O ENSINO DO MMC E DO MDC NA MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS E POSSÍVEIS APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Felipe Marcos Pinto

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

IFSP
São Paulo
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pinto, Felipe Marcos.

O ensino do MMC e do MDC na Matemática: um estudo sobre métodos e possíveis aplicações em sala de aula / Felipe Marcos Pinto - São Paulo: IFSP, 2012.

75f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca.

1. Mínimo Múltiplo Comum. 2. Máximo Divisor Comum. 3. Teoria dos Números. 4. Equações Diofantinas. 5. Ensino da Matemática I. Título do trabalho

FOLHA DE APROVAÇÃO

FELIPE MARCOS PINTO

O ENSINO DO MMC E DO MDC NA MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS E POSSÍVEIS APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 05/12/2012 **CONCEITO:** 10,0 (Dez)

Prof. Ms. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Ms. Amari Goulart
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Orientador

Felipe Marcos Pinto

Aluno: Felipe Marcos Pinto

"Para se ter sucesso, é necessário amar de verdade o que se faz. Caso contrário, levando em conta apenas o lado racional, você simplesmente desiste."

(STEVE JOBS EM UM EVENTO DO WALL STREET JOURNAL, 2007)

À minha mãe e aos amigos
que sempre estiveram comigo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao professor doutor Rogério Ferreira da Fonseca não somente pela orientação prestada nesse trabalho, mas também por todo o apoio e motivação dada ao longo do curso.

Agradeço também à professora doutora Mariana P. M. A. Baroni e à professora mestre Cristina L. Defendi, pelas dicas, recomendações e contribuições realizadas para a conclusão deste trabalho.

Aos participantes da banca, professor mestre Henrique Marins de Carvalho e professor mestre Amari Goulart, por toda a colaboração fornecida neste trabalho.

Agradeço também à minha mãe Sonia Regina, por todo o amor incondicional fornecido, e aos meus colegas e amigos Jessica L. dos Reis e Rafael A. P. Polesi pela amizade ao longo dos anos da graduação.

Aos colegas de curso, com especial destaque, Arnaldo Maia, Fernando Pavan, Ana Olívia, Thaís de Matos, Patrícia de Castro, Diogo Oliveira, Filipe Barbosa e a todos os professores do IFSP que me instruíram e trilharam comigo esse tortuoso, porém firme, caminho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha colega de trabalho Tânia Mara, pelo apoio e carinho dedicados.

RESUMO

Tendo em vista as diversas aplicações do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e do Máximo Divisor Comum (MDC) na Teoria dos Números, buscamos com este trabalho verificar quais abordagens sobre estes assuntos são utilizadas na Educação Básica. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo principal analisar o tratamento dado ao MMC e MDC nos Ensinos Fundamental II e Médio, além de propor atividades que complementem os assuntos na formação básica dos estudantes. Para a elaboração do presente trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica em diversos livros didáticos dos Ensinos Fundamental II, Médio e Superior, comparando o enfoque dado aos temas estudados, além da pesquisa de publicações na área de Educação Matemática em busca de métodos e jogos que poderiam ser aplicados aos alunos dessas modalidades de ensino. Para fundamentar nosso trabalho, utilizamos as reflexões sobre o ensino da Matemática defendidas por Sfard (1991), que define uma estrutura didática para o ensino de conteúdos ligados à Matemática e propõe mecanismos que possibilitem a aprendizagem dos alunos. Constatou-se, ao final, que muitos recursos poderiam ser aproveitados e que as abordagens realizadas até mesmo no Ensino Superior, como as Equações Diofantinas, poderiam ser ensinadas aos estudantes dos Ensinos Fundamental II e Médio com a intenção de relacionar e aplicar conteúdos.

Palavras-chave: Mínimo Múltiplo Comum, Máximo Divisor Comum, Teoria dos Números, Equações Diofantinas, Ensino da Matemática.

THE TEACHING OF LEAST COMMON MULTIPLE AND GREATEST COMMON DIVISOR IN THE MATHEMATICS: A STUDY OF METHODS AND POSSIBLE APPLICATIONS IN THE CLASSROOM

ABSTRACT

Given the various applications of the Least Common Multiple (LCM) and the Greatest Common Divisor (GCD) in the Theory of Numbers, we seek in this monograph to verify which approaches toward these subjects are used in Basic Education. Therefore, this monograph mainly aims to analyze the focus given to LCM and GCD in Middle School and High School, and suggest activities that would complement the student's basic formation. For the preparation of this monograph, a bibliography research was conducted of the many books used in Middle School, High School and College Education to compare the focus given to the mentioned themes, and also a research of the publications in the field of Mathematics in search for methods and activities that could be applied to the students. The base of this research is the reflections about the teaching of Mathematics defends by Sfard (1991), who defines a didactic structure to the teaching of contents related to Mathematics and proposes mechanisms that promote the learning by students. Finally, it was found out that many of resources could be seized and that the approaches that take place in the College Education – such as Diophantine Equation – could be taught to Middle School and High School with the intention to relate and apply the contents.

Keywords: Least Common Multiple, Greatest Common Divisor, Theory of Numbers, Diophantine Equations, Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

Pág.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
MDC	Máximo Divisor Comum.
MMC	Mínimo Múltiplo Comum.
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
UFPR	Universidade Federal do Paraná

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

A ideia principal deste trabalho é pesquisar o tratamento que é dado ao Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e ao Máximo Divisor Comum (MDC) e investigar novas perspectivas que poderiam ser incorporadas ao ensino na Educação Básica.

Assim, este trabalho tem como objetivo principal analisar e propor aplicações e abordagens para o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e o Máximo Divisor Comum (MDC) na Educação Básica. O trabalho apresenta também os seguintes objetivos específicos:

- descrever e analisar as abordagens propostas nos livros didáticos do Ensino Fundamental ou Médio para MMC e MDC;

- verificar o contexto histórico envolvendo MMC e MDC, destacando problemas e aplicações na Matemática como no teorema de Bezout e na resolução de equações diofantinas;

- verificar como esses conceitos (MMC e MDC) são apresentados nos livros universitários, destacando os teoremas que os utilizam;

- destacar a caracterização dos objetos MMC e MDC nos livros universitários e possíveis relações ou discrepâncias com as abordagens propostas nos livros didáticos da Educação Básica, além dos subsídios para a prática profissional do professor sobre os objetos em questão.

Este tema surgiu no quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática, no qual foi constatado que o MMC e o MDC têm várias aplicações em alguns ramos da Teoria dos Números, mas que no Ensino Básico tal assunto é pouco explorado, geralmente visto apenas como um tópico do assunto de divisores e múltiplos.

Desde então, a ideia permaneceu presente, servindo como inspiração para a escolha do tema de trabalho de conclusão do curso, onde é possível confirmar ou refutar a impressão levantada há alguns semestres e, como complementação, abordar possíveis métodos que possibilitem um melhor aproveitamento do estudante referente ao assunto. Naturalmente, o trabalho também busca motivar futuros interessados no tema, que pretendam diversificar os conhecimentos dos tópicos aqui estudados.

Neste trabalho abordamos as seguintes definições, adaptadas de Milies e Coelho (2001): o Mínimo Múltiplo Comum entre dois números inteiros a e b é o menor elemento positivo do conjunto dos divisores de a e b, e será denotado por $mmc(a, b)$. O Máximo Divisor Comum entre dois números inteiros a e b, em que pelo menos um deles não é zero, é o maior elemento do conjunto dos divisores de a e b, e será denotado por $mdc(a, b)$.

Com essas definições, inicialmente é feita uma discussão histórica, com enfoque em aspectos educacionais sobre o assunto. Como consequência, são destacados detalhes referentes à Teoria dos Números, realizando articulações sobre o que é ensinado no Ensino Fundamental (e, possivelmente, no Ensino Médio).

Para isso é realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto, com onze livros didáticos de Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, além de apostilas, livros de História da Matemática e artigos científicos no âmbito da Educação Matemática. A intenção é verificar como o assunto é explorado e como é feita essa abordagem. Analisamos também possibilidades de complementações sobre o tema, e as possíveis vantagens ou entraves que tais abordagens podem causar na aprendizagem, servindo até mesmo como motivação para o ensino de outros tópicos, possivelmente nem relacionados diretamente com a Teoria dos Números.

A abordagem sobre problemas e métodos envolvendo os conceitos sobre o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e o Máximo Divisor Comum (MDC) são presentes em diferentes abordagens acadêmicas. Por exemplo, Ryndack, Lacerda e Valverde (2011) propõem a elaboração e aplicação de atividades sobre o MMC e MDC, além de reflexões acerca das contribuições desse assunto. Em outro artigo, tratando de jogos, Rodrigues e Silva (2004) abordam as vantagens desse tipo de metodologia para a formação de conceitos por parte dos alunos.

Além desses, tratando sobre o ensino e aprendizagem de Matemática, temos o artigo (que também é utilizado como referencial teórico) “*On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin”*, de Anna Sfard. Para a coleta de dados, também utilizamos as abordagens presentes em vários livros didáticos que envolvem o assunto, além da análise de livros didáticos do Ensino Superior, como a obra *Números: Uma introdução à Matemática*, de César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho, e de artigos, como os encontrados na RPM, revista dedicada aos professores de Matemática.

Baseamos a metodologia deste trabalho em uma pesquisa bibliográfica, na qual é possível a coleta e análise de dados referentes aos assuntos aqui trabalhados, além de abordagens e contextos históricos. A partir disso, é feito um levantamento sobre todos os materiais, propondo métodos e aplicações. Ressalta-se que o instrumento de pesquisa se baseia em informações e dados presentes na literatura, tendo como intenção comprovar ou contrapor tais abordagens, aprimorando-as de forma a atingir os objetivos esperados por esta pesquisa.

Este trabalho estrutura-se da seguinte forma: no Capítulo 2, é feito um resumo sobre as ideias defendidas por Anna Sfard em seu artigo sobre concepções matemáticas. Ainda no mesmo capítulo, fazemos uma comparação com os conceitos do MMC e MDC. Com as primeiras considerações realizadas, no Capítulo 3 abordamos alguns fatos ligados ao contexto histórico dos assuntos estudados, ao ensino de Matemática na sociedade e nas primeiras definições e propriedades sobre os temas. No Capítulo 4, apresentamos uma análise sobre as abordagens e métodos utilizados no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior envolvendo o MMC e o MDC. Tais comparações são utilizadas como base para o Capítulo 5, que discute alguns métodos e jogos que poderiam ser propostos aos estudantes na Educação Básica. Por fim, no Capítulo 6 temos as conclusões, elaboradas a partir de todo o trabalho realizado, sendo feitas também algumas ponderações finais.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Com o objetivo de sistematizar algumas das ideias defendidas neste trabalho, utilizamos as reflexões apresentadas por Anna Sfard em seu artigo "*On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin"*, publicado em 1991. Para complementar as noções debatidas por Sfard, utilizamos o artigo escrito por Vidigal (2007), que também aborda o texto de Anna Sfard.

Em linhas gerais, Sfard (1991) apresenta uma estrutura teórica para investigar o papel do algoritmo matemático na Educação, e conclui que a utilização desses algoritmos pode ser concebida de duas maneiras fundamentalmente diferentes: estruturalmente como objeto, e operacionalmente como processo. Sfard (1991) afirma também que essas duas formas não devem acontecer isoladamente, e que na verdade, são faces de uma mesma moeda.

