Resolução de equações diofantinas lineares de duas ou mais variáveis e aplicações

Gabriel de Amaral Sibo

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

IFSP
São Paulo
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Sibo, Gabriel de Amaral.
Resolução de equações diofantinas lineares de duas ou mais variáveis e aplicações / Gabriel de Amaral Sibo - São Paulo: IFSP, 2019.

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Leandro Albino Mosca Rodrigues

1.Diophantus. 2. Equações diofantinas lineares de n variáveis 3. aplicações
I. Resolução de equações diofantinas lineares de duas ou mais variáveis e aplicações
.

GABRIEL DE AMARAL SIBO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE N VARIÁVEIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 05/12/2019

CONCEITO: 8,5

Valeria O Jannis Luchetta
Profa. Dra. Valeria Ostete Jannis Luchetta
Membro da Banca

Gabriela Moraes
Profa. Me. Gabriela Cotrim de Moraes
Membro da Banca

Leandro Albino Mosca Rodrigues
Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues
Orientador

Gabriel de Amaral Sibo
Aluno: Gabriel de Amaral Sibo

“A suprema felicidade da vida é ter a convicção de que somos amados”.

(Vitor Hugo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio, principalmente aos meus pais Valdir e Solange e, aos meus irmãos, Bianca, Lara e Augusto, que sempre me deram apoio e me incentivaram a querer estudar. Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, Alexsander, Ághata, Stella, Camila, João, Erica, Lucas, Jéssica, Vitor, Alex, Cris, Cláudio e Bia que sempre estiveram por perto quando eu mais precisei e sempre me apoiaram em toda essa minha jornada. Devo agradecimentos também aos meus professores: Henrique, Marco, Flávia, Vânia, Carlos, Carlini, Emiliano, Elizabete, Amari, Traldi e Rogério, que me ensinaram tanto em todos esses anos e me despertaram um enorme prazer em aprender e ensinar e, por fim, devo agradecimentos ao professor Leandro que, além de ter me ensinado tanto, me orientou nesse trabalho.

RESUMO

Este trabalho representa uma pesquisa bibliográfica sobre as equações diofantinas lineares de duas ou de mais de duas variáveis, tendo como objetivo conhecer um pouco sobre o contexto histórico dessas equações, abordando a história de Diophantus de Alexandria e de seus trabalhos, explorar a aplicação dessas equações em problemas voltados a nosso cotidiano e responder a seguinte pergunta: "Como encontrar uma solução geral para uma equação diofantina linear com n variáveis?"
Para responder essa pergunta, faremos uso de diversos materiais como teses, tais como as de Freitas (2015); Campus (2013) e Souza (2017), livros como, Boyer (1983); Eves (2004) e outros materiais para que esse nosso objetivo seja alcançado.

Palavras-chaves: Diophantus; Equações diofantinas; Aplicações; História da matemática.

RESOLUTION OF LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS OF TWO OR MORE VARIABLES AND APPLICATIONS

ABSTRACT

This work represents a bibliographical research on the linear diophantine equations of two or more than two variables, having as aim know a little about the historical context of these equations, approach the history of Diophantus of Alexandria and his works, exploring the application of these equations to problems facing our daily lives and answering the following question: “How to find a general solution to a linear diophantine equation with n variables?”

To answer this questions, we will use several materials and theses, such as Freitas (2015); Campus (2013) and Souza (2017), books such as Boyer (1983); Eves (2004) and other materials to achieve this aim.

Keywords: Diophantus; diophantine equations; Aplications; Mathematics history.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO 9

1 VIDA E OBRA DE DIOPHANTUS DE ALEXANDRIA 11

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS 19

2.1. Números naturais 19

2.2. Números inteiros 20

2.3. Ordem 21

2.4. Divisibilidade 22

2.5. Máximo divisor comum (mdc) 22

2.6 . Algorítimo de Euclides 24

2.7 Princípio da indução fininta (P.I.F) 25

3 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS VARIÁVEIS 27

3.1 Condição para uma equação diofantina linear possuir solução 29

3.2. Solução geral para uma equação diofantina linear de duas variáveis 31

3.3. Soluções naturais para equações diofantinas lineares de duas variáveis 33

4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE TRÊS E QUATRO VARIÁVEIS 35

4.1 Equações diofantinas lineares de três variáveis 35

4.2. Equações diofantinas lineares de quatro variáveis 39

5 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE n VARIÁVEIS 45

6 Algumas aplicações das equações diofantinas lineares 51

CONCLUSÃO 63

REFERÊNCIAS 65

INTRODUÇÃO

Neste trabalho temos como objetivo estudar as equações diofantinas lineares de duas ou mais variáveis, descrever métodos para encontrar suas soluções particulares e gerais, estudar e desenvolver aplicações destas equações envolvendo problemas voltados para nosso cotidiano e, por fim, estudar um pouco sobre a história dessas equações.

As equações diofantinas lineares recebem esse nome em homenagem ao matemático grego do século III de nossa era comum, Diophantus de Alexandria[1], que em sua obra mais importante, *Aritmética*, apresenta a solução de equações indeterminadas que conhecemos hoje como sendo as equações diofantinas.

Diophantus também apresentou contribuições importantes para o desenvolvimento da teoria algébrica dos números que conhecemos atualmente. Este matemático, como afirmam Boyer (1983) e Eves (2004), teve papel fundamental para o desenvolvimento da escrita algébrica que temos hoje, sendo assim considerado por muitos estudiosos da história da matemática como o “pai da álgebra”.

Nosso trabalho se divide em seis capítulos; No primeiro capítulo, discorremos sobre o contexto histórico das equações diofantinas, sobre o matemático Diophantus de Alexandria e sobre sua principal obra, *Aritmética*; No segundo capítulo apresentaremos alguns conceitos fundamentais de teoria dos números, com o objetivo de orientar o leitor e facilitar sua compreensão deste trabalho; No terceiro e no quarto capítulo, abordaremos as características das equações diofantinas lineares de duas, de três e de quatro variáveis para no capítulo cinco, apresentarmos uma generalização para essas características, escrevendo a solução geral para uma equação diofantina com n variáveis e, por fim,

[1] Podemos encontrar variações deste nome de acordo com outras traduções, podendo ser encontrado com Diofanto, Diofante ou Diophantus, como descrito nesse trabalho.

no capítulo seis, apresentaremos alguns exemplos de problemas envolvendo esse tipo de equação.

O estudo das equações diofantinas lineares de mais de duas variáveis está presente em diversos materiais, como na dissertação de Campos (2013), que, em seu trabalho, abordou a solução das equações diofantinas lineares de três variáveis, e estendeu o conceito, generalizando a solução para n variáveis. A autora também trabalhou em sua dissertação algumas aplicações dessas equações para a resolução de problemas que envolvem números inteiros. Outra bibliografia importante para o nosso trabalho é a dissertação de Freitas (2015) que, em seu trabalho, apresentou o contexto histórico das equações diofantinas, algumas aplicações e o desenvolvimento das equações diofantinas lineares com mais de duas variáveis.

Ao cursar o componente curricular Teoria dos números, vigente na grade da licenciatura em matemática que cursei no IFSP, tive meu primeiro contato com esse tipo de equação, estudando as condições para a solução das equações diofantinas lineares de duas variáveis e, junto ao professor desta disciplina, meu orientador, decidimos estudar e fazer essa pesquisa com o intuito de responder a seguinte pergunta: Como encontrar soluções para equações diofantinas com n variáveis?

CAPÍTULO 1

VIDA E OBRA DE DIOPHANTUS DE ALEXANDRIA

Diophantus de Alexandria. Fonte: Freitas (2015)

Neste capítulo, abordaremos o contexto histórico das equações diofantinas, dissertando um pouco sobre sua origem e, dando foco no matemático Diophantus de Alexandria. As principais referências que orientaram esse capítulo foram Boyer (1983) e Eves (2004).

As equações diofantinas recebem esse nome em homenagem a um matemático chamado Diophantus de Alexandria. Esse matemático apresentou papel fundamental para o desenvolvimento da álgebra e da teoria elementar dos números de nossa atualidade, sendo assim por muitos considerado como, segundo Boyer (1983) afirma, o “pai da álgebra”.

Muito pouco se sabe sobre a vida, nacionalidade e o ano que esse matemático nasceu. Como afirma Eves (2004), a maioria dos estudiosos de história da matemática acreditam que Diophantus viveu por volta do século III de nossa era comum e também, que sua carreira floresceu na colônia grega de Alexandria, situada no atual Egito.

Segundo Boyer (1983) uma possível informação sobre a vida de Diophantus está contida em um problema algébrico grego antigo, presente em uma coleção chamada *Antologia Grega*, escrita por volta do século V de nossa era comum. Nessa coleção, como afirma Souza (2017), encontramos 46 problemas matemáticos escritos em forma de epigrama, que representam uma composição poética gravada em um monumento, estátua ou até em lápides. Esse problema, também conhecido como epitáfio de Diophantus, se estiver historicamente correto, nos fornece várias informações sobre sua vida pessoal, incluindo a quantidade de anos que Diophantus viveu.

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança; depois de viver à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida (BOYER, 1983, p. 130).

Para determinarmos a idade com qual Diophantus supostamente morreu, solucionaremos essa epigrama.

Seja x o número de anos vividos por Diofanthus.

- Infância: (Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida)$= \frac{x}{6}$;
- Adolescência: (e somando sua duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem)$= \frac{x}{12}$;
- Antes do nascimento do seu filho: (Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte) $= \frac{x}{7}$;

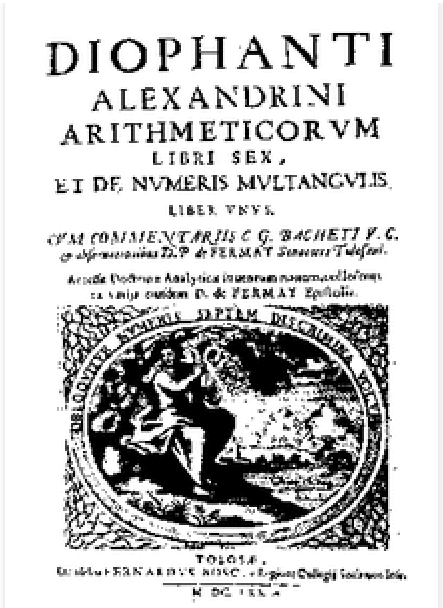
- Nascimento do seu filho: (e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho)$= 5$;

- Morte de seu filho: (Ai! Infeliz, criança; depois de viver à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou)$= \frac{x}{2}$;

- Morte: (Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida)$= 4$.

