo de Euclides.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Campina Grande. Paraíba. 2014.

SILVA, R. T. A. **Etnomatemática e alguns algoritmos africanos: articulando questões étnico-raciais e conteúdos de matemática.** Universidade Federal do Paraná. Paraná. 2015.

TAYLOR, N. **Desire, repression and ethnomatematics**. In: JULIE, C.; ANGELIS, D. (Ed.). Political Dimensions of Mathematics Education 2: Curriculum Reconstruction for Society in Transition. Johannesburg: Maskew Miller Longman, 1993.