Como a intenção deste trabalho é perceber a importância do MMC e MDC e ampliar os conhecimentos sobre esse assunto na formação básica do estudante, as reflexões de Sfard (1991) são bastante relevantes para o nosso estudo, possibilitando que temas matemáticos possam ser mais bem compreendidos e possivelmente se tornem mais significativos para os alunos, com atividades que permitam a ação e reflexão sobre o objeto matemático estudado, tanto por meio de conceitos e definições, quanto por aplicações sobre os temas.

2.1. As ideias de Anna Sfard

Para Sfard (1991) são tão enigmáticas quanto visíveis a complexidade do raciocínio matemático, a dificuldade presenciada por quem aprende e o constante fracasso no ensino. Devido a isso, ela investiga, por meio de uma reflexão das construções matemáticas, as particularidades do raciocínio matemático. Inicialmente, a autora define conceito como uma ideia matemática idealizada na sua forma pura – como uma construção teórica dentro do universo formal do conhecimento ideal. E também define concepção como a contrapartida do conceito – o conjunto das representações e das associações internas atribuídas ao conceito.

Segundo a autora, para manipularmos as entidades abstratas dentro da Matemática, utilizamos diversas representações. Mas isso não é necessário para objetos concretos. Para o matemático, o que importa é conhecer as regras e as leis pelas quais elas devem ser combinadas, além de ser capaz de ver esses objetos invisíveis. A falta dessa capacidade pode ser uma das maiores razões pelas quais a Matemática parece praticamente impenetrável.

Da mesma forma, para Sfard (1991, *apud* VIDIGAL, 2007), perceber uma entidade matemática como objeto representa referir a ela como uma coisa real, existindo em algum lugar. Assim, a concepção estrutural de uma noção matemática acontece quando o estudante se torna capaz de tratar tal noção como objeto, sem se prender a detalhes que envolvem o conceito. Por sua vez, a concepção operacional acontece no desempenho da noção como processo, tratando mais como um potencial de um encadeamento de ações do que como um verdadeiro ente.

Vidigal (2007) observa que é impossível definir conceitos matemáticos utilizando exclusivamente raciocínios operacionais ou estruturais de uma forma dual. A concepção estrutural é mais abstrata e menos detalhada que a operacional. Devido a isso, concepções operacionais e estruturais da mesma noção matemática não são particulares e sim complementares. Vidigal sustenta também que a natureza dual das noções pode ser contemplada por meio de representações simbólicas, como gráficos, expressões algébricas e até programas de computador.

Esclarece Sfard (1991) que o seu artigo discorre sobre a dualidade das concepções estruturais e operacionais, e que tal dualidade é justificada por ela ao não dividir as duas concepções, mas tratá-las de forma complementar. Embora sejam totalmente diferentes, elas se referem a facetas inseparáveis da mesma coisa, da mesma moeda. Como percebe Vidigal (2007), não cabem discussões sobre Matemática Algorítmica *versus* Matemática Abstrata, uma vez que Sfard sugere uma abordagem complementar entre esses aspectos matemáticos. Ambas são duplamente necessárias e mutuamente condicionadas.

.

Sfard (1991) afirma que os conceitos matemáticos referem-se à concepção estrutural e que alguns tipos de representações parecem ser mais adequados a um tipo de concepção do que a outro. Vidigal (2007) também apresenta que no contexto psicológico deve-se levar em conta a seguinte ordem no momento do ensino: operacional antes do estrutural.

Vidigal (2007) afirma que a abstração matemática não decorre do objeto sobre o qual se atua, mas da ação. Ela observa que esse fenômeno é hierárquico, ou seja, o que é concebido de forma puramente operacional num primeiro momento deverá ser concebido estruturalmente num plano mais alto. Além disso, tal fenômeno contém três estágios, correspondentes a três níveis de estruturação, os quais a autora chamou de interiorização, condensação e reificação:

- a interiorização refere-se ao estágio em que o aluno se adapta com processos que poderão originar um novo conceito. Tais processos são destacados em objetos matemáticos de graus de dificuldades inferiores ao do novo conceito que poderá ser formado;

- a condensação refere-se ao estágio em que reúne longas sequências de operações em unidades mais manipuláveis. Esse é o momento no qual nasce oficialmente um novo conceito. Com esse nível de estruturação torna-se mais fácil fazer comparações e generalizações, assim como a possibilidade em alternar entre diferentes representações do conceito; e

- a reificação refere-se ao momento de *insight* no qual se torna possível ver a entidade como um objeto. De forma cíclica, um novo desenvolvimento conceitual pode acontecer a partir do objeto reificado.

Assim, novos objetos podem ser construídos a partir do atual, seguindo as etapas definidas acima. A Figura 2.1 representa como aconteceria a introdução de novos conceitos nesses estágios.

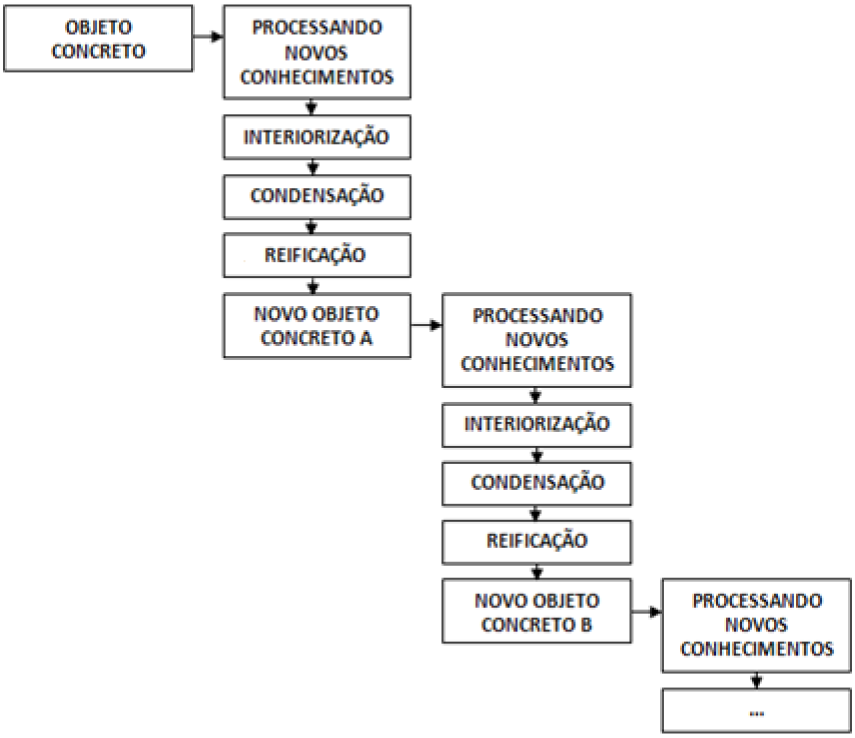

Figura 2.1 – Estágios da formação de conceitos concretos.
Fonte: Adaptado de Sfard (1991, p. 22).

Por fim, Sfard (1991) alerta sobre a importância da reificação, pois considera essa etapa a mais decisiva para a concreta formação de conceitos. Por isso, o momento de *insight* que requer a reificação não ocorrerá apenas como fruto de destreza de processos da condensação. Isso reforça a necessidade de que os três estágios se desenvolvam de forma dependente e cíclica.

2.2. A dualidade do MMC e do MDC

Como visto anteriormente, não deve haver discussões sobre a Matemática Algorítmica *versus* Matemática Abstrata, uma vez que ambas são duplamente necessárias e dependentes. Além disso, no ato de ensinar, conteúdos devem ser realizados operacionalmente e em seguida estruturalmente. Isso devido ao fato de que a abstração matemática deriva da própria ação, sendo esse fenômeno hierárquico.

Os conceitos matemáticos não podem ser somente ensinados estruturalmente ou operacionalmente, sendo necessário um elo que ligue essas duas faces, ou seja, devem ser abordados de forma complementar. O MMC e MDC não são exceções a esse fato, e abordá-los de uma forma simples, somente por meio de algoritmos pode acarretar na transmissão de um conteúdo sem significado ao aluno, sem a compreensão desses nas relações que tais assuntos causam. Da mesma forma, tratá-los simplesmente estruturalmente, vendo e revendo conceitos e propriedades sem uma aplicação direta, pode acarretar no mesmo dilema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN, 1998) expõem uma das existentes defasagens nesse assunto que é a aplicação de métodos sem explicitar relações que possibilitem ampliar a compreensão dos alunos acerca dos números naturais e, posteriormente, dos números inteiros. É necessário buscar meios que liguem os tópicos do MMC e MDC ao operacional (através de algoritmos e mecanismos para a obtenção desses números) e estrutural (tratando dos conceitos e definições). Mas, para que esse processo aconteça, Sfard (1991) afirma que são necessários três estágios: a interiorização, a condensação e a reificação.

No nosso estudo, a interiorização se refere ao primeiro momento do aluno com um novo conhecimento, por meio de operações e mecanismos com as quais o aluno irá se familiarizando com os novos processos. Além disso, esses processos partem de conhecimentos anteriores, dos quais os alunos já tenham certo domínio. No caso, os assuntos do MMC e MDC serão introduzidos como complementos aos assuntos de multiplicidade e divisibilidade de um número, tópicos já trabalhados pelos alunos anteriormente.

Será apenas na condensação que o aluno conseguirá desenvolver longas sequências de raciocínio e conhecimentos e transformá-los em objetos manipuláveis. É nesse nível que começam as generalizações e comparações. Nos assuntos do MMC e MDC, refere-se ao estágio em que, após operações e métodos já terem sido ensinados, os alunos obsevam os padrões e generalizam os resultados obtidos, construindo definições e propriedades.

E no último estágio (da reificação), o aluno, já familiarizado com as definições, conceitos e operações, consegue ampliar a sua bagagem, analisando e verificando possíveis aplicações dos assuntos estudados. É nesse estágio que o aluno, ao trabalhar com algumas aplicações, atividades e jogos, percebe a influência e importância dos tópicos estudados tanto para a Matemática, quanto para sua formação acadêmica.

Como a autora conclui, é a reificação o estágio mais importante, onde ocorre uma significativa compreensão dos assuntos. Isso não representa, porém, que os outros estágios possam ser ignorados, já que a aquisição desses conhecimentos ocorre sempre de forma contínua e cíclica. Devido a isso, o professor deve desenvolver mecanismos e recursos que alcancem os três estágios.

Dessa forma, podemos perceber que no ensino do MMC e MDC é equivocado supor que para a melhor compreensão do assunto o correto seria tomarmos uma abordagem superficial, pressupondo que o aluno seja incapaz de assimilar novos conhecimentos. Ao contrário, o trabalho sistemático desses conceitos possibilita o melhor aproveitamento de novos conteúdos e para a compreensão dos já obtidos.

Com essas primeiras considerações realizadas sobre a importância de um ensino “completo” sobre o MMC e o MDC, podemos introduzir no próximo capítulo algumas reflexões sobre a Educação Matemática, além de vermos alguns contextos históricos sobre a Teoria dos Números e as primeiras definições e propriedades sobre o MMC e o MDC.

3 A TEORIA DOS NÚMEROS

A Teoria dos Números, por trabalhar com a estrutura dos números, é considerada como um dos ramos mais puros da Matemática, sendo considerado um dos pilares para a mesma. Talvez por causa disso algumas pessoas a considerem tão complexa e abstrata. Contudo, esse campo do conhecimento pode ser bem aproveitado se cuidadosamente explorado na Educação Básica, servindo até mesmo para a compreensão de assuntos ligados a outras áreas da Matemática.

3.1. Notas históricas

Segundo Dantzig (1970), a Aritmética, além de ser a base de toda a Matemática, é uma das mais úteis das ciências. Em contrapartida, para o autor, a Teoria dos Números é o ramo da Matemática que encontrou o menor número de aplicações, ligadas ao cotidiano do aluno.