Fazendo a soma de todos esses eventos, temos que:
$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x, \Leftrightarrow x=84$. Portanto, Diophantus viveu 84 anos.

Segundo Eves (2004) Diophantus foi responsável pela produção de três trabalhos matemáticos importantes, *Aritmética,* um tratado escrito em treze volumes dos quais apenas seis remanesceram na história, *Porismas*, que se perdeu e, o último, sobre números poligonais, do qual restaram apenas alguns fragmentos.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

Capa do livro Aritmética. Fonte: Freitas (2015)

O Livro *Aritmética,* considerada a obra mais importante de Diophantus, era, como Boyer (2009) afirma, um tratado caracterizado pelo alto grau de habilidades matemáticas, podendo assim, ser comparado aos grandes clássicos da idade Alexandrina anterior. Ainda segundo Boyer (2009), esse tratado difere dos métodos gregos tradicionais, representando assim um novo ramo que se assemelhava muito à álgebra babilônica.

Em seu trabalho *Aritmética*, como Boyer (1983) afirma, Diophantus apresenta uma abordagem da teoria algébrica dos números, em formato de uma coletânea com a resolução de aproximadamente 130 problemas de matemática, sendo estes desde equações do primeiro grau, equações quadráticas e até apresenta a solução de uma cúbica. Vale ressaltar que, neste trabalho, Diophantus se preocupava em apresentar apenas uma solução racional para os problemas apresentados. Ele não se preocupando em encontrar soluções gerais até mesmo no caso de problemas que possuíssem infinitas soluções..

Nas soluções das equações quadráticas com duas raízes positivas, Diophantus considerava somente a maior delas e, nos casos em que uma das raízes fosse negativa, ele a desconsiderava.

Ainda segundo Eves (2004), nos textos de Diophantus encontramos muitas proposições referentes a números como a soma de dois, três ou quatro quadrados, que segundo Freitas (2015), pode ter influenciado matemáticos como Pierre de Fermat, que também era estudioso dos textos de Diophantus. Encontramos em uma cópia do livro *Aritmética* nas margens de um dos problemas a seguinte afirmação de Fermat:

> Por outro lado, é impossível separar um cubo em dois cubos, ou uma biquadrada em duas biquadradas, ou, em geral, uma potência qualquer, exceto um quadrado em duas potências semelhantes. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, que, todavia esta margem não é suficientemente grande para cabê-la (FREITAS, 2015, p. 20)

Afirmação essa, que ficou conhecida como o “último teorema de Fermat” que, como afirma Freitas (2015), só foi demonstrada em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles.

Enunciaremos nesse trabalho alguns problemas que se encontram presentes no livro *Aritmética*.

Problema 10, livro 4: Encontre dois números tais que sua soma é igual à soma de seus cubos (EVES, 2004, p. 208).

Resposta de Diophantus: $(\frac{5}{7}, \frac{8}{7})$

Problema 21, livros 4: Encontre três números em progressão geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um número quadrado (EVES, 2004, p. 208).

Resposta de Diophantus: $(\frac{81}{7}, \frac{144}{7}, \frac{256}{7})$.

Problema 1, livro 6: encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (EVES, 2004, p. 208)

Resposta de Diophantus: (40, 96, 104).

Esses problemas algébricos indeterminados com soluções pertencentes ao conjunto dos números racionais ficaram conhecidos como *problemas diofantinos*. Atualmente, possuímos uma concepção diferente desse tipo de problemas, pois, diferente de Diophantus que restringia as soluções para racionais positivos, nós restringimos o conjunto das soluções para os números inteiros e apresentamos soluções gerais para os problemas

É importante ressaltar que Diophantus não foi o primeiro matemático a resolver esse tipo de equação ou até mesmo a resolver equações quadráticas de maneira não geométrica. Contudo, segundo Eves (2004) e Boyer (1983), ele pode ter sido o primeiro matemático que deu os primeiros passos significativos rumo a notação algébrica que temos hoje.

Diophantus, em sua obra, fazia o uso de alguns símbolos para incógnitas, potências de incógnita até o expoente 6, para subtração, igualdade e até mesmo para inversa, com fins de abreviações.

Segundo Eves (2004), o símbolo que Diophantus usou para incógnita provavelmente seria uma fusão das duas primeiras letras, α e ρ, da palavras grega "*arithmos*", que significa número, que com o passar do tempo, esse símbolo se tornou parecido com o sigma final grego ς .

Eves (2004) também afirma que Diophantus utilizava o símbolo Δ^{Υ} para representar uma incógnita ao quadrado, símbolo que possivelmente se refere as duas primeiras letras da palavra grega *dunamis* ($\Delta\Upsilon\mathrm{N}\Lambda\mathrm{I}\Sigma$), que significa potência. Para representar uma incógnita ao cubo, utilizava-se da notação K^{Υ}, referente as duas primeiras letras da palavras *kubos* ($\mathrm{K}\Upsilon\mathrm{BO}\Sigma$), que significa cubo.

Para as incógnitas de expoente de grau 4 a 6, Diophantus fazia uma combinação desses símbolos. O símbolo $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ (quadrado-quadrado) era utilizado para representar uma incógnita na quarta potência; $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ (quadrado-cubo), para representar uma incógnita na quinta potência e, o símbolo $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$ (cubo-cubo) para uma incógnita na sexta potência.

O símbolo de subtração se assemelhava com a letra grega Lambda, Λ, com uma bissetriz traçada, que seria a junção das duas letras Lambda, Λ , e Iota, I, da palavra grega *leipis* ($\Delta\mathrm{EI}\Psi\mathrm{I}\Sigma$), que significa menos.

Na escrita de Diophantus, todos os termos negativos eram escritos juntos e antes deles era escrito o símbolo de subtração. A adição era indicada por justaposição, o coeficiente da incógnita por uma letra do alfabeto grego e para constantes, usava-se o símbolo $\overset{\mathrm{O}}{\mathrm{M}}$, que seria uma abreviação da palavra *monades* ($\mathrm{MONA\Delta E\Sigma}$), que significa unidades. Assim, por exemplo, a expressão $x^4 + 3x + x + 2$ poderia ser escrita da forma $\Delta^{\Upsilon}\Delta\gamma\mathrm{K}^{\Upsilon}\varsigma\overset{\mathrm{O}}{\mathrm{M}}\beta$.

Boyer (1983) afirma que podemos considerar três estágios no desenvolvimento da álgebra que conhecemos: o primeiro, seria o estágio primitivo ou retórico, que se caracterizava pela representação de tudo em forma de palavras; o segundo, conhecido como o estágio intermediário ou sincopado, foi onde começaram a fazer uso de alguns símbolos e o terceiro estágio é o simbólico, que é a álgebra que conhecemos em nossa atualidade.

Tendo isso em mente, como Boyer (1983) afirma, podemos assim considerar que os trabalhos de Diophantus se encaixam no segundo estágio, o sincopado e, por apresentar essas inovações no campo da álgebra, podemos considera-lo como o pai da álgebra.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

"A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática". (Gauss)

Neste capítulo enunciaremos alguns conceitos que serão importantes para o leitor compreender este trabalho.

2.1: Números Naturais

Os números naturais formam um conjunto que representamos pelo símbolo $\mathbb{N}$. Consideramos o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$.

Esse conjunto possui também algumas proposições referentes a adição e multiplicação, que indicaremos símbolos $+$ e $\cdot$, que enunciaremos abaixo.

Proposição 2.1.1: Sejam $m \in \mathbb{N}$, então $m + n$ está definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.2: Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$ vale $m + (n + p) = (m + n) + p$.

Proposição 2.1.3: Para todo $m \in \mathbb{N}$ tem se que $0 + m = m = m + 0$.

Proposição 2.1.4: O neutro aditivo é único.

Proposição 2.1.5: Para todo $m \in \mathbb{N}$ tem se que $m \cdot 0 = 0$

2.2: Números Inteiros

Os números inteiros constituem um conjunto que denominaremos pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Neste conjunto estão bem definidas as operações de adição e multiplicação que indicaremos pelos símbolos $+$ e $\cdot$ respectivamente, e nove axiomas relacionando essas operações que descreveremos abaixo.

A1 Propriedade associativa da adição: Para todos a, b e $c \in \mathbb{Z}$, tem se que $a + (b + c) = (a + b) + c$.

A2 Propriedade comutativa da adição: Para todo par $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $a + b = b + a$.

A3 Existência do elemento neutro da adição: Para todo número inteiro a existe um e somente um elemento, denotado por 0 tal que $a + 0 = a$.

A4 Existência do oposto: Para todo elemento $a \in \mathbb{Z}$ existe um e só um elemento oposto, que denominaremos de $-a$, de maneira que $a + (-a) = 0$.

A5 Propriedade associativa da multiplicação: Para todo a, b e $c \in \mathbb{Z}$, tem se que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

A6 Propriedade comutativa da multiplicação: Para todo a e $b \in \mathbb{Z}$, temos que $a \cdot b = b \cdot a$.

A7 Existência do elemento neutro da multiplicação: Para todo inteiro a, existe um e somente um elemento neutro que indicaremos por 1, tal que $a \cdot 1 = a$.

A8 Propriedade cancelativa da multiplicação: Para todo a, b e $c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, temos que, se $a \cdot b = a \cdot c$ então $b = c$.

A9 Propriedade distributiva: Sejam $a, b,$ e $c \in \mathbb{Z}$, temos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Enunciaremos agora algumas proposições decorrentes dos axiomas apresentados anteriormente, que serão fundamentais para a compreensão deste trabalho.

Proposição 2.2.1: Para todo inteiro a temos que $a.0 = 0$.

Proposição 2.2.2: Para toda terna a, b e $c \in \mathbb{Z}$, temos que se $a + b = a + c$ então $b = c$.

Proposição 2.2.3: Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, se $a.b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

2.3: Ordem

Enunciaremos aqui os axiomas que se referem a relação de ordem, também conhecida como a relação de menor ou igual.

A10 Propriedade reflexiva: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ tem se que $a \leq a$.