O autor alerta que tal interpretação pode levar à errônea conclusão de que a Aritmética precedeu à Teoria dos Números. Entretanto, a Teoria dos Números Inteiros é um dos mais antigos ramos matemáticos, enquanto que a Aritmética moderna tem apenas alguns séculos de idade. Na verdade, até o século XVII, a palavra *arithmetica* era a Teoria dos Números e o que atualmente chamamos de Aritmética era logística para os gregos, chamada posteriormente de algorismo na Idade Média.

Dantzig (1970) afirma também que a vida do homem é apenas uma sucessão de esperança e temores que encontram sua expressão num misticismo religioso vago e intangível. Objetos simples, em tempos primitivos, tomavam formas mais concretas. Estrelas e pedras, animais e plantas, palavras e números, eram associados como agentes do destino humano. A gênese de toda a ciência pode remontar à contemplação dessas influências ocultas, na qual a Teoria dos Números teve seu precursor numa espécie de numerologia que até hoje persiste em augúrios e superstições que de outra maneira seriam inexplicáveis.

Quanto à adoração dos números, para Dantzig (1970) ela encontrou sua devoção extrema na filosofia pitagórica. Nela, os números tinham diversas representações. Por exemplo, os números pares eram encarados como solúveis, femininos, pertencentes à terra, enquanto os números impares eram indissolúveis, masculinos, partilhando a natureza celestial. O autor argumenta que provavelmente foi nessa época que ocorreram os primeiros grandes desenvolvimentos na Aritmética.

Nesse contexto, são poucos os relatos históricos sobre o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e o Máximo Divisor Comum (MDC). Um dos mais antigos relatos é o de Euclides, em seus *Elementos*, no qual apresenta em seu sétimo livro (dedicado à Teoria dos Números), o processo hoje conhecido como algoritmo euclidiano para achar o Máximo Divisor Comum de dois ou mais números inteiros. Algumas fontes, como Milies e Coelho (2001), acreditam que esse algoritmo já era conhecido antes de Euclides.

Segundo Boyer (2012), pouco se sabe sobre a vida de Euclides e, embora se desconheça até mesmo a data em que viveu, há a estimativa que tenha vivido cerca de 300 antes de Cristo. Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde ótica e astronomia até música e mecânica, mas o que mais se destacou na história foram os *Elementos*. Em resumo, a obra se compõe de centenas de proposições distribuídas em treze livros ou capítulos, dos quais tratam sobre Geometria Plana Elementar, Teoria dos Números, Incomensuráveis e Geometria Espacial.

Como afirma Groenwald, Sauer e Franke (2005), outros matemáticos gregos também estudaram problemas relacionados com a Teoria dos Números, mas o mais importante foi sem dúvida Diofanto. Embora desde a antiguidade já seja possível perceber a utilização do conceito de MMC e MDC, apenas no século XVI tal assunto tomou forte repercussão, principalmente devido a Bezout e Fermat.

Hoje em dia, é tão evidente quanto necessária a utilização do MMC e do MDC para essa área, com especial ênfase às equações diofantinas. Segundo Milies e Coelho (2001), mesmo tendo esse nome em homenagem a Diofanto que procurava obter as soluções racionais dessas equações, seria mais adequado atribuí-las a Pierre de

Fermat, que foi quem estudou as soluções inteiras desse tipo de equações. Nesses séculos, muitos outros matemáticos procuraram desenvolver a Teoria dos Números. Segundo Groenwald, Sauer e Franke (2005), foi Euler quem popularizou a Teoria dos Números, mas o desenvolvimento sistemático da Teoria dos Números somente iniciou com Gauss, por meio de uma obra dedicada ao assunto e publicada em 1801. Foi a partir desses matemáticos que grande parte dessa ciência progrediu nesses últimos séculos, não só favorecendo a própria área, mas influenciando fortemente a Matemática e a Educação Matemática.

3.2. Algumas reflexões acerca do ensino da Matemática

Segundo o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2010), a Matemática é concebida como uma fonte de modelos para descrever ou explicar fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento. Esses modelos podem ser construídos com diversos níveis de abrangência e de sistematização. Modelos mais particulares podem constituir modelos matemáticos mais amplos que, por sua vez, podem constituir teorias abstratas para vários campos do saber. Como exemplos, o texto cita a geometria euclidiana, as estruturas algébricas e a teoria das probabilidades.

Da mesma forma, também é comum partir de um ente matemático e procurar relações com o mundo físico. Nesse caso, tal objeto é chamado de modelo concreto do ente matemático e, como exemplo, têm-se os desenhos que, além de formarem uma classe significativa de representações de objetos matemáticos, cumprem papel importante como recurso didático.

Outro ponto debatido pelo PNLD 2011 (2010), voltado à Educação Matemática, é que, nos últimos anos, acumulou-se um enorme estoque de conhecimento sobre processos de aquisição de conceitos e métodos matemáticos, correspondentes ao ensino e aprendizagem. Nesse âmbito, é consensualmente defendido que ensinar Matemática não se refere somente à transmissão de informações e que na verdade esse processo envolve a construção de várias aptidões cognitivas e, para tanto, é necessário o favorecimento da participação ativa do aluno nessa construção.

Afirma o PNLD 2011 (2010) que não é injustificado que a Matemática já tenha sido definida como a arte de resolver problemas. Para explicar esse comentário, o PNLD 2011 (2010) ressalta dois pontos: o primeiro é que a Matemática lida com problemas e, consequentemente, não é um campo de conhecimentos mortos. Em segundo, esses saberes têm um componente criativo grande, e não serve apenas como um estoque de procedimentos prontos a serem aplicados em situações rotineiras e repetitivas.

Nesse sentido, o ensino da Matemática prioriza a utilização de diversos tipos de articulações. A primeira delas, como já mencionado, é que os conteúdos matemáticos não devem ser isolados em campos autossuficientes. Uma segunda articulação é entre os vários enfoques de um mesmo conteúdo.

Com a intenção de favorecer a atribuição de significados aos conteúdos matemáticos, dois tópicos têm ganhado grande destaque nas últimas décadas: o da interdisciplinaridade, ligada às inter-relações entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento; e o da contextualização, articulada com as várias práticas e necessidades sociais. Entretanto, convém observar que as “contextualizações superficiais”, em que uma situação apresentada serve apenas como pretexto para a obtenção de dados numéricos, são insuficientes e ineficazes. Da mesma forma, também é desaconselhável a contextualização baseada no cotidiano, que apresente dados totalmente irreais.

Por fim, outro ponto debatido no PNLD 2011 (2010) é sobre o papel do ensino da Matemática para a formação integral do aluno como cidadão da sociedade atual – sociedade na qual a convivência se torna cada vez mais complexa e marcada por tensões sociais. Nesse sentido, o ensino da Matemática pode contribuir para a formação de cidadãos responsáveis e críticos. Para tanto, é preciso que o ensino considere todo aluno como sujeito ativo de seu processo de aprendizagem, que reconheça e incentive os seus conhecimentos e que auxilie o aluno a compreender questões sociais relacionadas à sua comunidade e à sociedade.

Feitas essas considerações sobre alguns fatos históricos ligados à Teoria dos Números e aos conceitos de MMC e MDC, além de um apanhado de ideias relacionadas ao ensino da Matemática, iremos introduzir algumas propriedades ligadas aos tópicos tratados neste trabalho, de forma a facilitar a compreensão de algumas ponderações realizadas nos próximos capítulos.

3.3. Definições e propriedades do MMC e do MDC

Faz-se necessário esclarecer os assuntos tratados neste trabalho, explicitando algumas definições, extraídas de Milies e Coelho (2001).

Definição 1 (Máximo Divisor Comum): Dados dois números inteiros não nulos a e b, chama-se Máximo Divisor Comum o maior de seus divisores comuns:

$$mdc(a, b) = máx\ D(a, b)$$

Propriedades: Sejam a, b e c inteiros. Verificam-se as seguintes afirmações:

1. $mdc(a, 1) = 1$;
2. $mdc(a, b) = mdc(b, a)$;
3. $mdc(a, a) = |a|$;
4. $Se\ b\ divide\ a, então\ mdc(b, a) = |b|$;
5. $mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(a, b)$.

Definição 2 (Mínimo Múltiplo Comum): Chama-se Mínimo Múltiplo Comum de a e b o menor dos seus múltiplos positivos comuns, isto é:

$$mmc(a, b) = mín\ M(a, b)$$

Teorema 01: Sejam a, b inteiros e m um inteiro positivo. Então $m = mmc(a, b)$ se e somente se m verifica:

1. $a|m$ e $b|m$;
2. Se $a|m$’ e $b|m$’, então $m|m$’.

Teorema 02: Dados a e b inteiros, $d = mdc(a, b)$ e $m = mmc(a, b)$. Então:

$$m \cdot d = |a \cdot b|$$

Não serão demonstradas aqui as propriedades ou teoremas anunciados. Caso o leitor se interesse em compreender os raciocínios aqui mostrados, recomendamos Milies e Coelho (2001) ou Fonseca (2011).

Com essas primeiras ponderações realizadas, podemos partir para o próximo capítulo, em que discutiremos as análises realizadas nos livros de Ensino Fundamental, Médio e Superior.

4 O MMC E O MDC NA EDUCAÇÃO

É impressionante como um assunto que apresenta tantas aplicações importantes na Teoria dos Números, acaba sendo tão pouco visto no Ensino Fundamental. No Ensino Médio, a não ser a critério de revisão para o vestibular, praticamente é ignorado.

Um aluno, que não vê esse assunto desde sua primeira vez, no 6º ano, dificilmente se lembrará, alguns anos depois, como se calcula o MDC de dois ou mais números. O MMC, embora não esteja em melhor situação, é mais priorizado, já que os professores usam muito o método de obtenção para realizar operações de soma ou subtração com frações. Mesmo assim, o MMC é visto geralmente apenas como tendo essa função, e outras aplicações são desprezadas. Nesses pontos, já se é possível levantar algumas questões:

1. será que o assunto não poderia ser melhor abordado? Isso realmente prejudicaria outros assuntos ou atrapalharia o progresso do ano letivo?

2. a abordagem do MMC e do MDC não poderia contribuir para o entendimento de tópicos relacionados ou de assuntos posteriores? Como exemplo, talvez o conteúdo de equações se tornasse mais fácil se esses assuntos fossem mais bem estudados.

3. em sequência, será que os tópicos do MMC e MDC não poderiam talvez ser trabalhados em outras séries do Ensino Fundamental, para explicar ou comentar algum assunto?

4. e essa abordagem, apresentada nas revisões de alguns cursinhos, não poderia ter uma articulação com alguns dos assuntos estudados no Ensino Médio?

Para responder a essas questões, faremos uma análise de alguns dos livros utilizados no Ensino Fundamental, Médio e Superior e veremos quais são as metodologias utilizadas para o desenvolvimento do assunto. Para tanto, serão analisados sete livros didáticos do Ensino Fundamental II e quatro livros didáticos de

Ensino Médio, alguns desses selecionados a partir da lista do PNLD (Parâmetros Nacionais do Livro Didático) de 2010 e 2011, elaborados, respectivamente, para os anos de 2011 e 2012. Serão verificadas também algumas apostilas utilizadas em escolas particulares, como a apostila Pitágoras, para o Ensino Fundamental, e a apostila Anglo, para o Ensino Médio. Por fim, também serão analisados três livros do Ensino Superior, utilizados em cursos de graduação de Matemática.