A11 Propriedade Antissimétrica: Dados a e $b \in \mathbb{Z}$ temos que se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$.

A12 Propriedade Transitiva: Para todo a, b e $c \in \mathbb{Z}$ tem se que se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

A13 Tricotomia: Para todo par de inteiros a e b tem se que $a > b$, ou $a = b$, ou $a < b$.

A14: Para quaisquer a, b e $c \in \mathbb{Z}$ temos que se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$.

A15: Para todo a, b e $c \in \mathbb{Z}$ temos que se $a \leq b$ e $0 \leq c$ então $ac \leq bc$.

A16 Princípio da Boa Ordem: Todo conjunto não vazio de inteiros não negativos contém um elemento mínimo.

2.4: Divisibilidade

Definição: Considere os números a e $b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a divide b, ou ainda que que a é um divisor de b , se existe um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$.

Usaremos a notação $a|b$ para indicar que a divide b.

Caso essa condição não seja satisfeita, ou seja, caso a não divida b, indicaremos pelo símbolo $a \nmid b$.

Para efeitos práticos, excluiremos nesse trabalho, todos os casos onde o divisor é nulo, ou seja, caso $a = 0$, para que assim c sempre possuirá um valor único.

Enunciaremos agora algumas proposições decorrentes da operação de divisibilidade. Para todo a, b, c, m e $n \in \mathbb{Z}$, temos que.

Proposição 2.4.1 (Algoritmo da divisão): Considere a e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, temos que existem únicos q e r, tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$.

Proposição 2.4.2: Se $a|b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.

Proposição 2.4.3 (Antissimétrica): Se $a|b$ e $b|a$ então $a = \pm b$.

Proposição 2.4.4 (Reflexiva): $a|a$.

Proposição 2.4.5 (Transitiva): Se $a|b$ e $b|c$ então temos que $a|c$.

Proposição 2.4.6: Se $a|b$ e $c|d$ temos então que $ac|bd$.

Proposição 2.4.7: Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bm + cn)$.

2.5: Máximo Divisor Comum (mdc)

Definição: Considere os inteiros a e b, chamamos de máximo divisor comum entre a e b e denotamos por $mdc(a, b)$, o inteiro d tal que d é o maior divisor comum entre a e b, ou seja $d = \max D(a, b)$, sendo $D(a, b)$ o conjunto dos divisores comuns de a e b.

Teorema 2.5.1: Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$, $d = mdc(a, b)$, se e somente se:

$d|a$ e $d|b$.

Se existe um $d_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $d_1|a$ e $d_1|b$ então $d_1|d$.

Proposição2.5.1: Sejam a_1, a_2 e $c \in \mathbb{Z}$, com $c \neq 0$. seja também $d = mdc(a_1, a_2)$ então $mdc\left(\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}\right) = \frac{d}{c}$.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Bézout): Sejam a_1 e $a_2 \in \mathbb{Z}$, seja também $d = mdc(a_1, a_2)$, então existem r_1, $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $d = a_1 r_1 + a_2 r_2$.

Teorema 2.5.3: Seja $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}^*$ e $d = mdc(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, então existe $r_i \in \mathbb{Z}$ tal que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i r_i = d$$

Teorema 2.5.4: (Teorema de Euclides)

Considere os inteiros a, b e c tais que $a|bc$. Se $mdc\,(a, b) = 1$, então $a|c$.

2.6 Algoritmos de Euclides

O algoritmo de Euclides nos fornece uma ferramenta fundamental para este trabalho, com ele podemos fazer o cálculo do máximo divisor comum entre dois números, que usaremos muito nos capítulos de equações diofantinas de duas e de mais de duas variáveis. Assim o enunciaremos a seguir.

Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Considere também q, como o cociente e r resto de $\frac{a}{b}$. Então $D\ (a,b) = D(b,r)$ e temos assim que $mdc(a,b)$ = $mdc(b,r)$.

Podemos ilustrar esse algoritmo da seguinte maneira:

	q_1	q_2	...	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	...	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	...	...	0	

(1): $a = b \cdot q_1 + r_1$.

(2): $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$.

.

.

.

$(n+1)$: $r_n \cdot q_{n+1} + 0$.

O valor r_n representa o $mdc\ (a,b)$.

2.7: Princípio da Indução Finita (P I F)

Teorema: Sejam a um inteiro qualquer e S um conjunto de inteiros maiores ou iguais a a, que admite as seguintes propriedades:

I. $a \in S$.

II. Se um inteiro $k \geq a$ pertence a S, então $k + 1$ também pertence a S.

Então S é o conjunto de todos os inteiros maiores ou iguais a a.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS VARIÁVEIS

As equações diofantinas lineares de duas variáveis são aquelas que podem ser escritas da forma $a_1X_1 + a_2X_2 = b$, tais que $a_1, a_2, \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$ e o par $(X_1, X_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Chamamos de solução de uma equação diofantina de duas variáveis, todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, que ao serem substituídos respectivamente nos lugares de X_1 e X_2, façam com que a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ seja verdadeira.

Exemplo 3.1: Considere a seguinte equação diofantina $8X_1 + 7X_2 = 9$. Uma solução particular para esse problema seria $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$, pois
$8.(2) + 7.(-1) = 16 - 7 = 9$.

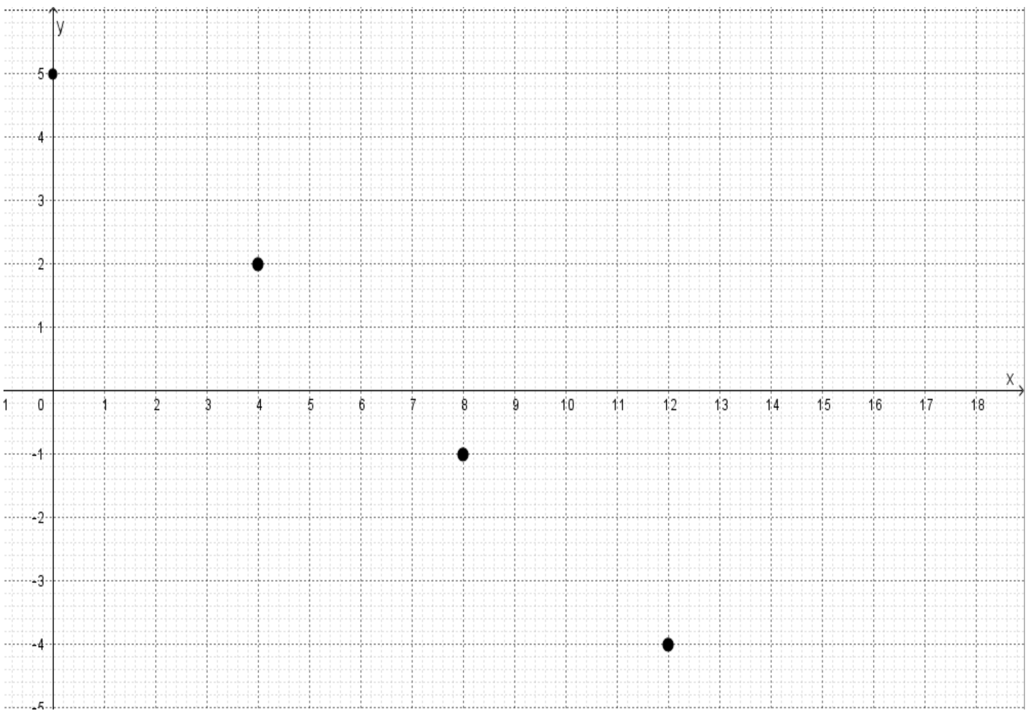
Em nosso cotidiano, é possível encontrar diversos problemas que envolvem esse tipo de equação. Para exemplificar essa situação, usaremos o exemplo abaixo.

Exemplo 3.2: Vamos supor que você esteja em um supermercado e deseje comprar pacotes de um quilo de arroz e de feijão. Sabendo que cada pacote de feijão contendo um quilo custa três reais e, cada pacote de arroz contendo um quilo custa quatro reais, de quantas maneiras podemos efetuar essa compra gastando exatamente vinte reais?

Solução: Usaremos as letras X_1 e X_2 para representarem, respectivamente, as quantidades de pacotes comprados de feijão e de arroz; com isso, podemos obter facilmente a seguinte equação diofantina linear de duas variáveis : $3X_1 + 4X_2 = 20$.

Uma possibilidade para responder à pergunta deste enunciado é fazer uma interpretação geométrica da equação encontrada, neste caso, um conjunto de pontos pertencentes a uma reta, e representar essa em um eixo cartesiano. As soluções deste problema serão pontos cujos pares $(x, y) \in \mathbb{Z}$, como podemos observar na ilustração abaixo.

Figura 1: Gráfico de possibilidades



Fonte: O autor (2018)

Com isso, temos que os pares (0,5) e (4,2) são soluções particulares deste problema. Note que consideramos somente as soluções inteiras não negativas para que esse problema possua soluções coerentes.

Assim temos que a resposta para esse problema seria comprar 0 quilos de feijão e 5 quilos de arroz ou comprar 4 quilos de feijão e 2 quilos de arroz.

Nem sempre uma equação diofantina possui soluções, e para identificarmos esses casos, vamos definir uma condição.

3.1 Condição para uma equação diofantina linear de duas variáveis possuir solução

Proposição 3.1.1: Dizemos que uma equação diofantina da forma

$a_1X_1 + a_2X_2 = b$, possui solução se, e somente se, $d|b$, sendo $d = mdc(a_1, a_2)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Se $d|b$ onde d é o $mdc(a_1, a_2)$, então a equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 = b$ possui solução.

Pelo teorema de Bézout, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ podemos escrever $d = a_1r + a_2s$. Por hipótese, $d|b$, logo, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $b = dt$, com isso, temos que $b = (a_1r + a_2s)t \Leftrightarrow b = a_1(rt) + a_2(st)$,considere $rt = x_1$ e $st = x_2$, logo $b = a_1x_1 + a_2x_2$ e portanto a equação diofantina possui solução.

($\Leftarrow$)

Se a equação $a_1X_1 + a_2X_2 = b$ admite solução, então $d|b$.

Considere x_1 e x_2 uma solução da equação diofantina: $a_1X_1 + a_2X_2 = b$, e $d = mdc(a_1, a_2)$.

Temos que $d|a_1$ e $d|a_2$, logo $d|a_1x_1$ e $d|a_2x_2$, portanto $d|(a_1x_1 + a_2x_2)$, ou seja, $d|b$.

Para exemplificar essa condição, vamos mostrar que a equação encontrada no Exemplo 3.2 possui soluções.

Considere a equação $3X_1 + 4X_2 = 20$, calcularemos o $mdc(3,4)$, com o auxílio do algoritmo de Euclides.

	1	3
4	3	1
1	0	

(i): $4 = 3 \cdot 1 + 1$.

(ii): $3 = 1 \cdot 3 + 0$

Com isso, temos que o $mdc(3,4) = 1$ e, como 1|20, temos que essa equação diofantina possui solução.

Apresentaremos agora um exemplo de equação diofantina que não possui solução. Considere a equação diofantina linear de duas variáveis: $10X_1 + 6X_2 = 15$.

Usando de maneira análoga o algoritmo de Euclides, encontraremos o $mdc(10,6)$.

	1	1	2
10	6	4	2
4	2	0	

(i): $10 = 6 \cdot 1 + 4$.

(ii):$6 = 4 \cdot 1 + 2$.

(iii):$4 = 2 \cdot 2 + 0$.

Assim, podemos ver que o $mdc(10{,}6) = 2$. Mas $2 \nmid 15$, pois $\nexists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot k = 15$; portanto, essa equação diofantina não possui solução.

Outra maneira de fazer essa verificação é examinando os dois membros de nossa equação; neste caso, temos que o primeiro membro da equação sempre será um número par, enquanto o segundo membro, sempre um número ímpar, desta forma, é fácil ver que a equação não apresentaria soluções.

3.2 Solução Geral de uma equação diofantina linear de duas variáveis

Sabemos quando uma equação diofantina linear de duas variáveis possui soluções, definiremos agora um critério para encontrar a solução geral dessa equação.

Teorema 3.2.1: Dada uma equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 = b$ que admite solução x_1 e x_2 e seja $d = mdc(a_1, a_2)$. O conjunto de todas as soluções é dado por $S_g = \{(X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t\ ,\ X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t)$, com $t \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração: Sabemos que $a_1X_1 + a_2X_2 = b$, logo temos que $a_1X_1 + a_2X_2 = a_1x_1 + a_2x_2$, assim $a_1X_1 - a_1x_1 = a_2x_2 - a_2X_2$, logo vem que $a_1(X_1 - x_1) = a_2(x_2 - X_2)$. Como $a_2|a_1$, podemos afirmar que $\frac{a_2}{d}|\frac{a_1}{d}(X_1 - x_1)$ e como $d = mdc(a_1, a_2)$, temos que $mdc\left(\frac{a_2}{d}, \frac{a_1}{d}\right) = 1$, o que implica que $\frac{a_2}{d}|(X_1 - x_1)$, logo $X_1 - x_1 = \frac{a_2}{d}t$, com $t \in \mathbb{Z}$, por fim , temos que $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t, com\ t \in \mathbb{Z}$.

Analogamente, temos que $a_1|a_2(x_2 - X_2)$, e com isso concluímos que $\frac{a_1}{d}|(x_2 - X_2)$, implicando que $x_2 - X_2 = \frac{a_1}{d}t$, com $t \in \mathbb{Z}$, logo $X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, e portanto, temos que: $S_g = \{(X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t\ ,\ X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t)$, com $t \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 3.2.2: Dada uma equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 = b$ que admite solução particular e considere $d = mdc(a_1, a_2)$. Todo número da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t\ ,\ X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$ também será uma solução.

Demonstração: Seja $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}\mathrm{t}\ , X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$, vamos mostrar que X_1 e X_2 também são soluções da equação $a_1X_1 + a_2X_2 = b$.

$a_1X_1 + a_2X_2 = a_1\left(x_1 + \frac{a_2}{d}t\right) + a_2\left(x_2 - \frac{a_1}{d}t\right)$ logo vem que
$a_1x_1 + \frac{a_1a_2}{d}t + a_2x_2 - \frac{a_2a_1}{d}t = a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Assim, concluímos que
$X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t\ , X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$ é solução.

Exemplo 3.1: Encontre todas as soluções da seguinte equação diofantina $30X_1 + 17X_2 = 100$.

Solução: Usando o Algoritmo de Euclides, temos que $mdc(17,30) = 1$ e como $1|100$ logo, nossa equação possui soluções.

Escreveremos $1 = 30r + 17s$.

Usando o teorema de Euclides, temos que $30 = 17.1 + 13$ (i), sabemos também que $17 = 13.1 + 4$ (ii) e também, temos que $13 = 4.3 + 1$.

Organizando as equações e aplicando algumas substituições , em (i), temos que $13 = 30 + 17.(-1)$ em (ii), $4 = 30.(-1) + 17.2$. Substituindo (i) e (ii) em (iii), vem que $30 - 17 = [30.(-1) + 17.2].3 + 1$ ou seja, $1 = 30.4 + 17.(-7)$, logo temos que $100 = 30.400 + 17.(-700)$. Portanto $x_1 = 400$ e $x_2 = -700$ é uma solução particular. Por fim, temos que $X_1 = 400 + 17t$ e $X_2 = -700 - 30t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

3.3 Soluções naturais para equações diofantinas lineares de duas variáveis

Nem todos os problemas envolvendo equações diofantinas lineares exigiram soluções inteiras, como o Exemplo 3.2 que, para fazer sentido necessita estar no conjunto dos números naturais.

Para solucionar esse problema, podemos estender o conceito das soluções gerais de uma equação diofantina para problemas que busquem soluções naturais e, para isso devemos considerar as restrições: $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$.

Exemplificaremos encontrando todas as soluções naturais do Exemplo 3.2, presente no Capítulo 3.

Sabemos que $3X_1 + 4X_2 = 20$ e $mdc(3,4) = 1$.

Pelo algoritmo de Euclides, vem que $4 = 3.1 + 1$ logo temos que

$1 = 3.(-1) + 4.1$, portanto $20 = 3.(-20) + 4.(20)$. Assim temos que $x_1 = -20 + 4t$ e $X_2 = 20 - 3t$ com $t \in \mathbb{Z}$.

Como queremos soluções naturais, devemos considerar as seguintes restrições: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Assim temos que $5 \leq t \leq \frac{20}{3}$. Como $t \in \mathbb{Z}$ temos que $6 < \frac{20}{3} < 7$ logo $5 \leq t \leq 6$.

Para $t = 5$, temos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 5$ e, para $t = 6$, temos que $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE TRÊS E DE QUATRO VARIÁVEIS

Neste capítulo vamos abordar as equações diofantinas lineares de três e quatro variáveis, apresentando suas particularidades e soluções.

4.1: Equações diofantinas lineares de três variáveis

Uma equação diofantina linear de três variáveis é aquela escrita da seguinte maneira: $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$, com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Suas soluções são os valores x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{Z}$.

Considere a equação $3X_1 + 2X_2 + 6X_3 = 36$. Essa equação representa um exemplo de uma equação diofantina de três variáveis.

Teorema 4.1.1: Dada uma equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$, seja $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$, a equação diofantina admite soluções se, e somente se, $d|b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Se $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$ possui solução x_0, y_0 e z_0, vamos provar que $d|b$, sendo $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$.

Sabemos que $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$, isso significa que $d|a_1, d|a_2$ e $d|a_3$, logo $d|a_1x_0, d|a_2y_0$ e $d|a_3z_0$, para quaisquer x_0, y_0 e $z_0 \in \mathbb{Z}$ e, sabemos também, que $d|a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0$, logo temos que $d|b$.

(⇐)

Se $d|b$, a equação diofantina possui soluções.

Seja $d_1 = mdc(a_1, a_2)$, logo temos que $\exists\ k_1$ e $k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $d_1 = a_1k_1 + a_2k_2$. Sabemos que $mdc(a_1, a_2, a_3) = mdc(mdc(a_1, a_2), a_3) = mdc(d_1, a_3) = d$, logo $\exists\ k_3\ e\ k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $d = d_1k_3 + a_3k_4$, logo vem que $d = (a_1k_1 + a_2k_2)k_3 + a_3k_4$, isso implica que $d = a_1k_1k_3 + a_2k_2k_3 + a_3k_4$. Por hipótese, temos que $d|b$ logo temos que $\exists\ q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = dq$. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por q, temos que $qa_1k_1k_3 + qa_2k_2k_3 + qa_3k_4 = b$. Tomando $qk_1k_3 = x_0, qk_2k_3 = y_0$e $qk_4 = z_0$, vem que $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 = b$. Portanto, a equação diofantina possui solução.

Teorema 4.1.2: Dada uma equação diofantina da forma $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$, que admita solução $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3\}$. Considere $d = mdc(a_1, a_2)$. Todo número da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d}t_2\ ; X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d}t_2; X_3 = x_3 - t_1$ com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}$ também será solução.

Demonstração:(⟹)

Considere a equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$, reduziremos essa para uma equação diofantina de duas variáveis, pois já conhecemos a resolução desta. Para fazer isso, vamos considerar $Y = a_1X_1 + a_2X_2$. Assim temos que $Y + a_3X_3 = b$, que representa uma equação diofantina linear de duas variáveis. Como $mdc(1, a_3) = 1$ temos que $1|b$. Logo, a equação diofantina tem solução.

Como vimos no Capítulo 2, as soluções para essa equação seriam: $S_1 = \{(y + a_3t_1, x_3 - t_1)\}$, com $t_1 \in \mathbb{Z}$ e (y, x_3) uma solução particular.

Sendo $d_2 = mdc(a_{1,}a_2)$ escolheremos agora um t_1 conveniente de maneira que $d_2|(y + a_3t_1)$

Encontraremos agora as soluções para a equação: $a_1X_1 + a_2X_2 = y + a_3t_1$, que também representa uma equação diofantina linear de duas variáveis, pois $a_3t_1 \in \mathbb{Z}$. Logo é fácil ver que a solução será: $S_2 = \{(x_1 + \frac{a_2}{d_2}t_2, x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2)$, com $t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Portanto, a solução geral desta equação diofantina será: $S_g = \{(x_1 + \frac{a_2}{d_2}t_2, x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2, x_3 - t_1)\}$ com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}$.