4.1. Conteúdos vistos no Ensino Fundamental

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, alguns aspectos dados ao estudo dos números naturais, e desenvolvidos nos ciclos finais do Ensino Fundamental, comprometem a aprendizagem, como a ausência de certas situações-problema e, com especial enfoque ao nosso trabalho, como o excesso de cálculos para a obtenção do MMC e do MDC sem a compreensão de conceitos e relações que possibilitem ampliar o entendimento acerca dos números.

Diante desses problemas, conclui o PCN (1998) que para ser possível consolidar a aprendizagem é necessário desenvolver, ao longo dos ciclos finais do Ensino Fundamental, um trabalho sistemático dos números naturais e, assim, possa analisar diferentes ordens de grandeza e posição e interpretar suas variadas formas de representação.

Essas reflexões são fáceis de verificar ao se analisar alguns dos livros utilizados nas escolas públicas e particulares. Bom ressaltar que em nenhum momento este trabalho tem a intenção de criticar negativamente algum dos livros estudados, e sim refletir sobre a estrutura utilizada pelos mesmos.

Em resumo, a abordagem do assunto do MMC e MDC no Ensino Fundamental consiste basicamente em uma complementação ao assunto de múltiplos e divisores de um número natural. Geralmente, é dedicado um capítulo ou unidade a esse tema, onde usualmente é discutido e definido a decomposição de um número, sobre múltiplos e divisores desse número, a caracterização de números primos e a fatoração de um número. No decorrer desses tópicos, são incluídas as noções de Máximo Divisor Comum e de Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números.

Devido a apenas ser uma complementação e também por precisar tratar de outros assuntos posteriores, poucos exercícios e métodos são tratados. Noções mais detalhadas ou implicações do assunto geralmente não são abordadas. Outro fato observado foi na quantidade de exercícios que tratam apenas em obter o MMC e MDC, sem nenhum contexto que ajude o aluno a compreender a importância e utilidade desses temas.

Na Tabela 4.1 é possível reparar alguns dos pontos mencionados. No livro de Barbosa, Lima e Tinano (2012), o assunto de MMC e MDC é visto basicamente como uma conclusão ao primeiro capítulo, intitulado “Divisores e múltiplos de um número natural”. Poucos exercícios são apresentados, além de tratar apenas com noções intuitivas sobre os tópicos. Seguindo as ideias de Sfard (1991), essa abordagem operacional pode dificultar uma completa compreensão sobre os tópicos estudados. Em contrapartida, o livro menciona brevemente algumas definições e no final do capítulo referencia o teorema que afirma que o valor absoluto da multiplicação de dois números inteiros é equivalente à multiplicação do MMC e MDC entre esses mesmos números.

Tabela 4.1 – Ponderações acerca do livro *Matemática 01*, da coleção Pitágoras.

TÍTULO	**MATEMÁTICA 6º ANO - LIVRO 01 - COLEÇÃO PITÁGORAS**
AUTORES	LAUREN NOGUEIRA BARBOSA MARIA CRISTINA PONCIANO DE LIMA MARILENE TURÍBIA DE REZENDE TINANO
ANO/EDITORA	2012, Editora Educacional
TÓPICOS	Decomposição de um número natural Fatores e divisores de um número natural Números primos e números compostos Múltiplos e o Mínimo Múltiplo Comum Divisores e o Máximo Divisor Comum
OBSERVAÇÕES	Trata o assunto através de diagramas Trabalha poucos exercícios sobre o assunto (14 Questões) Trata alguns aspectos de aritmética

Nos livros de Bianchini (2002) e Dante (2004), vemos novamente que poucos exercícios são tratados com o aluno. Além disso, enquanto o primeiro abaixo (Tabela 4.2) trata da definição de uma forma mais ampla, o segundo (Tabela 4.3) apenas aborda noções intuitivas. Da mesma forma, é apenas no segundo que vemos um tratamento geométrico sobre o assunto, que se bem trabalhado pelo professor, poderá favorecer a compreensão dos temas estudados. Percebemos assim certa divergência sobre a metodologia entre esses livros, pois enquanto Bianchini (2002) explora aspectos estruturais sobre o assunto, Dante (2004) favorece noções operacionais. Porém, como afirma Sfard (1991), a não ser que contemple os dois aspectos de formas complementares, dificultará a formação de conceitos concretos para o aluno.

Tabela 4.2 – Ponderações acerca do livro *Matemática*, de E. Bianchini.

TÍTULO	**MATEMÁTICA - 5ª SÉRIE**
AUTORES	EDWALDO BIANCHINI
ANO/EDITORA	2002, Editora Moderna
TÓPICOS	Múltiplos e divisores e critérios de divisibilidade Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum Números Primos
OBSERVAÇÕES	Trabalha com a definição de MMC e MDC Resolve MMC e MDC por fatoração Trabalha poucos exercícios sobre o assunto (9 Questões)

Tabela 4.3 – Ponderações acerca do livro *Tudo é Matemática*, de L. R. Dante.

TÍTULO	**TUDO É MATEMÁTICA - 5ª SÉRIE**
AUTORES	LUIZ ROBERTO DANTE
ANO/EDITORA	2004, Editora Ática
TÓPICOS	Múltiplos e o Mínimo Múltiplo Comum Divisores e geometria Máximo Divisor Comum Números primos
OBSERVAÇÕES	Trata apenas noções intuitivas de MMC e MDC Envolve um pouco de geometria ao assunto Trabalha poucos exercícios sobre o assunto (11 Questões)

Interessante notar que, embora os livros sigam certo caminho para abordar os conteúdos vistos no Ensino Fundamental II, os autores têm a autonomia de mudar, incrementar ou reduzir algum tópico. Infelizmente, até mesmo um conteúdo pode acabar sendo suprimido dessa relação. Como visto na Tabela 4.4 e na Tabela 4.5, embora o segundo desses aborde vários exercícios sobre o tema do MMC, tanto Tosato, Peracchi e Stephan (2005) quanto Cavalcante *et al* (2006) omitem sobre o Máximo Divisor Comum, impedindo assim qualquer aprimoramento desse assunto.

Tabela 4.4 – Ponderações acerca do livro *Matemática: Ideias e Relações*.

TÍTULO	**MATEMÁTICA 5ª SÉRIE - IDEIAS E RELAÇÕES**
AUTORES	CLÁUDIO MIRIAM TOSATO EDILAINE DO PILAR F. PERACCHI VIOLETA M. STEPHAN
ANO/EDITORA	2005, Editora Positivo
TÓPICOS	Múltiplos e divisores de um número Múltiplos comuns e o Mínimo Múltiplo Comum Números Primos
OBSERVAÇÕES	Não trabalha com o MDC Trata exemplos de MMC sem usar a definição. Poucos exercícios sobre o assunto (5 Questões)

Tabela 4.5 – Ponderações acerca do livro *Para Saber Matemática*.

TÍTULO	**PARA SABER MATEMÁTICA - 5ª SÉRIE - 6º ANO**
AUTORES	LUIZ G. CAVALCANTE JULIANA SOSSO FÁBIO VIEIRA EDNÉIA POLI
ANO/EDITORA	2006, Editora Saraiva
TÓPICOS	Números Primos Decomposição de um número em fatores primos Múltiplos, divisores e o Mínimo Múltiplo Comum
OBSERVAÇÕES	Não trata sobre MDC Trata apenas uma noção intuitiva sobre MMC Trabalha um número razoável de exercícios (16 Questões)

É fácil perceber que se um assunto não é tratado nem estrutural nem operacionalmente com o aluno, a não ser que o professor utilize outros meios, o estudante não será capaz de formar certos conceitos matemáticos. Por outro lado, alguns livros, mesmo que tratem noções intuitivas e optem por não se aprofundar muito o assunto, tratam várias questões sobre o tema, permitindo que o professor escolha quais exercícios abordar sem necessitar da utilização de outros materiais.

Como exemplo, temos o livro de Giovanni, Castrucci e Giovanni Júnior (2002) e o de Iezzi, Dolce e Machado (2009), listados respectivamente nas Tabelas 4.6 e 4.7. Esses livros facilitam a abordagem operacional do MMC e MDC e, caso o professor busque recursos que complementem os aspectos estruturais, permitirá que os alunos construam significativamente novos objetos matemáticos.

Tabela 4.6 – Ponderações acerca do livro *A conquista da Matemática*.

TÍTULO	**A CONQUISTA DA MATEMÁTICA 5**
AUTORES	JOSÉ RUY GIOVANNI BENEDITO CASTRUCCI JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR
ANO/EDITORA	2002, FTD
TÓPICOS	Noções sobre divisibilidade Divisores, fatores e múltiplos de um número Decomposição de um número em fatores primos
OBSERVAÇÕES	Trabalha com a definição de MMC e MDC Trabalha vários exercícios sobre o assunto (32 Questões)

Tabela 4.7 – Ponderações acerca do livro *Matemática e Realidade*.

TÍTULO	**MATEMÁTICA E REALIDADE 6º ANO**
AUTORES	GELSON IEZZI OSVALDO DOLCE ANTONIO MACHADO
ANO/EDITORA	2009, Atual Editora
TÓPICOS	Divisibilidade e Números primos Decomposição em fatores primos Divisores de um número e Máximo Divisor Comum
OBSERVAÇÕES	Aborda diversos exercícios sobre o assunto (33 Questões) Trata pouco sobre as definições

Naturalmente, é de se esperar que ao analisar vários livros, acabe encontrando algum que vá além da abordagem casual e aborde mais do que simplesmente noções e conceitos. Como vemos na tabela 4.8, a edição do IBEP (Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas) de Matsubara e Zaniratto (2005) resolve avançar no tema e aborda a obtenção do MDC de dois números através do algoritmo de Euclides, mecanismo que utiliza divisões para calcular o MDC. Além disso, trata vários exercícios sobre esses conteúdos, abordando algumas aplicações, como na utilização do MMC em frações. Ao utilizar recursos que tratam concepções estruturais e operacionais do mesmo assunto, possibilita ao aluno alcançar os três estágios de formação de conceitos, definidos por Sfard (1991) como essenciais para a aprendizagem e formação do aluno.

Tabela 4.8 – Ponderações acerca do livro *Matemática – Escola e Realidade*.

TÍTULO	**MATEMÁTICA - ESCOLA E REALIDADE 5ª SÉRIE**
AUTORES	ROBERTO MATSUBARA ARIOVALDO ANTÔNIO ZANIRATTO
ANO/EDITORA	2005, IBEP
TÓPICOS	Frações Múltiplos e divisores Mínimo Múltiplo Comum - conjuntos e frações Máximo Divisor Comum - conjunto e frações
OBSERVAÇÕES	Não trata de definições, mas utiliza conjuntos e frações Calcula MMC por fatoração e MDC pelo algoritmo de Euclides Trabalha vários exercícios sobre o assunto (30 Questões)

Nesse ponto, são necessárias algumas ressalvas. No Estado de São Paulo, o governo adotou desde 2009 uma apostila, denominada *Caderno do Aluno*, que é distribuída para os estudantes das escolas públicas estaduais. Esse caderno consiste em exercícios sobre os tópicos previstos no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, e além dos que são distribuídos aos alunos, existe também o *Caderno do Professor,* com orientações e resoluções para os exercícios propostos.

Os tópicos do MMC e MDC são abordados, nesse contexto, no volume 1 do 6º ano do Ensino Fundamental. Além desses tópicos, esse volume também aborda divisores e múltiplos de um número e sobre os números primos. Porém, o tratamento dado a esses assuntos é muito superficial, e salvo o MMC, sobre o qual a apostila oferece três exercícios contextualizados, a abordagem ao MMC e MDC é feita exclusivamente considerando os divisores de vários números. Outras formas de abordagem não são exploradas, deixando ao professor a função de buscar outros materiais de apoio para o caderno (que, paradoxalmente, serviria como apoio ao professor).