$(\Leftarrow)$

Seja $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d_2}t_2, X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2$ e $X_3 = x_3 - t_1$, com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}$, vamos mostrar que X_1, X_2 e X_3 também é solução da equação $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b$.

Fazendo a substituição, temos que:

$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = a_1\left(x_1 + \frac{a_2}{d_2}t_2\right) + a_2\left(x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2\right) + a_3(x_3 - t_1)$, logo temos que $a_1x_1 + \frac{a_2}{d_2}a_1t_2 + a_2x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2a_2 + a_3x_3 - a_3t_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - a_3t_1$.

Tomando $t_1 = 0$ temos que $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$, assim, podemos concluir que X_1, X_2 e X_3 também é solução da equação.

Exemplo 4.1: Verifique se a equação diofantina $9X_1 + 6X_2 + 18X_3 = 36$ admite soluções. Em caso afirmativo, encontre a solução geral dessa equação.

Solução: Para que essa equação diofantina admita soluções, devemos verificar se $mdc(9,6,18)|36$. Calcularemos $mdc(9,6,18)$.

Seja $d_1 = mdc(9,6)$, pelo algoritmo de Euclides, temos que $9 = 6.1 + 3$

Assim temos que $d_1 = 3$. Calcularemos agora $mdc(9,6,18) = mdc(d_1, 18)$.Seja $d_2 = mdc\ (d_1, 18) = mdc(3,18)$, pelo algoritmo de Euclides vem que $3.6 = 18$, Logo $d_2 = 3$.

Como $3|36$, temos que a equação diofantina $9X_1 + 6X_2 + 18X_3 = 36$ possui soluções.

Para encontrarmos a solução geral dessa equação, primeiramente reduziremos essa para uma equação diofantina linear de duas variáveis, realizando a substituição $9X_1 + 6X_2 = K$, com $K \in \mathbb{Z}$, com isso obtemos uma nova equação: $K + 18X_3 = 36$.

Note que essa nova equação também admite soluções, pois $mdc(1,18) = 1$ e $1|36$.

Encontraremos agora a solução geral dessa nova equação. Pelo Teorema 2.5.2, temos que $1 = 1r_1 + 18r_2$. Tomando $r_1 = 19,\ r_2 = -1$ vem que
$1 = 1.(19) + 18.(-1)$, logo temos que $36 = 1.(684) + 118.(-36)$.

A solução geral dessa equação será:$S_1 = \{(684 + 18t_1;\ -36 - t_1)$, com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Para encontrar a solução geral da equação original, basta encontrar agora a solução geral da equação diofantina $9X_1 + 6X_2 = K = 684 + 18t_1$.

Note que para essa equação possuir soluções, $d_1|(684 + 18t_1)$ ou seja, devemos escolher um t_1 de maneira que essa relação seja satisfeita. E note também que também que independentemente do valor de t_1, 3 sempre vai dividir $684 + 18t_1$ pois podemos escrever essa expressão como sendo $(228 + 6t_1) \cdot 3$, que sempre será múltiplo de 3.

Encontraremos agora a solução geral da equação $9X_1 + 6X_2 = 684 + 18t_1$. Pelo Teorema 2.5.2, vem que $3 = 9r_3 + 6r_4$. Tomando $r_3 = 1, r_4 = -1$, temos que

$3 = 9.(1) + 6.(-1)$. Multiplicando cada um dos termos por $228 + 6t_1$, vem que $684 + 18t_1 = 9.(228 + 6t_1) + 6.(-228 - 6t_1)$.

A solução geral dessa equação será:
$S_2 = \{\big((228 + 6t_1) + 6t_2; (-228 - 6t_1) - 9t_2\big)$ com $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Por fim, a solução geral da equação original será:
$S_g = \{((228 + 6t_1) + 6t_2; (-228 - 6t_1) - 9t_2; -36 - t_1)$ com $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Verificação: Faremos uma verificação desta equação, apresentando uma solução particular.

Tomando $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ temos que $x_1 = 234;\ x_2 = -237$ e $x_3 = -36$, temos que $9.(234) + 6.(-237) + 18.(-36) = 36$.

4.2: Equações diofantinas lineares de quatro variáveis

Uma equação diofantina linear de quatro variáveis é aquela que pode ser escrita da seguinte maneira: $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$, com $a_1, a_2, a_3, a_{4,} \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Considere a equação $2X_1 + 5X_2 + 6X_3 + 10X_4 = 100$. Essa equação representa um exemplo de uma equação diofantina linear de quatro variáveis.

Teorema 4.2.1: Dada uma equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$, seja $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$, a equação diofantina admite soluções se, e somente se, $d|b$.

Demonstração: (⇒)

Se a equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$ possui solução então $d|b$, onde $d = mdc(a_1, a_2\ a_3, a_4)$.

Por hipótese, sabemos que a equação possui solução, então considere $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$ uma solução particular dessa equação, logo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$. Como $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$, logo $d|a_1$, $d|a_2$, $d|a_3$ e $d|a_4$, assim,$d|a_1x_1$, $d|a_2x_2$, $d|a_3x_3$ e $d|a_4x_4$, logo também é verdade que $d|\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$, o que significa que $d|b$.

Chamaremos $r_1r_3r_5q = x_1$, $r_2r_3r_5q = x_2$, $r_4r_5q = x_3$ e $r_6q = x_4$, assim temos, por fim, que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$ que é solução.

(⇐)

Se $d|b$ então, a equação $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$ possui solução.

Como foi enunciado nos conceitos fundamentais se $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$, então existem $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $d = a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + a_4r_4$. (i)

Por hipótese temos que $d|b$ logo temos que $b = dq$, com $q \in \mathbb{Z}$.

Substituindo (i) n a igualdade temos que : $b = (a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + a_4r_4)q$, logo vem que $b = a_1r_1q + a_2r_2q + a_3r_3q + a_4r_4q$.

Chamaremos $r_1q = x_1$, $r_2q = x_2$, $r_3q = x_3$ e $r_4q = x_4$, assim temos, por fim, que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$ que é solução.

Teorema 4.2.2: Dada uma equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$, que admita solução particular $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4\}$. Considere $d_2 = mdc(a_1, a_2)$. Todo número da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d2}t_3$; $X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d2}t_3$; $X_3 = x_3 - t_2$; $X_4 = x_4 - t_1$ com t_1, t_2 e $t_3 \in \mathbb{Z}$ também será uma solução.

Demonstração:(⇒)

Considere a equação diofantina $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$, reduziremos essa para uma equação diofantina de duas variáveis, pois já conhecemos a resolução desta. Para fazer isso, vamos considerar $K = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$. Assim temos que

$K + a_4X_4 = b$ que representa uma equação diofantina linear de duas variáveis.

Note que essa equação possui solução pois $mdc(1, a_4) = 1$ e $1|b$.

Sua solução será : $S_1 = \{(k_1 + a_4t_1; x_4 - t_1)$, com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Escolheremos um t_1 conveniente de maneira que, sendo $d_1 = mdc(a_1, a_2, a_3)$, $d_1|\, k_1 + a_4t_1$. Basta agora encontrar a solução geral da equação $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = k_1 + a_4t_1$.

Repetindo o processo anterior, considere $a_1X_1 + a_{2X_2} = K_2$, logo temos que $K_2 + a_3X_3 = K_1 + a_4t_1$.

Como $mdc(1, a_3) = 1$ temos que a equação tem solução e esta é dada por $(K_2 + a_3t_2, x_3 - t_2), t_2 \in \mathbb{Z}$

Agora, basta encontrarmos a solução geral da equação $a_1X_1 + a_2X_2 = K_2 = k_2 + a_3t_2$.

Considere $d_2 = mdc(a_1, a_2)$ tal que $d_2 | k_2 + x_3t_2$ para algum conveniente $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Assim a solução geral dessa equação será:

$$\left(x_1 + \frac{a_2}{d_2} \cdot t_3, x_2 - \frac{a_1}{d_2} \cdot t_3\right), t_3 \in \mathbb{Z}$$

Portanto a solução geral da equação diofantina original será:

$$S_g = \{\left(x_1 + \frac{a_2}{d_2} \cdot t_3,\ x_2 - \frac{a_1}{d_2} \cdot t_3,\ x_3 - t_2,\ x_4 - t_1\right), t_1,\ t_2,\ t_3 \in \mathbb{Z}.$$

(⇐)

Seja $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d_2}t_2, X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_2, X_3 = x_3 - t_2$ e $X_4 = x_4 - t_1$, com t_1, t_2 e $t_3 \in \mathbb{Z}$, onde $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ é uma solução particular. vamos mostrar que X_1, X_2, X_3 e X_4 também é solução da equação $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = b$. Fazendo a substituição, temos que: $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = a_1\left(x_1 + \frac{a_2}{d_2} \cdot t_3\right) + a_2\left(x_2 - \frac{a_1}{d_2} \cdot t_3\right) + a_3(x_3 - t_2) + a_4(x_4 - t_1)$, logo vem que: :$a_1x_1 + \frac{a_2}{d_2}a_1t_3 + a_2x_2 - \frac{a_1}{d_2}t_3a_2 + a_3x_3 - a_3t_2 + a_4x_4 - a_4t_1$ que resulta em $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - a_3t_2 + a_4x_4 - a_4t_1$.

Tomando $t_1, t_2 = 0$ temos que $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$. Assim, podemos concluir que X_1, X_2, X_3 e X_4 também é solução da equação.

Exemplo 4.2: Verifique se a equação diofantina $15X_1 + 12X_2 + 3X_3 + 9X_4 = 6$ admite soluções. Em caso afirmativo, encontre a solução geral dessa equação.

Solução: Para fazermos essa verificação, basta calcular o $mdc(3{,}9{,}12{,}15)$ e verificar se esse valor divide 6. Como $mdc(3, 9, 12, 15)$= 3, pelo algoritmo de Euclides, e $3|6$, temos que essa equação diofantina possui soluções.

Encontraremos agora a solução geral dessa equação diofantina. Faremos os cálculos com uma equação diofantina linear de quatro variáveis equivalente: $5X_1 + 4X_2 + X_3 + 3X_4 = 2$.[2]

Para encontrarmos a solução geral desta equação, faremos de maneira análoga ao exemplo anterior. Vamos reduzir a equação para uma nova de duas variáveis e encontraremos a solução geral desta nova equação, depois repetindo o processo mais vezes chegaremos na solução geral da equação original.