Uma segunda ressalva é sobre as recomendações do PNLD 2011 (2010), dedicado à análise dos livros didáticos do Ensino Fundamental. Em linhas gerais, o PNLD 2011 (2010) reflete sobre o papel da Matemática e da Educação Matemática na sociedade, revê competências necessárias para os alunos e avalia os livros didáticos desse período da Educação Básica. Para essa análise, conta com diversos critérios e parâmetros[1] com os quais avalia os livros e, para os aprovados, disponibiliza resenhas informativas às escolas que participam desse programa.

Desses livros sugeridos pelo PNLD 2011 (2010), alguns já foram analisados aqui, sendo eles: *A conquista da Matemática*, *Matemática e Realidade*, *Matemática: Ideias e Relações* e *Tudo é Matemática*. Pelo levantamento dos dados, percebeu-se que a abordagem desses livros ao assunto é defasada em alguns pontos, já mencionados anteriormente.

4.2. Conteúdos vistos no Ensino Médio

Embora o assunto aqui analisado não seja participante do currículo planejado para o Ensino Médio, resolvemos também verificar, caso exista, a abordagem do MMC e MDC nesses anos finais da Educação Básica. Realmente, na maioria dos livros didáticos, assim como nas obras recomendadas pelo PNLD 2012 (2011), dedicado exclusivamente para a análise de livros desses anos citados, o assunto não é abordado. *Conexões com a Matemática*, de J. M. Barroso, *Matemática – Contexto e Aplicações*, de L. R. Dante, *Matemática - Paiva*, de M. Paiva e *Matemática Ensino Médio* de M. I. Diniz e K. S. Smole são alguns desses livros.

---

[1] Ver Apêndice A.

O mesmo fato não acontece em algumas apostilas, utilizadas principalmente por escolas da rede privada. Nesse campo, mencionamos a apostila Anglo, e mais especificamente, o material didático dedicado ao 2º ano do Ensino Médio, na qual em um dos capítulos, são abordados alguns conceitos envolvendo a aritmética dos números inteiros. Como nesses anos o aluno já está mais preparado para se aprofundar em novos conceitos e abordagens, a apostila aborda alguns tópicos envolvendo MMC e MDC relacionados à Teoria dos Números.

Dessa forma, além de rever alguns conceitos, como múltiplos, fatores e divisores, MMC e MDC, enunciam alguns teoremas e aplicam os conceitos de MDC para resolução de exercícios sobre outros campos da Matemática, como no cálculo de áreas e comprimentos, introduzindo Geometria ao assunto. Outro ponto interessante é a complementação do assunto com exercícios, alguns extraídos de vestibulares famosos, como o da USP (Universidade de São Paulo) e da UNICAMP (Universidade de Campinas), já que o assunto acaba sendo exigido pelos mesmos.

Tal fato reforça a importância desse assunto na formação básica do aluno, justificando sua complementação nos tópicos estudados no Ensino Médio. Ao aplicar exercícios, definições e propriedades, consegue desenvolver tanto conceitos estruturais quanto operacionais, permitindo o alcance dos três estágios necessários para a aquisição do conhecimento.

4.3. Conteúdos vistos no Ensino Superior

Não há dúvidas que o MMC e MDC têm grande importância na Matemática do ensino Superior. Isso porque o assunto é muito visto na Teoria dos Números, com especial ênfase ao teorema de Bezout e, por consequência, às Equações Diofantinas. Vale ressaltar que, normalmente, por se tratar do Ensino Superior, os livros dedicam um grande enfoque aos aspectos operacionais e estruturais, permitindo a todo o momento criar novos objetos e assim atingir repetitivamente e de forma cíclica os estágios da interiorização, da condensação e da reificação. Realmente, percebemos esse fato nos livros de Fonseca (2011) e Milies e Coelho (2001). Entretanto, Landau (2002) resolve tratar, quase que exclusivamente, conceitos e teoremas, podendo ocasionar ao estudante, mesmo de nível superior, difícil compreensão sobre os tópicos vistos.

Veremos a seguir as abordagens usuais vistas nesse ramo, extraídas aqui da análise das obras de Fonseca (2011), Milies e Coelho (2001) e Landau (2002). Inicialmente, o Máximo Divisor Comum é definido junto com as noções de múltiplos e divisores de um número. Pode parecer bem semelhante ao que acontece no Ensino Fundamental, mas além das definições são introduzidos também teoremas e propriedades, de forma a ampliar os conhecimentos adquiridos pelo estudante. Como define Fonseca (2011), considerando a e b dois inteiros diferentes de zero, chama-se divisor comum de a e b todo inteiro x tal que x divide a e também x divide b. O conjunto de todos os divisores comuns de a e b indica-se por $D(a,b)$ e o maior elemento positivo desse conjunto (denominado de Máximo Divisor Comum de a e b) será denominado por $d = mdc(a,b)$.

Da definição de divisores de um número, temos como principal consequência os números primos, definidos como sendo aqueles números que têm como divisores comuns apenas o número 1 e o próprio número. Dessa definição, temos também a de números primos entre si, que é quando o MDC de dois números é igual a 1.

Logo em seguida, temos o teorema de Bezout. Essa propriedade do MDC, exatamente por ser uma das propriedades mais importantes na Teoria dos Números, alguns autores a denominam de Teorema Fundamental da Teoria dos Números.

Teorema 03 (de Bezout): Sejam a e b inteiros (não conjuntamente nulos). Então existe e é único $d = mdc(a,b)$. Além disso, existem inteiros x e y, tal que é possível escrever:

$$d = ax + by$$

Note ainda que d é combinação linear de a e b. Além disso, tal representação não é única, já que podemos ter, para qualquer inteiro t:

$$d = a(x + bt) \; + \; b(y - at)$$

Por exemplo, considere os inteiros $a = 6$ e $b = 27$. Temos para qualquer t inteiro,

$$d = mdc(a, b) = 3 = 6(-4 + 27t) + 27(1 - 6t)$$

Para que seja possível achar o MDC de dois números e até mesmo auxiliar no cálculo do teorema de Bezout, podemos utilizar um dos métodos mais antigos ainda em uso na aritmética, que é o Algoritmo de Euclides. Ele é de grande importância na Teoria dos Números, e poderia ser implantado no Ensino Fundamental, podendo também fazer referência à história do algoritmo ou mencionando sua utilização matemática. A justificativa da eficiência desse método baseia-se no seguinte lema, extraído de Milies e Coelho (2001):

Lema (Algoritmo de Euclides): Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$, e sejam q e r respectivamente o quociente e o resto da divisão de a por b. Então $D(a, b) = D(b, r)$. Além disso, temos também que $mdc(a, b) = mdc\ (b, r)$.

O Algoritmo de Euclides resume-se em fazer sucessivas divisões. Devido a isso, existe um mecanismo prático para a obtenção do MDC. Inicialmente, pegamos os valores absolutos dos dois números para os quais pretendemos encontrar o MDC e dividimos o maior deles pelo menor. Com o resto encontrado, dividimos o divisor utilizado na primeira divisão e iremos encontrar um segundo resto. Repetindo esse processo até encontrar um resto igual a zero, teremos que o último divisor utilizado será o MDC dos números utilizados. De forma prática podemos utilizar o mecanismo apresentado na Figura 4.1, onde se obtêm o MDC entre 18 e 273:

	15	1	5
273	18	15	3
3	3	0	

Figura 4.1 – Algoritmo de Euclides para a obtenção do MDC.

Note que na primeira linha colocamos sempre o quociente e na última, os restos obtidos. Logo o $mdc(18{,}273) = 3$. Observe também que o algoritmo de Euclides é útil para aplicarmos o teorema de Bezout. Para tanto, utilizamos a ideia do algoritmo das divisões sucessivas e também a noção da divisão euclidiana, que em poucas palavras, consiste em reescrever a divisão de a por b como $a = b \cdot q + r$, sendo q e r o quociente e o resto da divisão de a por b, respectivamente.

A partir dessas noções, escrevemos explicitamente as divisões dos números dados. Como exemplo, Milies e Coelho aplicam o teorema de Bezout ao MDC de 1128 e 336, ou seja, pretendem encontrar inteiros x e y tais que satisfaçam a expressão $d = ax + by$. Escrevendo as divisões sucessivas, temos:

$$1128 = 3 \cdot 336 + 120$$
$$336 = 2 \cdot 120 + 96$$
$$120 = 1 \cdot 96 + 24$$
$$96 = 4 \cdot 24$$

As contas acima resultam num sistema de equações, em que a intenção é encontrarmos, a partir de substituições, uma expressão que contenha o número 24, que é o $mdc(336, 1128)$, e os números 336 e 1128. Tal problema resulta em:

$$24 = 3 \cdot 1128 - 10 \cdot 336$$

Em seguida à explicação desse algoritmo e de suas aplicações, usualmente é introduzida a definição do MMC. Como define Fonseca (2011), considere a e b dois inteiros diferentes de zero. Chama-se múltiplo comum de a e b todo inteiro x tal que a divide x e também b divide x. O conjunto de todos os múltiplos comuns de a e b indica-se por $M(a, b)$ e o menor elemento positivo desse conjunto (denominado de Mínimo Múltiplo Comum de a e b) será denominado por $m = mmc(a, b)$.

Um dos métodos mais práticos para a obtenção do MMC entre dois números é através da fatoração mútua desses números. Para melhor esclarecimento, temos como exemplo a Figura 4.2, representando a obtenção do MMC entre os números 12 e 75, no caso igual a 300.

12, 75	2
6, 75	2
3, 75	3
1, 25	5
1, 5	5
1,1	2x2x3x5x5=300

Figura 4.2 – Fatoração mútua para obtenção do MMC.

Da fatoração de um número, que consiste em pegar um número e transformá-lo em uma multiplicação de outros dois números (exemplo: $6 = 3 \times 2$), temos o Teorema Fundamental da Aritmética. O Teorema afirma que todos os números inteiros positivos maiores que 1 podem ser decompostos num produto de números primos, sendo essa decomposição única. Como exemplo, o número 60 pode ser decomposto em $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Depois de feito um bom desenvolvimento sobre esses assuntos e abordado outros tópicos, como congruência e ideais, são ensinadas as equações diofantinas. Este é o ramo da Teoria dos Números que analisa as soluções inteiras de equações polinomiais, e que apresenta diversas aplicações no cotidiano. Considere, por exemplo, que certo comerciante dispondo de determinada quantia de dinheiro, deseja verificar quantos pacotes da mercadoria A ou B pode comprar com o dinheiro. Perceba que temos aqui um problema com as bases das equações diofantinas, já que buscamos apenas soluções inteiras e mais especificamente, positivas. Alguns outros exemplos desse tipo de equações são:

1. $x^2 + y^2 = z^2$, chamados ternos pitagóricos. Tem referência com o teorema de Pitágoras e possui infinitas soluções;

2. $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$. Generalização do caso anterior e apresenta como solução única a terna ordenada $(0, 0, 0)$. Teve grande repercussão com Fermat e foi intitulado de o "Último Teorema de Fermat".

Entretanto, as equações mais simples desse tipo são as equações diofantinas lineares com duas incógnitas da forma: $ax + by = c$, em que a, b e c são números inteiros dados. Note que nesse ramo nem todas as equações tem solução inteira. Por exemplo, no caso $2x + 4y = 7 \implies 2 \cdot (x + 2y) = 7$ não terá solução inteira como é fácil de se verificar. Para garantir a existência de solução, temos o seguinte teorema:

Teorema 04: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, $d = mdc(a, b)$ divide c.

De onde resulta o próximo teorema:

Teorema 05: Sejam a, b e c inteiros tais que $d = mdc(a, b)$ divide c. Escrevendo d na forma $d = ua + vb$, com u e v também inteiros, temos que uma das soluções da equação diofantina $ax + by = c$ é dada por:

$$x_0 = u \cdot \frac{c}{d}, \qquad y_0 = v \cdot \frac{c}{d}$$

E qualquer outra solução, para um t inteiro, será da forma:

$$x = u \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d}t, \qquad y = v \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d}t$$

Para vermos a aplicação desse teorema, Milies e Coelho (2001) resolvem a equação diofantina $56X + 72Y = 40$. Para verificarmos se tal equação possui solução, calculamos o $mdc(56{,}72) = 8$, no qual percebemos que 8 divide 40, de onde concluímos que a equação possui soluções inteiras. Em seguida, aplicando o algoritmo de Euclides para encontrar números inteiros u e v tais que $56u + 72v = 8$, obtêm-se $u = 4$ e $v = -3$, de onde multiplicando os valores obtidos por 5, quociente da divisão de c por d, obtemos $X_0 = 20$ e $Y_0 = -15$, soluções particulares da equação em questão. Com isso, aplicando as fórmulas acima para encontrar qualquer outra solução dessa equação, obtemos, para um t inteiro,

$$X = 20 + 9t, \qquad Y = -15 - 7t$$

As noções, as definições e os algoritmos vistos nessa seção são apenas uma abordagem superficial quanto à disciplina de Teoria dos Números ministrada em cursos de graduação, a exemplo do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).

Muitos outros teoremas e conceitos são vistos e demonstrados. Sendo assim, os tópicos vistos aqui tem a intenção de comprovar que essa abordagem pode ser aplicada ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, de acordo com o grau de maturidade dos alunos. Devido a isso, temos a seguir algumas aplicações que poderiam ser estendidas à Educação Básica.

5 APLICAÇÕES E POSSIBILIDADES

Pretendemos neste capítulo responder às questões levantadas no capítulo anterior. Obviamente, o professor pode buscar, tanto a partir dos livros didáticos, mas também por meio de jogos, materiais extras e programas, recursos que aperfeiçoem o ensino desses assuntos. Os temas do MMC e MDC têm a intenção de ajudar e preparar o aluno não só nesse ramo, mas também em outros, como múltiplos, divisores, números primos e, mais para frente, em frações e até mesmo equações.

Claro que em nenhum momento queremos afirmar que os mesmos assuntos tratados no Ensino Superior também devam ser aplicados, de forma integral, aos alunos do 6º ano devido principalmente à maturidade dos mesmos. Contudo, reafirmamos que certos recursos podem ser incorporados e, nos anos seguintes do Ensino Fundamental, abordagens complementares podem ser incluídas, para que se adquiram novos conhecimentos e retomem conceitos e definições já vistos.

Mais que isso, assuntos ligados ao Ensino Superior podem até mesmo ser incorporados, de forma simples, aos anos do Ensino Médio. Como exemplo, na OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), existem questões que exploram a Teoria dos Números. Por isso, temas como equações diofantinas, e, mais especificamente, as lineares, acabam sendo uma ótima possibilidade para a articulação com as equações lineares do primeiro grau, já que partem do mesmo tipo de equações.

Para reforçar tais reflexões, discutiremos a seguir algumas ideias propostas por outros pesquisadores que poderiam ser aplicadas no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, de acordo com a complexidade dos assuntos abordados. Além disso, como defendido neste trabalho, buscamos meios com os quais o professor consiga desenvolver com o aluno tanto as noções estruturais quanto as operacionais sobre o MMC e o MDC, complementando a compreensão desses temas.

5.1. Resolução de problemas por MMC e MDC

No relato de Ryndack, Lacerda e Valverde (2011), alunos integrantes de um grupo do PIBID[2]-Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) discutem o projeto de rever os conceitos do MMC e MDC por meio da resolução de problemas. Em seu artigo, os estudantes debatem a elaboração e aplicação de atividades relacionadas aos dois assuntos abordados. A preparação da atividade foi elaborada a partir da resolução de problemas visando à ligação entre o cotidiano e o conteúdo a ser ensinado. Embora tenham sido aplicadas em turmas do 8º ano (buscando a compreensão de relações já estudadas nos anos anteriores), tais atividades também poderiam ser abordadas no 6º ano, no qual os alunos veem esses conhecimentos pela primeira vez, servindo para uma melhor compreensão sobre os temas.

Foi então elaborada uma apostila abordando os conceitos sobre divisibilidade e multiplicidade, números primos, fatoração, MMC e MDC. Com os exercícios aplicados, os estudantes do PIBID perceberam o crescente interesse dos alunos na resolução das questões. Em um dos enunciados[3], aparecia “Sempre que uma pessoa anda $650cm$, $800cm$ e $1000cm$, ela dá um número exato de passos. Qual é o maior comprimento possível de cada passo dado por uma pessoa?” (RYNDACK; LACERDA; VALVERDE, 2011, p.6).

Os alunos perceberam que para a resolução dos problemas, noções intuitivas poderiam ser tomadas, mas que algumas dessas poderiam levar um tempo muito grande para a obtenção das respostas dos exercícios. Os alunos notaram também que existiam propriedades por trás dos problemas e das soluções. Dessa forma, foi possível construir os conceitos de MMC e MDC, relembrando os métodos para sua obtenção.

Os autores perceberam que, embora os alunos apresentassem certo domínio na aritmética quanto a realizar operações e conceitos, tinham grande dificuldade em aplicar tais conhecimentos em problemas que exigiam interpretação. Também

---

[2] Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

[3] Para ver outros enunciados presentes no texto de Ryndack, Lacerda e Valverde (2011), consulte o apêndice B.

notaram que escrever os conteúdos de forma clara permitiu o aprofundamento nas ideias envolvidas nos conceitos e na percepção das dificuldades na aprendizagem da Matemática. Isso reforça a necessidade da complementação de aspectos estruturais para a compreensão dos temas trabalhados.

5.2. O tratamento geométrico ao MDC e MMC

Uma das primeiras aplicações, embora não muito vista, mas que remete imediatamente aos conceitos de MMC e MDC é a abordagem geométrica que pode ser feita ao assunto. Para tanto, utilizaremos os artigos escritos por Oliveira (1995), Cardoso e Gonçalves (2004), e Polezzi (2004) em que abordam e discutem atividades que podem ser adaptadas para alunos do 6º ano.

No primeiro deles, escrito por Oliveira (1995), o autor nota em um simples problema sobre MDC, que poderia aplicá-lo geometricamente. O problema em questão é: “Um terreno retangular de $221m$ por $117m$ será cercado. Em toda a volta desse cercado, serão plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível?” (OLIVEIRA, 1995, p. 24). Para tanto, resolveu o problema através de um retângulo, dividindo-o em quadrados, como mostra a Figura 5.1:

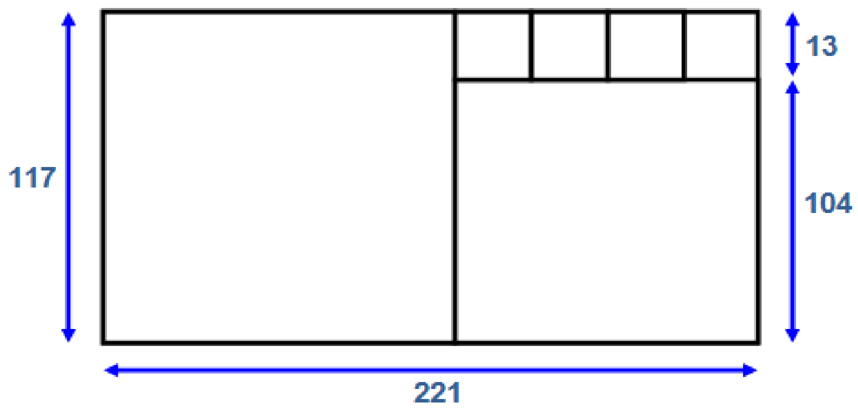

Figura 5.1 – Representação geométrica para o $mdc(117{,}221)$.
Fonte: Adaptado de Oliveira (1995).

Com isso feito, o autor buscou enunciar o método que tinha deduzido. Notou que tinha acabado de encontrar uma forma de ilustrar um procedimento aritmético usando áreas. Mais especificamente, o que o autor fez foi encontrar uma representação geométrica para o algoritmo de Euclides. Isso reforça a importância de diversos assuntos da Matemática relacionando-os a um mesmo conteúdo. No caso, a visualização matemática é um método simples para que os alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental II possam compreender melhor as situações que lhe são apresentadas.

Esse artigo escrito por Oliveira despertou o interesse de outros autores, e no texto de Cardoso e Gonçalves (2004), estes tentam aproveitar as ideias propostas por Oliveira e aplicá-las para a obtenção do MMC. No método criado por eles, considera-se um retângulo com dimensões m e n, e divididos em $m \times n$ quadrados unitários.

Escolhendo um dos vértices do retângulo ao acaso, são traçadas as diagonais do quadrado, sempre seguindo em linha reta até encontrar um dos lados do retângulo. Quando isso acontece, a linha é rebatida, sempre cortando as diagonais dos quadrados até chegar a outro dos vértices do retângulo. Como ilustração, temos o seguinte retângulo de dimensões 3×6 (veja Figura 5.2). Note que as diagonais cortaram 6 quadrados, sendo exatamente o $mmc(3,6)$.

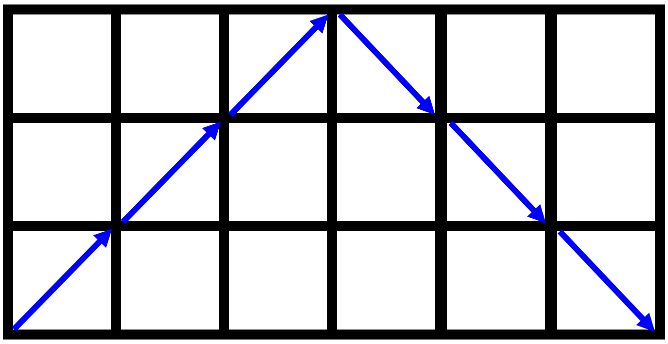

Figura 5.2 – Representação geométrica para o $mmc(3,6)$.
Fonte: Adaptado de Cardoso e Gonçalves (2004).

Segundo os autores, a explicação é bem simples: ao partir de um dos vértices e chegarmos a outro vértice, é traçado um número de quadrados múltiplo de m e n, e, parando no primeiro vértice que se depare, encontramos o mínimo desses múltiplos.

Na mesma obra em que publicaram Cardoso e Gonçalves, há também o artigo de Polezzi (2004). Nesse texto, o autor aproveita a abordagem geométrica e apresenta um novo método, que serve para calcular tanto o MMC quanto o MDC.