Seja $5X_1 + 4X_2 + X_3 = K_1;\ K_1 \in \mathbb{Z}$. Nossa nova equação será: $K_1 + 3X_4 = 2$. Como o $mdc(1, 3) = 1$ a equação diofantina tem solução e, pelo Teorema 2.5.2, temos que $\exists\, r_1, r_2$ tais que $1 = 1r_1 + 3r_2$, logo, tomando $r_1 = -2$ e $r_2 = 1$ vem que $1 = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (1)$. Assim, $2 = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot (2)$.

A solução geral desta equação será: $S_1 = \{(-4 + 3t_1, 2 - t_1), t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Encontraremos agora a solução da equação $5X_1 + 4X_2 + X_3 = -4 + 3t_1$, escolhendo um t_1 de maneira que $mdc(1{,}4{,}5) = 1$ divida $-4 + 3t_1$. Fazendo isso, encontraremos a solução geral da equação: $5X_1 + 4X_2 + X_3 = -4 + 3t_1$ e para isso, repetiremos o processo anterior, considerando $5X_1 + 4X_2 = K_2; K_2 \in \mathbb{Z}$, e calcularemos a solução geral da nova equação $K_2 + X_3 = -4 + 3t_1$.

Como o $mdc(1{,}1) = 1$, a equação diofantina possui solução e, pelo Teorema 2.5.2, vem que existem r_1 e r_2 tais que $1 = 1r_3 + 1r_4$.

---

[2] Note que, como $mdc(3{,}9{,}12{,}15) = 3$, podemos dividir os dois membros da igualdade por 3, encontrando assim a equação equivalente.

Tomando $r_3 = -1, r_4 = 2$ segue que $1 = 1.(-1) + 1.(2)$, logo vem que:
$-4 + 3t_1 = 1.(\ 4 - 3t_1) + 1.(\ -8 + 6t_1)$. Sua solução geral será:
$S_2 = \{(\ 4 - 3t_1 + t_2, -8 + 6t_1 - t_2);\ t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Repetindo o processo mais uma vez, encontraremos a solução geral da equação $5X_1 + 4X_2 = 4 - 3t_1 + t_2$, escolhendo um t_2 de maneira que $mdc(5,4) = 1$ divida $4 - 3t_1 + t_2$.

Note que para que essa equação possua soluções, devemos encontrar um $t_2 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $mdc(5,4) = d$ divida $4 - 3t_1 + t_2$. Como $d = 1$, t_2 pode ser qualquer inteiro.

vamos encontrar a solução geral desta equação.

Pelo teorema 2.5.2, vem que $1 = 5r_5 + 4r_6$, tomando $r_5 = 1$, $r_6 = -1$ segue que $1 = 5.(1) + 4.(-1)$, logo $4 - 3t_1 + t_2 = 5.(4 - 3t_1 + t_2) + 4.(-4 + 3t_1 - t_2)$ e, portanto, sua solução geral será:
$S_3 = \{(4 - 3t_1 + t_2 + 4t_3, -4 + 3t_1 - t_2 - 5t_3); t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}\}$.

Por fim, a solução geral da equação será:
$S_g = \{(4 - 3t_1 + t_2 + 4t_3, -4 + 3t_1 - t_2 - 5t_3, -8 + 6t_1 - t_2, 2 - t_1); t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}\}$.

Verificação: Tomaremos $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, por exemplo, logo vem que $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = -8\ , x_4 = 2$, substituindo segue que $15.(4) + 12.(-4) + 3.(-8) + 9.(2) = 60 - 48 - 24 + 18 = 6$.

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE n VARIÁVEIS

Neste capítulo apresentaremos de maneira geral a condição e a solução para equações diofantinas lineares, de n variáveis.

Escreveremos como $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b$ com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_i \in \mathbb{Z}$, para representar uma equação diofantina linear de n variáveis.

Teorema 5.1: Dada uma equação diofantina $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_i \in \mathbb{Z}$, seja $d = mdc(a_1, a_2, .., a_n)$, a equação diofantina admite soluções se, e somente se, $d|b$.

Demonstração: (⇒)

Seja $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ uma solução de nossa equação diofantina linear de n variáveis. Como $d = mdc(a_1, a_2, \dots, a_n)$, temos que $d|a_i$, com $i \in \mathbb{N}^*$, logo $d|a_ix_i$, portanto $d|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$, por fim, usando a hipótese, concluímos que $d|b$.

(⇐)

Sabemos que $d = mdc(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Pelo teorema 2.5.3, temos que existem $r_i \in \mathbb{Z}$ com $i \in \mathbb{N}^*$ tais que $d = a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n$. (i)

Por hipótese, temos que $d|b$, logo existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = dq$.

Substituindo (i) em nossa equação resulta que $b = a_1r_1q + a_2r_2q + \cdots + a_nr_nq$.

Chamaremos $x_i = r_iq$, e aplicando a substituição, temos que $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Portando a equação admite solução.

Teorema 5.2: Dada uma equação diofantina $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b$, com $n \geq 2$, que admita solução particular $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n\}$. Considere $d = mdc(a_1, a_2)$. Toda solução da equação é da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d} t_{n-1}$,$X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d} t_{n-1}, \dots, X_n = x_n - t_1$ com $t_i \in \mathbb{Z}$ e $i \in \mathbb{N}$ Reciprocamente toda n-úpla da forma acima também será uma solução.

Demonstração: (⇒)

Considere a équação diofantina linear de n variáveis $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = b$. Seja $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_{n-1} X_{n-1} = k_1$ com $k_1 \in \mathbb{Z}$, logo segue que $K_1 + a_n X_n = b$ que possui solução $S_1 = \{(K_1 + a_n t_1, x_n - t_1)$ com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$ e, por fim, repetindo esse processo (n – 3) vezes, concluímos que a solução geral será $S_g = \{(x_1 + \frac{a_2}{d} t_{n-1} + x_2 - \frac{a_1}{d} t_{n-1}, \dots, x_n - t_1)$ com $t_i \in \mathbb{Z}$ e $i \in \mathbb{N}^*\}$.

(⇐)

Vamos provar que todo número da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{d} t_{n-1}$, $X_2 = x_2 - \frac{a_1}{d} t_{n-1}, \dots, X_n = x_n - t_1$ também é solução.

Fazendo a substituição, temos que $a_1 \left(x_1 + \frac{a_2}{d} t_{n-1}\right) + a_2 \left(x_2 - \frac{a_1}{d} t_{n-1}\right) + \cdots + a_n(x_n - t_1)$, logo temos que $a_1 x_1 + \frac{a_1 a_2}{d} t_{n-1} + a_2 X_2 - \frac{a_1 a_2}{d} t_{n-1} + \cdots + a_n x_n - a_n t_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots . + a_n x_n - a_n t_n$.

Por fim, tomando $t_i = 0$ com $i \in \mathbb{N}^*$e usando a hipótese, temos que $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$.

Exemplo 5.1 : Sabendo que a seguinte equação diofantina linear de cinco variáveis $12X_1 + 46X_2 + 4X_3 + 15X_4 + 8X_5 = 42$ admite soluções**,** encontre sua solução geral.

Solução: Reduziremos essa equação diofantina linear de cinco variáveis para uma equação diofantina linear de duas variáveis e repetiremos o processo até chegarmos na solução geral.

Seja $K_1 = 12X_1 + 46X_2 + 4X_3 + 15X_4$, nossa nova equação será $K_1 + 8X_5 = 42$, que também admite soluções pois $mdc(1,8) = 1$ e $1|42$. Pelo Teorema 2.5.2, existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1r_1 + 8r_2 = 1$. Tomando, por exemplo, $r_1 = -7$ e $r_2 = 1$, vem que $1.(-7) + 8.(1) = 1$ logo, $1.(-294) + 8.(42) = 42$, e a solução geral dessa equação será: $S_1 = \{(-294 + 8t_1, 42 - t_1), t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Para dar continuidade na resolução de nossa questão inicial, devemos encontrar a solução geral da equação diofantina $12X_1 + 46X_2 + 4X_3 + 15X_4 = -294 + 8t_1$. Como $mdc(4,12,15,46) = 1$ e $1|(-294 + 8t_1)$ a equação possui solução para todo $t_1 \in \mathbb{Z}$. Vamos novamente reduzir essa equação para uma de duas variáveis, considerando $12X_1 + 46X_2 + 4X_3 = K_2$, nossa nova equação será $K_2 + 15X_4 = -294 + 8t_1$, que também admite soluções pois $mdc(1,15) = 1$ e $1| = -294 + 8t_1$ para $\forall\ t_1 \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 2.5.2, temos que existem r_3 e $r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $1r_3 + 15r_4 = 1$. Tomando $r_3 = -14$ e $r_4 = 1$, segue que $1.(-14) + 15.(1) = 1$, logo vem que $1.(4116 - 112t_1) + 15.(-294 + 8t_1) = -294 + 8t_1$, e portanto a solução geral dessa equação será: $S_2 = \{(4116 - 112t_1 + 15t_2, -294 + 8t_1 - t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Como foi feito anteriormente, devemos encontrar agora a solução geral da equação $12X_1 + 46X_2 + 4X_3 = 4116 - 112t_1 + 15t_2$. Como $mdc(4{,}12{,}46) = 2$ devemos determinar $t_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $2|(4116 - 112t_1 + 15t_2)$. Note que neste caso, basta considerar $t_2 = 2n, n \in \mathbb{Z}$. Feito isso, vamos reduzir mais uma vez essa equação diofantina para uma equação diofantina linear de duas variáveis, chamando de $K_3 = 12X_1 + 46X_2$, nossa nova equação será: $k_3 + 4X_3 = 4116 - 112t_1 + 15t_2$.

Como o $mdc(1,4) = 1$ e $1|4116 - 112t_1 + 15t_2$, a equação diofantina possui solução. Pelo Teorema 2.5.2 existem r_5 e $r_6 \in \mathbb{Z}$ tais que segue que, $1r_5 + 4r_6 = 1$. Tomando $r_5 = -3$ e $, r_6 = 1$, temos que $1.(-3) + 4.(1) = 1$, logo segue que $1.(-12348 + 336t_1 - 45t_2) + 4.(4116 - 112t_1 + 15t_2) = 4116 - 112t_1 + 15t_2$ e portanto a solução geral dessa equação será: $S_3 = \{(-12348 + 336t_1 - 45t_2 + 4t_3, 4116 - 112t_1 + 15t_2 - t_3)\ t_1, t_3 \in \mathbb{Z}, t_2 = 2q, q \in \mathbb{Z}\}$.