Esse método novamente consiste em construir um retângulo de dimensões m e n, divididos em $m \times n$ quadrados unitários. A partir de um dos vértices do retângulo, é traçada uma diagonal, cruzando o vértice oposto desse retângulo. São marcados então todos os vértices dos quadrados no qual a diagonal cruze, e a partir desses pontos, são traçadas retas que subdividem o retângulo inicial. O número dos retângulos formados será o MDC dos números dados e, num dos novos retângulos formados, o número de quadrados contidos será o MMC desses. Como exemplo, temos (Figura 5.3):

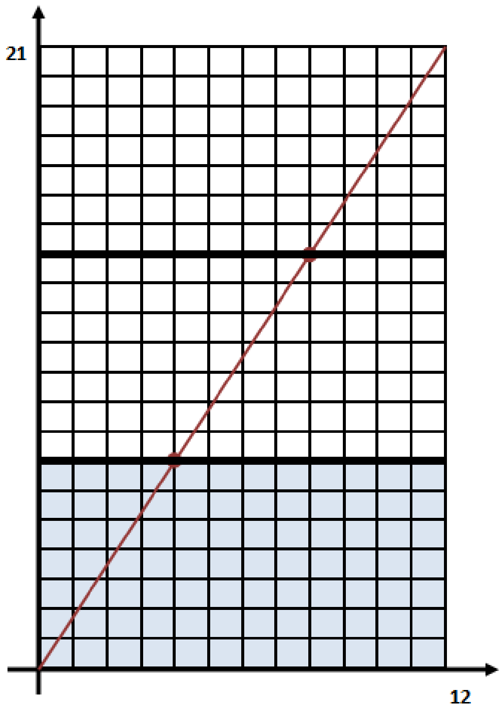

Figura 5.3 – Representação geométrica do $mmc(12,21)$ e do $mdc(12,21)$.
Fonte: Polezzi (2004, p. 88).

Notamos facilmente que o $mmc(12,21) = 84$ e que o $mdc(12,21) = 3$. A justificativa é simples e se baseia no teorema que afirma que $mmc(a,b) \cdot mdc(a,b) = |ab|$, onde uma das condições é de que o lado de cada um dos retângulos tenha coordenadas cartesianas inteiras. Vale ressaltar que esse método, por ser mais detalhista que os anteriores, necessita de um trabalho mais minucioso em sala de aula. Modelos prontos, nos quais os alunos percebem e calculam o MMC e MDC de dois números através de retângulos já construídos, evitam possíveis erros que as construções geométricas podem causar.

Em todos os artigos debatidos nesta seção, nota-se a utilização de representações dos objetos matemáticos para facilitar a compreensão dos temas pelos alunos.

5.3. Equações diofantinas no Ensino Médio

Uma das questões levantadas no início deste capítulo foi se os assuntos de MMC e MDC não poderiam também ser utilizados no Ensino Médio e, ao longo das pesquisas sobre esses assuntos, encontramos a dissertação de mestrado de Guilherme F. Monteiro, na qual defende a aplicação das equações diofantinas lineares no Ensino Médio. Como o tema recorre muitas vezes ao conceito do MDC, o autor defende também a revisão e ampliação desse ramo da Teoria dos Números.

Com o objetivo de abordar as equações diofantinas lineares, o autor realizou uma oficina com cinco encontros reunindo alunos advindos dos três anos do Ensino Médio. Segundo Monteiro (2010), um dos motivos de estudar esse conceito em particular é que a sua resolução envolve conteúdos vistos no 6º ano, e sendo assim, essa é uma oportunidade de resgatar o que foi estudado, além de possibilitar aos alunos a percepção das relações existentes na Matemática.

Nos encontros realizados, o autor teve o cuidado de abordar o conceito e as propriedades referentes ao MDC, além de tratá-lo com maior precisão matemática. Para suprir certas necessidades, novos procedimentos foram ensinados como o Algoritmo de Euclides.

Ao concluir o seu trabalho, o autor discute sobre a abordagem da aritmética escolar, e afirma que essa abordagem prioriza as técnicas de cálculo, deixando de fora uma reflexão sobre a lógica das operações dependentes do uso do cálculo. Afirma também que tanto a educação aritmética tem sido ineficiente em relação ao alcance, quanto a educação algébrica em relação aos objetivos e afirma que é necessário repensarmos os significados que uma abordagem pode trazer ao aluno, e não apenas a transmissão de técnicas e conteúdos.

Sobre o próprio trabalho, o autor conclui que um dos pontos mais importantes foi a retomada dos conceitos aprendidos anteriormente pelos alunos, com destaque ao MDC, já que esse tema é fundamental para se encontrar as soluções inteiras de uma equação diofantina linear. O autor nota também que o método de fatoração para a obtenção do MDC, embora prático, pode se tornar difícil quando tratamos de números muito altos. Nesse sentido, o Algoritmo de Euclides seria mais eficaz.

Por fim, o autor reflete também sobre as equações diofantinas lineares. O trabalho realizado mostrou que a maioria dos alunos compreendeu o método utilizado para a obtenção das soluções inteiras desse tipo de equações, percebendo assim que o assunto é totalmente viável para alunos do Ensino Médio, sendo até mesmo um gancho para outros assuntos, como as funções de primeiro grau. Tal trabalho também mostrou a capacidade dos alunos em refletirem sobre a generalização de questões matemáticas que surgem cotidianamente, além de expandir o poder argumentativo deles.

5.4. O jogo do NIM

Mesmo que o jogo do NIM não tenha, em sua aplicação, relação direta com o ensino do MMC e MDC, é possível analisar matematicamente o que acontece "por detrás do jogo". Esse jogo, embora utilizado desde a antiguidade, teve uma análise mais detalhada apenas em 1901 por Charles L. Bouton em seu artigo "*NIM, A game with a complete mathematical theory"*.

O jogo NIM é considerado como um jogo imparcial de estratégia, sem interferência do acaso e com número finito de movimentos. Tais características garantem que um dos participantes possa elaborar uma estratégia de vitória. A partir do jogo, que consiste em jogadas seguindo determinadas regras, existem também adaptações para o jogo, como em uma versão semelhante ao jogo de xadrez.

Para estudar a aplicação dos conceitos de MMC e MDC, Rodrigues e Silva (2004) debatem algumas variações do jogo, fazendo posteriormente um mapeamento da estratégia de vitória. A análise é realizada em cima do jogo das torres, uma das versões clássicas do jogo do NIM. Nesse estilo do jogo, dois participantes jogam com várias peças distribuídas em torres. Cada jogador pode retirar no mínimo uma peça e no máximo toda a torre, não sendo permitido retirar peças de torres distintas em uma mesma jogada. A derrota é dada àquele participante que não puder retirar mais peças. A Figura 5.4 mostra uma das distribuições possíveis para o jogo.

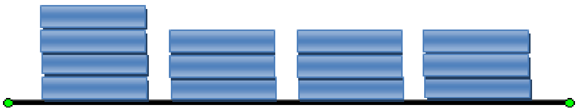

Figura 5.4 – Exemplo do jogo das torres.
Fonte: Adaptado de Rodrigues e Silva (2004).

Especificamente, os autores determinam o uso de 13 peças, distribuídas em 4 torres. Lembrando-se das regras do jogo, é fácil notar que ele tem um número mínimo de jogadas igual a 4 e máxima de 13. Para ganhar o jogo, um dos participantes terá feito n jogadas, enquanto que seu adversário terá feito $(n-1)$ jogadas, ou seja, sempre terá um número par e ímpar de jogadas. Utilizando a técnica de decomposição em fatores primos, processo utilizado para a obtenção do MMC de dois números, obtém o seguinte (Figura 5.5):

$$\begin{array}{r|c}
n, n-1 & n \\
1, n-1 & n-1 \\
\cline{2-2}
1, \quad 1 & n\,(n-1)
\end{array}$$

Figura 5.5 – Obtenção do MMC aplicado ao jogo do NIM.
Fonte: Rodrigues e Silva (2004, p. 11).

Percebemos que o MMC entre n e $n-1$ é dado por $n(n-1)$. Isso mostra que num jogo onde o participante vitorioso realiza seis jogadas, o perdedor terá realizado cinco jogadas e o $mmc(6,5) = 30$. Interpretando esse resultado ao jogo, nota-se que seriam necessárias 30 jogadas distintas para se repetirem as mesmas jogadas feitas. Como os autores concluem, tais noções também estariam ligadas ao cálculo de possibilidades (análise combinatória). Além do MMC, podemos utilizar o algoritmo de Euclides para calcular o MDC aplicado ao jogo, de onde obtemos (Figura 5.6):

	1	$n-1$
n	$n-1$	1
1	0	

Figura 5.6 – Algoritmo de Euclides aplicado ao jogo do NIM.
Fonte: Rodrigues e Silva (2004, p. 11).

E vemos que o $mdc(n, n-1) = 1$. Aplicando o resultado ao jogo, existirá apenas uma jogada (em comum) utilizada para se ganhar o jogo. Por fim, os autores comentam sobre a utilização do jogo para um melhor rendimento nos tópicos vistos na Matemática escolar e afirmam que, embora as análises do MMC e MDC foram feitas ao jogo das torres, a abordagem é análoga às outras variações do jogo NIM.

Os exemplos vistos acima servem para responder a algumas das questões levantadas no quarto capítulo. Ao longo dos últimos dois capítulos, foram discutidos diversos pontos referentes à abordagem usual dos assuntos nas diferentes etapas da Educação Básica e no Ensino Superior. Além disso, vimos abordagens que poderiam facilmente ser trabalhadas ao longo dos anos tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Tais aplicações fazem referências a diversos assuntos, como área de figura, noções de geometria plana e equações. Esse fato responde às questões sobre a possibilidade de abordar os assuntos do MMC e MDC para complementar outros assuntos, tanto para compreender melhor os temas em questão, quanto para ajudar no aprofundamento de outros temas da Matemática. Por fim, vemos também que aplicações sobre esses tópicos podem ser implantadas no Ensino Médio, para complementar os próprios conteúdos estudados nesse período, e também servindo para contextualizar problemas e situações encontradas no cotidiano.

6 CONCLUSÕES

.Percebemos que o MMC e o MDC podem ser facilmente incorporados em várias aplicações, por exemplo, na geometria. Notamos também que os temas ajudam na compreensão de outros assuntos, como o de equações ou de cálculo de possibilidades. Resta somente fazermos algumas conclusões, decorrentes da elaboração deste trabalho. Além disso, propositalmente, uma das questões levantadas no quarto capítulo não foi respondida, referente a se a utilização de jogos e atividades não atrapalharia o currículo previsto para os anos letivos em questão.

Mesmo que para a aplicação desses recursos necessite-se de um tempo maior dedicado ao assunto de divisores e múltiplos, os benefícios dessa complementação são evidentes. Como afirma o PCN (1998), a utilização de conceitos e noções que liguem os assuntos de MMC e MDC a situações cotidianas ajudam na compreensão das relações existentes na Matemática e, mais especificamente, no conjunto dos números naturais.

Como defendido por Sfard (1991), todo conteúdo deve ser visto seguindo um caminho, formando novos conhecimentos concretos, e, para tanto, processos estruturais e operacionais devem ser unidos para garantir tal ação. Por causa disso, mesmo que alunos de 6º ano ainda não tenham conhecimentos suficientes para ver demonstrações ou resolver complexos problemas, já é possível nessa idade contextualizar os assuntos, seja por meio de notas históricas ou problemas textuais, seja por jogos e atividades.

A autora defende ainda que, para formação de conceitos, os assuntos devem ser tratados primeiro operacionalmente e em seguida, estruturalmente. Para que isso ocorra, os estágios para aquisição e formação de novos conceitos devem ser alcançados, com especial destaque à reificação, pois é nesse estágio que, através de aplicações e jogos, o aluno consegue criar ferramentas concretas para desenvolver não somente esses tópicos, mas também assuntos posteriores.