Devemos agora encontrar a solução geral da seguinte equação: $12X_1 + 46X_2 = -12348 + 336t_1 - 45t_2 + 4t_3$ e, de maneira análoga, $d = mdc(12{,}46)$ deve dividir $-12348 + 336t_1 - 45t_2 + 4t_3$.

Vamos calcular d pelo algoritmo de Euclides.

	3	1	5
46	12	10	2
10	2	0	

Com isso, temos que $d = 2$.

Note que para todo $t_3 \in \mathbb{Z}$ a condição está satisfeita. Pelo Teorema 2.5.2, existem r_7 e $r_8 \in \mathbb{Z}$ tais que $2 = 12r_7 + 46r_8$. Tomando $r_7 = 4, r_8 = -1$, segue que

$2 = 12.(4) + 46.(-1)$, logo vem que $-12348 + 336t_1 - 45t_2 + 4t_3 = 12.(-24696 + 672t_1 - 90t_2 + 8t_3) + 46.\left(6174 - 168t_1 + \frac{45t_2}{2} - 2t_3\right)$.

A solução geral dessa equação será:
$S_4 = \{(-24696 + 672t_1 - 90t_2 + 8t_3 + 23t_4,\ \ 6174 - 168t_1 + \frac{45t_2}{2} - 2t_3 - 6t_4)$, com $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{Z}\}$

Por fim a solução geral da equação diofantina original será: $S_g = \{(-24696 + 672t_1 - 90t_2 + 8t_3 + 23t_4,\ \ 6174 - 168t_1 + \frac{45t_2}{2} - 2t_3 - 6t_{4,}, 4116 - 112t_1 + 15t_2 - t_3, -294 + 8t_1 - t_2, 42 - t_1)t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{Z}\}$.

Verificação: Considere $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$, segue que $x_1 = -24696, x_2 = 6174,\ x_3 = 4116, x_4 = -294\ e\ x_5 = 42$. Aplicando a substituição na equação original, segue que $12.(-24696) + 46.(6174) + 4.(4116) + 15.(-294) + 8.(42) = 42$.

CAPÍTULO 6

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Nos capítulos anteriores deste trabalho, estudamos a condição para que as equações diofantinas lineares possuíssem soluções, a solução geral das equações diofantinas lineares de duas, três, quatro variáveis e generalizamos para n variáveis.

Nesse capítulo vamos apresentar alguns exemplos de aplicações das equações diofantinas lineares em problemas voltados para o nosso cotidiano.

Exemplo 6.1: Uma pessoa deseja plantar em seu jardim mudas de rosas do deserto e mudas de rosas sem espinho. Suponha que cada muda de rosa do deserto custe R$ 25,00 e que cada muda de rosa sem espinhos custe R$ 56,00, calcule quantas mudas de cada uma dessas plantas essa pessoa pode comprar para plantar em seu jardim gastando exatos R$ 680,00?

Solução: Podemos interpretar esse problema como uma equação diofantina linear de duas variáveis, tomando X_1 como sendo o número de rosas do deserto e X_2, sendo o número de rosas sem espinhos. Feito isso, obtemos a equação diofantina $25X_1 + 56X_2 = 680$.

Como $mdc(25,56) = 1$ e $1|680$, a equação diofantina admite solução.

Pelo Teorema 2.5.2, temos que existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 25r_1 + 56r_2$.

	2	4	6
56	25	6	1
6	1	0	

Usando o teorema de Euclides, temos que:

$6 = 25.(-2) + 56.(1)$ (i) e $1 = 25.(1) + 6.(-4)$ (ii).

Substituindo (i) em (ii), resulta que: $1 = 25.(1) + [25.(-2) + 56.(1)].(-4) \Leftrightarrow 1 = 25.(9) + 56.(-4)$.

Multiplicando por 680 ambos os termos da igualdade, resulta que $680 = 25.(6120) + 56.(-2720)$.

A solução geral dessa equação será $S_g = \{(6120 + 56t_1, -2720 - 25t_1)$ com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Note que esse problema requer soluções inteiras não negativas, logo devemos escolher um t_1 de maneira que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Assim, t_1 está compreendido no intervalo $-\frac{2720}{25} \geq t_1 \geq -\frac{6120}{56}$ ou seja, $-108{,}8 \geq t_1 \geq -109{,}3$. Como $t_1 \in \mathbb{Z}$, temos que o único t_1 para que esse problema possua solução é $t_1 = -109$.

Tomando $t_1 = -109$, temos que $x_1 = 16$ e $x_2 = 5$, portanto, a solução seria comprar 16 mudas de rosas do deserto e 5 mudas de rosas sem espinhos.

Exemplo 6.2: Uma pessoa deseja contratar o serviço de um buffet para a realização de uma festa. Sabendo que o cento da empadinha custa R$ 55,00, da *esfiha,* R$49,00 e o do bolinho de queijo R$ 39,00, e suponha que essa pessoa deseje comprar pelo menos uma centena de cada um desses salgados, encontre uma solução particular que represente o quanto de cada salgado essa pessoa terá que comprar gastando exatos R$ 400,00.

Solução: Podemos interpretar esse problema como uma equação diofantina linear de três variáveis, tomando o cento da empadinha como X_1, o cento da esfiha como X_2 e o cento do bolinho de queijo sendo X_3. Com isso, conseguimos expressar esse problema com a seguinte equação: $55X_1 + 49X_2 + 39X_3 = 400$.

Como $mdc(55, 49, 39) = 1$ e $1|400$, a equação admite soluções.

Considere $K = 55X_1 + 49X_2$, vamos reescrever a equação original como uma equação diofantina linear de duas variáveis, fazendo a substituição indicada. Com isso, temos que nossa nova equação é $K + 39X_3 = 400$.

Note que, como $mdc(1, 39) = 1$ e $1|400$, essa nova equação também admite soluções.

Encontraremos agora a solução geral dessa nova equação. Pelo Teorema 2.5.2, existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 1r_1 + 39r_2$.

Tomando $r_1 = -38$ e $r_2 = 1$, vem que $1 = 1.(-38) + 39.(1)$.

Multiplicando por 400 cada membro da igualdade, resulta que $400 = 1.(-15200) + 39\,(400)$ e, portanto, a solução geral dessa equação será $S_1 = \{(-15200 + 39t_1, 400 - t_1)$ com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Encontraremos agora a solução geral da equação $55X_1 + 49X_2 = -15200 + 39t_1$. Note que para que essa equação possua soluções, devemos encontrar um $t_1 \in$

$\mathbb{Z}$ de maneira que $mdc(49,55) = d$ divida $-15200 + 39t_1$. Como $d = 1$, t_1 pode ser qualquer inteiro.

Pelo Teorema 2.5.2, existem r_3 e $r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 55r_3 + 49r_4$

	1	8	6
55	49	6	1
6	1	0	

Pelo teorema de Euclides, temos que: $6 = 55.(1) + 49.(-1)$ (i) e $1 = 49.(1) + 6.(-8)$ (ii).

Substituindo (i) em (ii), resulta que $1 = 49.(1) + [55.(1) + 49.(-1)].(-8)$ então $1 = 55.(-8) + 49.(9)$.

Multiplicando por$-15200 + 39t_1$, cada termo de nossa igualdade, resulta que $-15200 + 39t_1 = 55.(121600 - 312t_1) + 49.(-136800 + 351t_1)$ e portanto a solução geral dessa equação será $S_2 = \{(121600 - 312t_1 + 49t_2, -136800 + 351t_1 - 55t_2)$, com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Substituindo S_2 em S_1 obtemos a solução geral S_g de nossa equação $S_g = \{(121600 - 312t_1 + 49t_2,\ -136800 + 351t_1 - 55t_2,\ 400 - t_1)$, com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Para que nosso problema possua uma solução coerente, $x_1 > 0$, x_2 >0 e $x_3 > 0$. Assim, temos que $121600 - 312t_1 + 49t_2 > 0$ (i), $-136800 + 315t_1 - 55t_2 > 0$ (ii) e $400 - t_1 > 0$ (iii).

Fazendo (i).55+(ii).49, resulta que

$121600.(55) - 312t_1.(55) - 136800.(49) + 351t_1.(49) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -15200 + 39t_1 > 0$.

Assim, as soluções de nossa equação estão compreendidas no intervalo

$\frac{15200}{39} < t_1 < 400$ logo, $389{,}7 < t_1 < 400$. Como $t_1 \in \mathbb{Z}$, segue que $390 \leq t_1 < 400$.

Tomando $t_1 = 390$, temos que $-80 + 49t_2 > 0$ e $90 - 55t_2 > 0$.

Assim temos que t_2 está compreendido no intervalo de $\frac{80}{49} > t_2 > \frac{90}{55}$, logo $1{,}6 > t_2 > 1{,}6$. Portanto , $t_2 \notin \mathbb{Z}$ para $t_1 = 390$.

De maneira análoga, vamos testar os outros valores de t_1 e verificar se existe um t_2 que satisfaça a condição.

t_1	t_2
$t_1 = 390$	$1,6 > t_2 > 1,6,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 391$	$8 > t_2 > 8\ ,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 392$	$14,4 < t_2 < 14,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 393$	$20,7 > t_2 > 20,7,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 394$	$27,1 > t_2 > 27,1,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 395$	$33,5 > t_2 > 33,4,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 396$	$39,9 > t_2 > 39,8, t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 397$	$46,3 > t_2 > 46,2,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 398$	$52,5 < t_2 < 52,6,\ t_2 \notin \mathbb{Z}$
$t_1 = 399$	$t_2 = 59$

A solução particular para esse problema seria $x_1 = 3, x_2 = 4$ e $x_3 = 1$.

Logo, essa pessoa deverá comprar 3 centenas de empadas, 4 centenas de *esfihas* e uma centena de bolinhos de queijo.

Exemplo 6.3: Uma fábrica de refrigerantes fornece seu produto em garrafas de 0,75 litros e 2,5 litros. Sabendo que um tanque possui 1000 litros de refrigerante, encontre o número máximo e o número mínimo de garrafas que podem ser enchidas usando todo o refrigerante deste tanque.

Solução: Podemos interpretar esse problema como uma equação diofantina linear de duas variáveis, considerando o número de garrafas de refrigerantes de 0,75 litros como X_1 e o número de garrafas de refrigerantes de 2,5 litros como X_2 e escrevemos a equação $0{,}75X_1 + 2{,}5X_2 = 1000$.

Note que para ser uma equação diofantina, os valores que multiplicam X_1e X_2 devem ser inteiros, então vamos multiplicar por 100 ambos os membros da igualdade, resultando na equação diofantina linear de duas variáveis $75X_1 + 250X_2 = 100000$.

Como $mdc(75,\ 250) = 25$ e $25|100000$, nossa equação possui solução.

Vamos encontrar a solução geral de uma equação equivalente $3X_1 + 10X_2 = 4000$ que obtemos dividindo cada membro da equação anterior pelo $mdc(75, 250) = 25$.

Pelo Teorema 2.5.2, temos que existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 3.r_1 + 10.r_2$

Tomando $r_1 = -3$ e $r_2 = 1$, temos que $1 = 3.(-3) + 10.(1)$.

Multiplicando por 4000 cada membro de nossa igualdade, resulta $4000 = 3.(-12000) + 10.(4000)$ e portanto, a solução geral de nossa equação será $S_g = \{(-12000 + 10t_1, 4000 - 3t_1)$, com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Note que para que nosso problema possua soluções coerentes,$x_1 >$ e $x_2 \geq 0$, então devemos escolher um t_1 pertencente ao intervalo $\frac{12000}{10} \leq t_1 \leq \frac{4000}{3}$ logo, $1200 \leq t_1 \leq 1333$.

Observe que quanto maior for t_1, maior será o valor de x_1 e, consequentemente, maior será o número de garrafas enchidas. Analogamente, quanto menor o valor de t_1, menor será o número de garrafas enchidas.

Assim $t_{1\max} = 1333$ e portanto o número máximo de garrafas enchidas será 1331.

Ainda $t_{1min} = 1200$ e portanto o número mínimo de garrafas enchidas será 400 garrafas.

Exemplo 6.4: Um parque de diversões cobra pela entrada inteira R$ 255,00 e para estudantes R$ 130,00. Sabendo que em um dia esse parque faturou R$ 63735,00, encontre qual o número máximo e o número mínimo de pessoas que frequentaram esse parque nesse dia.

Solução: Podemos interpretar esse problema como uma equação diofantina linear de duas variáveis, considerando X_1 número de pessoas que pagam inteira e o número de estudantes como X_2, o que resulta a seguinte equação

$130X_1 + 255X_2 = 63735$. Como $mdc(130, 250) = 5$ e $5|63735$, nossa equação admite solução. Encontraremos a solução geral da seguinte equação equivalente

$26X_1 + 51X_2 = 12747$. Pelo Teorema 2.5.2, segue que existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 26.r_1 + 51.r_2$.

Tomando $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, temos que $1 = 26.(2) + 51.(-1)$.

Multiplicando por 12747 cada um dos termos da equação, resulta que $12747 = 26.(25494) + 51.(-12747)$ e portanto, a solução geral dessa equação será $S_g = \{(25494 + 51t_1, -12747 - 26t_1)$ com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Note que para que nosso problema possua soluções coerentes, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, logo devemos escolher um t_1 contido no intervalo $\frac{-12747}{26} \geq t_1 \geq -\frac{25494}{51}$, logo vem que $-490.3 \geq t_1 \geq -499.8$. como $t_1 \in \mathbb{Z}$, vem que t_1 está contido no intervalo $-491 \geq t_1 \geq -499$.

Note que quanto maior o número de t_1, maior será o número de x_1 e assim maior o número de pessoas e, quanto menor o valor de t_1, menor será o número de pessoas. Assim, para descobrir o número máximo de pessoas, basta tomar $t_1 = -491$ e para encontrar o menor número de pessoas, basta tomar $t_1 = -499$.

Tomando $t_1 = -491$, temos que o número máximo de pessoas será 472.

Tomando $t_1 = -499$, temos que o número mínimo de pessoas será 272.

Exemplo 6.5: Em um jogo de tiro ao alvo com arco e flechas, uma pessoa ganha 25 Rupees[3] se acertar o centro do alvo, 15 Rupees acertando o alvo em um lugar diferente do centro e perde 10 Rupees se errar o alvo. Sabendo que o garoto Link faturou 195 Rupees nesse jogo, encontre o número mínimo de flechas que ele atirou.

Solução: Podemos interpretar esse problema como sendo uma equação diofantina linear de três variáveis, denominando o número de flechas que acertaram o centro do alvo como X_1, o número de flechas que acertam o alvo não sendo no centro como X_2 e o número de flechas que erraram o alvo como X_3, obtendo assim a

[3] Unidade monetária.

seguinte equação diofantina $25X_1 + 15X_2 + 10.(-X_3) = 195$. Por motivos de facilitar as contas, consideraremos $(-X_3) = Y$.

Como $mdc(10, 15, 25) = 5$ e $5|195$, esta equação admite solução.

Para facilitar nossas contas, vamos encontrar a solução geral da seguinte equação equivalente $5X_1 + 3X_2 + 2Y = 39.$[4]

Considere $K = 5X_1 + 3X_2$, substituindo em nossa equação anterior, obtemos

$K + 2Y = 39$, uma equação diofantina linear de duas variáveis que admite solução pois $mdc(1, 2) = 1$ e $1|39$.

Pelo teorema 2.5.2, vem que existem r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 1r_1 + 2r_2$.

Tomando $r_1 = -1$ e $r_2 = 1$, vem que $1.(-1) + 2.(1) = 1$.

Multiplicando por 39 ambos os membros da igualdade, resulta $1.(-39) + 2.(39) = 39$.

A solução geral dessa equação será: $S_1 = \{(-39 + 2t_1, 39 - t_1)$ com $t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Encontraremos agora a solução geral S_2 da equação $5X_1 + 3X_2 = K$ ou seja, $5X_1 + 3X_2 = -39 + 2t_1$.[5]

Pelo teorema 2.5.2, temos que existem r_3 e $r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = 5r_1 + 3r_2$.

Considerando $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$, vem que $1 = 5.(-1) + 3.(2)$.

Multiplicando por $-39 + 2t_1$ cada membro de nossa equação, resulta que $-39 + 2t_1 = 5.(39 - 2t_1) + 3.(78 + 4t_1)$.

A solução geral dessa equação S_2 será :
$S_2 = \{(39 - 2t_1 + 3t_2, -78 + 4t_1 - 5t_2)$ com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

---

[4] Obtida após a divisão de ambos os membros da igualdade pelo $mdc(10, 15, 25) = 5$.
[5] Como $mdc(3, 5) = 1$, temos que t_1 pode ser qualquer inteiro.

Substituindo S_2 em S_1, obtemos a solução geral S_g da equação inicial, que será: $S_g = \{(39 - 2t_1 + 3t_2, -78 + 4t_1 - 5t_2, 39 - t_1)$ com t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Para que nosso problema possua soluções coerentes, deve-se tomar valores de t_1 e $t_2 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ e $y \geq 0$. Assim temos que

$39 - 2t_1 + 3t_2 \geq 0$ (i), $-78 + 4t_1 - 5t_2 \geq 0$ (ii) e $39 - t_1 \leq 0$ (iii)

Fazendo$(\text{i}).5 + (\text{ii}).3$, resulta que: $39.(5) - 2.(5)t_1 + 3.(5)t_2 - 78.(3) + 4.(3)t_1 - 5.(3)t_2 \geq 0$. Logo, temos que $-39 + 2t_1 \geq 0$ e $39 - t_1 \leq 0$.

Assim temos que $t_1 \geq 39$ e $t_1 \geq \frac{39}{2}$ logo $t_1 \geq 39$.

Note que quanto menor for o valor de t_1, menor será também a quantidade de erros e, consequentemente, menor será a quantidade de flechas atiradas.

Tomando $t_1 = 39$, temos que t_2 está compreendido no intervalo de $13 \leq t_2 \leq \frac{78}{5}$. Como $t_2 \in \mathbb{Z}$, temos que t_2 está no intervalo de $13 \leq t_2 \leq 15$.

Por fim, para encontrarmos uma solução para nosso problema inicial representaremos na tabela abaixo todos os possíveis valores de t_2 e calcularemos o total de flechas.

t_1	t_2	x_1	x_2	y	total
39	13	0	13	0	13
39	14	3	8	0	11
39	15	6	3	0	9

Assim, temos que 9 é o número mínimo de flechas atiradas por Link.

CONCLUSÃO

Com a realização deste trabalho, pude conhecer um pouco sobre a história de Diophantus de Alexandria, um matemático que apresentou contribuições notórias para o campo da álgebra e da teoria algébrica dos números; Revisitei os conceitos aprendidos em teoria dos números e, desenvolvi aprendizagem sobre as equações diofantinas lineares de n variáveis, revisitando primeiramente as equações diofantinas lineares de duas variáveis, expandindo o conhecimento para as de três e quatro variáveis, para finalmente, generalizar o conceito para as equações diofantinas lineares com n variáveis, respondendo assim a pergunta que tive antes de iniciar esse trabalho.

No desenvolvimento desse trabalho, estudei sobre possíveis aplicações das equações diofantinas lineares em problemas voltados em nosso cotidiano, elaborando alguns problemas e apresentando as suas respectivas soluções.

Desta maneira, além de todo conhecimento adquirido em todo o processo de desenvolvimento deste trabalho, pude concluir todos os objetivos previstos.

REFERÊNCIAS

MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. Números: Uma Introdução à Matemática. 3. ed. São Paulo (SP): Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

BOYER, Carl Benjamin. História Da Matemática. São Paulo (SP): Editora EDGARD BLUCHER LTDA, 1983.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2007.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro (RJ): Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. Fundamentos de Aritmética. Florianópolis (sc): Ufsc, 2009

FREITAS, Carlos Wagner Almeida. EQUAÇÕES DIOFANTINAS. 2015. 201 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

CAMPOS, Giseli Duardo Maciano. Equações Diofantinas Lineares. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/sbm, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

SOUZA, Romário Sidrone. Equações Diofantinas Lineares, Quadráticas e Aplicações. 75.f. 2017. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.