Como visto em nossa análise, geralmente a abordagem realizada ao MMC e MDC é bastante superficial, tratando apenas de operações e cálculos. Além disso, o assunto está presente apenas no 6º ano do Ensino Fundamental II, não sendo novamente abordado nos anos seguintes e nem no Ensino Médio, salvo algumas exceções. Por causa disso, a escolha de recursos que complementem o aprendizado do aluno nesses pontos deve ser orientada de forma a suprir essa defasagem. Devido a isso, é importante questionar quais abordagens podem ser realizadas.

Entretanto, é necessário possuir um bom planejamento quanto aos recursos que podem ser trabalhados com os alunos. A utilização de meios para se ensinar certo tópico, mas que escape totalmente da realidade do aluno, ao invés de ajudá-lo, poderá atrapalhar seu aprendizado, podendo até mesmo fazer com que o aluno tenha receio da Matemática, considerando-a estranha e impossível. Assim, no próprio ano letivo onde são vistos pela primeira vez esses tópicos, os alunos ainda não estão familiarizados com a utilização de incógnitas nem de propriedades generalizadas, por isso é importante que os recursos utilizados pelo professor também não saiam desse nível.

A resolução de problemas, como elaborado pelo grupo de alunos do PIBID-UFPR (RYNDACK; LACERDA; VALVERDE, 2011), permitem aos alunos estabelecer relações com outros assuntos, até mesmo ligados ao seu cotidiano, ajudando-os a compreender melhor os tópicos vistos. Outro recurso é a utilização de figuras, como o tratamento geométrico dado ao MMC e ao MDC propostos por Oliveira (1995), Cardoso e Gonçalves (2004), e Polezzi (2004). A utilização desse tipo de recursos, em que os alunos possam ver e até mesmo tocar, é altamente eficiente não só para o MMC e o MDC, mas também à Geometria, treinando os alunos para a compreensão de conteúdos através de figuras e representações gráficas.

Vale ressaltar que a resolução de problemas envolvendo MMC e MDC pode voltar a ser trabalhada nos anos seguintes do Ensino Fundamental. Tratar problemas que se relacionem não só com os temas previstos no currículo escolar, mas que também revejam tópicos já aprendidos anteriormente disponibiliza uma série de recursos, possibilitando que um mesmo assunto seja abordado por diferentes aspectos.

Chegando ao Ensino Médio, o aluno traz habilidades e competências adquiridas e desenvolvidas no Ensino Fundamental. Devido a isso, já é capaz de compreender conceitos e definições através de generalizações. Ainda assim, sempre que possível, também é importante continuar a procurar relações com a área da Matemática e com o cotidiano vivido pelo aluno. Um dos tópicos que consegue fazer essa ligação é o das equações diofantinas, pois ao mesmo tempo em que representa equações vistas pelo aluno no início do Ensino Médio, têm diversas aplicações ligadas a problemas contidos na sociedade. Vale notar ainda que, devido às equações diofantinas buscarem apenas soluções inteiras, são aplicadas em situações que busquem esse tipo de resposta e, mais especificamente, também são aplicadas em exercícios que busquem valores positivos. Além disso, ajuda aos alunos construírem conceitos estruturais em relação ao assunto de equações polinomiais do primeiro grau, tema presente no currículo escolar do Ensino Médio.

Aprofundando ainda mais, o MMC e MDC são usados também para justificar algumas contas, como no cálculo de possibilidades, ligado à Análise Combinatória. Como visto em Rodrigues e Silva (2004), a utilização de jogos na Educação Básica, além de possibilitar aos alunos trabalhar sobre regras e convenções, proporciona aproximações com possíveis teorizações. No caso, são utilizados os algoritmos de obtenção do MMC e MDC para compreender, por meio da Matemática, características do jogo, e até estabelecer condições para a vitória neste jogo.

Por fim, atendendo aos objetivos deste trabalho, buscamos por meio da abordagem e caracterização de temas realizada no Ensino Superior, aplicações e atividades que poderiam ser trabalhadas na Educação Básica, fornecendo assim subsídios para a prática profissional do professor sobre os objetos em questão. Nesse sentido, o ensino da Matemática alcança sua principal meta, a de contribuir para a formação de cidadãos responsáveis e críticos, reconhecendo e incentivando seus conhecimentos e auxiliando na compreensão de questões relacionadas à sociedade.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Novo Praticando Matemática:** 5ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ANGLO. **Matemática – Coleção Anglo**. Livro-texto. São Paulo: Anglo, 2008.

______. **Matemática – Coleção Anglo**. Apostila de exercícios. São Paulo: Anglo, 2008.

BARBOSA, Lauren Nogueira Barbosa; LIMA, Maria Cristina P. de Lima; TINANO, Marilene Turíbia de Rezende. **Matemática:** Pitágoras 6º ano. v. 1. São Paulo: Editora Pitágoras, 2012.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática.** v. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática:** 5ª série. São Paulo: Editora Moderna, 2002.

BOUTON, Charles Leonard. *Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory.* **The Annals of Mathematics**, Nova Jérsei, v. 3 n. 1/4, p. 35-39, 1901. Disponível em: <http://paradise.caltech.edu/ist4/lectures/IST4_Bouton_1901.pdf>, Acesso em: 25 out. 2012.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CARDOSO, Mário Lúcio; GONÇALVES, Otânio Alves. Uma interpretação geométrica do MMC. **Explorando o ensino da Matemática**, Brasília, v. 2, p. 85-86, 2004.

CAVALCANTE, Luiz Gonzaga; SOSSO, Juliana; VIEIRA, Fábio; POLI, Ednéia. **Para Saber Matemática:** 5ª série. São Paulo: Editora Saraiva, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e aplicações. v. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Ática, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática:** 5ª série. São Paulo: Editora Ática, 2004.

DANTZIG, Tobias. **Número:** A linguagem da Ciência. Biblioteca de Cultura Científica. São Paulo: Zahar Editores, 1970.

DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Kátia Stocco. **Matemática Ensino Médio**. v. 1, 2 e 3. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

FONSECA, Rubens Vilhena. **Teoria dos Números**. Belém: UEPA, 2011. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/71606082/Introducao-a-Teoria-dos-Numeros-UEPA>, Acesso em: 25 out. 2012.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da Matemática 5.** São Paulo: FTD, 2002.

GROENWALD, Claúdia Lisete Oliveira; SAUER, Lisandra de Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber. **A história da Matemática como recurso didático para o ensino da Teoria dos Números e a aprendizagem da Matemática no Ensino Básico.** Revista Paradígma, Maracay, v. 26, n. 2, p. 35-55, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade:** 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2009.

LANDAU Edmund. **Teoria Elementar dos Números**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2002.

MATSUBARA, Roberto; ZANIRATTO, Ariovaldo Antônio. **Matemática:** Escola e Realidade 5ª série. São Paulo: IBEP, 2005.

MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. **Números:** Uma introdução à Matemática. 3 ed. São Paulo: Edusp, 2001.

MONTEIRO, Guilherme Ferreira. **Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio**. 2010. 91 p. Monografia. Licenciatura em Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

OLIVEIRA, Zelci Clasen. Uma interpretação geométrica do MDC. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 29, p. 24-26, 1995.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. v. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. **PCN Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental, 1998.

POLEZZI, Marcelo. Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas? **Explorando o ensino da Matemática**, Brasília, v. 2, p. 87-89, 2004.

PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

______. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

RODRIGUES, Hélio Oliveira; SILVA, José Roberto da. **O jogo do NIM e os conceitos de MDC e MMC**. 2004. 14 p. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife.

RYNDACK, Daniela Guerra; LACERDA, Hannah Dora de Garcia; VALVERDE, Willian. **Relato de uma experiência no Pibid – Matemática:** MMC e MDC pela Resolução de Problemas. 2011. 10p. Relatório. Matemática. Universidade Federal do Paraná, Paraná.

SECRETARIA DA EDUCAÇÂO DO ESTADO DE S. PAULO. **Matemática:** caderno do aluno, 6º ano. v. 1. São Paulo: Secretaria da Educação, 2009.

SFARD, Anna. *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin.* **Educational Studies in Mathematic**, Londres, n. 22, p. 1-36, 1991.

TOSATTO, Claúdia Miriam; PERACCHI, Edilaine do Pilar F.; ESTEPHAN, Violeta M. **Matemática:** Ideias e Relações 5ª série. Curitiba: Editora Positivo, 2005.

VIDIGAL, Luciana Fajardo. **Conhecimentos mobilizados por alunos sobre a noção integral no contexto das concepções operacionais e estruturais**. 2007. 140 p. Dissertação. Educação Matemática. PUC, São Paulo.

APÊNDICE A - CRITÉRIOS UTILIZADOS PELO PNLD 2011 (2010)

Para a seleção de livros recomendados pelo PNLD, são necessários que os livros atendam uma série de critérios. Mostraremos abaixo tais critérios, extraídos os principais pontos do PNLD 2011 (2010):

Critérios eliminatórios comuns a todas as áreas

Os critérios eliminatórios comuns a serem observados na apreciação de todas as coleções submetidas ao PNLD 2011 são os seguintes:

- respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino;
- observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
- coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
- correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
- observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da coleção à linha pedagógica nele apresentada;
- adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático pedagógicos da coleção.

O não atendimento de qualquer um desses critérios resulta em uma proposta pedagógica incompatível com os objetivos e justifica sua exclusão do PNLD 2011 (2010). O edital detalha ainda critérios específicos de cada componente curricular.

Critérios eliminatórios específicos

Além dos critérios eliminatórios comuns, para o componente curricular Matemática será excluída a coleção que:

- apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no manual do professor e, quando houver, no glossário;

- deixar de incluir um dos campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação;

- der atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos, em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;

- apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas;

- deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização; supervalorizar o trabalho individual;

- apresentar publicidade de produtos ou empresas.

Além disso, o Manual do Professor deverá:

- apresentar orientações metodológicas para o trabalho do ensino-aprendizagem da Matemática;

- contribuir com reflexões sobre o processo de avaliação da aprendizagem de Matemática;

- apresentar orientações para a condução de atividades propostas.

APÊNDICE B – EXERCÍCIOS ENVOLVENDO MMC E MDC

Na experiência realizada pelos estudantes do PIBID da Universidade Federal do Paraná e analisada na Seção 4.2 desse trabalho, há a abordagem de alguns exercícios contextualizados, presentes abaixo.

01 (RYNDACK; LACERDA; VALVERDE*,* 2011, p. 6) – Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feita na máquina A, a cada 3 dias, na máquina B, a cada 4 dias, e na máquina C, a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção nas três máquinas, após quantos dias as máquinas receberão manutenção no mesmo dia?

02 (RYNDACK; LACERDA; VALVERDE*,* 2011, p. 6) – Sempre que uma pessoa anda 650cm, 800cm e 1000cm, ela dá um número exato de passos. Qual o maior comprimento possível de cada passo dado por essa pessoa?

03 (COTIDIANO (2011) *apud* RYNDACK; LACERDA; VALVERDE*,* 2011, p. 7) – Seja P o único ponto de passageiros que é comum nas duas linhas circulares de ônibus. Dois ônibus, A e B, com velocidades médias iguais, circulam ininterruptamente. O percurso feito pelo ônibus A tem 6km de extensão, enquanto que o percurso feito pelo ônibus B tem 15 km. Se eles partirem ao mesmo tempo do ponto P, a próxima oportunidade de se encontrarem novamente no ponto P será depois que o ônibus A tiver completado quantas voltas?

04 (COTIDIANO (2011) *apud* RYNDACK; LACERDA; VALVERDE, 2011, p. 7) – Na fila da bilheteria de um teatro há menos de 50 pessoas. Contando essas pessoas de 6 em 6 sobram 5. Contando de 7 em 7 também sobram 5. Quantas pessoas estão na fila nesse momento?